ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ/ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	**18/03/2023**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 135.
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 216.
Α3. **α)** Ψευδής.
β) Σχολικό βιβλίο σελίδα 156 ΣΧΟΛΙΟ.
Α4. **α. Σ β. Σ γ. Λ δ. Σ ε. Λ**

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2+\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(2+\ln(x-1)\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=-\infty\cdot(+\infty)=-\infty$,

αφού $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(2+\ln(x-1)\right)\underset{u_0=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0}{\overset{u=x-1}{=}}\lim\limits_{u\to 0}(2+\ln u)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=+\infty$ (αφού $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}=0$ και $\sqrt{x-1}>0$).

Άρα η x=1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(2+\ln(x-1)\right)'}{\left(\sqrt{x-1}\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x-1}}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}=0$.

Άρα η y=0 (άξονας x'x) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f.

Β2. Για κάθε x > 1, η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο:

$$f'(x)=\left(\frac{2+\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}\right)'=\frac{\frac{1}{x-1}\cdot\sqrt{x-1}-\left(2+\ln(x-1)\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{2+\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}}{x-1}$$

Φροντιστήρια Εν-τάξη

$$=\frac{\frac{2-2-\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}}{x-1}=\frac{-\ln(x-1)}{2(x-1)\sqrt{x-1}}=-\frac{\ln(x-1)}{2(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

Έχουμε: $f'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{\ln(x-1)}{2(x-1)\sqrt{x-1}}=0 \Leftrightarrow \ln(x-1)=0 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$.

Άρα $f'(x)>0 \Leftrightarrow -\frac{\ln(x-1)}{2(x-1)\sqrt{x-1}}>0 \Leftrightarrow -\ln(x-1)>0 \Leftrightarrow \ln(x-1)<0 \Leftrightarrow 1<x<2$,

συνεπώς $f'(x)<0 \Leftrightarrow x>2$.

Ο πίνακας προσήμων της f' και μονοτονίας της f, είναι ο ακόλουθος:

x		1	2	$+\infty$
f '		+		−
f		↗		↘

Η f είναι:

γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,2]$ και

γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2,+\infty)$.

Στο $x_0=2$, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή $f(2)=\frac{2+\ln(2-1)}{\sqrt{2-1}}=2$.

B3. Η συνάρτηση $G(x)=2\sqrt{x-1}\cdot\ln(x-1)$ ορίζεται στο διάστημα στο διάστημα $(1,+\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο:

$$G'(x)=\left(2\sqrt{x-1}\cdot\ln(x-1)\right)'=2\left[\left(\sqrt{x-1}\right)'\ln(x-1)+\sqrt{x-1}\cdot\left(\ln(x-1)\right)'\right]=$$

$$=2\left[\frac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}+\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}\right]=2\left[\frac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right]=2\cdot\frac{\ln(x-1)+2}{2\sqrt{x-1}}=\frac{\ln(x-1)+2}{\sqrt{x-1}}=f(x).$$

Άρα η G είναι μια αρχική της συνάρτησης f στο διάστημα $(1,+\infty)$.

Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε δείξει ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=2$.

Το μέγιστο αυτό είναι ολικό διότι:

Για $1<x\le 2 \overset{f\ \text{γν.αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(x)\le f(2) \Leftrightarrow f(x)\le 2$ και για $x>2 \overset{f\ \text{γν.φθιν.}}{\Leftrightarrow} f(x)<f(2) \Leftrightarrow f(x)<2$.

Άρα για κάθε $x>1$, είναι $f(x)\le 2 \Leftrightarrow G'(x)\le 2$.

B4. Έχουμε: $\frac{1}{e}\cdot\int_2^{1+e} f(x)\cdot G(x)dx=\frac{1}{e}\cdot\int_2^{1+e} G'(x)\cdot G(x)dx=\frac{1}{2e}\cdot\int_2^{1+e} 2G'(x)\cdot G(x)dx=$

$$=\frac{1}{2e}\cdot\left[G^2(x)\right]_2^{1+e}=\frac{1}{2e}\cdot\left[G^2(1+e)-G^2(2)\right]=\frac{1}{2e}\cdot\left[\left(2\sqrt{e}\cdot\ln e\right)^2-\left(2\sqrt{1}\cdot\ln 1\right)^2\right]=\frac{1}{2e}\cdot 4e=2.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε $I=\int_0^{\kappa}\sigma\upsilon\nu x\cdot e^x\,dx=\int_0^{\kappa}\sigma\upsilon\nu x\cdot\left(e^x\right)'dx=\left[\sigma\upsilon\nu x\cdot e^x\right]_0^{\kappa}-\int_0^{\kappa}\left(\sigma\upsilon\nu x\right)'\cdot e^x\,dx=$

$=\sigma\upsilon\nu\kappa\cdot e^{\kappa}-\sigma\upsilon\nu 0\cdot e^0-\int_0^{\kappa}\left(-\eta\mu x\right)\cdot e^x\,dx=e^{\kappa}\sigma\upsilon\nu\kappa-1+\int_0^{\kappa}\eta\mu x\cdot e^x\,dx=$

$=e^{\kappa}\sigma\upsilon\nu\kappa-1+\int_0^{\kappa}\eta\mu x\cdot\left(e^x\right)'dx=e^{\kappa}\sigma\upsilon\nu\kappa-1+\left[\eta\mu x\cdot e^x\right]_0^{\kappa}-\int_0^{\kappa}\left(\eta\mu x\right)'\cdot e^x\,dx=$

$=e^{\kappa}\sigma\upsilon\nu\kappa-1+\eta\mu\kappa\cdot e^{\kappa}-\int_0^{\kappa}\sigma\upsilon\nu x\cdot e^x\,dx=e^{\kappa}\sigma\upsilon\nu\kappa+e^{\kappa}\eta\mu\kappa-1-I.$

Άρα $I=e^{\kappa}\sigma\upsilon\nu\kappa+e^{\kappa}\eta\mu\kappa-1-I\Leftrightarrow 2I=e^{\kappa}\sigma\upsilon\nu\kappa+e^{\kappa}\eta\mu\kappa-1$

$\Leftrightarrow I=\dfrac{e^{\kappa}\left(\sigma\upsilon\nu\kappa+\eta\mu\kappa\right)-1}{2}.$

Για κ = x , η συνάρτηση $f(x)=I$, έχει τύπο $f(x)=\dfrac{e^x\left(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\right)-1}{2}$, $x\in[0,2\pi]=A.$

Γ2. α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A=[0,2\pi]$ με παράγωγο:

$$f'(x)=\left(\frac{e^x\sigma\upsilon\nu x+e^x\eta\mu x-1}{2}\right)'=\frac{\left(e^x\sigma\upsilon\nu x+e^x\eta\mu x-1\right)'}{2}=$$

$$=\frac{\left(e^x\right)'\sigma\upsilon\nu x+e^x\left(\sigma\upsilon\nu x\right)'+\left(e^x\right)'\eta\mu x+e^x\left(\eta\mu x\right)'}{2}=\frac{e^x\sigma\upsilon\nu x-e^x\eta\mu x+e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x}{2}=$$

$=\dfrac{2e^x\sigma\upsilon\nu x}{2}=e^x\sigma\upsilon\nu x$. Συνεπώς έχουμε:

$f'(x)=0\Leftrightarrow e^x\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $k\in Z$.

Εφόσον $x\in[0,2\pi]$, δεκτές είναι οι τιμές των x για k=0 και k=1.

Δηλ $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}$ ή $x=\dfrac{3\pi}{2}$.

Τα μοναδικά κρίσιμα σημεία της f είναι τα $x_1=\dfrac{\pi}{2}$ και $x_2=\dfrac{3\pi}{2}$.

β. Η συνεχής f ' διατηρεί το πρόσημό της σε καθένα από τα διαστήματα $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ και $\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$.

Είναι $0\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f'(0)=e^0\sigma\upsilon\nu 0=1>0$, άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Είναι $\pi\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $f'(\pi)=e^{\pi}\sigma\upsilon\nu\pi=-e^{\pi}<0$, άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Φροντιστήρια Εν-τάξη

Είναι $2\pi \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, $f'(2\pi) = e^{2\pi} > 0$, άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Ο πίνακας προσήμων της f' και μονοτονίας της f, είναι ο ακόλουθος:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
f '		+		−		+	
f		↗		↘		↗	

Άρα οι θέσεις ακροτάτων της f (συμπεριλαμβανομένων των κλειστών άκρων του Α) είναι οι εξής:

$x_0 = 0$ (θέση τοπικού ελαχίστου), $x_1 = \frac{\pi}{2}$ (θέση τοπικού μεγίστου),

$x_2 = \frac{3\pi}{2}$ (θέση τοπικού ελαχίστου) και $x_3 = 2\pi$ (θέση τοπικού μεγίστου).

γ. Υπολογίζοντας τις τιμές των τεσσάρων θέσεων ακροτάτων προκύπτει:

$f(x_0) = f(0) = 0$, $f(x_1) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$, $f(x_2) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{e^{\frac{3\pi}{2}} + 1}{2}$ και

$f(x_3) = f(2\pi) = \frac{e^{2\pi} - 1}{2}$.

Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι η μικρότερη τιμή είναι η $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{e^{\frac{3\pi}{2}} + 1}{2}$ και η μεγαλύτερη τιμή είναι η $f(2\pi) = \frac{e^{2\pi} - 1}{2}$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $f(A) = \left[-\frac{e^{\frac{3\pi}{2}} + 1}{2}, \frac{e^{2\pi} - 1}{2}\right]$.

Γ3. α. Η συνάρτηση g έχει το ίδιο σύνολο τιμών με την f.

Δηλαδή $g((\alpha, \beta)) = \left[-\frac{e^{\frac{3\pi}{2}} + 1}{2}, \frac{e^{2\pi} - 1}{2}\right]$.

Επίσης είναι $\frac{e-1}{2} \in g((\alpha, \beta))$, αφού $\frac{e-1}{2} > 0 > -\frac{e^{\frac{3\pi}{2}} + 1}{2}$ και

$\frac{e-1}{2} < \frac{e^{2\pi} - 1}{2} \Leftrightarrow e - 1 < e^{2\pi} - 1 \Leftrightarrow e < e^{2\pi} \Leftrightarrow 1 < 2\pi$ (που ισχύει).

Φροντιστήρια Εν-τάξη

Άρα υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = \frac{e-1}{2}$.

β. Εφόσον η g έχει το ίδιο σύνολο τιμών με την f , δηλαδή το $\left[-\frac{e^{\frac{3\pi}{2}}+1}{2}, \frac{e^{2\pi}-1}{2}\right]$, τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_1) = -\frac{e^{\frac{3\pi}{2}}+1}{2}$ και τουλάχιστον ένα $x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_2) = \frac{e^{2\pi}-1}{2}$. Άρα υπάρχουν τουλάχιστον μία εσωτερική του (α, β) θέση ελαχίστου και τουλάχιστον μία εσωτερική του (α, β) θέση μεγίστου για την g. Αφού η g είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat θα ισχύει $g'(x_1) = 0$ και $g'(x_2) = 0$.

Η g ' ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$, συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2) \subset (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g''(\xi) = 0$.

Γ4. Για το $\int_0^{f\left(\frac{\pi}{2}\right)} f^{-1}(x)dx$, θέτουμε $f^{-1}(x) = u$, οπότε θα είναι:

$f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$, άρα και $dx = f'(u)du$. Τα νέα άκρα θα είναι

$u_1 = f^{-1}\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$ και $u_2 = f^{-1}(0) \overset{f(0)=0}{=} f^{-1}(f(0)) = 0$.

Το ολοκλήρωμα δηλαδή γίνεται $\int_0^{f\left(\frac{\pi}{2}\right)} f^{-1}(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \cdot f'(u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x)dx$.

Οπότε θα έχουμε:

$$\int_0^{f\left(\frac{\pi}{2}\right)} f^{-1}(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cdot f'(x) + f(x))dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (xf(x))' dx = [xf(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε $\int_0^2 e^{2-x} f(x)dx = c$, οπότε είναι $f(x) = e^x - c$. Η δοθείσα γίνεται:

$$f(x) = e^x - \int_0^2 e^{2-x} \cdot (e^x - c)dx \Leftrightarrow f(x) = e^x - \int_0^2 (e^2 - c \cdot e^{2-x})dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = e^x - \int_0^2 e^2 dx + \int_0^2 c \cdot e^{2-x} dx \Leftrightarrow f(x) = e^x - e^2(2-0) + c\left[-e^{2-x}\right]_0^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x - c = e^x - 2e^2 + c(-1 + e^2) \Leftrightarrow e^x - c = e^x - 2e^2 - c + ce^2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 0 = -2e^2 + ce^2 \Leftrightarrow 2e^2 = ce^2 \Leftrightarrow c = 2$. Άρα ο τύπος της f είναι $f(x) = e^x - 2, x \in R$.

