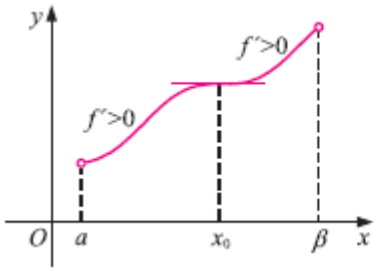
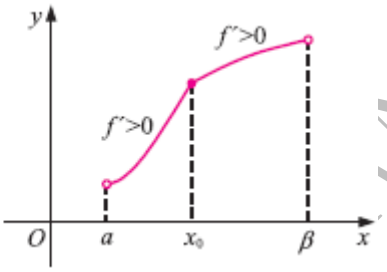
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ' Γενικού Λυκείου

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.





Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f.

Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

Α2. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον $\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$

Α3. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

ΠΑΠΑΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥ - ΚΑΚΑΝΟΣ

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$. Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

Α4. δ. $-\int_{-3}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{5} f(x)dx$

Α5. α. Λάθος, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Λάθος, **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Πρέπει $2+x^2\neq 0x^2\neq -2$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $A=\mathbb{R}$

Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A(-1,2)$ άρα

$$f(-1)=2\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2+(-1)^2}=2\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2+1}=2\Leftrightarrow \frac{\alpha}{3}=2\Leftrightarrow \alpha=6$$

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$f'(x)=\frac{(6)'\cdot(2x+x^2)-6\cdot(2+x^2)'}{(2+x^2)^2}=\frac{-6\cdot 2x}{(2+x^2)^2}=\frac{-12}{(2+x^2)^2}$$

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{-12x}{(2+x^2)^2}=0\Leftrightarrow -12x=0\Leftrightarrow x=0$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow \frac{-12x}{(2+x^2)^2}<0\Leftrightarrow -12x<0\Leftrightarrow x>0$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow \frac{-12x}{(2+x^2)^2}>0\Leftrightarrow -12x>0\Leftrightarrow x<0$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
f		↗		↘	

ΠΑΠΑΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥ - ΚΑΚΑΝΟΣ

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_1=(-\infty,0]$ και είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_2=[0,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=0$, το $f(0)=\dfrac{6}{2+0^2}=\dfrac{6}{2}=3$

Β3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή με παράγωγο:

$$f''(x)=\frac{(-12x)'\cdot\left(2+x^2\right)^2-(-12x)\cdot\left[\left(2+x^2\right)^2\right]'}{\left[\left(2+x^2\right)^2\right]^2}$$

$$=\frac{-12\cdot\left(2+x^2\right)^2+12x\cdot 2\left(2+x^2\right)\cdot\left(2+x^2\right)'}{\left(2+x^2\right)^4}=\frac{12\cdot\left(2+x^2\right)\cdot\left[-\left(2+x^2\right)+4x^2\right]}{\left(2+x^2\right)^4}$$

$$=\frac{12\cdot\left(-2-x^2+4x^2\right)}{\left(2+x^2\right)^3}=\frac{12\left(3x^2-2\right)}{\left(2+x^2\right)^3}$$

Είναι $f''(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{12\left(3x^2-2\right)}{\left(2+x^2\right)^3}=0\Leftrightarrow 3x^2-2=0\Leftrightarrow x^2=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow x=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ ή $x=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	0	+	
f		∪		∩		∪	

Η f είναι κυρτή στα διαστήματα $\Delta_1=\left(-\infty,-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right]$, $\Delta_3=\left[\sqrt{\dfrac{2}{3}},+\infty\right)$ και είναι κοίλη στο διάστημα $\Delta_2=\left[-\sqrt{\dfrac{2}{3}},\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right]$

Η f έχει σημεία καμπής, τα $A\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}},f\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)\right)$, $B\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}},f\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)\right)$

Αλλά $f\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)=\dfrac{6}{2+\sqrt{\dfrac{2^2}{3}}}=\dfrac{6}{2+\dfrac{2}{3}}=\dfrac{6}{\dfrac{8}{3}}=\dfrac{18}{8}=\dfrac{9}{4}$ άρα $A\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}},\dfrac{9}{4}\right)$, $B\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}},\dfrac{9}{4}\right)$

ΠΑΠΑΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥ - ΚΑΚΑΝΟΣ

Β4. Είναι: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-5x-2}{f(x)-1}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-5x-2}{\dfrac{6}{2+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-5x-2}{\dfrac{6}{2+x^2}-\dfrac{2+x^2}{2+x^2}}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-5x-2}{\dfrac{6-2-x^2}{2+x^2}}$

