15 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ο.Ε.Φ.Ε.

Επιλογή & Επεξεργασία Θεμάτων στα πρότυπα των εξετάσεων με βάση την ύλη 2020 -2021: Θανάσης Κοπάδης

ΘΕΜΑ 1^o : (Θέμα 2^o - 2003)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln(\alpha x)}{\sqrt{x}}$, με $\alpha>0$.

Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\mathrm{M}(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $x-y=0$.

α) Να βρείτε την τιμή του α

Για $\alpha=1$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και στη συνέχεια τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης C_f

δ) Να αποδείξετε ότι $\left(\sqrt{\kappa}\right)^{\sqrt{\kappa+1}}>\left(\sqrt{\kappa+1}\right)^{\sqrt{\kappa}}$, για κάθε θετικό ακέραιο $\kappa\geq 8$.

ΘΕΜΑ 2^o : (Θέμα 4^o - 2004)

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f'(x)=g^2(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f^2(x)+g^2(x)=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $g(0)=1$

α) Να αποδείξετε ότι $g'(x)=-g(x)\cdot f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης C_f .

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $\mathrm{O}(0,0)$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x-f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$

ΘΕΜΑ 3ο : (Θέμα 2ο - 2007)

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=(x^2+\alpha)\cdot e^{-x}$, για την οποία γνωρίζουμε ότι η ευθεία $y=-2x+2$ εφάπτεται της γραφικής της παράστασης C_f στο σημείο $\mathrm{M}(0,f(0))$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$

Για $\alpha=2$

β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2017$ έχει μια ακριβώς πραγματική λύση.

ΘΕΜΑ 4ο : (Θέμα 3ο - 2008)

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=e^{1-e^x}$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)=(e^x-1)\cdot e^{1+x-e^x}$ και στη συνέχεια να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης C_f

δ) Με βάση τα προηγούμενα ερωτήματα να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f

ΘΕΜΑ 5ο : (Θέμα 3ο - 2009)

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x+2+2\ln x$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και στη συνέχεια το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$

γ) Αν $g(x)=\dfrac{x\ln x}{x+2}$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $g(x)\geq g(x_0)$, για κάθε $x>0$

δ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>2$ ισχύει $f(x-2)<2f(x+1)-f(x+4)$

ΘΕΜΑ 6ο : (Θέμα 3ο - 2010)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $x\cdot f'(x)=\dfrac{x+1}{e^{f(x)}+1}$, για κάθε $x>0$
- $f(1)=0$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^x+x$ είναι συνάρτηση 1-1

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

Έστω $f(x)=\ln x$, $x>0$

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)-1}{x}$ ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\left(\dfrac{\eta\mu x}{e}\right)^{\sigma\upsilon\nu x}=\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right)^{\eta\mu x}$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

ε) Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι για κάθε x_1,x_2 με $x_2>x_1>0$ ισχύει $\dfrac{h(x_2)-h(x_1)}{x_2-x_1}\geq-\dfrac{1}{2e^5}$

ΘΕΜΑ 7^o : (Θέμα 3^o - 2011)

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f(\eta\mu x)+f(\sigma\upsilon\nu x)=1 \text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}$ και $f(0)+f(1)=1$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)+x_0=1$

Έστω επιπλέον ότι η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και ότι ισχύει $f(x)\geq\sqrt{2}x-\frac{1}{2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε την τιμή $f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x}$

ΘΕΜΑ 8^o : (Θέμα Β - 2012)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{x-2}$ και $g(x)=\ln x+2$

α) Να βρείτε τις συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$. Στη συνέχεια να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις αυτές είναι ίσες.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της f^{-1}

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{x-2}=\ln x+2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(e^{-2},2)$

δ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{(g\circ f)(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{(f\circ g)(x)}=0$

ΘΕΜΑ 9ο : (Θέμα Γ – 2016 , Α΄ Φάση)

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x)+2xf(x)=1-\sigma\upsilon\nu^2 x-x^2$, για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
- $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\eta\mu x-x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Δίνεται επιπλέον η συνεχής συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} f(x)+1 & , \ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\eta\mu(\kappa x)}{x}-1 & , \ x<0 \end{cases}$

β) Να βρείτε την τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$

Έστω $\kappa=2$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι $1-1$

ΘΕΜΑ 10ο : (Θέμα Γ – 2017, Α΄ Φάση)

