Διαγώνισμα προσομοίωσης στα Μαθηματικά προσανατολισμού 2021-2022
Συμμετέχουν τα σχολεία:
2ο Περιστερίου - 14ο Περιστερίου - 2ο Πετρούπολης

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Αν για μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ $f(\alpha)\neq f(\beta)$ τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για το σύνολο τιμών $f(A)$ μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A, ισχύει ότι:
$f(A)=\{y\,/\,y=f(x) \text{ για κάποιο } x\in A\}$.

β) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

δ) Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε: $\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\beta^\alpha f(x)dx=0$.

ε) Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και σημείο $x_0\in[\alpha,\beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0)=0$.

μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2\alpha x-2\eta\mu x+\beta, & x<0\\ 1, & x=0\\ \alpha\eta\mu x-\beta x+1, & x>0\end{cases}$.

Β1. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$.

μονάδες 5

Έστω $\alpha=\beta=1$.

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία , τα ακρότατα και την κυρτότητα στο διάστημα $[-\pi,\pi]$. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση της f στο διάστημα $[-\pi,\pi]$.

μονάδες 8

Β3. Να εξετάσετε αν ισχύει το θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

μονάδες 4

Β4. Υλικό σημείο $M(x,y)$, $x>0$ της C_f κινείται επι της C_f και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι θετικός. Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή στην οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

μονάδες 4

Β5. Να αποδείξετε ότι $f(x)<1$ για κάθε $x>0$.

μονάδες 4

Θέμα Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x-h)}{2h}=e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g(0)=1$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $g(x)=e^x$.

μονάδες 6

Γ2. Αν $h(x)=g(x)+\ln g'(x)+\dfrac{x^2+1}{1-x}$ να αποδείξετε ότι: $h(x)=e^x+\dfrac{1+x}{1-x}$ και στη συνέχεια βρείτε το πλήθος των ριζών της .

μονάδες 9

Γ3. Αν $x_0\in\mathbb{R}-\{1\}$, να δείξετε ότι η εφαπτομένη της $g(x)=e^x$ στο x_0 είναι η $y=e^{x_0}x-e^{x_0}x_0+e^{x_0}$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι εφάπτεται της $b(x)=\ln x$ αν και μόνον αν $h(x_0)=0$.

μονάδες 7

Γ4. Να βρείτε το πλήθος των κοινών εφαπτόμενων της Cg και της C_b.

μονάδες 3

Θέμα Δ

Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι

$$f(x)f'(x)=\frac{\ln x}{x},x>0 \text{ και } f(1)=0.$$

Δ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $h(x)=f^2(x)$, $x>0$.
Στη συνέχεια να βρείτε όλες τις συναρτήσεις f.

μονάδες 7

Αν $f_1(x)=\ln x$, $x>0$ και $f_2(x)=-\ln x$, $x>0$ τότε:

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της C_{f_1} στο σημείο της $A(e,f_1(e))$ τέμνει την C_{f_2} σε μοναδικό σημείο που η τετμημένη του x_0 ανήκει στο διάστημα $(0,1)$.

μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f_1, f_2 και την ευθεία y = 1.

μονάδες 5

Δ4. Αν G μια αρχική συνάρτηση της $g(x)=\dfrac{f_1(x)}{x-1}$ στο $(1,+\infty)$ τότε να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[G(x+1)-G(x)\right]$.

μονάδες 7

Ευχόμαστε Επιτυχία!

Λύσεις

7 μ

Θέμα Α

3 μ

Α1. Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)f'(x)<0$ με $x_1<x_2$.

3 μ

— Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

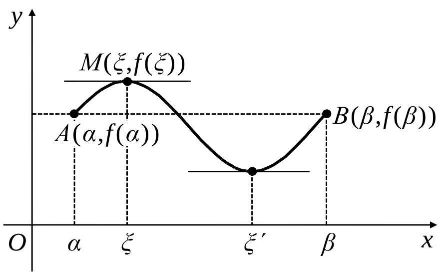
1 μ

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Ομοίως, αν για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

4 μ

2 μ

Α2. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και $f(\alpha)=f(\beta)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=0$.