1	0	−5	−2	−2
	−2	4	2	
1	−2	−1	$\boxed{0}$	

$x^3-5x-2=(x+2)(x^2-2x-1)$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x-1)}{\dfrac{6-2-x^2}{2+x^2}}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x-1)}{\dfrac{4-x^2}{2+x^2}}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x-1)(2+x^2)}{\cancel{(x+2)}(2-x)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x^2-2x-1)(2+x^2)}{2-x}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x-1)(2+x^2)}{(x+2)(2-x)}$$

$$=\frac{\left((-2)^2-2\cdot(-2)-1\right)\left(2+(-2)^2\right)}{2-(-2)}$$

$$=\frac{(4+4-1)(2+4)}{2+2}=\frac{7\cdot 6}{4}=\frac{21}{2}$$

Β5. Είναι: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{e-2}} xf(x)dx=\int_0^{\sqrt{e-2}} x\cdot\frac{6}{2+x^2}dx=\int_0^{\sqrt{e-2}}\frac{6x}{2+x^2}dx$

$$=3\cdot\int_0^{\sqrt{e-2}}\frac{2x}{2+x^2}dx=3\cdot\int_0^{\sqrt{e-2}}\frac{(2+x^2)'}{2+x^2}dx$$

$$=3\cdot\left[\ln(2+x^2)\right]_0^{\sqrt{e-2}}=3\cdot\left(\ln\left(2+\sqrt{e-2}^{\,2}\right)-\ln\left(2+0^2\right)\right)$$

$$=3\cdot\left(\ln(2+e-2)-\ln 2\right)=3\cdot(\ln e-\ln 2)=3\cdot(1-\ln 2)$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για την διαγώνιο ΟΒ είναι $\lambda_{OB}=\dfrac{y_B-y_0}{x_B-x_0}$ άρα $\lambda_{OB}=\dfrac{4-0}{4-0}=\dfrac{4}{4}=1$

άρα $(OB)=y-y_0=\lambda_{OB}\cdot(x-x_0)$ δηλαδή $y-0=1\cdot(x-0)$ συνεπώς $(OB): y=x$

ΠΑΠΑΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥ - ΚΑΚΑΝΟΣ

Για την διαγώνιο $ΑΓ$ είναι $\lambda_{ΑΓ}=\dfrac{y_Γ-y_A}{x_Γ-x_A}$ άρα $\lambda_{ΑΓ}=\dfrac{0-4}{4-0}=\dfrac{-4}{4}=-1$

Άρα $(ΑΓ): y-y_A=\lambda_{ΑΓ}\cdot(x-x_A)$ δηλαδή $y-4=-1\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=-x+4$ συνεπώς

$(ΑΓ): y=-x+4$

Γ2. Είναι $A_f=[0,4]$ και $f(A_f)=[0,4]$

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της C_f με την (OB) λύνουμε την εξίσωση

$$f(x)=y\Leftrightarrow f(x)=x$$

Θεωρούμε συνάρτηση $K(x)=f(x)-x,\ x\in[0,4]$

Η K είναι συνεχής στο $[0,4]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Είναι $K(0)=f(0)-0=f(0)\geq 0$

$K(4)=f(4)-4\leq 0$

Συνεπώς $K(0)\cdot K(4)\leq 0$

- Αν $K(0)=0$ ή $K(4)=0$ τότε η λύση $x_1=0$ ή $x_1=4$
- Αν $K(0)\cdot K(4)<0$ τότε από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(0,4)$ ώστε $K(x_1)=0$

Συνεπώς η C_f και η (OB) έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο για $x_1\in[0,4]$

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της C_f με την $(ΑΓ)$ λύνουμε την εξίσωση

$$f(x)=y\Leftrightarrow f(x)=-x+4$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Delta(x)=f(x)+x-4$ με $x\in[0,4]$

Η Δ είναι συνεχής στο $[0,4]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Είναι $\Delta(0)=f(0)-4\leq 0$

$\Delta(4)=f(4)+4-4=f(4)\geq 0$

Άρα $\Delta(0)\cdot\Delta(4)\leq 0$

- Αν $\Delta(0)\cdot\Delta(4)=0\Leftrightarrow\Delta(0)=0$ ή $\Delta(4)=0$ τότε $x_2=0$ ή $x_2=4$

ΠΑΠΑΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥ - ΚΑΚΑΝΟΣ

- Αν $\Delta(0)\cdot\Delta(4)<0$ τότε από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2\in(0,4)$ ώστε $\Delta(x_2)=0$

Συνεπώς η C_f και η $(A\Gamma)$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο για $x_2\in[0,4]$

Γ3. Η f είναι συνεχής στο $[0,4]$ άρα δέχεται ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M.

