Α. ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ

1. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων με τύπους

ι) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x^3-6x^2+11x-6}$ **ii)** $f(x) = \sqrt[3]{2-\sqrt{x-1}}$ **iii)** $f(x) = \sqrt{2-\log_3(x+2)}$

iv) $f(x) = \log_x(\log_4(3-x^2))$ **v)** $f(x) = \sqrt{\log\dfrac{5x-x^2}{4}}$ **vi)** $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{4-x^2}}$

vii) $f(x) = \sqrt{5-|x+4|}$ **viii)** $f(x) = \sqrt{\eta\mu x} - \sqrt[3]{1-x^2}$

2. Να βρεθεί ο $\lambda \in R$ ώστε $f(x) = \ln(x^2+2\lambda x+9)$ να έχει πεδίο ορισμού $A = R$

3. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο ορίζεται καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις: **α)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{(x-1)\sqrt{x+1}}$

β) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x-2}-1}+\dfrac{3}{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}$ **γ)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{|x-2|-1}+\dfrac{1}{|3x-8|-|x|}$

δ) $f(x)=\dfrac{5}{|x-3|-1}$ **ε)** $f(x)=\log(x^2+x-2)+\log\dfrac{x+3}{3-x}$

στ) $f(x)=\sqrt{e^x-1}+\sqrt{1-\ln x}$ **ζ)** $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2\eta\mu x-1}+\dfrac{1}{\varepsilon\varphi x-1}$, $x \in [0, 2\pi]$

Β.ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

4. Για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω, η κάτω από των xx' όταν: **I)** $f(x) = x^2-5x+6$ **ii)** $f(x)=e^{3x}-1$ **iii)** $f(x)=\log_5(x-3)-1$ **iv)** $f(x)=\sqrt{x-3}-2$

5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 2$. **α)** Να βρείτε τις τιμές f (1), f (0), f (-3), f (2)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

γ) Να βρείτε τις τιμές f (t), f (xt), f (x + h), x, t, h ∈ R.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$. **α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι f (x) = e για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση

7. Έστω ότι η γραφική παράσταση της $f(x)=\kappa\ln(x+1)+\lambda$ τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο e^2-1 και τον άξονα ψ'ψ στο 2 . Να βρείτε : i) τα $\kappa,\lambda \in R$

ii) το σημείο της c_f που έχει τεταγμένη 3 .

8. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$, για τις οποίες ισχύει : $f(x)=g(x)+x^2-4$ για κάθε $x\in R$. Να βρείτε τη σχετική θέση των c_f και c_g .

9. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f,g:R\to R$ για τις οποίες ισχύει :
$f^2(x)+g^2(x)+1=2(\eta\mu\chi f(x)-\sigma\upsilon\nu\chi g(x))$, για κάθε $x\in R$

10. Για ποιες τιμές του $x\in R$ η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g όταν

i) $f(x)=x^3+2x+1$ και $g(x)=x^2+2x+1$

ii) $f(x)=e^{x^2+2x+3}$ και $g(x)=e^{-x^2-x-2}$

v) $f(x)=\ln\left(e^{-x-1}+1\right)$ και $g(x)=\ln\left(e^{2x^2}+1\right)$

11. Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει : $f^2(x^2+2)+f(3x)=0$, για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x'x σε δύο τουλάχιστον σημεία .

Γ. ΙΣΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

12. Εξετάστε ποιες από τις επόμενες συναρτήσεις είναι ίσες και σε ποιο Σύνολο **ι)** $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-1}$, $g(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^3-x}$ **ιι)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}}$, $g(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$

ιιι) $f(x)=\sqrt{x-4}+\sqrt{|x-5|}$, $g(x)=\sqrt{x-5}+\sqrt{|4-x|}$

13. Δίνεται η συνάρτηση f (x) = x + 1.

α) Να εξετάσετε ποιες από τις συναρτήσεις του παρακάτω πίνακα είναι ίσες με τη συνάρτηση f.

$f_1(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$	$f_2(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-x+1}$	$f_3(x)=\left(\sqrt{x+1}\right)^2$
$f_4(x)=x\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$	$f_5(x)=\ln e^{x+1}$	$f_6(x)=e^{\ln(x+1)}$

β) Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις είναι όλες ίσες.

15. **Α**. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $g(x)=\dfrac{2x^2+2\alpha x+\alpha}{2(x^2-1)}$, $\alpha\in R$, $x>0$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f, g **β)** Για ποια τιμή του α ισχύει f = g;

Β. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι f=g . Στις

περιπτώσεις που είναι $f \neq g$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει : $f(x) = g(x)$.

i) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - |x|}$ και $g(x) = 1 + \dfrac{1}{|x|}$

ii) $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{1-x}$ και $g(x) = 2\ln x - \ln(1-x)$

Δ.ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

16. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \in [0,2] \\ 2x^2 - 3, & x \in (2,6) \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+3}{3x+6}, & x \in (-2,1) \\ \sqrt{x-1} & x \in [1,13] \end{cases}$

Να ορίσετε τις συναρτήσεις 2f+3g, f.g , f – 2g

17. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 2 \\ \sqrt{x}, & x > 2 \end{cases}$ και

$g(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x < 3 \\ -2x + 3, & x \geq 3 \end{cases}$

Να βρείτε τις συναρτήσεις: **α)** $f + g$ **β)** $f \cdot g$

18. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} 1, \alpha\nu\ \chi \leq 0 \\ 0, \alpha\nu\ \chi > 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 0, \alpha\nu\ \chi \leq 0 \\ 1, \alpha\nu\ \chi > 0 \end{cases}$

Να βρείτε την συναρτήση: **α)** $f \cdot g$ **ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΕΙΤΕ!!!!!!!!!!!!!!**

Ε.ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

19. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+3}$ και $g(x) = \ln(x-2)$ Να βρείτε τις συναρτήσεις **ι.** $f \circ g$ **ιι.** $g \circ f$ **ιιι.** $f \circ f$ **ιν.** $g \circ g$

20. Να ορισθούν οι συναρτήσεις $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ όταν

$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x \in [1, +\infty) \\ 2X + 3. & x \in (-\infty, 1) \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3}, & x > 0 \\ 3x + \sqrt{1-x}, & x \leq 0 \end{cases}$

21. Βρείτε συνάρτηση f τέτοια ώστε **i)** $(f \circ g)(x) = -x^2 + x - 3$, αν g(x)=x-1

ii) $(f\circ g)(x)=\sqrt{3+x^2+x^4}$, αν $g(x) = x^2$ **iii)** $(g\circ f)(x)=5x+4$, αν $g(x)=7x-6$

22. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα [0, 2]. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων: **α)** $f(x^2)$ **β)** $f(x-4)$ **γ)** $f(\ln x)$ **δ)** $f(\sqrt{1-x^2})$, **ε)** $f(3x-2)$ **στ)** $f(\frac{3+x}{x-3})$

23. Δίνεται η συνάρτηση $f:[-2,1]\to R$ Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων : $g(x)=f(2x-3)$, $h(x)=f(x^2)$ και $q(x)=f(\ln x)$

24. Έστω $f:(0,1]\to R$ μία συνάρτηση . Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=f(x-2)+f(\ln x)$

25. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{2x}{x-2}$ και $g(x)=\sqrt{x-1}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις : $f\circ g$, $g\circ f$ και $f\circ\frac{1}{f}$

26. Αν για κάθε $x\in R$ ισχυει $\left[f(x)\right]^3+x^3=\alpha$ να δειχθει ότι $(f\circ f)(x)=x$

27. Δινεται η συναρτηση f , τετοια ώστε $\frac{f(x)}{x}+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3, x\in R^*$ Βρειτε το τυπο της f.

28. Στις παρακάτω συναρτήσεις να γίνει αλλαγή μεταβλητής ώστε αυτές να έχουν τη μορφή f(x)

I) $f(2x-1)=x^2-3x+2$ II) $f(x^3)=x^6-2x^3+1$ $(x^3>0)$

III) $f(\ln x)=x^2-x+2$ IV) $f(e^x-1)=x^2-3x+1$

V) $f(\ln 2x)=x+3$ $(x>0)$

29. Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $f(f(x))=2x-1$ για κάθε $x\in R$

Να δείξετε ότι : α) $f(2x-1)=2f(x)-1$, $x\in R$

β)Η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα .

30. Εστω η αρτια συναρτηση $f: R\to R$, για την οποια ισχυει $f(\alpha+\beta)\le f(\alpha)+f(\beta)$, να δειξτε ότι. **I)** $f(x)\ge 0$. **ιι)** $|f(\alpha)-f(\beta)|\le f(\alpha-\beta)$ $\alpha,\beta\in R$.

31. Αν $(f\circ g)(x)=\frac{x}{e}+\frac{e}{x}$ και $g(x)=\ln x-1$, $x>0$. Να βρεθει ο τυπος της f

32. Αν $f(x)=g(x)-x$ και $g(x)=x^2-f(x)$, $x\in R$, να δειχθει ότι

$(f \circ g)(x) - (g \circ f)(x) = xf(x)$

33. Δινεται η συναρτηση $f: R \to R$ για την οποια ισχυει $f(x-1) - 2f(3-x) = x^2 + 1,\ x \in R.$ να δειχθει ότι **I)** $f(x) - 2f(2-x) = x^2 + 2x + 2$ **ιι)** $f(2-x) - 2f(x) = x^2 - 6x + 10.$ **Ιιι)** Να βρεθει ο τυπος της f

34. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2,\ x \neq 0,$ να βρείτε το $f(2)$.

35. Αν $f(f(x)) = x^2 - x + 1$ να βρεθει η $f(1)$.

36. Αν $f(f(x)) = 3x - 2$ να δειχθει ότι $f(3x-2) = 3f(x) - 2,\quad x \in R$

ΣΤ. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

37. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις : $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x<1 \\ -2x, & x \geq 1 \end{cases}$

$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x-2}$, $f(x) = 2e^{3-x} - 1$ και $f(x) = 1 - 3\ln(x-1)$.

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x - 5$. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την μονοτονία .

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - x^2 - \ln x$. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την μονοτονία .

40. α) Έστω οι συναρτήσεις $f, g: R \to R$. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και η $f \circ g$ γνησίως αύξουσα , να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα .
β) Έστω συνάρτηση $g: R \to R$ για την οποία ισχύει $e^{-g(x)} - g^3(x) + 1 = x,\ x \in R$
Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα .

41. Έστω η συνάρτηση $f: A \to R$ έτσι ώστε : $x^3 + f(x) + e^{f(x)} = 0,\quad x \in A$
Να δείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο A .

42. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα Δ για την οποία ισχύει :
$|f(x) - f(\psi)| < |\chi - \psi|$ για κάθε $\chi, \psi \in \Delta$ με $\chi \neq \psi$.
Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

43. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: R \to R$, όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα και η g γνησίως αύξουσα . Έστω ότι οι c_f και c_g τέμνονται στην αρχή των αξόνων .

α) Να βρείτε τη σχετική θέση των c_f και c_g .

β) Αν για τη συνάρτηση h είναι $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, $x>0$ να δείξετε ότι η c_h είναι κάτω από τον άξονα των $x'\chi$, όταν $x>0$.

44. Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(0)=0$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{e^x-1}, x\in R^*$. Να δείξετε ότι $g(x)<0$ για κάθε $x\neq 0$.

45. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο R και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,5)$ και $B(5,-2)$. Να δείξετε ότι :
α) η f είναι γνησίως φθίνουσα . β) η συνάρτηση $f\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(f(e^x))<-2$.

46. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει :
$f(x-\ln x)+f(x-1)=\ln x+3, x>0$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$ και στη συνέχεια την ανίσωση $f(e^x-1)<2$.

47. Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ με f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και f γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Να λύσετε τις εξισώσεις :
ι) $f(x)+f(5x)=f(3x)+f(7x)$ ιι) $f(e^x)+f(e^{5x})=f(e^{3x})+f(e^{7x})$

48. Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα .Να λύσετε τις ανισώσεις:
α. $f(x)>f(3)$ β. $f(2x+1)<5$ αν $f(3)=5$
γ. $f(x^2-3x)-f(2-4x)^3>0$ δ. $f(f(3x-1))<f(f(2x+5))$

49. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{1-x}+\frac{1}{x}-2$, $x>0$.
Α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$
Β. Να λύσετε στο διάστημα $(0,+\infty)$ την ανίσωση : $xe^{1-x}-2x+1>0$

50. .Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+\ln(x+1)-1$.
Α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την μονοτονία .
Β. Να λύσετε την ανίσωση : $e^{x^2}+\ln(x^2+1)>1$

51. Έστω η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ με $f(x)=3x+\ln(x^2+1)$ με $x^3>0$.
Α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την μονοτονία .