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $(x-2)\cdot f(x)=\kappa x^2+\lambda x+2$, $x\in\mathbb{R}$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(f^2(2)-25\right)x^3+f(2)x^2-3x+9}{x^2+2x-6}=5$
- $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-5}{h}=9$

α) Να αποδείξετε ότι $f(2)=5$ και $f'(2)=3$

β) Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ

Αν $\kappa = 3$ και $\lambda = -7$

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

δ) Αν $f(x) = 3x - 1,\ x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln(x+1) + 2x - 1$, $x \in (-1, +\infty)$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g

ii) η γραφική παράσταση της $h(x) = x + 1 - e^{1-2x}$, $x \in (-1, +\infty)$ τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε ένα μόνο σημείο του άξονα $x'x$

ΘΕΜΑ 11ο : (Θέμα Γ - 2017)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f'(x) = \kappa - \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 2$ με τιμή $1 - \ln 2$, τότε:

α) Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$

Έστω $\kappa = 1$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \dfrac{2}{x} - \ln x - 2$, $x > 0$

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και στη συνέχεια να υπολογίσετε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 + 2 = x(\alpha + \ln x + 2)$, $x > 0$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$

δ) i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(1, f(1))$

ii) Να λύσετε την ανίσωση $e^{3x^2 - 5x + 2} > x^x$, για κάθε $x > 0$

ΘΕΜΑ 12ο : (Θέμα Γ – 2018, Α΄ Φάση)

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

• $f(0)>1$

• $f^2(x)-2f(x)=e^{2x}+2e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

Αν $f(x)=e^x+2$, $x\in\mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι:

i) η εξίσωση $e^x+4x=\lambda$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ για κάθε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$

ii) οι συναρτήσεις $f(x)=e^x+2$ και $g(x)=-x^2+2$ έχουν μόνο μια κοινή εφαπτομένη.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2)-f(-x+2)>4(g(x)-x)$, $x\in\mathbb{R}$

δ) Δύο σημεία $\mathrm{A}(x(t),y_1(t))$ και $\mathrm{B}(x(t),y_2(t))$ κινούνται στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα. Αν η τετμημένη τους x αυξάνεται με ρυθμό 1 cm/s , τότε να βρείτε τη θέση των σημείων για την οποία ισχύει $y_1'(t)=2y_2'(t)+1$, $t\geq 0$

ΘΕΜΑ 13ο : (Θέμα Γ – 2019, Α΄ Φάση))

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $\mathrm{A}=[-5,5]$ για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:

• $x^2+f^2(x)=25$, για κάθε $x\in\mathrm{A}$

• $f(0)=5$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $\mathrm{A}=[-5,5]$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{25-x^2}$, $x\in\mathrm{A}$

γ) i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,5]$

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^3)-f(x^2)>x^3-x^2$ στο διάστημα $[0,1]$

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μέγιστη τιμή $f(0)=5$ και στη συνέχεια ότι η εξίσωση $\sqrt{24+\sigma\upsilon\nu^2 x}=6+\eta\mu^2 f(x)$ είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ 14ο : (Θέμα Β – 2019)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$, $x\neq 2$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\mathrm{A}_1=(-\infty,2)$ και $\mathrm{A}_2=(2,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$ συνάρτηση και να ορίσετε την αντίστροφή της f^{-1}

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και στη συνέχεια να την σχεδιάσετε.

ΘΕΜΑ 15ο : (Θέμα Δ – 2020 , Α΄ Φάση)

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f\left(\frac{x}{e}\right)+1-\frac{x}{e}\leq \ln x\leq f(x)-x \text{ , για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln x+x$, $x\in(0,+\infty)$

β) Να λύσετε την ανίσωση $x\ln x<1-x$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(\eta\mu x)-f(x)\right)$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα $x_0\in(0,1)$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=f\left(f(x)\right)-2(x-1)$

δ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1

Τα Θέματα και οι απαντήσεις βρίσκονται στους παρακάτω συνδέσμους:

Α) Επαναληπτικά Θέματα Ο.Ε.Φ.Ε 2003 -2017

https://www.oefe.gr/el/static/old_refresher-exam-topics_el.aspx

Β) Επαναληπτικά Θέματα Ο.Ε.Φ.Ε 2018 – 2020

https://epan.oefe.cloud/el/normal/EpanThemataArchive

Θανάσης Κοπάδης

Μαθηματικός - Συγγραφέας