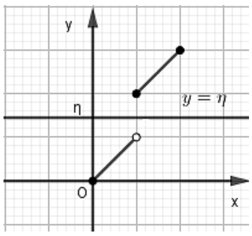
2 μ

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

Α3. α) Ψευδής 1 μ

3 μ

β) Έστω $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1\\ x+1, & 1\le x<2\end{cases}$.



Όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, επειδή η f δεν είναι συνεχής, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

Α4. α) Σ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Λ 5x2 μ

5 μ

Θέμα Β

Β1. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ θα είναι και συνεχής σ΄ αυτό, δηλαδή:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to0^-}(2\alpha x-2\eta\mu x+\beta)=\lim_{x\to0^+}(\alpha\eta\mu x-\beta x+1)=1\Leftrightarrow\beta=1$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{2\alpha x-2\eta\mu x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x}=\lim_{x\to0^-}\left(2\alpha-2\frac{\eta\mu x}{x}\right)=2\alpha-2,$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha\eta\mu x-x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x}=\lim_{x\to0^+}\left(\alpha\frac{\eta\mu x}{x}-1\right)=\alpha-1.$$

συνέχεια 2 μ

παραγωγισιμότητα 3μ

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$, πρέπει

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0\Leftrightarrow2\alpha-2=\alpha-1=0\Leftrightarrow\alpha=1.$$

8 μ www.Askisopolis.gr

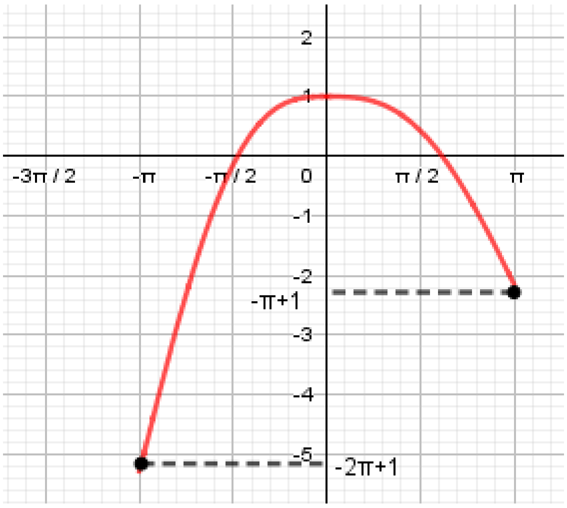
1μ **Β2.** Για κάθε $x \in (-\pi, 0)$ είναι $f'(x) = 2 - 2\sigma\upsilon\nu x = 2(1 - \sigma\upsilon\nu x)$.
Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\pi, 0)$ και η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\pi, 0]$.

1μ Για κάθε $x \in (0, \pi)$ είναι $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1$.
Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$ και η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$.

1μ Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(-\pi) = -2\pi + 1$, μέγιστο το $f(0) = 1$ και τοπικό ελάχιστο το $f(\pi) = -\pi + 1$.
Επειδή $f(-\pi) < f(\pi)$ το $f(-\pi)$ είναι ολικό μέγιστο.

2μ Για κάθε $x \in (-\pi, 0)$ είναι $f''(x) = 2\eta\mu x$ και για κάθε $x \in (0, \pi)$ είναι $f''(x) = -\eta\mu x$.
Για κάθε $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ είναι $f''(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[-\pi, \pi]$, είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.

3μ



4 μ

Β3. Είναι $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 1 = -\pi + 2 + 1 = 3 - \pi$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 1 = 2 - \frac{\pi}{2}$.

Επειδή $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, δεν εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

4 μ

Β4. Είναι $M(x(t), y(t))$ με $y(t) = \eta\mu x(t) - x(t) + 1$.
Είναι $y'(t) = \sigma\upsilon\nu x(t) \cdot x'(t) - x'(t) = x'(t)(\sigma\upsilon\nu x(t) - 1)$ 2μ

Αρκεί να υπάρχει χρονική στιγμή t_0 τέτοια, ώστε
$y'(t_0) = x'(t_0) \Leftrightarrow x'(t_0)(\sigma\upsilon\nu x(t_0) - 1) = x'(t_0) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x(t_0) - 1 = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x(t_0) = 2$ αδύνατο. 2μ

4 μ

Β5. Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) < 1 \Leftrightarrow \eta\mu x - x + 1 < 1 \Leftrightarrow \eta\mu x < x$ ισχύει γιατί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|\eta\mu x| \leq |x|$ και για $x > 0$ είναι $|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x$.