Β. Να λύσετε την ανίσωση : $\ln\frac{(x+1)^2+1}{x^4+1} > 3(x^2-x-2)$

στο διάστημα $(-2,+\infty)$

52. Να λύσετε την ανίσωση : $\ln x < \frac{1}{x} - 1$

53. Έστω $g:(0,+\infty)\to R$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποία η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(1,-2) , B(2,-3) και η συνάρτηση $f(x)=\ln x - g(x)$ με $x>0$.

I. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα .

II. Να δείξετε ότι η είναι γνησίως αύξουσα .

III. Να λύσετε την ανίσωση $2\ln x < 2+g(x^2)$

54. Έστω $f:R\to R$ μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση , για την οποία ισχύει $f(e^x-x)+f(1-x)=e^x-1$, $x\in R$ (1) Να λύσετε :

α.) την εξίσωση $f(x)=0$, **β.)** την ανίσωση $f(x^2-1)<0$

55. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η c_f είναι κάτω από τη c_g , να δείξετε ότι $(f\circ f)(x)<(g\circ g)(x)$, για κάθε $x\in R$

56. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R είναι περιττή. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [α, β] με α, β > 0, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα [- β, - α].

57. Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση f: $\Delta\to\Re$. Αν $x_1, x_2,\ldots x_{100}\in\Delta$ με $x_1\prec x_2\prec\ldots\prec x_{100}$ ισχύει: $f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{100})=1$, να δείξετε ότι: $f(x_1)\succ 0,01$

58. Εστω η συναρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(0)=0$, η οποια είναι γνησίως αύξουσα και η συναρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{\ln(x+1)}$, $x>0$. Ν α αποδείξετε ότι $g(x)>0$ για κάθε $x>0$.

Ζ. ΑΚΡΟΤΑΤΑ

59. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:[0,2\pi)\to R$ για τις οποίες ισχύει $f(x)=g(x)+2+\eta\mu\chi$ για κάθε $\chi\in[0,2\pi)$ Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη κατακόρυφη απόσταση των c_f και c_g .

60. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$ για τις οποίες ισχύει $f^2(x)+g^2(x)=1$ για κάθε $x\in R$. Αν οι c_f και c_g τέμνονται πάνω στην ευθεία $\chi=1$ να βρείτε το μέγιστο της συνάρτησης $h(x)=2f(x)g(x)$

61. α) Έστω οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$. Αν η gof παρουσιάζει μέγιστο στο χ_0 και η g είναι γνησίως αύξουσα , να δείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο χ_0 . β) Αν $f^5(\chi)+f(\chi)+1+\chi^2=0$ για κάθε $\chi\in R$ να δείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο .

Η. ΑΡΤΙΑ - ΠΕΡΙΤΤΗ

62. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$. Να δείξετε ότι :

1. Αν η f είναι άρτια τότε και η gof είναι άρτια
2. Αν η f είναι περιττή και η g άρτια τότε η gof είναι άρτια
3. Αν οι f και g είναι περιττές , τότε και gof είναι περιττή .

63. Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$. Να εξετάσετε , αν η f είναι άρτια ή περιττή όταν $\forall\ x,\psi\in R$ ισχύει : α) $f(x+\psi)=\dfrac{1+f(x)f(\psi)}{f(x)+f(\psi)}$ β) $f(x+\psi)=f(x)+f(\psi)$

64. Δίνεται η συνάρτηση f : R → R για την οποία ισχύει
f (x + y) + f (x - y) = 2f (x) + f (y) για κάθε x, y ∈ R.
α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f περνά από την αρχή των αξόνων.
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.
γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε x ∈ R ισχύει ότι f (|x|) = f (x).

Θ. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1-1

65. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι " 1 – 1 " :

1) $f(x)=x^3-2$ **2)** $f(x)=e^{x+1}-4$ **3)** $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$ 4) $f(x)=\begin{cases}2x-3, x\le 1\\ \ln x-1, x>1\end{cases}$

5) $f(x)=x^2-6x+10,$ για $x>3$

66. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι " 1 – 1 " :

α) $f(x)=2x^3-4$ β) $f(x)=\dfrac{2e^x-1}{e^x+1}$ γ) $f(x)=2-\sqrt{4+3x}$ δ) $f(x)=3\ln(x+2)-1$

67. Να δειξετε ότι οι παρακατω συναρτήσεις δεν είναι 1-1

i) $f(x)=x^2-3$, ii) $f(x)=5+|x-4|$, ii) $f(x)=x^4-5x^2+7$

68. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$ για τις οποίες ισχύει :

f(x)>0 Για κάθε $\chi\in R$ Αν η g είναι 1-1 και $f(f(x))=\ln f(x)+g^{15}(e^{3x-1})$

Να δείξετε ότι η f είναι " 1 – 1 " .

69. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση fog είναι " 1 – 1 " να δείξετε ότι και η g είναι " 1 – 1 " .

70. Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει : $f(f(x))=x$ *για κάθε* $\chi\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x)=e^x+e^{f(x)}$, $\chi\in\mathbb{R}$ που είναι " 1 – 1 " .

- Να δείξετε ότι η f είναι " 1 – 1 " .
- Να δείξετε ότι $g(f(x))=f(x)$
- Να βρείτε τη συνάρτηση f .

71. Αν $f(f(x))=x^2-x+1, x\in R$.Να αποδειξετε ότι **ι)** f(1)=1

Ιι)αν $g(x)= x^2 - x + f(x)+1$, η g δεν είναι 1-1

70. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει

$f(f(x))=ax+\beta,$ για κάθε $x\in R_+^*$ Να αποδειχθεί ότι :

Α) η f είναι "1-1" Β) η f έχει σύνολο τιμών το R

Γ) $f(ax-\beta)=af(x)-\beta,\quad x\in R$ Δ) $f\left(\dfrac{f(x)+\beta}{a}\right)=x,$ για κάθε $x\in R$

71. Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει : $f(x)+e^{f(x)}=-x^5,$ $\forall x\in R$. Να δείξετε ότι :

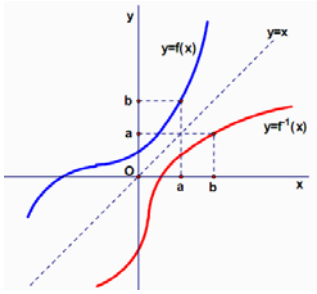
- Η f είναι1-1.
- Η f δεν μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα.

72. Αν η f , g είναι 1-1 να δειξετε ότι η $g\circ f$ είναι 1-1

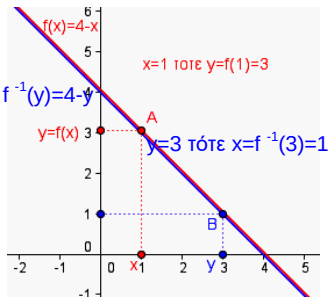
73. Δίνονται οι συναρτήσεις f: $A\to R$ και g : $f(A)\to R$. Αν η συνάρτηση g o f είναι 1 -1, να αποδείξετε ότι: **i)** η f είναι 1 - 1 **ii)** η g είναι 1-1

I. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Αντίστροφη μιας «1-1» συναρτήσεως $f: A \to f(A)$ θα ονομάζουμε μία συνάρτηση $f^{-1}: f(A) \to A$ αν για κάθε $x \in A$ για κάθε $y \in f(A)$ ισχύει $f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = x$



- Για να έχει αντίστροφη μία συνάρτηση πρέπει να είναι ¨1-1¨ (f αντιστρέψιμη $\Leftrightarrow$ f "1-1")
- Το $D_{f^{-1}} = R_f$ και το $R_{f^{-1}} = D_f$
- Η f μπορεί να έχει αντίστροφη ακόμη και αν δεν είναι γνησίως μονότονη, αρκεί να είναι ¨1-1¨.
- Δύο αντίστροφες συναρτήσεις έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας
- Οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$
- Τα κοινά σημεία δύο αντίστροφων συναρτήσεων θα βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = x$, αν η f είναι γνησίως αύξουσα.



Υπάρχουν συναρτήσεις (συνήθως γνησίως φθίνουσες) των οποίων οι γραφικές παραστάσεις ταυτίζονται με αυτές των αντιστρόφων τους π.χ. $f(x) = \frac{1}{x}$ και $f(x) = 4 - x$ αυτές ονομάζονται αυτοαντίστροφες. Για αυτές τις συναρτήσεις ισχύει $f(x) = f^{-1}(x)$ και έχουν άπειρα κοινά σημεία.

Βασικές σχέσεις: $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ και $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ και $f^{-1}\left(f^{-1}(x)\right) = f(x)$

Μεθοδολογία:

Για να βρούμε την αντίστροφη μιας συνάρτησης

1.Αποδεικνυουμε ότι η συνάρτηση είναι ¨1-1¨

2. Στον τυπο της συναρτησης θετουμε $f(x) = y$ και επιλύουμε τον τύπο της f ως προς x

3. λαμβάνουμε υπόψη τους περιορισμούς για το x και βρισκουμε Τους περιορισμούς για το ψ αρα βρισκουμε το συνολο τιμων f(A) της f που είναι το πεδιο ορισμου της f^{-1}

4. Στον λυμενο ως προς x τυπο της f θετουμε οπου x το ψ και βρισκουμε την $f^{-1}(x)$

ΠΡΟΣΟΧΗ Στις συναρτήσεις πολλαπλού τύπου ελέγχουμε αν ο κάθε τύπος αποτελεί ¨1-1¨συνάρτηση και μετά αν τα σύνολα τιμών τους δεν

έχουν κοινά σημεία. Αν τα σύνολα τιμών τους έχουν κοινά σημεία η συναρτηση Αντιστρεφεται μονο κατά κλαδους

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

74. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+1$

α. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1

β Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ. . Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και συνέχεια να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}

75. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

α. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία .

β. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και συνέχεια να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}

76. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2+\ln(e^x+1)$

α. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία .

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και συνέχεια να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}

77. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να δείξετε ότι ορίζετε η f^{-1} την οποία να ορίσετε.

γ) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι περιττές.

δ) Να δείξετε ότι γενικά ισχύει : Αν η f είναι περιττή και 1-1 τότε και η f^{-1} είναι περιττή.

78. Να δείξετε ότι καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της . $f(x)=2-\ln(3+2e^x)$, $f(x)=3-\sqrt[3]{3-e^{2x}}$,
$f(x)=2x^{2015}+5$

79. Έστω $f:[3,+\infty)\to R$ μια συνάρτηση με $f(x)=x^2-6x+10$

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

2.Να βρείτε την αντίστροφη της f

3.Να δείξετε ότι υπάρχει συνάρτηση $g:[1,+\infty)\to R$ τέτοια ώστε $g(f(x))=x$ για κάθε $x\ge 2$

80. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)>0$ και $\ln(f(x))f(x)=e^x$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι : 1. $f(x)>1$ για κάθε $x\in R$

2. Η f είναι γνησίως αύξουσα

3.Η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της

81. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathrm{R}\to R$ για την οποία ισχύει: $f(x)-2f^3(x)+x-1=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Α) Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται

Β) Να βρεθεί η f^{-1}.

82. Έστω ότι f(x+y)=f(x)+f(y) για κάθε x,y στο R. Να δείξετε ότι

α. Αν μοναδική ρίζα της f είναι το 0 τότε η f είναι 1-1 συνάρτηση.

β. Αν ισχύει το προηγούμενο τότε $f^{-1}(a+b)=f^{-1}(a)+f^{-1}(b)$ για κάθε a,b στο R.

(Θεωρείστε ότι f(R)=R)

(Βρείτε πρώτα πόσο κάνει το f(x-y))

83. Έστω $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε x στο R^*_+ . Τότε

α. Αν η f έχει ρίζα ρ=1 δείξτε ότι έχει άπειρες ρίζες*.

β. Αν η f έχει μοναδική ρίζα το 1 να δείξετε ότι είναι 1-1 συνάρτηση.

γ. Αν η f είναι 1-1 και a,b θετικοί αριθμοί τότε $f^{-1}(a+b)=f^{-1}(a)f^{-1}(b)$.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ $f(x)=x$, $f^{-1}(x)=x$, $f(x)=f^{-1}(x)$

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της f με την f^{-1}:

Α) **αν f είναι γνησίως αύξουσα** _λύνουμε την εξίσωση $f(x)=x$ ή την $f^{-1}(x)=x$ ή την $f(x)=f^{-1}(x)$

Β) **αν f δεν είναι γνησίως αύξουσα** λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων $y=f(x)$ και $y=f^{-1}(x)$ με $x\in D_f\cap D_{f^{-1}}$

84. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(R)=R$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα .

1.Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να εξετάσετε την f^{-1} ως προς τη μονοτονία .

