

# 1<sup>ο</sup> ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ .

Να δειχθεί ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .

**A2.** Να διατυπώσετε τα θεωρήματα Rolle – Bolzano – Μέσης Τιμής – Ενδιάμεσων τιμών και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία.

**A3.** Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ( $\Sigma$ ) ή Λάθος ( $\Lambda$ ) τους παρακάτω ισχυρισμούς:

i) Ισχύει πάντα η ισότητα  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 - 5h) = f(x_0)$ .

ii) Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[\alpha, \beta]$ .

iii) Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$ , τον άξονα  $x'$  και τις ευθείες με εξισώσεις  $x = \alpha$  και  $x = \beta$  με  $\alpha < \beta$ , είναι πάντα:  $E = \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right|$ .

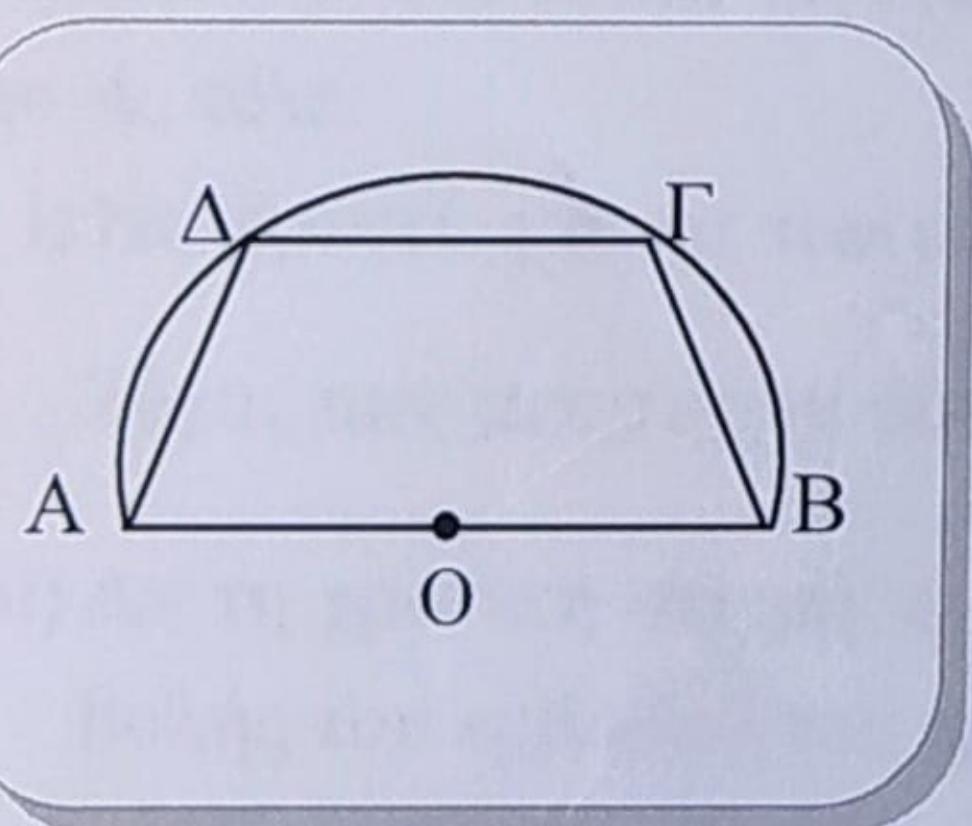
iv) Αν η  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $\Delta$  τότε και η  $|f|$  είναι συνεχής στο  $\Delta$ .

**A4.** Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ( $\Sigma$ ) ή Λάθος ( $\Lambda$ ) τον ισχυρισμό:

Αν δύο συναρτήσεις  $f, g$  είναι "1–1" στο  $\mathbb{R}$ , τότε και η  $f + g$  θα είναι πάντα "1–1" στο  $\mathbb{R}$ , με δικαιολόγηση.

## ΘΕΜΑ Β

Σε οικόπεδο ημικυκλικού σχήματος, θέλουμε να φτιάξουμε βεράντα ισοσκελούς τραπεζίου βάσης  $AB = 4$  m.



a) Να βρεθεί το εμβαδό του τραπεζίου σε συνάρτηση με το μήκος  $\Gamma D = x$  της μικρής βάσης.

β) Αν  $E(x) = \frac{1}{4} \cdot (x+4) \cdot \sqrt{16-x^2}$ ,  $0 < x < 4$ ,

i) Να προσδιορίσετε το  $x$  ώστε το εμβαδό να γίνει μέγιστο.

ii) Να δειχθεί ότι υπάρχουν δύο μοναδικές τιμές του  $x$  για τις οποίες το εμβαδό ισούται με  $5 \text{ m}^2$ .

iii) Να βρεθεί το όριο:  $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu(E(x)-4) \cdot \ln(E(x)-4)}{\sqrt[3]{E(x)-4}}$ .

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ ,  $x \neq 0$ .

- α) Να βρεθεί η  $f'$ .
- β) Να μελετηθεί η μονοτονία, η κυρτότητα και το σύνολο τιμών.
- γ) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες και να γίνει η  $C_f$ .
- δ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  σε ένα σημείο  $M(x_0, f(x_0))$ ,  $x_0 > 0$  η οποία τέμνει τους áξονες  $x'$  και  $y'$  τα σημεία  $A, B$  αντίστοιχα και να δειχθεί ότι ισχύει:  $\overrightarrow{MB} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{MA}$ .
- ε) Αν το σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  κινείται επί της  $C_f$  και ο ρυθμός μεταβολής της τετυμένης του είναι σταθερός 4 μον./sec, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τετυμένης του σημείου  $A$ .

### ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να ισχύει:

$$f(2x-1) = -4x^2 + 4x + 3 \quad (1).$$

- α) Να βρεθεί η  $f$  και να γίνει η  $C_f$ .
- β) Αν  $f(x) = 4 - x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και σημείο  $M(\alpha, f(\alpha))$ ,  $0 < \alpha < 2$  κινείται επί της  $C_f$  και η εφαπτομένη στο  $M(\alpha, f(\alpha))$  τέμνει τον áξονα  $x'$  στο  $\Gamma$  και τον áξονα  $y'$  στο  $\Delta$  και  $A(2, 0), B(0, 4)$  και το σημείο  $\Gamma$  απομακρύνεται από το  $A$ , τότε:
  - i) Να βρεθεί η θέση του σημείου  $M$  τη χρονική στιγμή  $t_0$  της οποίας ο λόγος των ταχυτήτων των σημείων  $\Gamma$  και  $\Delta$  είναι:  $\frac{v_\Gamma}{v_\Delta} = -\frac{3}{4}$ .
  - ii) Αν τη χρονική στιγμή  $t_0$  είναι  $v_\Gamma = 3 \text{ m/sec}$ , να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου  $O\Gamma\Delta$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ .