

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι: $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, όπου $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. **(8 μονάδες)**
- A2.** Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα $[a, \beta]$; **(3 μονάδες)**
- A3.** Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = x \cdot |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς για αυτήν είναι λανθασμένος **(1 μονάδα)** και να δικαιολογήσετε την άποψή σας. **(3 μονάδες)**
- α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . β. Η f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη σε ένα ακριβώς σημείο της.
 γ. Η f διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x < 0$ δ. Το θεώρημα Bolzano δεν μπορεί να εφαρμοστεί για την συνάρτηση f σε κανένα διάστημα $[a, \beta]$, όπου a, β πραγματικοί αριθμοί.
- A4.** Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:
- α. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σύνολο A και δεν μηδενίζεται για καμιά τιμή από το A , τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο A .
 β. Αν x_0 σταθερός πραγματικός, τότε ισχύει: $(e^{2x_0})' = 2 \cdot e^{2x_0}$.
 γ. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση σε διάστημα Δ , είναι οπωσδήποτε και συνεχής σε αυτό.
 δ. Μια συνάρτηση f η οποία δέχεται οριζόντια εφαπτομένη σε ένα σημείο, είναι οπωσδήποτε παραγωγίσιμη σε αυτό.
 ε. Ισχύει ότι: $(x^x)' = x^{x-1}(\ln x + 1)$, $x > 0$. **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β

- Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^4}$, $x \in \mathbb{R}$.
- B1.** Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f . **(7 μονάδες)**
- B2.** Να βρείτε - αν υπάρχουν - εφαπτόμενες της C_f οι οποίες να διέρχονται από το $(0,0)$. **(8 μονάδες)**
- B3.** Αν ένα σημείο $M(a, f(a))$, $a > 1$, κινείται πάνω στην C_f με τρόπο ώστε η προβολή του A στον $x'x$ να απομακρύνεται από το $O(0,0)$ με ταχύτητα 2 cm/s , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας MOA τη χρονική στιγμή κατά την οποία το M διέρχεται από το σημείο $(2, f(2))$. **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

- Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = e^x + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- Γ1.** Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την εφαπτομένη της αντίστροφής της στο $x_0=2$. **(8 μονάδες)**
- Έστω ότι η ευθεία (ε) : $y = \frac{1}{2}x - 1$ είναι η ζητούμενη εφαπτομένη.
- Γ2.** Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = e^{x-2} + a$, $a \in \mathbb{R}$.
 Να βρείτε το a ώστε η (ε) να εφάπτεται της γραφικής παράστασης της g . **(10 μονάδες)**
- Γ3.** Να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση: $f(x)=a$, έχει μοναδική ρίζα. **(7 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

- Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f(e^x - 2) = x$, $x \in \mathbb{R}$.
- Δ1.** Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(x+2)$, $x \in (-2, +\infty)$ **(5 μονάδες)**
- Δ2.** Να δείξετε ότι υπάρχει x_0 στο $(0,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f σε αυτό να τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο σημείο με τετμημένη -2 . **(8 μονάδες)**
- Δ3.** Έστω ένα σημείο $A(a, f(a))$ το οποίο κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης με την τετμημένη του να αυξάνει με ρυθμό 2 cm/s και (ε) η εφαπτομένη της C_f στο A . Αν η (ε) τέμνει τον οριζόντιο άξονα σε σημείο M , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του M τη χρονική στιγμή όπου το σημείο A έχει τεταγμένη ίση με 1 . **(12 μονάδες)**