2.Αν $f(0)=-1$ να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f^{-1} .

3. Αν $f(2)=-3$ *και* $f(1)=-2$, να λύσετε την ανίσωση :

$$f^{-1}(1+f(x^2+x))<1 .$$

85. Αν τα σημεία : *A(3,2)* και *B(5,9)* ανήκουν στην γραφική παράσταση της συνάρτησης *f*, τότε να λυθούν: η ανίσωση : $f(-2+f^{-1}(x^2-8x))<2$ όταν f γνήσια αύξουσα και η εξίσωση : $f(2+f^{-1}(x^2+x))=9$ όταν είναι γνήσια

φθίνουσα

86. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3e^x+x-3$, με $x\in\mathbb{R}$

- Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το $f^{-1}(0)$
- Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$
- Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(1+f(x)-x)<1$

87. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x-1$

- Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται.
- Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $\psi=x$.
- Να βρείτε τα x για τα οποία $f(x)=f^{-1}(x)$.
- Να μελετήσετε την μονοτονία της f
- Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(3x+2)>1$

88. Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία A(3,2) και B(5,9).

α) Βρείτε το είδος της μονοτονίας της f

β) Εξετάστε αν ορίζεται η συνάρτηση f^{-1}

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2+f^{-1}(x^2+x))=9$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(f^{-1}(x^2-8x)-2)<2$

89. Έστω f γνήσια αύξουσα στο R τότε

Α) αν $f(f(x))=x$, $x\in R \Leftrightarrow f(x)=x,\ \forall x\in R$

Β) τα σημεία τομής των $C_f, C_{f^{-1}}$ βρίσκονται πάνω στην πρώτη διχοτόμο $y=x$

Γ) δώστε ένα παράδειγμα που να δείχνει ότι αν η συνάρτηση ήταν γνήσια φθίνουσα το Β) δεν ισχύει (Η άσκηση αυτή είναι σχεδόν **θεώρημα** και χρησιμεύει αργότερα στην επίλυση άλλων ασκήσεων)

90. Έστω $f: R\to R$ ώστε $f(x)=x^5+x-1$

Α) Να δείξετε ότι f ένα προς ένα συνάρτηση.

Β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$.

91. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+x-32$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}.

92. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3+x-16$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f^{-1} και της ευθείας $y = x$ αν σύνολο τιμών της f το R .

93. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1) + x - 2$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα .

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} αν σύνολο τιμών της f το R .

94. Να βρείτε την αντίστροφη της $f(x) = -x^3$ και τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων τους.

95. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln^5 x + 3x - 2$, με $x > 0$

Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.

Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$

Α. ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

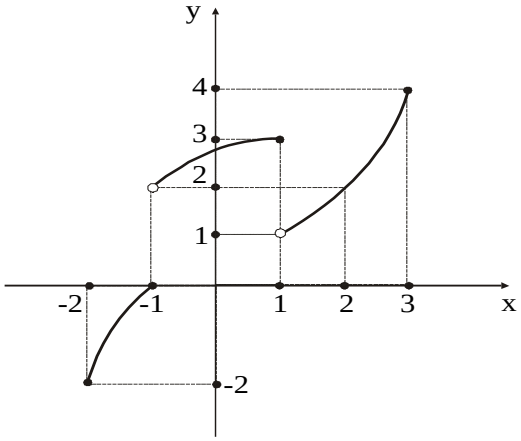
1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ β) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ δ) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

ε) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ στ) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

ζ) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$



Β. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ με $g(x_0) \neq 0$

2. Να βρειτε τα ορια : **Ι)** $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x+5}{x^2+1}$ **ιι)** $\lim\limits_{x \to -1} (\sqrt[5]{(x+3)^4})$ **ιιι)** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{|x-2|+5}{x^2-6}$

ιν) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{|x+2|+x^3+2x+1}{|x+3|-1}$ **ν)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4+3x-4}{x^3-1}$

Γ. ΜΟΡΦΗ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Ι. ΟΡΙΟ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

3. Βρειτε τα ορια : **i)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ **ii)** $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$

iii) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)\sqrt{3-x}}{x^2-4}$ **iv)** $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{x^2-(\alpha+1)x+\alpha}{x^3-\alpha^3}$

4. Να βρεθούν τα όρια *α)* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{2x^2+3x-5}$ β) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

ΙΙ. ΟΡΙΟ ΑΡΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

5. Να βρειτε τα ορια: **i)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{3x+2}-\sqrt{5x-2}}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+3x}-2}{3-\sqrt{5x+4}}$ **iii)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

6. Να βρειτε τα ορια: **i)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x}-\sqrt{3+x}}{x-1}$

iii) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-\sqrt{2-f(x)}}{\sqrt{f(x)}-1}$ όταν $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=1$ **iv)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$.

7. Να βρεθούν τα όρια **α)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2x^2-x-1}}{x^3-1}$

ΙΙΙ. ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

8. Να βρειτε τα ορια: **Ι)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-1|-|x-3|}{x^2-4}$ **ιι)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x^3-3x-1|+x}{|x^3+5x+4|-2}$

Ιιι) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9-\sqrt{x^2-6x+9}}{|x-1|-2}$ **ιν)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|f^2(x)-4|+|3-f(x)|-5}{f^2(x)-1}$, αν $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=1$,

9. Να βρειτε τα ορια: **ι)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^3+x-3|-1}{|x+1|-2}$ **ιι)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x^2-1|-x^2+x+2}{\sqrt{x+2}-1}$

Ιιι) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x^5-5x+1|-|x^3-3x+1|}{x}$

Δ. ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ

10. Δινεται η συναρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-1, \text{ αν } x<-1 \\ \dfrac{x+1}{x-1}, \text{ αν } x\in[-1,1)\cup(1,3) \\ \dfrac{3x-1}{x^2-7}, \text{ αν } x\in[3,+\infty) \end{cases}$ Να υπολογισετε τα ορια

ι) $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$ **ιι)** $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$ **ιιι)** $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ **ιν)** $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$

11. Να βρεθει το όριο $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

α) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{αν } x<1 \\ 7 & \text{αν } x=1 \\ \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1} & \text{αν } x>1 \end{cases}$

12. Να βρεθούν τα α και β ώστε η συνάρτηση

$f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x+\beta & x\in[0,2] \\ x^2+1 & x\in(2,3] \\ 2\alpha x-3\beta & x\in(3,4] \end{cases}$ να έχει όριο στο x=2 και στο x=3

Ε. ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

13. Αν $-x^2\le f^2(x)-4f(x)\le 2x^2-5x-2$ να βρεθει το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

14. Αν $\left|5f(x)-3x^2\right|\le 6|x|,\ x\in R$ βρειτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

15. Αν για τη συναρτηση $f:R\to R$ ισχυει η σχεση $x^3+1\le f(x)+x\le x^2+x$, να υπολογισετε τα ορια **i)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}$ **iii)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)-1}{\sqrt{x+3}-2}$

16. Αν $x^3+1\le f(x)+kx\le x^2+x,\ x\in R$ και το διαγραμμα της f περναει από το σημειο $A(1,1)$ να βρεθει το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

17. Αν $3\sqrt{x^2+5}-9\le(2x-4)f(x)\le 4(x-\sqrt{2x})$ να βρεθουν τα ορια $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-1}{\sqrt[3]{f(x)}-1}$

18. Αν για τη συναρτηση $f:R\to R$ ισχυει $x\le f(f(x))\le f(x),\ x\in R$ να βρεθει το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(f\circ f)^{v+1}(x)-(v+1)f(x)+v}{(x-1)^2},\ v\in N^*$

19. Αν $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2 \\ |f(x)-g(x)|\le|x^2-1|\end{array}\right\}$ βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

20. Α) Αν είναι $\lim\limits_{x\to\alpha} f^2(x)=0$, τότε: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=0$ Β) Αν $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(f^2(x)+g^2(x)\right)=0$ βρείτε τα $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x), \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$

(**Βασική άσκηση** μην νομίσετε εξαρχής ότι ξεχωριστά τα όρια υπάρχουν)

21. Αν $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=0\\ f(x)>0, g(x)>0\end{array}\right\}$ βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

ΣΤ. ΟΡΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

22. Να βρείτε τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 5x}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi 2x}{x}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}$ iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi 3x}{\eta\mu 2x}$

v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x^2+5x}$ vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{\sqrt{3x+4}-2}$

23. Να υπολογισετε τα ορια **ι)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(\kappa x)+\eta\mu(\nu x)}{x^2+x}$ **ιι)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\eta\mu^2 x}-\dfrac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}\right)$

ιιι) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+25}-5}{\eta\mu|x|}$ **ιν)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\eta\mu^4 x-\sigma\upsilon\nu^4 x}{\varepsilon\varphi x-1}$ **ν)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\varepsilon\varphi x}-\sqrt{1-\varepsilon\varphi x}}{\eta\mu x}$

24. Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν ώστε: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x+\eta\mu 2x+\ldots+\eta\mu\nu x}{x}=28.$

25. Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν ώστε: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x\times\eta\mu 2x\times\ldots\times\eta\mu\nu x}{x^\nu}=120$

26. Να υπολογισετε τα ορια **ι)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^\nu\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$ **ιι)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu x.\sigma\upsilon\nu^\nu\dfrac{1}{x}\right)$

27. Αν $\left|f^3(x)-8x^3\right|\le x^3-\eta\mu^3 x$ να βρεθει το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

28. Αν $\left|xf(x)-x^2\right|\le\eta\mu^3 x.\eta\mu\dfrac{\pi}{x^3}, x\in R^*$. Να βρεθει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

29. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$, να βρεθει ο $\alpha\in R$, ωστε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(3x)+f(-x).\eta\mu(\alpha x)}{4x^2-\eta\mu^2 x}=7$

30. Αν $f(x)\,\eta\mu x\ge x^2\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}, x\in R$ και $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=a$, να βρειτε τον α.

Ζ .ΟΡΙΑ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ Θ.Λ.Λ

31. **ι)** Αν $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)-x^2+x-5)=7$, να βρεθει το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

ιι) Αν $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)f(x)=5$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)}{x^2-3x+2}=4$, να υπολογισετε το $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)g(x)\right]$

32. **ι)** Αν $\lim\limits_{x\to 2}[f(x)-2g(x)]=3$ και $\lim\limits_{x\to 2}[2f(x)+g(x)]=6$, υπολογιστε τα $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

Ιι) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu(6x)}=1\\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)g(x)=10\end{array}\right\}$ βρείτε τα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}, \lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)$

Ιιι) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\eta\mu 3x-xg(x)}{4x}=5\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\eta\mu 3x+xg(x)}{4x}=7\end{array}\right\}$ βρείτε τα $\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\leftrightarrow 0} g(x)$

33. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{\sqrt{3x+4}-2}=5$ βρειτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

34. Αν f(x)+f(x-α)=0 , $a\neq 0$. Αν $\lim\limits_{x\to \alpha} f(x)=2$, τοτε βρειτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

35. Αν f συναρτηση ορισμενη στο R , f(α+β) = f(α)+f(β) για κάθε α,β ∈R

Και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=4$ να βρειτε το $\lim\limits_{x\to \xi}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}, \xi\in R$

36. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f^2(x)}{x^2}+g^2(x)\right)=0$, τοτε να δεχθει ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$

37. Εστω το πολυωνυμο $\pi(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x, \gamma\neq 0$ αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

να βρεθει το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(f\circ\pi\circ f)(x)}{x}$

38. Αν $f^2(x)-2f(x)+\sigma\upsilon\nu^2 x\leq 0$ για κάθε $x\in R$, να αποδειχθει ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

Η. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

39. Αν $f(x)=\dfrac{x^2+2\alpha x+\beta-5}{x-3}$ να βρεθουν οι α,β ∈R ώστε $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=12$

40. Να βρειτε τους πραγματικους αριθμους α,β ώστε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\alpha x+\beta\sqrt{x}-2}{x-1}=5$

41. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{kx^3+(\lambda+2)x+4}{(x-1)^2}=L\in R$, να βρεθουν τα κ,λ, L.∈R.