6 μ

Θέμα Γ

Γ1. $\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h} = e^x \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x) - g(x-h) + g(x)}{2h} = e^x \Leftrightarrow$ 1μ

$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} - \frac{g(x-h) - g(x)}{h}\right) = e^x \Leftrightarrow \frac{1}{2}g'(x) - \frac{1}{2}(-g'(x)) = e^x \Leftrightarrow$ 1+1μ

$g'(x) = e^x \Leftrightarrow g(x) = e^x + c,\ c \in \mathbb{R}$, γιατί 1μ

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x-h)-g(x)}{h}\ \underset{\substack{h\to 0\Rightarrow\\ u\to 0}}{\overset{-h=u\Leftrightarrow h=-u}{=}}\ \lim_{u\to 0}\frac{g(x+u)-g(x)}{-u}=-\lim_{u\to 0}\frac{g(x+u)-g(x)}{u}=-g'(x)$$ 1μ

Είναι $g(0)=1\Leftrightarrow e^0+c=1\Leftrightarrow c=0$, άρα $g(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$. 1μ

9 μ

Γ2. $h(x)=g(x)+\ln g'(x)+\dfrac{x^2+1}{1-x}\Leftrightarrow h(x)=x+e^x+\dfrac{x^2+1}{1-x}\Leftrightarrow h(x)=e^x+\dfrac{x+1}{1-x}$ με $x\neq 1$.

2 μ

Είναι $h'(x)=e^x+\dfrac{2}{(1-x)^2}>0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $A_1=(-\infty,1)$, $A_2=(1,+\infty)$.

4 μ

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+\dfrac{x+1}{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+\dfrac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)}\right)=0-1=-1$,

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x+\frac{x+1}{1-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x+\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)}\right)=+\infty-1=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}h(x)=\lim_{x\to1^-}\left(e^x+\frac{x+1}{1-x}\right)=\lim_{x\to1^-}\left(e^x+(x+1)\cdot\frac{1}{1-x}\right)=e+2\cdot(+\infty)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to1^+}h(x)=\lim_{x\to1^+}\left(e^x+\frac{x+1}{1-x}\right)=\lim_{x\to1^+}\left(e^x+(x+1)\cdot\frac{1}{1-x}\right)=e+2\cdot(-\infty)=-\infty$$

3 μ

Επειδή η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στα A_1, A_2 έχει αντίστοιχα σύνολα τιμών:
$h((-\infty,1))=(\lim\limits_{x\to-\infty}h(x),\lim\limits_{x\to1^-}h(x))=(-1,+\infty)$ και $h((1,+\infty))=(\lim\limits_{x\to1^+}h(x),\lim\limits_{x\to+\infty}h(x))=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.
Επειδή το 0 ανήκει και στα δύο επι μέρους σύνολα τιμών όπου η h είναι γνησίως φθίνουσα, η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

7 μ

Γ3. Η εφαπτομένη της g(x) στο x_0 είναι ε: $y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)\Leftrightarrow$
$y=e^{x_0}x-e^{x_0}x_0+e^{x_0}$ 1μ

4 μ

Η ε εφάπτεται της C_b αν και μόνο αν υπάρχει $x_1\in A_b=(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{cases}b'(x_1)=e^{x_0}\\ b(x_1)=e^{x_0}x_1-e^{x_0}x_0+e^{x_0}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x_1}=e^{x_0}\\ \ln(x_1)=e^{x_0}x_1-e^{x_0}x_0+e^{x_0}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=e^{-x_0}\ (1)\\ \ln(e^{-x_0})=1-e^{x_0}x_0+e^{x_0}\ (2)\end{cases}$$ και από (2):

2 μ

$-x_0=1-e^{x_0}x_0+e^{x_0}\Leftrightarrow -x_0-1=e^{x_0}(1-x_0)\Leftrightarrow 0=e^{x_0}+\dfrac{1+x_0}{1-x_0}\Leftrightarrow h(x_0)=0$ άρα η τιμή x_0 είναι ρίζα της h σε κάθε τιμή του x_0 αντιστοιχεί και ένα x_1 δηλαδή μία λύση του συστήματος.