Φροντιστήρια Εν-τάξη

Δ2. Ο τύπος της g γίνεται: $g(x)=\frac{x}{e^x}, x\in R.$

Έχουμε λοιπόν: $g'(x)=\frac{(x)'e^x-x(e^x)'}{e^{2x}}=\frac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=\frac{1-x}{e^x}$, $x\in R.$

$$g''(x)=\left(\frac{1-x}{e^x}\right)'=\frac{(1-x)'e^x-(1-x)(e^x)'}{e^{2x}}=\frac{-e^x-(1-x)e^x}{e^{2x}}=\frac{-e^x(1+1-x)}{e^{2x}}=\frac{x-2}{e^x}, x\in R.$$

Είναι $g''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{e^x}=0 \Leftrightarrow x=2$, $g''(x)>0 \Leftrightarrow x>2$, $g''(x)<0 \Leftrightarrow x<2$.

Συνεπώς το πρόσημο της g '' και η κυρτότητα της g φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
g ''	−		+
g	⌒		⌣

Η g είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,2]$ και κυρτή στο διάστημα $[2,+\infty)$.

Είναι $g(2)=\frac{2}{e^2}$ και $g'(2)=\frac{1-2}{e^2}=-\frac{1}{e^2}$. Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στην C_g στο σημείο της $M(2,g(2))$, είναι:

$$y-g(2)=g'(2)(x-2) \Leftrightarrow y-\frac{2}{e^2}=-\frac{1}{e^2}(x-2) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2} .$$

Δ3. Η g είναι κυρτή στο διάστημα $[2,+\infty)$, δηλαδή η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη στο σημείο $M(2,g(2))$.

Άρα για κάθε $x\geq 2$ ισχύει: $g(x)\geq -\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2} \Leftrightarrow g(x)\geq \frac{-x+4}{e^2} \Leftrightarrow e^2g(x)\geq 4-x$.

Δ4. **α.** Το πεδίο ορισμού της $h(x)=f^5(x)$ είναι το $D_h=R$. Η h είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο:

$h'(x)=(f^5(x))'=5f^4(x)f'(x)=5(e^x-2)^4\cdot e^x>0$, για κάθε $x\in R-\{\ln 2\}$ και επειδή h είναι συνεχής, τότε h γνησίως αύξουσα στο R.

β. Η $h(x)=f^5(x)$ ως συνεχής συνάρτηση στο R έχει για παράγουσα έστω μια συνάρτηση $H(x)$. Δηλαδή $H'(x)=h(x)=f^5(x)$, $x\in R$.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι:

$$\int_{\alpha+1}^{\alpha+2}f^5(x)dx>\int_{\alpha}^{\alpha+1}f^5(x)dx \Leftrightarrow [H(x)]_{\alpha+1}^{\alpha+2}>[H(x)]_{\alpha}^{\alpha+1} \Leftrightarrow H(\alpha+2)-H(\alpha+1)>H(\alpha+1)-H(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow H(\alpha+2)+H(\alpha)>2H(\alpha+1).$$

Η συνάρτηση Η ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στα διαστήματα $[\alpha\,,\alpha+1]$ και $[\alpha+1\,,\alpha+2]$. Συνεπώς υπάρχει:

- Ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (\alpha\,,\alpha+1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$H'(\xi_1)=\frac{H(\alpha+1)-H(\alpha)}{(\alpha+1)-\alpha} \Leftrightarrow h(\xi_1)=H(\alpha+1)-H(\alpha).$$

- Ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (\alpha+1\,,\alpha+2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$H'(\xi_2)=\frac{H(\alpha+2)-H(\alpha+1)}{(\alpha+2)-(\alpha+1)} \Leftrightarrow h(\xi_2)=H(\alpha+2)-H(\alpha+1).$$

Η συνάρτηση h όμως είναι γνησίως αύξουσα όπως δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα, επομένως δεδομένου ότι $\alpha<\xi_1<\alpha+1<\xi_2<\alpha+2$, θα έχουμε:

$$\xi_1<\xi_2 \overset{h\ \text{γν.αυξ}}{\Leftrightarrow} h(\xi_1)<h(\xi_2) \Leftrightarrow H(\alpha+1)-H(\alpha)<H(\alpha+2)-H(\alpha+1)$$
$$\Leftrightarrow H(\alpha+2)+H(\alpha)>2H(\alpha+1).$$

Άρα τελικά για α>0 ισχύει $\int_{\alpha+1}^{\alpha+2} f^5(x)dx > \int_{\alpha}^{\alpha+1} f^5(x)dx$.

Φροντιστήρια Εν-τάξη