42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^3+8x^2+3x-2}{x^2-\beta}$.Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το A(0,1/2) και $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lambda$ να βρεθούν τα α,β και λ

43. Αν $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+\left(5+2\alpha^2\right)x+\beta-1}{x-\frac{1}{2}}=15$, να βρείτε τα α,β∈R

44. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο R με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=2$. Να βρεθεί ο μ ∈ R : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\eta\mu x)f(x)+\mu x^2}{2\eta\mu^2 x-3xf(x)}=-4$

ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ x_0

Ι . ΜΟΡΦΗ $\dfrac{\alpha}{0}$

45. Να βρειτε αν υπαρχουν τα ορια

Ι) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+3}{(x-2)^2}$ **ιι)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-2}{|x-1|}$ **ιιι)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right)$

46. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τα παρακάτω όρια

α) της $f(x)=\dfrac{x-2}{(x-1)(x+2)}$ στο $x_0=-2$ **β)** της $f(x)=\dfrac{x^3+x^2}{|x+1|}$ στο $x_0=-1$

47. Να βρειτε αν υπαρχουν τα ορια **i)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{x^2-4}-\dfrac{x}{x^2-2x}\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{\eta\mu x}$

ΙΙ. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

48. Για τις διαφορες τιμες των παραμετρων να βρειτε τα ορια

I) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cx^2+2x+d}{x}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{\sqrt{x-\beta}-\sqrt{x-\alpha}}{x^2-\alpha^2}$

Iii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+(b+2)x-16}{x^2-4}$ **iv)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{c^2-\sqrt{c^2-x^2}}{x}$, $c\neq 0$

49. Να βρειτε τα α , $\beta \in R$ ώστε $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\alpha x^2+x+2}{x-1}+\beta x\right)=4$

50. Να βρειτε τα α , β , $\gamma \in R$ ώστε $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha x^3+(\beta+1)x+\gamma+2}{(x-2)^2}=6$

III. ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ Θ.Λ.Λ

51. Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1+|x|}{f(x)}=-\infty$ Να βρειτε το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

52. Αν $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)\cdot \eta\mu^2(\pi x)}{(x+\alpha)^2}=+\infty$ Να βρειτε το $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$

53. Αν η συναρτηση f είναι ορισμενη στο R και ισχυει $\lim\limits_{x\to 3}\left(|x-3|f(x)\right)=2$ να υπολογισετε τον αριθμο m ώστε $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(m^2+1)f^3(x)-f^2(x)+3}{mf^3(x)+f^2(x)+2}=2.$

54. Αν η συναρτηση f είναι ορισμενη στο R και ισχυει $\lim\limits_{x\to}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ να υπολογισετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+bf(bx)+\frac{1}{x}f(x^2)}{x}$,

55. Οι συναρτησεις f και g είναι ορισμενες στο R με $f(x)>0$ και $g(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Αν ισχυουν $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=1$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$ να υπολογισετε τα ορια $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

56. Εστω μια πολυωνυμικη συναρτηση P βαθμου ν = $g^{-1}(e^2)$ με $g(x)=e^x$. Αν η C_p διερχεται από το O(0,0) και ισχυουν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{P(x)}{x}=-1$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{P(x)}{x-1}=1$, τοτε **I)** Να βρειτε τον τυπο της P

ΙΙ) Να βρειτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{P(\sigma\upsilon\nu x)+x-2}{\sqrt{x^2+1}-1}$

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Ι. ΕΝΝΟΙΑ ΟΡΙΟΥ

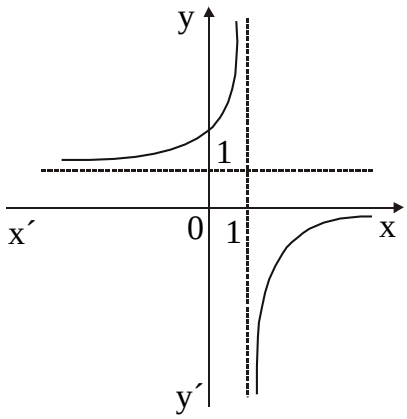
57. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α)Να βρείτε τα όρια:

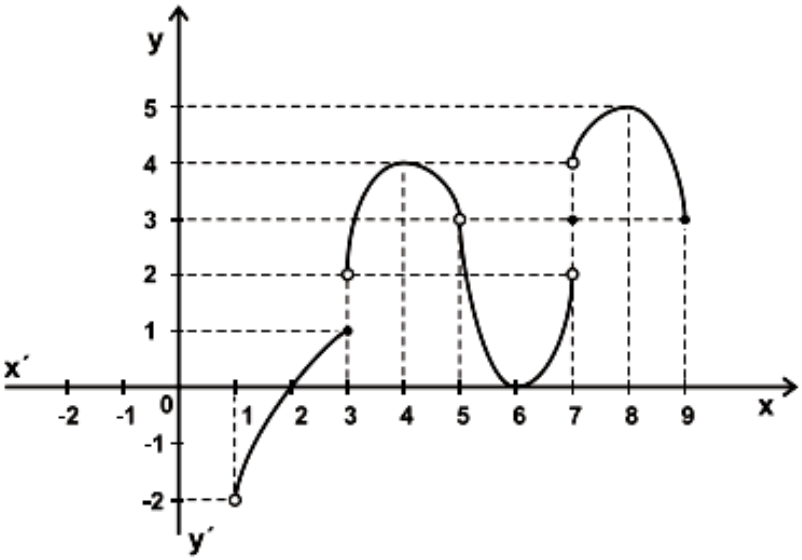
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$,

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

β) Τι συμπεραίνετε για το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{f(x)}$;



58. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

Β2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$.

Μονάδες 4

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{f(x)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 6} \frac{1}{f(x)}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 8} f(f(x))$

Μονάδες 9

Β4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Β5. Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_0)=0$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας **Μονάδες 2**

ΙΙ. ΟΡΙΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ

59. Να βρεθουν τα ορια στο $+\infty$ των παρακατω συναρτησεων.

I) $f(x)= -3x^4+5x^2+1$ ιι) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^4-x^3+2\right)$ ιιι) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3+4x^2+3x+1\right)$

60. Να βρεθουν τα ορια στο $+\infty$ και στο $-\infty$ των παρακατω συναρτησεων.

I) $f(x)=(2\alpha-1)x^3+(\alpha-1)x^2+3x-2$ $f(x)=(\alpha^2-\alpha-2)x^3+2x^2-6x-7$

ΙΙΙ. ΟΡΙΟ ΡΗΤΗΣ

61. Να βρεθούν τα όρια **α)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^3+x-2}{3x^3+5}$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2-5x^3}{2x^5+1}$

62. Να βρεθουν τα ορια στο $+\infty$ και στο $-\infty$ των παρακατω συναρτησεων.

i) $f(x)=\frac{x^2-|x-5|}{x^2+|x-3|}$ ii) $f(x)=\frac{|x^2+2x|-3x+1}{|4x^2-1|+|x|}$

63. Να υπολογίσετε το όριο για τις διάφορες του μ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(\mu-2)x^3+2x-1}{(\mu-1)x^2+3}$

64. Αν $f(x)=\frac{x^3-4x^2+3}{x^2+4}-\alpha x+\beta$ να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

65. Για τις διαφορες τιμες του $\alpha\in R$ να υπολογισετε τα ορια στο $\pm\infty$ των παρακατω συναρτησεων. **I)** $f(x)=\frac{(2\alpha+4)x^5+2\alpha x^4-5}{(\alpha+3)x^4-7x^3+3}$

II) $f(x)=\left(\frac{2x^2+6x-2}{3x-2}+\alpha x-1\right)$ **III)** $f(x)=\frac{(\alpha^2-\alpha-2)x^3-(\alpha-1)x^2+3x-9}{(\alpha-1)x^2+3x-7}$

III. ΟΡΙΑ ΑΡΡΗΤΩΝ

66. Να βρεθούν τα όρια

I) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+5x-3}-\sqrt{x^2+1}\right)$, II) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{4x^2+3x}\right)$

67. Να βρεθουν τα ορια

ι) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x-5}+\sqrt[5]{x^5-4x+2}}{\sqrt[7]{x^7-8x^6+2}+6x-3}$ ιι) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x+6}+7-2x}{\sqrt[3]{x^6-4x+9}+x-7}$

68. Να βρειτε τα ορια

ι) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$ **ιι)** $\lim\limits_{x\to-\infty}[x(\sqrt{x^2+1}-x)$ **iii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+5}-x+2)$

iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2-5x+7}+3x-2)$ **v)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x-5}-\sqrt{x^2-4x+2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+7}}$

69. Να υπολογισετε τα ορια

ι) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{16x^2-5x+3}-5x+2$ **ιι)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^4+6x-1}-4x^2+4+\sqrt{9x^4+2x^3-2})$

ιιι) $f(x)=(\sqrt{x^2-4x+1}+2-\alpha x)$ **iv)** $f(x)=(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{4x^2+3}+\alpha x)$

70. Αν $3-\sqrt{4x^2+5x-3}\le f(x)-2x\le 3-\sqrt{4x^2-x+6}$, να βρεθει το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

71. Να βρεθουν τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x-3}+2ax+\beta)=3$

72. Αν για κάθε $x>0$ ισχυει $\left|(3+x^4)f(x)-3x^4\right|\le x^2+1$, να δειξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$

73. Δινεται η συναρηση $f:(0,+\infty)\to R$, $\mu\varepsilon$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf(x)+2x-3}{x+4}=6$ να βρειτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

74. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x+\sqrt{x}}=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-\sqrt{x})g(x)=5$. Να βρεθει το $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)g(x)]$

IV. ΟΡΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ

75. Να υπολογισετε τα ορια **ι)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}\eta\mu\frac{1}{x})$ **ιι)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^\nu\eta\mu\frac{2}{x^6})$

ιιι) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}$ **ιν)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3-2x^2\eta\mu\frac{1}{x}+6}{4x^3+5x^2\eta\mu\frac{6}{x}+12}$

76. Να βρειτε το $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{16+x^2}-4)\eta\mu\dfrac{4}{x}$

77. Να βρεθούν τα όρια I) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}$ και II) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+\eta\mu x)$

78. Να βρεθούν τα όρια I) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$ II) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+\sigma\upsilon\nu x}{x^2-\sigma\upsilon\nu x}$

79. Να βρεθούν τα όρια

I) $\lim\limits_{x\to+\infty}\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right)$,II) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2.\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right)$, III) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x.\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$

80. Βρείτε τα παρακάτω όρια:

I) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x.\eta\mu x}{x^2+1}$ **II)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|x^3\eta\mu\frac{1}{x}-2x^2+1\right|+x+2}{x^2-x+2006}$

V. ΟΡΙΑ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ –ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ

81. Να υπολογισετε τα ορια

ι) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2^x-4\,3^x+2}{3^{x-2}+2^{x-1}}$ **ιι)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\alpha^{x+2}-4^x+3}{6\,4^{x-2}+\alpha^{x+3}}$, α > 0

ιιι) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\alpha^{x+2}-\alpha^{-x}}{\alpha^x+\alpha^{-x}}$ **ιν)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x}{1+3^{x+1}}$ **ν)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4^x-3^{x+1}}{4^x+3^{x-1}}$

82. Αν f (x) = ln $\dfrac{x-3}{2x}$, να βρείτε: **α)** το πεδίο ορισμού της f

β) τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}$ f (x), $\lim\limits_{x\to-\infty}$ f (x), $\lim\limits_{x\to3}$ f (x), $\lim\limits_{x\to0}$ f (x).

83. Δίνεται η συνάρτηση f (x) = $\ell n\left(\dfrac{x^2+\kappa^2}{x}\right)$, κ > 0. **α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. **β)** Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to0}$ f (x), $\lim\limits_{x\to+\infty}$ f (x). **γ)** Να δείξετε ότι η f (x) –lnx > 0 και να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}$ (f (x) - ℓ nx).

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΟΡΙΑ

84. Το ποσοστό της ανεργίας σε μια χώρα είναι 12% και εκτιμάται ότι σε x έτη από τώρα θα δίνεται από τον τύπο $f(x) = \frac{16x + 36}{2x + 3}$. **α)** Να αποδείξετε ότι: $f(x) = 8 + \frac{12}{2x + 3}$. **β)** Να εξηγήσετε γιατί η ανεργία δεν θα πέσει ποτέ κάτω από το 8%. **γ)** Μετά από αρκετά χρόνια, ποιο θα είναι περίπου το ποσοστό ανεργίας;

85. Έστω $P(x) = x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}x^{\nu-2} + \ldots\ldots\ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και

$Q(x) = x^\nu + \beta_{\nu-1}x^{\nu-1} + \beta_{\nu-2}x^{\nu-2} + \ldots\ldots\ldots + \beta_1 x + \beta_0$ και έστω ακόμη $H(x) = \sqrt[\nu]{P(\chi)} - \sqrt[\nu]{Q(x)}$, i) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της H περιέχει ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = \frac{\alpha_{\nu-1} - \beta_{\nu-1}}{\nu}$.

86. Έστω πολυώνυμο f(x) τέτοιο ώστε f(0) = -4,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x+\alpha} = 2$, και $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)}{x+\alpha} = 3$, όπου $\alpha, \beta \in \Re$ με $\beta \neq 0$. Να βρείτε το πολυώνυμο f(x) και τις σταθερές α,β. (*University of New York*).

87. Α) Δίνεται η συνάρτηση f: $\Re \to \Re$ με τύπο $f(t) = \sqrt{t^2 + (x^2 + y^2)t + 2} - \sqrt{t^2 + 4yt + 3}$, όπου (x,y) είναι οι συντεταγμένες σημείου Μ του επιπέδου. Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$, τότε το σημείο Μ ανήκει σε κύκλο.

Β) Δίνεται η συνάρτηση f: $\Re \to \Re$ με τύπο $f(t) = \sqrt{t^2 + 2xt + 3x^2} - \sqrt{t^2 - 2yt + 5y^2}$, όπου (x,y) είναι οι συντεταγμένες σημείου Μ του επιπέδου. Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = -2$, τότε το σημείο Μ ανήκει σε ευθεία. Γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας και του κύκλου.

88. Να βρεθεί το πολυώνυμο P(x) αν ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{x^2 - 2x + 1} = 3$ και $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{P(x)}{x^2 - 2x + 1} = 3$, για κάθε $x_0 \in \Re$.

89. Δίνεται η συνάρτηση f: $\Re \to \Re$ για την οποία ισχύει: $f^3(x) + f(x) = x^3$ για κάθε $x \in R$

I) Να δειχθεί ότι η f είναι 1-1. ii)Να λυθεί η εξίσωση f(x) = 0.

iii) Για $x > 0$ να δείξετε ότι $f(x) < x$. Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^3}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

90. Δίνεται η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=\dfrac{x^{\nu}+ax^2+\beta}{x-1}$ $\nu\in N$ και $\alpha,\beta\in R$ για την οποία $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=2$ και η συνάρτηση f: $\Re\to\Re$ για την οποία

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda$ και $f^3(x)-2xf^2(x)-4\alpha x^2 f(x)+8\beta x\eta\mu^2 x=0$ για κάθε x.

α) Να βρείτε τα α, β ως συνάρτηση του ν. β) Αν α, β αρνητικοί, να βρείτε τον $\lambda\in\Re$.

91. Έστω η συνάρτηση $f:(-\infty,0)\to R$ με $f(x)=x^7+2x^4+5x^2+x\eta\mu^2x+x\sigma\upsilon\nu x$ (1)

Να βρείτε τα όρια (α) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$

92. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$ για τις οποίες ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x^2}{x^2+2}=3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x^2}=2$. Να βρείτε τον $\alpha\in R$ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha+1)f(x)+g(x)+3\sigma\upsilon\nu^2x}{f(x)+g(x)+\eta\mu x}=6$

.

Α . ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Ι. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΤΟ x_0

1. Να μελετηθούν ως προς την συνέχεια στο $x_0=0$ οι συναρτήσεις:

i) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|(x-1)}{x}, & x\neq 0\\ 1\ , & x=0\end{cases}$ ii) $f(x)=\begin{cases}\eta\mu\chi+\dfrac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu 2\chi}}{\eta\mu\chi}, & x\neq 0\\ \sqrt{2}\ , & x=0\end{cases}$

iii) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|\chi-1|-|\chi+1|}{\chi}, & x\neq 0\\ -2\ , & x=0\end{cases}$ iv) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu 9\chi-\eta\mu 5\chi}{\chi}, & x\neq 0\\ 4\ , & x=0\end{cases}$

2. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2\eta\mu\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 1 & ,x=0\end{cases}$: στο $x_0=0$

3. Να προσδιορίσετε το $\alpha\in\Re$, ώστε η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu\chi}{\pi-\chi}+2\alpha-\chi, & x<\pi\\ \alpha\chi-1\ , & x\geq\pi\end{cases}$

να είναι συνεχής στο $x_0=\pi$.

4. Να εξετασθει αν είναι συνεχεις στο $x_0=1$ οι συναρτησεις

ι) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}, & x\neq 1\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}$ **ιι)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x<1\\ 2, & x=1\\ \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}, & x>1\end{cases}$ **ιιι)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{x-1}, & x>1\\ \dfrac{5}{6}, & x=1\\ \dfrac{5\pi(1-x^2)}{12\eta\mu(\pi x)}, & 0<x<1\end{cases}$

5. Αν ησυνάρτηση f ορισμένη στο $\Re$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ και $f(0)=0$, να δείξετε

ότι η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}f(x)\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ είναι συνεχής στο $x_0=0$.

ΙΙ. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΤΟ D_f

6. Να μελετηθουν ως προς την συνεχεια οι συναρτησεις

i) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4\eta\mu\frac{1}{x}}{\eta\mu x}, & x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)\\ 1, & x=0\end{cases}$ **ii)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)-1}{x}, & x<0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{\eta\mu^7 3x}{x^7}, & x>0\end{cases}$

7. Να μελετηθουν ως προς την συνεχεια οι συναρτησεις

ι) $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x+\dfrac{\sqrt{2}\cdot\eta\mu\chi}{\sqrt{2\eta\mu x}}, & x>0\\ 1, & x=0\\ x^{\nu}\eta\mu\dfrac{1}{x}+\dfrac{\eta\mu(\eta\mu\kappa x)}{\kappa x}, & x<0\end{cases}$ **ιι)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu(\alpha x)}{\eta\mu 2x}, & \dfrac{-\pi}{4}\le x<0\\ x^2+2x+\alpha^2-3, & 0<x\le\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$

8. Για την συνάρτηση f : R → R ισχύει $f^5(x)+f(x)=x$ για κάθε x ∈R. Δείξτε ότι η f είναι συνεχή ς στο $x_0=0$

9. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο ℜ .Αν για κάθε x∈R ισχύει

$\eta\mu 2\chi-\chi^2\le\chi f(\chi)\le\eta\mu 2\chi+\chi^2$ και η f είναι συνεχής στο $x_0=0$,να βρεθεί το f(0).

10. Να βρεθουν οι α,β,γ ∈ R ώστε να είναι συνεχης η

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+1}{(x-1)^2}, & x\ne 1\\ 2, & x=1\end{cases}$$

11. Να μελετηθει ως προς τη συνεχεια η συναρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+7^x}, & x\le 0\\ \dfrac{2^x-3^x}{1+7^x}, & x>0\end{cases}$

και Να υπολογισθουν τα ορια $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

12. Για τις διάφορες τιμές του a κάντε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και μελετήστε την συνέχειά της. $f(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{(1+x)^2+(\alpha+x)e^{\nu x}}{1+e^{\nu x}}$ $(\nu\in R_+^*)$

13. Αν $|f(4x-3)|\le|4x-5|$ να δειχθει ότι η f είναι συνεχης στο 2.

14. Αν για την ορισμενη στο R συναρτηση f ισχυει $f^3(x)+3f(x)+1=x$ να δειξετε ότι είναι 1-1 και συνεχης

15. Αν η f είναι περιττη και συνεχης στο $x_0\neq 0$ να δειχθει ότι είναι συνεχης και στο $-x_0$

III. $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)$, f ΣΥΝΕΧΗΣ

16. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=1$ και ισχύει $3x-x^2-2\le(x-1)f(x)\le x^2-x$ για κάθε $x\in\Re$ να υπολογίσετε την τιμή f(1).

17. Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ που είναι συνεχής στο $x_0=0$ και για την οποία ισχύει $x\cdot f(x)+|\eta\mu x|\le|x|$,για κάθε $x\in\Re$. Να υπολογίσετε την τιμή f(0).

18. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $\Re$ για την οποία ισχύουν:
$f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\ell,\ell\in\Re$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

19. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $\Re$ για την οποία ισχύουν:
$f(0)=3$ και. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-3-\varepsilon\varphi x}{x^2-x}=5$ **i)** Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$
ii) Να βρείτε τα όρια: α) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-3}{x}$ και β). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|2f(x)-3|-3}{x}$

20. Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ που είναι συνεχής στο $x_0=1$ με.
$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-5}{x-1}=10$
i) Να υπολογίσετε την τιμή f(1).**ii)** Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1=-1$.
iii) Να βρείτε το όριο. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)+5}{x+1}$

21. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2 με f(3)=10 και για κάθε $x\in\Re$ ισχύει f(5-x)=f(x), τότε: i) Να προσδιορίσετε την τιμή f(2), ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=3$.

22. Να βρεθεί ο τυπος της συνεχους συναρτησης $f: R\to R$ που ικανοποιει τη σχεση $xf(x)-(x-2)(x-3)=\eta\mu(3x)-6$, $x\in R$.

23. Αν $f(x)-1=\sqrt{2}\left[\eta\mu x\, f(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]$ και η f συνεχης στο R να βρεθει το $f(\frac{\pi}{4})$

24. Η συναρτηση f είναι συνεχης στο R και $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-\sqrt{x+8}}{x-1}=7$ να βρεθει το $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}$

25. Αν η συνεχης συναρτηση $f: R\to R$ ικανοποιει τη σχεση

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1+x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{x}<f(x)<\frac{\eta\mu x}{2x},\ x\in R^*$$ να βρεθει το f(0).

26. Αν $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=3$, να βρεθει ο πραγματικος αριθμος α ώστε η συναρτηση

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{xf(3x)+f(-x)\eta\mu(\alpha x)}{4x^2-\eta\mu^2x}, & x\neq0\\ 7, & x=0\end{cases}$$ να είναι συνεχης στο 0.

27. Αν η για τη συναρτηση f ισχυει $|f(2+k)|\le|k|^3, \forall k\in R^*$ και $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)-3}{x-3}$, να βρεθει το f(3) αν η f είναι συνεχης στο $x_0=3$.

28. Αν $x^3+1\le f(x)+kx\le x^2+x$, $f(1)=1$ να βρεθουν οι κ, λ $\in R$ ώστε η συναρτηση $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-1}{x-1}, & x\neq1\\ \lambda, & x=1\end{cases}$ να είναι συνεχης στο $x_0=1$

29. Αν η f είναι συνεχης στο R και $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-\sqrt[3]{3x+2}}{x-2}=\frac{5}{6}$ να βρεθει το $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

30. Αν η f είναι συνεχης στο 3 και $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x+3)}{x}=5$ να βρεθει το $\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$

31. Αν για κάθε x , ψ $\in R$ ισχυει $|f(x)-f(\psi)|\le|x-\psi|$ να δειχθει ότι η f είναι

συνεχης στο R

32. Να βρεθει ο τυπος της συνεχους συναρτησης f στο R όταν ισχυει

$$xf(x)+\sqrt{1-\eta\mu x}=\sqrt{1+\eta\mu x}$$

33. Αν $f^2(x)+g^2(x)+x^2=2x\left[f(x)\eta\mu x+g(x)\sigma\upsilon\nu x\right]$ να δειχθει ότι οι συναρτησεις f, g είναι συνεχης στο R

34. Αν για τη συναρτηση f ισχυουν $f(4-x)=f(x),\ x\in R$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-4}=6$ και η f είναι συνεχης στο 1 να δειχθει ότι είναι συνεχης και στο 3 .

35. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$ για τις οποίες ισχύει

$(f(x))^{2004}+(g(x))^{2004}=(x\eta\mu x)^{2004}$ (1) για κάθε x ε R.

(α)Να αποδείξετε ότι 1. $f(0)=g(0)=0$ 2. Οι f ,g είναι συνεχείς στο 0

(β) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xg(x)-f(x)\eta\mu^2x}{x^2+\eta\mu^2x}$

IV.ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

I) Αν f(a+β) =f(a)+ f(β) και $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=f(a)$ να δειξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Αποδειξη. Αν $x\to x_0$ τοτε x - $x_0\to 0$, τοτε x - $x_0+\alpha\to\alpha$, θετω h= x – x_0 + a,
Και εχω $h\to\alpha$ Αρα

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{h\to\alpha} f(h-\alpha+x_0)=\lim_{h\to\alpha}\left[f(x_0)+f(h-\alpha)\right]=\lim_{h\to\alpha} f(h-\alpha)+f(x_0)=f(0)+f(x_0)$$

$$=f(x_0+0)=f(x_0)$$

II) Αν f(a.β) = f(a)+ f(β) και $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=f(a)$ να δειξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Αποδειξη. Αν $x\to x_0$ τοτε $\dfrac{x}{x_0}\to 1$ τοτε $\dfrac{x}{x_0}\alpha\to\alpha$. Θετω h = $\dfrac{x\alpha}{x_0}$ και εχω

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{h\to\alpha} f\left(\frac{x_0h}{\alpha}\right)=\lim_{h\to\alpha}\left[f(x_0)+f\left(\frac{h}{\alpha}\right)\right]=\lim_{h\to\alpha} f\left(\frac{h}{\alpha}\right)+f(x_0)=f(1)+f(\alpha)=f(\alpha)$$

36. Δινεται η συναρτηση $f:R\to R$ για την οποια ισχυει η σχεση $f(\alpha\beta)=f(\alpha)+f(\beta),\ \alpha,\beta\in R$. Αν η f είναι συνεχης στο x_0=1 να δειχθει ότι είναι συνεχης στο R.

37. Η συναρτηση $f: R_+^* \to R^*$, ικανοποιει τη σχεση f(αβ)=f(β)f(α). Αν ειναι συνεχης στο $x_0=2$ να δειχθει ότι είναι συνεχης στο R_+^*

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ι . ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

38. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R , $a>0$, $f(a)\neq 0$, τότε να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,a): \dfrac{f(a-x_0)}{x_0} = \dfrac{f(x_0)}{a-x_0}$ (Εδώ αξίζει να είστε παρατηρητικοί)

39. Αν η f είναι συνεχής στο [0,1] και $0 \le f(x) \le 1 \ \forall \chi \in [0,1]$, να δειχθεί ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον $\xi \in [0,1)$, ώστε να ισχύει: $f^{2005}(\xi) + \xi = f(\xi)$

40. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $\Delta = [\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(\Delta) = g(\Delta) = [\alpha,\beta]$ Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [\alpha,\beta]$, τέτοιο ώστε $(g \circ f)(x_0) = x_0$.

41. Έστω f συνεχής στο Δ = [α, β]. Να δειχθεί ότι: Η συνάρτηση f (α+β-x) είναι συνεχής στο Δ. Υπάρχει, ένα τουλάχιστον $\xi \in \Delta$, ώστε να ισχύει: f (α+β-ξ) = f(ξ).

42. Έστω f συνεχής στο Δ = [α, β] και γ >0. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον $\xi \in \Delta$, ώστε να ισχύει: $f(\xi) = \dfrac{f(\alpha)+\gamma f(\beta)}{\gamma+1}$.

42. Αν η f είναι συνεχής στο [0,4] και f(0)= f(4), να αποδειχθεί ότι υπάρχουν α,β $\in$ [0,4] με β - α = 2 τέτοια, ώστε f(α)= f(β).

43. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\alpha+1]$ για την οποία ισχύει : $f(\alpha)+f(\alpha+1)=0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[\alpha,\alpha+1]$

44. Έστω f: $\Re \to \Re$ συνεχής συνάρτηση με f(1) + f(2) + f(3) = 0. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

45. Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = x+1$ τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-1,0)$.

46. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ και $g(x) = -x^2 + \beta x + \gamma$ με $\gamma \neq 0$.

Αν ρ_1 είναι ρίζα της f και ρ_2 είναι ρίζα της g με $\rho_1<\rho_2$, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) + 2g(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1, ρ_2).

47. Έστω $\alpha,\beta \in \Re$, με $\alpha < \beta$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\gamma \in (\alpha,\beta)$ υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$, ώστε $\gamma = \xi\beta + (1-\xi)\alpha$.

48. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $0 \le f(x) \le \ln 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [0,1]$, τέτοιο ώστε $f(\sigma\upsilon\nu(\pi x_0)) = \ln(x_0+1)$.

49. Έστω f,g συναρτήσεις με Π.Ο. το Δ. Εάν για κάθε $x \in \Delta$ η f είναι συνεχής και $f(x)-g(x) = cx$, $c \in \Re$ τότε ν.δ.ο: Αν ρ_1, ρ_2 δύο ετερόσημες ρίζες της $f(x) = 0$ η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[\rho_1, \rho_2]$.

50. Έστω $f(x) = x^3 + \sigma\upsilon\nu(\pi x) - 1$ και $g(x) = \ln(x-1)$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\alpha \in (1,2)$ ώστε $f(\alpha) = g(\kappa)$, $\forall \kappa \in \left(\frac{e+1}{e}, e^8+1\right)$.

51. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + \alpha^2 x^3 + \alpha x^2 + 3x + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

52. Οι αριθμοί $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_{2014}$ ανήκουν στο διάστημα $[0,1]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον $\xi \in [0,1]$ ωστε $|\xi-\alpha_1| + |\xi-\alpha_2| + \ldots\ldots + |\xi-\alpha_{2014}| = 1012$.

53. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα (a,b) και επιπλέον ισχύει: $(\lim\limits_{x\to a+} f(x)).(\lim\limits_{x\to b-} f(x)) < 0$ τότε να δείξετε ότι υπάρχει x_0 στο (a,b) τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

(Και αυτή η άσκηση μπορεί να είναι θεώρημα)

54. Οι συναρτήσεις $f,g : [0,1] \to [0,1]$ είναι συνεχείς. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον $\xi \in [0,1]$ ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{v_1} = ((fog+gof)(\xi), 2)$ και $\overrightarrow{v_2} = (\xi, 1)$ να είναι παράλληλα

55. Να αποδείξτε ότι :

i) η εξίσωση $\frac{\chi^{2000}+1}{\chi+1}+\frac{\chi^{2004}+2}{\chi-1}=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (-1,1).

ii) η εξίσωση $\frac{\varepsilon\varphi\chi}{6\chi-\pi}+\frac{\sigma\varphi\chi}{4\chi-\pi}=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$.

56. Δίνονται οι συναρτήσεις f(x) = $e^{x-\alpha}$ -1 και g(x) = ln(αx+1) + α, όπου $\alpha\in(0,\frac{3}{4})$.

i) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση f(x) = αx έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα [α,α+1].

ii) Αν ξ είναι μια ρίζα της εξίσωσης f(x) = αx στο διάστημα [α,α+1], τότε να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to\xi} g(x)=\xi$.

57. Αν f,g είναι συνεχεις στο R ώστε f(1)+f(2)+…+f(2014)= g(1)+g(2)+…+g(2014)., να δειχθει ότι υπαρχει ξ ∈ $\{1,2,3,...,2014\}$ τετοιο ώστε f(ξ) =g(ξ)

58. Οι συναρτησεις f ,g εχουν πεδιο ορισμου και τιμων το [0 ,α] ειναι συνεχεις σε αυτό .Αν f είναι φθινουσα και $f\circ g=g\circ f$ να δειχθει ότι υπαρχει ξ∈[0,α] τετοιο ώστε f(ξ)=g(ξ)= ξ

59. Θεωρούμε την εξίσωση $\frac{\alpha^2}{x}+\frac{\beta^2}{x+1}+\frac{\gamma^2}{x-1}=0,\quad \alpha,\beta,\gamma\neq 0$

Α) Να δειχθεί ότι η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα (-1,1).

Β) Αν ρ_1,ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης να δειχθεί ότι $\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{\gamma^2-\beta^2}{\alpha^2}$.

60. Αν f συνεχής συνάρτηση με $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ για την οποία ισχύουν : $\delta>0$ και $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ και $3\alpha+2\beta+\gamma>0$

Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

61. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$f(x)+e^{f(x)}=5-4x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=0$

Να αποδειχθεί ότι :

Α) Η f αντιστρέφεται.

Β) Η εξίσωση $(f\circ f)(x)-f(5-10x^3)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

62. Έστω f(x)=ax^3+bx^2+cx+d , *a>0* , *d<0* , *a+c<b+d* . Δείξτε ότι η f έχει δυο αρνητικές και μία θετική ρίζα ακριβώς.

63. Να δείξετε ότι η εξίσωση $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$ με $f>0$, $a+b+c+d+e+f=0$, $5a+4b+3c+2d+e>0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (0,1)

64. Για την συνεχή συνάρτηση f ισχύει ότι: $f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1$, για κάθε $x\in R$, με $\beta,\gamma\in R$ και $\beta^2<4\gamma$. Αν η f είναι γνησίως στο R αύξουσα να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα (0,1)

65. Δίνεται ότι η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής στο R γν. αύξουσα στο διάστημα [1,2] και γν. φθίνουσα στα [0,1] και [2 , 3]. Αν ισχύει ότι :

$f(0)=\kappa^2+1$, $f(1)=-\kappa^2+\kappa-1$, $f(2)=\kappa^2+\kappa+2$, $f(3)=-2003$

με $\kappa\in R$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει 3 ακριβώς ρίζες στο (0 , 3).

66. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [1,5] με f(1) = 3 και f(5) = 2, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με την ευθεία (ε): ψ-x=0.

67. Αν α>0 , $n\in N^*$ τότε να δείξετε ότι η εξίσωση : $x^n=\alpha$ έχει μοναδική θετική λύση.

(Πώς θα ονομάζατε αυτή την λύση;)

68. Για μια συνεχή συνάρτηση f, ισχύει ότι:

$$\sqrt[3]{2x+8}-\sqrt{x+4}\le xf(x)\le \eta\mu\frac{x}{6}+x^6,\ \text{για κάθε } x\ge -4$$

Να υπολογίσετε το f(0) και να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\kappa\in(0,1]$, ώστε $f(\kappa)=\eta\mu\frac{\kappa}{6}+\kappa^6$.

69. Για μια συνάρτηση f συνεχή στο $\Re$, ισχύει ότι:

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=4$ και $4\eta\mu(x-2)\le(x-2)f(x)\le x^2-4\ \ \forall x\in\Re$. Να δειχθεί ότι η C_f τέμνει τη γραφική παράσταση της παραβολής $\psi=x^2-x+1$ σε σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα (1,2).

70. **α.** Η συνάρτηση f είναι συνεχής και 1−1 σε διάστημα Δ. Αν α, β, γ ∈Δ με α < β < γ , να αποδείξετε ότι ισχύει: είτε f(α) < f(β) < f(γ) , είτε f(γ) < f(β) < f(α) .

β. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και 1−1 στο διάστημα Δ, να αποδείξετε ότι είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

(Πρόκειται για βασικό θεώρημα το οποίο σας προτείνεται να αποδείξετε).

γ. Με την βοήθεια του προηγούμενου ερωτήματος δείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση f στο R ώστε f(f(x))=-x

δ. Αν f συνεχής συνάρτηση στο R και f(a)+f(b)=f(c)+f(d) με a,b,c,d διαδοχικούς όρους μη σταθερής αριθμητικής προόδου τότε η f δεν μπορεί να είναι αντιστρέψιμη

ΙΙ. Θ.Ε.Τ -Θ.Μ.Ε.Τ

71. Αν f συνεχής στο R και f(x).f(f(x))=1 , f(9)=1/9 υπολογίστε το f(1)

72. Μια συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο R με $f(8)=7$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και ισχύει : $f(x)\cdot f(f(x))=1$ να βρείτε $f(4)$.

73. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[2,10]\to\mathbb{R}$, με $f(2)=10$ και $f(x)\cdot f(f(x))=5$
Να προσδιοριστεί το $f(10)$ και το $f(5)$.

74. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[1,2]\to\mathbb{R}$.
Α) Να δείξετε ότι η $g(x)=f(x)+e^{x-1}$, $x\in[1,2]$ έχει μέγιστη τιμή.
Β) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[1,2]$ τέτοιο ώστε $f(x)<f(x_0)+e^{x_0}$ $x\in[1,2]$.

75. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[2,10]\to\mathbb{R}$ Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0\in[2,10]$ τέτοιο ώστε : $f(x_0)=\dfrac{3f(3)+5f(6)+2f(8)}{10}$

76. Αν f συνεχης στο [α,β] , $x_1, x_2,\ldots,x_\nu\in[\alpha,\beta]$ και $\kappa_1, \kappa_2,\ldots,\kappa_\nu\in R_+$ να δειξετε ότι υπαρχει ξ∈(α,β) ώστε $f(\xi)=\dfrac{k_1 f(x_1)+k_2 f(x_2)+\ldots+k_\nu f(x_\nu)}{k_1+k_2+\ldots+k_\nu}$

77. Για μια συνεχή συνάρτηση f στο [0,1] ισχύει f(0) = 2 και f(1) = 4. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ που ανήκει στο (0,1) ώστε f(ξ): = $\dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$

78. Έστω f: $[\alpha,\beta]\to\Re$ συνεχής συνάρτηση. Αν α,β είναι ρίζες της εξίσωσης

$3x^2-4000x+2001 = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $\alpha f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)+\frac{\alpha+\beta}{2}f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\beta f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)=2000f(\xi)$.

III. ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΡΟΣΗΜΟ –ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

78. Έστω συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f^2(x) + x^2= 5x$ για κάθε $x\in\Delta = (0,5)$. Να αποδείξετε ότι η f **1.** Δεν έχει ρίζες στο Δ

2. Έχει σταθερό πρόσημο στο Δ.

3. Να βρεθεί ο τύπος της f στο Δ, αν επιπλέον είναι γνωστό ότι f(1) = -2.

79. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f:\Re\to\Re$ με την ιδιότητα $f^2(x) = 2e^xf(x)$, $\forall x\in\Re$

80. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f:\Re\to\Re$ με την ιδιότητα:

$(f(x) - 1)(f(x) - 3) = 0,\ \forall x\in\Re$.

81. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f:\Re\to\Re$ με την ιδιότητα:

$f^2(x) - 2(f(x)\eta\mu x = 1,\ \forall x\in\Re$.

82. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R ,$f(0)=-2$ και $f^2(x)+xf(x)-4=0$, $\forall x\in R$ τότε να δείξετε ότι η f δεν έχει καμιά ρίζα.και βρείτε τον τύπο της

83. Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύει : $f^2(x)=1+2f(x)\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

84. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f,g: $[0,+\infty)\to\Re$ με g(0) = 1 και

$x[f(x)-g(x)] = \sqrt{x}\,[3f(x)+g(x)]$. **α)** Να βρείτε το f(0).

β) Αν για κάθε $x\in[0,4]$ είναι $f(x)\neq0$, να δείξετε ότι:

1. Η εξίσωση $(x-2)f(x) +x f(x+2) = x(x-2)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,2).
2. $g(x) > 0$ για κάθε $x\in[0,4]$.

85. Έστω συνεχής συνάρτηση f στο [1, 4] , με f(x) ≠ 0, για κάθε x∈[1, 4],

f(1) > 0 και f(1)·f(2) = f(3)·f(4) . Να αποδείξετε ότι:

α. f(x) > 0 , για κάθε x∈[1, 4] .

β. Η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - f(1)\cdot f(2)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο [1, 2] .

γ. Η συνάρτηση f δεν είναι αντιστρέψιμη.

86. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις f,g : $R \to R$ με $f(x)g(x)=e^x$, για κάθε $x \in R$ με f(1)>3 και g(2)>2. Ναδείξετε ότι : α) f(x)>0, για κάθε $x \in R$

β) Υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=x_0$

87. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R , $f(0)=5$ και $f(x) \neq 2$ για κάθε $x \in R$ τότε να δείξετε ότι η f δεν έχει καμιά ρίζα.

88. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R , f(0)=-1 και τότε να δείξετε ότι η f δεν έχει καμιά ρίζα.και βρείτε τον τύπο της

89. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[-3,3] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$x^3 + f^4(x) = 27 \text{ για κάθε } x \in [-3,3]$$

Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-3,3)$.

90. Έστω η συνεχής συνάρτηση f, ώστε $4x^2 + 9\cdot f^2(x) = 36$, για κάθε x∈(−3, 3) . Να βρείτε τον τύπο της αν f(0) = −2 .

IV. ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

91. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

Α) Να βρείτε την μονοτονία της f.
Β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
Γ) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0 \in (0,1]$ τέτοιο ώστε : $2x_0 \ln x_0 = 2 - 3x_0$

92. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4-x} - \sqrt{2+x}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ. Να λύσετε την ανίσωση f(x) < 0 .

93. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο (0, +∞) με $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\gamma\in R$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\delta\in R$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_0>0$, ώστε $f(x_0)+e^{x_0+1}+\ln(x_0)=1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Θέμα Β

1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=-3e^{2x+1}-5x+3$.

α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια λύση στο R.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=2x^{2011}+5x-7,\ x\in R$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R.
ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.
iii. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f.

3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=4\sqrt{e^x-2}+3$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
iii. Να ορίσετε την f^{-1}.

4. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=2\ln\left(\sqrt{x-1}+1\right)+3$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".
iii. Να ορίσετε την f^{-1}.
iv. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(1+x)=2$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-3x+2$.

i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f.
ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x\in R$ για τον οποίο η συνάρτηση παίρνει την τιμή
2011.
iii. Να λύσετε την ανίσωση: $3x\cdot 2^x+2^x<1$

6. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=3x^{2011}+2x-5,\ x\in R$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.
ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα τη $x=1$.
iii. Να βρείτε το πρόσημο της f.

7. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, όταν:

i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1}{f(x)}=+\infty$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{4x+3}=-\infty$ **iii.** $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)(3x+4)\right]=+\infty$

8. Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:[1,5]$ της οποίας η γραφική παράσταση περνάει από τα σημεία $A(1,8)$ και $B(5,12)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $\dfrac{29}{3}$.

iii. Υπάρχει μοναδικό $x_0\in(1,5)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=\dfrac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9}$

9. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\ln(3e^x+1)-2$.

i.Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
iii. Να ορίσετε την f^{-1}.
iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<f^{-1}(\ln 5-2)-2$.

10. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=-2x^3-3x-1$.

i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f.
ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=2$
iv. Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x)\geq x-1$

11. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει: $f(f(x))+f(x)=3x+2$ για κάθε $x\in R$ και .

i. Να βρείτε το $f^{-1}(1)$.

ii. Να βρείτε το $f(3)$.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=3$

iv. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+x}{f(f(x))+f(x)-2}$.

12. Δίνεται η συνεχής στο R συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-\sqrt{x}+\eta\mu(x-1)}{x^2-1}=2$$

i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f περνάει από το σημείο $M(1,1)$.

ii.Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|3f(x)-2|-1}{x^2-1}$.

13. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=2\ln\dfrac{x+1}{1-x}+3$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

iii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη συνέχεια.
iv. Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f:R^*\to R$ και η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=\ln\frac{x+2}{2-x}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f\circ g$.
ii. Να βρείτε συνάρτηση h για την οποία να ισχύει: $(h\circ g)(x)=x$.
iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.

Θέμα Γ

15. Δίνονται οι συνεχείς στο R συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$.
- Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο $A(2,-1)$.
- $\rho_1=-1$ και $\rho_2=5$ είναι δύο διαδοχικές ρίζες της $g(x)=0$.

Να αποδείξετε ότι:
α) η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.
β) $g(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,5)$.
γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(3)\cdot x^4+2x^2+1}{g(2)\cdot x^3+5}=-\infty$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με τύπο: $f(x)=2x^4+3\ln x+1$.

i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.
ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in R$, η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα.
iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda>0$ για τον οποίο ισχύει: $\lambda^4+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}$

17. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει η σχέση: $2f^3(x)-3=2x-3f(x)$, για κάθε $x\in R$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο R.
ii. Αν το σύνολο τιμών της f είναι το R, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.
iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.
iv. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

$$\frac{f(\alpha)+1}{\alpha-2}+\frac{2-f(\alpha)}{\alpha+1}=0$$

18. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[-3,3]$ για την οποία ισχύει $3x^2+4f^2(x)=27$ για κάθε $x\in[-3,3]$.

i. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.
ii. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-3,3)$.

iii. Να βρεθεί ο τύπος της f.

iv. Αν επιπλέον $f(1)=\sqrt{6}$ να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}$.

19. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει:
$\sqrt{x^2+2x+9}\le 3+xf(x)\le x^8\eta\mu\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{3}+3$ για κάθε $x>0$.Να βρείτε:

i. Το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{2x}$. **ii.** Το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^7\eta\mu\dfrac{2}{x}\right)$. **iii.** Το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

iv. Το $f(0)$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει: $(f\circ f)(x)+2f(x)=2x+1$ για κάθε $x\in R$ και $f(2)=5$. **i.** Να βρείτε το $f(5)$. **ii.** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$. **iv.** Να λύσετε την εξίσωση: $f\left(f^{-1}\left(2x^2+7x\right)-1\right)=2$.

21. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $f^2(x)=\alpha^{2x}+2\alpha^x+1$ για κάθε $x\in R,\ \alpha\in R^*$.

i. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.

ii. Αν $f(0)=-2$ να βρείτε τον τύπο της f.

iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}$, $\alpha<2$.

iv. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}$, $\alpha>3$.

22. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει: $x^4+1\le 4f(x)\le x^4+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **i.** Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1}{4}\le f(0)\le\dfrac{1}{2}$ και $\dfrac{1}{2}\le f(1)\le\dfrac{3}{4}$.

ii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$. **iii.** Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5f\left(\frac{1}{x}\right)+4\eta\mu 3x}{2x^2+3\eta\mu x}$.

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)-\xi=0$.

23. **i.**Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)-4}{x}=2$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

ii. Δίνεται η συνάρτηση $g:R\to R$ για την οποία ισχύει: $xg(x)+2\le 2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$, αν είναι γνωστό ότι υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. **iii.** Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f^2(x)+\eta\mu^2(2x)}{\varepsilon\varphi^2x+x^2g(x)}$

24. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει: $3f(x)+2f^3(x)=4x+1$ για κάθε $x\in R$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1}.
ii. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.
iii. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}, αν γνωρίζετε ότι αυτά βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y=x$.
iv. Να λυθεί η εξίσωση: $f\left(2e^{x-1}\right)=f(3-x)$.

25. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x+1}-1$ και $g(x)=2-x$.
i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g.
ii. Να ορισθεί η συνάρτηση $f\circ g$.
iii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.
iv. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $f\circ f\circ g$.

26. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2} & , x<0\\ \lambda & ,x=0\\ \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & x>0\end{cases}$

i. Να βρείτε τα κ,λ .
ii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2\ln(8x+1)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

27. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{4\left(x^3-2x^2\right)}, & x\in(-\infty,0)\cup(0,2)\\ \dfrac{\kappa x+1}{2\left(x^2-4\right)}, & x\in(2,+\infty)\end{cases}$ και η $g:R-\{0,1\}\to R$ για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x\cdot g(x)+2x}{3x}=5$ και $g(x+3)=g(x)+f(x)$ για κάθε $x\in R$.

Να βρείτε:
i. Το κ αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to2} f(x)$. **ii.** Το όριο $\lim\limits_{x\to0} f(x)$. **iii.** Το όριο $\lim\limits_{x\to0} g(x)$.
iv. Το όριο $\lim\limits_{x\to3} g(x)$.

Θέμα Δ

28. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=3\ln2x+e^{3x}+4x-2$.
i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την f.
ii. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=e^{\frac{3}{2}}$.
iv. Να βρείτε τον πραγματικό θετικό αριθμό μ για το οποίο ισχύει:

$$3\ln4\mu-3\ln\left(2\mu^2+2\right)-4\left(\mu^2+1\right)=e^{3\left(\mu^2+1\right)}-e^{6\mu}-8\mu$$

29. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathrm{R}\to R$ για την οποία ισχύουν οι συνθήκες:

- $\left|3\eta\mu x-2xf(x)\right|\le\frac{1}{2}x^2$, για κάθε $x\in R$.
- $4f(x)+3f(x+1)=2x^2-2013$, για κάθε $x\in R$.

i. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

ii. Να βρείτε το $f(1)$.

iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x-1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

30. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathrm{R}\to R$ τέτοια ώστε: $\kappa\eta\mu^2x=x^2f(x)+\sqrt{1+\eta\mu^2x}-\lambda$ για κάθε $x\in R$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

i. Να βρείτε τα κ και λ.

ii. Αν $\kappa=1$ και $\lambda=1$ να βρείτε την f.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}$.

31. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{x^3\cdot 2^x+3\cdot 2^x-4}{2^x}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο R για κάθε $\kappa\in R$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Ι. ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ $f'(x_0)$

1. Να βρεθούν με τη βοήθεια του ορισμού οι παράγωγοι αριθμοί των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x)=\sqrt{x+3}+4$ στο $x_0=-3$ ii) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ και $x_0=0$

iv) $f(x)=x\cdot\sqrt{x}+3\eta\mu x$ στο $x_0=0$ v) $f(x)=(x-1)\cdot\sqrt{x-1}+1$ στο $x_0=1$

vi) $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$ στο $x_0=0$ vii) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ και $x_0=0$

2. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο x_0

1. $f(x)=|x-1|x$, $x_0=1$ **2.** $f(x)=\dfrac{x|x|}{2+|x|}$, $x_0=0$ **3.** $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$, $x_0=0$

4. $f(x)=x\sqrt{|x|}$, $x_0=0$ **5.** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, $x_0=0$ **6.** $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{\pi}{x}, & x\neq 0 \\ 0\ , & x=0\end{cases}$, $x_0=0$

3. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγισιμες στο x_0

ι) $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$, $x_0=0$ **ιι)** $f(x)=\begin{cases} x^3e^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x^2e^{\frac{-1}{x}}\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$, $x_0=0$

4. Αν η f είναισυνεχής στο 0 και $|f(x)\eta\mu x-x^2|\le x^4, \forall x\in R$, να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγισιμη στο 0.

5. Έστω η συνάρτηση f , για την οποία ισχύει: $x-x^2\le f(x)\le x+x^2$ για κάθε $x\in R$, δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και να υπολογισθεί το $f'(0)$

6. Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγισιμες στο α, f(α)=g(α) και $f(x)+x^2\le g(x)+\alpha^2, \forall x\in R,$ να δείξετε ότι $g'(\alpha)-f'(\alpha)=2\alpha$

7. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση g με $g(x)=\begin{cases} f(x) & , x\le x_0 \\ f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0) & , x>x_0\end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με: $g(x)\le f(x)\le g(x)+(x-1)^2$ για κάθε $x\in R$ και $g'(1)=2$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ και να βρείτε την $f'(1)$.