3 μ

Γ4. Επειδή έχουμε κοινές εφαπτομένας μόνον και υποχρεωτικά σε κάθε τιμή x_0 ρίζα της h, άρα το πλήθος των κοινών εφαπτομένων Cg και Cb είναι όσο το πλήθος των ριζών της h, δηλαδή ακριβώς δύο ρίζες.

7 μ

Θέμα Δ

Δ1. Η συνάρτηση $h(x)=f^2(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $h'(x)=2f(x)f'(x)=2\frac{\ln x}{x}$, 1μ

1 μ

οπότε $h'(x)<0 \Leftrightarrow 2\frac{\ln x}{x}<0 \Leftrightarrow \ln x<0 \Leftrightarrow 0<x<1$ και $h'(x)>0 \Leftrightarrow 2\frac{\ln x}{x}>0 \Leftrightarrow \ln x>0 \Leftrightarrow x>1$.

Επίσης $h'(x)=0 \Leftrightarrow 2\frac{\ln x}{x}=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$.

1 μ Άρα η h ως συνεχής είναι $\searrow$ στο $(0,1]$ και $\nearrow$ στο $[1,+\infty)$ και το $x_1=1$ είναι θέση ολικού ελαχίστου.

2 μ Για $x>0$ έχουμε: $f(x)f'(x)=\frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=2\frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)'=\left(\ln^2 x\right)' \overset{\Sigma\Theta\text{MT}}{\Leftrightarrow} f^2(x)=\ln^2 x+c$.

1 μ

Για $x=1$ έχουμε: $f^2(1)=\ln^2 1+c \Leftrightarrow c=0$. Άρα $f^2(x)=\ln^2 x \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)}=\sqrt{\ln^2 x} \Leftrightarrow |f(x)|=|\ln x|$

$f(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$.

2 μ

Η f ως συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$.

Οπότε αν $f(x)<0$ στο $(0,1)$ και $f(x)>0$ στο $(1,+\infty)$ τότε $f(x)=\ln x$, $x>0$.

Αν $f(x)>0$ στο $(0,1)$ και $f(x)<0$ στο $(1,+\infty)$ τότε $f(x)=-\ln x$, $x>0$.

Αν $f(x)>0$ στο $(0,1)$ και $f(x)>0$ στο $(1,+\infty)$ τότε $f(x)=|\ln x|$, $x>0$

απορρίπτεται ως μη παραγωγίσιμη στο $x_1=1$.

Αν $f(x)<0$ στο $(0,1)$ και $f(x)<0$ στο $(1,+\infty)$ τότε $f(x)=-|\ln x|$, $x>0$

απορρίπτεται ως μη παραγωγίσιμη στο $x_1=1$.

6 μ

Δ2. Για $x>0$ έχουμε $f_1'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$ οπότε $f_1'(e)=\frac{1}{e}$.

Η εφαπτομένη (ε) της C_{f_1} στο σημείο της $A(e,f_1(e))$ έχει εξίσωση: 1μ

$y-f_1(e)=f_1'(e)(x-e) \Leftrightarrow y-1=\frac{1}{e}(x-e) \Leftrightarrow y=\frac{1}{e}x$.

Αρκεί η εξίσωση $f_2(x)=\frac{1}{e}x \Leftrightarrow -\ln x-\frac{1}{e}x=0 \Leftrightarrow \ln x+\frac{1}{e}x=0$ να έχει μοναδική ρίζα $x_0\in(0,1)$. 1μ

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=\ln x+\frac{1}{e}x$, $x>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{e}>0$, $\forall x>0$. Άρα η h είναι $\nearrow$ στο $A=(0,+\infty)$ κατά συνέπεια 2 μ

η εξίσωση $h(x)=0$, έχει το πολύ μία ρίζα.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x+\frac{1}{e}x\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\ln x+\frac{1}{e}x\right)=\frac{1}{e}$