Δηλαδή ισχύει $m\le f(x)\le M$ για κάθε $x\in[0,4]$

- $1\in[0,4]$ άρα $m\le f(1)\le M$
- $2\in[0,4]$ άρα $m\le f(2)\le M \Leftrightarrow 2M\le 2m\le 2f(2)\le 2M$
- $3\in[0,4]$ άρα $m\le f(5)\le M \Leftrightarrow 3m\le 3f(3)\le 3M$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι

$$m+2m+3m\le f(1)+2f(2)+3f(3)\le M+2M+3M$$

$$\Leftrightarrow 6m\le f(1)+2f(2)+3f(3)\le 6M \Leftrightarrow \frac{6m}{6}\le\frac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6}\le\frac{6M}{6}$$

$$\Leftrightarrow m\le\frac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6}\le M$$

Αλλά $\frac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6}\in f(Af)=[0,4]$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\theta\in[0,4]$ ώστε

$$f(\theta)=\frac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6}\Leftrightarrow 6f(\theta)=f(1)+2f(2)+3f(3)$$

Γ4. α. Είναι $\int_{x_1}^{x_2} x\cdot f'(x)dx=\left[x\cdot f(x)\right]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}(x)'\cdot f(x)dx$

$$=x_2\cdot f(x_2)-x_1\cdot f(x_1)-\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

$$=x_2\cdot(-x_2+4)-x_1\cdot x_1-\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=-x_1^{\,2}+4x_2-x_2^{\,2}-\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Είναι $0\le f(x)\le 4$ για κάθε $x\in[0,4]$ και οι ισότητες δεν ισχύουν για κάθε $x\in[0,4]$

άρα $\int_{x_1}^{x_2} 0dx\le\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\le\int_{x_1}^{x_2} 4dx \Leftrightarrow 0\le\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\le 4(x_2-x_1)$

ΠΑΠΑΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥ - ΚΑΚΑΝΟΣ

$$\Leftrightarrow -4\left(x_2-x_1\right)\le -\int_{x_1}^{x_2} f\left(x\right)dx\le 0$$

$$\Leftrightarrow -4x_2+4x_1-x_1^{\ 2}+4x_2-x_2^{\ 2}\le -x_1^{\ 2}+4x_2-x_2^{\ 2}-\int_{x_1}^{x_2} f\left(x\right)dx\le -x_1^{\ 2}+4x_2-x_2^{\ 2}$$

$$\Leftrightarrow 4x_1-x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}\le \int_{x_1}^{x_2} x\cdot f'\left(x\right)dx\le 4x_2-x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}$$

β. Θεωρούμε την συνάρτηση $\Gamma\left(x\right)=\left(f\left(x\right)-x\right)\cdot\left(f\left(x\right)+x-4\right)$ με $x\in\left[x_1,x_2\right]$

Η $\Gamma\left(x\right)$ είναι συνεχής στο $\left[x_1,x_2\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Η $\Gamma\left(x\right)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(x_1,x_2\right)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

παράγωγο: $\Gamma'\left(x\right)=\left(f\left(x\right)-x\right)'\cdot\left(f\left(x\right)+x-4\right)+\left(f\left(x\right)-x\right)\cdot\left(f\left(x\right)+x-4\right)'$

$$=\left(f'\left(x\right)-1\right)\cdot\left(f\left(x\right)+x-4\right)+\left(f\left(x\right)-x\right)\cdot\left(f'\left(x\right)+1\right)$$

Είναι $\Gamma\left(x_1\right)=\left(f\left(x_1\right)-x_1\right)\cdot\left(f\left(x_1\right)+x_1-4\right)=0$

$$\Gamma\left(x_2\right)=\left(f\left(x_2\right)-x_2\right)\cdot\left(f\left(x_2\right)+x_2-4\right)=0$$

