Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

2022 - 2023

Αντώνης Βαλέργας — **Αποστόλης Κακαβάς**

Στέλιος Μιχαήλογλου — **Άγγελος Μπλιάς**

Δημήτρης Πατσιμάς — **Βαγγέλης Ραμαντάνης**

Νίκος Σαμπάνης — **Βαγγέλης Τόλης**

Νίκος Τούντας — **Ισαάκ Χιονίδης**

1ο Γενικό Επαναληπτικό Διαγώνισμα

18-3-2023

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

μονάδες 7

Α2.Να βρείτε το λάθος στην παρακάτω διαδικασία και να εξηγήσετε γιατί είναι λάθος:
Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{x_0h^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)\right)'}{\left(x_0h^2\right)'}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2x_0h}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(f'(x_0+h)-f'(x_0-h)\right)'}{\left(2x_0h\right)'}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f''(x_0+h)+f''(x_0-h)}{2x_0}=\dfrac{2f''(x_0)}{2x_0}=\dfrac{f''(x_0)}{x_0}$

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Αν για μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)\ge m$ για κάθε $x\in A$, τότε η f έχει ελάχιστο το m».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, η οποία έχει ρίζα στο ανοικτό διάστημα (α,β), ισχύει $f(\alpha)f(\beta)<0$.

β) Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $f(x)\ge 0$, τότε οπωσδήποτε $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(\alpha,x_0]$ και κοίλη στο $[x_0,\beta)$ τότε το $(x_0,f(x_0))$ είναι οπωσδήποτε σημείο καμπής της.

δ) Κάθε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f.

ε) Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, η οποία δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό και $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές στο $[\alpha,\beta]$.

μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x^3)=x^5|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x|x|$, $x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 5

Β2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

μονάδες 5

Β3.Να βρείτε τη παράγωγο f ΄της f.

μονάδες 5

Β4. Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο της C_f με θετική τετμημένη, στο οποίο να εφάπτεται η γραφική παράσταση της f ΄στη γραφική παράσταση της f.

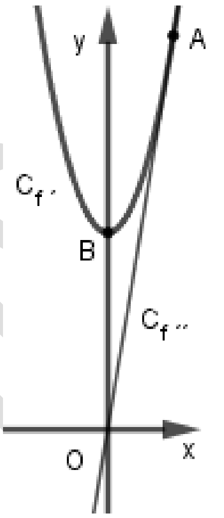
μονάδες 5

Β5. Να βρείτε διάστημα $(\alpha, \alpha+1)$ με $\alpha \in \mathbb{Z}$ στο οποίο η εξίσωση $f(x) = 1 - x^5$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

μονάδες 5

Θέμα Γ

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των f', f''. Η γραφική παράσταση της f'' είναι ευθεία και εφάπτεται της $C_{f'}$ στο σημείο Α.



Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ασύμπτωτες.

μονάδες 3

Γ4. Έστω ότι τα σημεία Α, Β έχουν συντεταγμένες $(1,6)$ και $(0,3)$ αντίστοιχα και $f(0) = -4$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^3 + 3x - 4,\ x \in \mathbb{R}$. μονάδες 4

β) Να σχεδιάσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f.

μονάδες 3

γ) Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f''\left(\frac{1}{x^2}\right)}{f(\eta\mu x) - f(x)}$. μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{(3x+1)(e^x+1)+1}{e^x+1},\ x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

μονάδες 7

Δ2. Ποιο είναι το πρόσημο της ρίζας του προηγούμενου ερωτήματος;

μονάδες 3

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = x^2 f^2(x),\ x \in \mathbb{R}$ έχει ακριβώς τρία τοπικά ακρότατα.

μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 \dfrac{1}{e^x+1}dx < \dfrac{6e^2+8}{e^2+1}$.

μονάδες 7

Καλή Τύχη!