και επειδή η h είναι συνεχής και $\nearrow$ στο $(0,1)\subseteq(0,+\infty)$ προκύπτει

$f((0,1))=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}h(x),\lim\limits_{x\to 1^+}h(x)\right)=\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$. Το $0\in\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$ και επειδή 3μ

h $\nearrow$ στο $(0,1)\subseteq(0,+\infty)$ υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1): h(x_0)=0$, οπότε

η εφαπτομένη (ε) της C_{f_1} στο σημείο της $A(e,f_1(e))$ τέμνει την

C_{f_2} σε μοναδικό σημείο που η τετμημένη του x_0 ανήκει στο διάστημα $(0,1)$.

5 μ

www.Askisopolis.gr

Δ3. Αρχικά θα βρούμε τα κοινά σημεία των f_1, f_2 με την $y = 1$.

1 μ

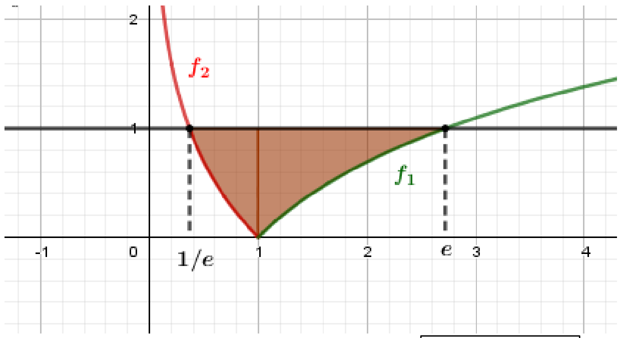
Είναι $f_1(x)=1 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ και

$f_2(x)=1 \Leftrightarrow -\ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$.

1 μ

Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$E = \int_{1/e}^{1}(1+\ln x)dx + \int_{1}^{e}(1-\ln x)dx \Leftrightarrow$



σχήμα 1μ

2 μ

$E = 1-\frac{1}{e}+\int_{1/e}^{1}\ln x(x)'dx + e - 1 - \int_{1}^{e}\ln x(x)'dx \Leftrightarrow$

$E = e-\frac{1}{e}+[x\ln x]_{1/e}^{1} - \int_{1/e}^{1}\frac{1}{x}\cdot xdx - [x\ln x]_{1}^{e} + \int_{1}^{e}\frac{1}{x}\cdot xdx = e-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}-\left(1-\frac{1}{e}\right)-e+e-1 \Leftrightarrow$

$E = e-\frac{1}{e}+\frac{1}{e}-1+\frac{1}{e}-1 = e+\frac{1}{e}-2 = \frac{e^2-2e+1}{e}$

7 μ

Δ4. Για $x>1$ η G ως αρχική της συνάρτησης $g(x)=\frac{f_1(x)}{x-1}$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x, x+1]$ παραγωγίσιμη στο διάστημα $(x, x+1)$ με $G'(x)=g(x)=\frac{f_1(x)}{x-1}=\frac{\ln x}{x-1}$, οπότε από το ΘΜΤ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x, x+1): G'(\xi)=\frac{G(x+1)-G(x)}{x+1-x}=G(x+1)-G(x)$.

3μ

Αλλά $G''(x)=\frac{\frac{1}{x}(x-1)-\ln x}{(x-1)^2}=\frac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$ και

$\forall y>0$ ισχύει : $\ln y \le y-1$ οπότε για $y=\frac{1}{x}\in(0,1)$ γιατί $x>1$

έχουμε $\ln\frac{1}{x}<\frac{1}{x}-1 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}<0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}-\ln x<0 \Leftrightarrow \frac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}<0 \Leftrightarrow$

$G''(x)<0$, άρα $G' \searrow$ στο $(x, x+1)$ με $x>1$.

2μ

2 μ

Έχουμε $x<\xi<x+1 \overset{G'\searrow}{\Rightarrow} G'(x)>G'(\xi)>G'(x+1) \Rightarrow \frac{\ln x}{x-1}>G(x+1)-G(x)>\frac{\ln(x+1)}{x}$ και

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-1} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$ συνεπώς από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim_{x\to+\infty}[G(x+1)-G(x)]=0$.