Οπότε από το θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(x_1,x_2\right)$ ώστε

$$\Gamma'\left(\xi\right)=0\Leftrightarrow\left(f'\left(\xi\right)-1\right)\cdot\left(f\left(\xi\right)+\xi-4\right)+\left(f\left(\xi\right)-\xi\right)\cdot\left(f'\left(\xi\right)+1\right)=0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $x\ne 0$ είναι $x\cdot f'\left(x\right)-f\left(x\right)=x^2-8\Leftrightarrow\dfrac{xf'\left(x\right)-f\left(x\right)}{x^2}=\dfrac{x^2-8}{x^2}$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{f\left(x\right)}{x}\right)'=1-\frac{8}{x^2}=\left(x+\frac{8}{x}\right)'$$

Οι συναρτήσεις $\dfrac{f\left(x\right)}{x}$, $x+\dfrac{8}{x}$ είναι συνεχείς στα διαστήματα $\left(+\infty,0\right)$, $\left(0,+\infty\right)$ άρα

υπάρχουν $c_1\in\mathbb{R},c_2\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

ΠΑΠΑΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥ - ΚΑΚΑΝΟΣ

$$\frac{f(x)}{x}=\begin{cases} x+\frac{8}{x}+c_1, & x\in(-\infty,0) \\ x+\frac{8}{x}+c_2, & x\in(0,+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow f(x)=\begin{cases} x^2+8+c_1\cdot x & x\in(-\infty,0) \\ x^2+8+c_2\cdot x & x\in(0,+\infty) \end{cases}$$

Αλλά, για $x=-1$ είναι $f(-1)=15 \Leftrightarrow (-1)^2+8+c_1\cdot(-1)=15 \Leftrightarrow 1+8-c_1=15$

$$\Leftrightarrow c_1=9-15 \Leftrightarrow c_1=-6$$

για $x=1$ είναι $f(1)=3 \Leftrightarrow 1^2+8+c_2\cdot 1=3 \Leftrightarrow 1+8+c_2=3$

$$\Leftrightarrow c_2=3-9 \Leftrightarrow c_2=-6$$

Επομένως $f(x)=\begin{cases} x^2+8-6x, & x\in(-\infty,0) \\ x^2+8-6x, & x\in(0,+\infty) \end{cases}$

Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ άρα $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2-6x+8\right)=8$

$$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2-6x+8\right)=8$$

Επομένως $f(0)=8$ άρα $f(x)=x^2-6x+8,\ x\in\mathbb{R}$, οπότε $f(x)=(x-2)\cdot(x-4)\ \ x\in\mathbb{R}$

Δ2. Είναι: $f(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot(x-4)=0 \Leftrightarrow x-2=0$ ή $x-4=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=4$

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με παράγωγο: $f'(x)=2x-6$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $A(2,f(2))$ έχει τύπο:

$$y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$$

Είναι: $f(2)=0$ και $f'(2)=2\cdot 2-6=4-6=-2$

Άρα, $y-0=-2\cdot(x-2) \Leftrightarrow y=-2x+4 \quad (\varepsilon_1)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $B(4,f(4))$ έχει τύπο:

$$y-f(4)=f'(4)\cdot(x-4)$$

Είναι: $f(4)=0$ και $f'(4)=2\cdot 4-6=8-6=2$

Άρα, $y-0=2\cdot(x-4) \Leftrightarrow y=2x-8 \quad (\varepsilon_2)$

Δ3. Είναι: $M(x,y)$ και $K(x,0)$

ΠΑΠΑΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥ - ΚΑΚΑΝΟΣ

Είναι: $M\hat{O}K=\theta$, τότε $\varepsilon\varphi\theta=\frac{y}{x}=\frac{x^2-6x+8}{x}=x-6+\frac{8}{x}$ οπότε $\varepsilon\varphi\theta(t)=x(t)-6+\frac{8}{x(t)}$

Οπότε $\left(\varepsilon\varphi\theta(t)\right)'=\left(x(t)-6+\frac{8}{x(t)}\right)'\Leftrightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=x'(t)-\frac{8}{x^2(t)}\cdot x'(t)$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=x'(t)-\frac{8x'(t)}{x^2(t)}$$

Το σημείο Κ απομακρύνεται από την αρχή $O(0,0)$ των αξόνων με ρυθμό 3μονάδες/s,

οπότε είναι: $x'(t)=3\text{μονάδες}/\sec$

Τη χρονική στιγμή t_0, η τετμημένη του Μ είναι 3, οπότε $x'(t_0)=3$.

Για $t=t_0$ είναι: $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)}\cdot\theta'(t_0)=x'(t_0)-\frac{8x'(t_0)}{x^2(t_0)}$

Είναι: $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)}=\frac{\eta\mu^2\theta(t_0)+\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)}=\frac{\eta\mu^2\theta(t_0)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)}+\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)}=\varepsilon\varphi^2\theta(t_0)+1$

$$=\left(x(t_0)-6+\frac{8}{x(t_0)}\right)^2+1=\left(3-6+\frac{8}{3}\right)^2+1=\left(-\frac{1}{3}\right)^2+1=\frac{1}{9}+1=\frac{10}{9}$$

Οπότε, $\frac{10}{9}\cdot\theta'(t_0)=3-\frac{8\cdot3}{3^2}\Leftrightarrow\frac{10}{9}\cdot\theta'(t_0)=3-\frac{8}{3}\Leftrightarrow\frac{10}{9}\cdot\theta'(t_0)=\frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow\theta'(t_0)=\frac{3}{10}\text{rad}/\sec.$$

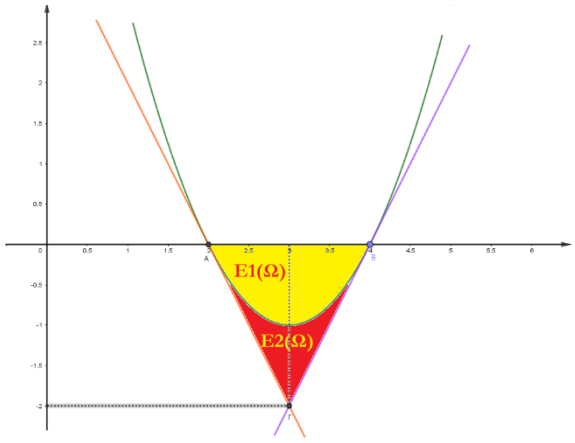
Δ4. Το σημείο τομής των εφαπτομένων του Δ2., ερωτήματος είναι η λύση του συστήματος

$\begin{cases}y=-2x+4\\y=2x-8\end{cases}$ που με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει: $2y=-4\Leftrightarrow y=-2$

Για $y=-2$ είναι: $-2=2x-8\Leftrightarrow 2x=6\Leftrightarrow x=3$

οπότε $\Gamma(3,-2)$.

Λόγω συμμετρίας του σχήματος είναι:



- $E_1(\Omega)=-2\int_2^3 f(x)dx=-2\int_2^3\left(x^2-6x+8\right)dx$

ΠΑΠΑΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥ - ΚΑΚΑΝΟΣ

$$=-2\cdot\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right]_2^3=-2\cdot\left[\left(\frac{3^3}{3}-3\cdot 3^2+8\cdot 3\right)-\left(\frac{2^3}{3}-3\cdot 2^2+8\cdot 2\right)\right]$$

$$=-2\cdot\left[\left(\frac{27}{3}-3\cdot 9+24\right)-\left(\frac{8}{3}-3\cdot 4+16\right)\right]=-2\cdot\left[(9-27+24)-\left(\frac{8}{3}-12+16\right)\right]$$

$$=-2\cdot\left[6-\left(\frac{8}{3}+4\right)\right]=-2\cdot\left(6-\frac{8}{3}-4\right)=-2\cdot\left(2-\frac{8}{3}\right)=-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\text{τ.μ.}$$

- $E_2(\Omega)=2\int_2^3\left(f(x)-y\right)dx=2\int_2^3\left(x^2-6x+8-(-2x+4)\right)dx$

$$=2\int_2^3\left(x^2-6x+8+2x-4\right)dx=2\int_2^3\left(x^2-4x+4\right)dx$$

$$=2\cdot\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_2^3=2\cdot\left[\left(\frac{3^3}{3}-2\cdot 3^2+4\cdot 3\right)-\left(\frac{2^3}{3}-2\cdot 2^2+4\cdot 2\right)\right]$$

$$=2\cdot\left[\left(\frac{27}{3}-2\cdot 9+12\right)-\left(\frac{8}{3}-2\cdot 4+8\right)\right]=2\cdot\left[(9-18+12)-\left(\frac{8}{3}-8+8\right)\right]$$

$$=2\cdot\left(3-\frac{8}{3}\right)=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\text{τ.μ.}$$

Επομένως, $\dfrac{E_1(\Omega)}{E_2(\Omega)}=\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{1}$

ΠΑΠΑΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥ - ΚΑΚΑΝΟΣ