ΙΙ. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

9. Να βρείτε τα α , $\beta\in\Re$ ώστε να είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$, η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+1, x<0\\ ax-\beta, x\ge 0\end{cases}.$$

10. Να βρεθούν οι α,β $\in$R ώστε η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+2\beta\sqrt{x+3}+6, & x<1\\ x^2+(\alpha+\beta)x-1, & x\ge 1\end{cases}$ να είναι παραγωγισιμη στο $x_0=1$

11. Αν η f είναι συνεχής στο 2 και $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-3x}{x-2}=5$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγισιμη στο 2 και να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2f(x)-3\sqrt{5x+6}}{x-2}$

12. Αν $f(0)=0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(x)+4xf(x)}{x^2}=-4$ να αποδείξετε ότι $f'(0)=-2$

13. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=4$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=1$, δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

14. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1 και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2-x)}{x-1}=3$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

15. Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο $x_0\in R$. Αν $g:R\to R$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει: $g(x)=f(x)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)-f(x_0)$ να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in R$

16. Έστω $f:R\to R$ μια συνάρτηση με $f^3(x)+f(x)+1=x^3, x\in R$ να δείξετε ότι:
α) η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ β) $f'(1)=1$

17. Έστω $f:R\to R$ μια συνάρτηση παραγωγισιμη στο $x_0=0$ με $f^3(x)+xf^2(x)=2x^3$, $x\in R$ να δείξετε ότι: $f'(0)=1$

ΙΙΙ. ΕΥΡΕΣΗ ΟΡΙΟΥ ΑΠΟ ΤΗΝ $f'(x_0)$

18. Αν $\alpha \neq 0$ και η συνάρτηση f είναι παραγωγισιμη στο α , να βρείτε το

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f^3(x)-2f(\alpha)f^2(x)+3f^2(\alpha)f(x)-2f^3(\alpha)}{|x|-|\alpha|}$$

19. Αν $\nu \in Z$ με $\nu > 1$ και $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)+\alpha_1 h+\alpha_2 h^2+\ldots+\alpha_\nu h^\nu}{h}=m,$

$m \in R.$ να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=m-\alpha_1$

20. Αν f(3) = 10 και f '(3) = 6 , να βρείτε το όριο $\lim_{x\to 3}\frac{(f(x))^2-100}{x^2-9}$.

21. Έστω η συνάρτηση f με $f(1)=f'(1)=2$. Να βρείτε τα όρια:

ι) $\lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)-4}{x^2+x-2}$ ιι) $\lim_{x\to 1}\frac{xf(x)-2}{\sqrt{x+3}-2}$

22. Εάν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in R$, δείξτε ότι:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x\cdot f(x_0)-x_0\cdot f(x)}{x-x_0}=f(x_0)-x_0\cdot f'(x_0).$$

23. Έστω συνάρτηση $f:R_+^* \to R$ με $f(\alpha)=f'(\alpha)=1$ να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\alpha\cdot f(\alpha)-x\cdot f(x)}{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}$$

24. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο R, παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f(0)=0$,

δείξτε ότι: $\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)\right]=f'(0)$.

25. Υπάρχει ο f '(α). Βρείτε το $\lim_{x\to\alpha}\frac{xf(\alpha)-\alpha f(x)}{x-\alpha}$

26. Υπάρχει ο f '(α). Βρείτε το $\lim_{x\to\alpha}\frac{x^2f(\alpha)-\alpha^2 f(x)}{x-\alpha}$

27. Υπάρχει ο f '(α).Δείξτε ότι $f'(\alpha)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+\alpha)-f(\alpha-x)}{2x}$

28. Να αποδείξετε ότι: αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε:

ι) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=2f'(x_0)$ ιι) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0+3h)}{h}=-4f'(x_0)$

ιιι) $\lim_{h\to 0}\frac{f^2(x_0-h)-f^2(x_0)}{h}=-2f(x_0)f'(x_0)$ ιν) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h^2)-f(x_0)}{h}=0$

29. Εάν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\alpha \in \mathbf{R}$

i) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\alpha^2\cdot f(x)-x^2 f(\alpha)}{x-\alpha}=\alpha^2\cdot f'(\alpha)-2\alpha\cdot f(\alpha)$

ii) Εάν και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\alpha \in \mathbf{R}$, να δείξετε ότι:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{g(\alpha)\cdot f(x)-g(x)\cdot f(\alpha)}{x-\alpha}=g(\alpha)\cdot f'(\alpha)-f(\alpha)\cdot g(\alpha)$$

IV. ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

30. Έστω συνάρτηση f για την οποία για κάθε $x,y \in R$ ισχύει:

$f(x)-y^2 \le f(x+y) \le f(x)+y^2$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in R$.

31. Δίνεται η συνάρτηση f με την ιδιότητα $f(x + y) = f(x)\cdot f(y)$, για κάθε x, $y \in \Re$ και $f(0) \neq 0$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 , να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\Re$ και μάλιστα $f'(x) = f'(0)\cdot f(x)$, για κάθε $x \in \Re$.

32. Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο R και ισχύουν:

i) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ για κάθε $x,y \in R$.

ii) $f(x)=1+x\cdot g(x)$ για κάθε $x \in R$ iii) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in R$.

33. Εάν για τη συνάρτηση f ισχύει: $f(2+h)=1+2h+\eta\mu\, h+3h^2$, για κάθε $h \in R$, να δείξετε ότι: i) $f(2)=1$ ii) $f'(2)=3$

34. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγισιμη στο 1 και $f(x\psi) = \psi f(x)+ x f(\psi)$, να αποδείξετε ότι $f'(x)=f'(1)+\dfrac{f(x)}{x}$

35. Αν $f(xy)=f(y)f(x), \forall x,y \in (0,+\infty)$, $f'(1)=1/2$ τότε δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $(0,+\infty)$

36. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη σ' όλο το πεδίο ορισμού της, για την οποία ισχύει ότι: $f(x+y)=e^x f(y)+e^y f(x)$, για κάθε x, y πραγματικούς αριθμούς και $f'(0)=2$

ι) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$ και $f(3x)=3e^{2x}f(x)$, για κάθε $x \in R$

ιι) Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{2x}$ ιιι) Να βρεθεί η f(x)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Ι. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΠΛΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

37. Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων όπου υπάρχουν

1. $f(x)=x\sqrt{x}$ **2.** $f(x)=\frac{|x|-1}{|x|+1}+\frac{|x|+1}{|x|-1}$ **3.** $f(x)=\frac{|x|}{x}$ **4.** $f(x)=\sqrt{x}$

5. $f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ **6.** $f(x)=x^{\frac{4}{3}}$

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x, & \text{αν } x<0 \\ x^2+x+1, & \text{αν } x\geq 0 \end{cases}$. Να βρεθεί η $f'(x)$.

39. Αν $f(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}$ και $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ να εξεταστεί: α) αν $f=g$ β) $f'=g'$

40. Αν $f(1)=2$ και $f'(1)=5$ να βρείτε την $g'(1)$, όπου $g(x)=xf(x)-\frac{x^2}{f(x)}$.

ΙΙ.ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

41. Να βρειτε τις παραγωγους των συναρτησεων

α) $f(x)=\sqrt{x^4\ln^2(x^3+3)}$ **β)** $f(x)=\frac{e^{x\ln x+x^3}+5}{\ln^3(\sqrt[4]{x^6}+3)}$ **γ)** $f(x)=\eta\mu^5(e^{x^2}+2x+1)$

δ) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ **ε)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ **στ)** $f(x)=(\sqrt[3]{x})^2$ **ζ)** $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

42. Να βρειτε τις παραγωγους των συναρτησεων

α) $f(x)=x^2|x|$ **β)** $f(x)=|x^2-5x+6|$ **γ)** $f(x)=\begin{cases} x^3\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x}, & x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$

43. Αν f δυο φορές παραγωγίσιμη να βρείτε την $\left(xf(x^2)\right)''$

44. Αν f δυο φορές παραγωγίσιμη να βρείτε την $\left(xf(\ln x)+(\ln f'(x))\right)'$

45. Να δείξετε ότι η συνάρτηση y με τύπο $y(x)=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$ επαληθεύει την εξίσωση

$4xy''(x)+2y'(x)-y(x)=0\ ,x\in R$

46. Αν $f(t)=e^{-\alpha t}\eta\mu(\omega t)$, α, ω $\in R^*$ σταθερές, υπολογίστε την τιμή της παράστασης: $f''(t)+2\alpha f'(t)+(\alpha^2+\omega^2)f(t)$. (Η παράσταση αυτή είναι διάσημη στην φυσική γιατί παριστάνει την εξίσωση της φθίνουσας Α.Τ)

47. Να δείξετε ότι υπάρχουν δυο τιμές του α : η συνάρτηση y με τύπο $y_a(x)=e^{ax}$ να επαληθεύει την εξίσωση $y''(x)-3y'(x)+2y(x)=0\ ,\ x\in R$. Στην συνέχεια δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ επαληθεύει την ίδια εξίσωση

48. Έστω f *τρεις* φορές παραγωγίσιμη στο R ώστε $(f'(x))^2+(f(x))^2=x^4$ δείξτε ότι $f''(0)=0$

49. Να υπολογισετε τις παραγωγους των συναρτησεων

α) $f(x)=x^x, x>0$ **β)** $f(x)=\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^{x^2+3}$ **γ)** $f(x)=x^{x^{e^x}}, x>0$ **δ)** $f(x)=(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}, x\in(0,\pi)$

50. Εστω $f:R\to R$ δυο φορες παραγωσιμη συναρτηση .να βρειτε τις συναρτησεις g',g'' όταν **α)** $g(x)=f(\eta\mu 3x)+f^2(2x)$

β) $g(x)=f^3\left(\sqrt{x^4+x^2+1}\right)$ **γ)** $g(x)=e^{\sqrt{1+f^4(x)}}-x^{f(x)}, x>0$

51. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x)=\eta\mu(\sigma\upsilon\nu^2x)\sigma\upsilon\nu(\eta\mu^2x)$ β) $f(x)=\eta\mu^4(\ln^5\sigma\upsilon\nu e^{x^6})$ γ) $f(x)=x^x$, $x>0$

δ) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ε) $f(x)=\frac{2}{\sqrt[4]{1+\ln^2 x}}$ στ) $f(x)=\begin{cases}3-\sqrt{x-2} & ,\ x\in[2,11)\\ -3+\sqrt{x-2} & ,\ x\in[11,+\infty)\end{cases}$

52. Αν η για την παραγωγισιμη στο R συναρτηση f ισχυει $f(x^6)=f^2(x^3)$ και $f'(x)\neq 0$, να βρεθει η τιμη $f(1)$

53. Έστω δύο συναρτήσεις παρ/μες στο R οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση: $\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{e^x}$ Να αποδείξετε ότι: $\frac{g'(x)-g(x)}{[g(x)]^2}=\frac{f'(x)-f(x)}{[f(x)]^2}$

54. Αν $x=t^5+5t\ ,\ y=5t^3, t>0$ βρείτε την $\frac{dx}{dy}$

55. Να αποδειξετε ότι **ι)** $f(0)=f''(0)=0$ **ιι)** Αν $h(x)=f(x)\cdot f'(x)\neq 0,\ x\in R$ τοτε

$\frac{h'(x)}{h(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{f''(x)}{f'(x)},\ x\in R$

56. Αν $\nu\in N^*$ και $|\alpha_1\eta\mu x + \alpha_2\eta\mu(2x) + \alpha_3\eta\mu(3x) +\ldots+\alpha_\nu\eta\mu(\nu x)| \le |\eta\mu x|$ για κάθε $x\in\Re$ όπου $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots\alpha_\nu$ σταθεροί(πραγματικοί αριθμοί), ν α αποδείξετε ότι : $|\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3+\ldots+\nu\alpha_\nu| \le 1$.

57. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f(e^{x-1})=\eta\mu(\pi x)$, να υπολογίσετε τις $f'(1)$, $f''(1)$

58. Αν $f(x)=x(x-1)(x-2)\ \ldots\ (x-100)$, να βρείτε την $f'(0)$

59. Αν $f(x)=(x-\alpha)^3(x-\beta)^5$, να δείξετε ότι $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3}{x-\alpha}+\frac{5}{x-\beta}$ με $x\neq\alpha$ και $x\neq\beta$

60. Οι συναρτήσεις f , g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο Δ , με $g(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\Delta$. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$. Αν $h'(x_0)=0$ να δείξετε ότι :

$h(x_0)=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$, με $g(x_0)\neq 0$

61. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\Re$.Να αποδείξετε ότι: I)Αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή II) Αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια

62. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και άρτια, να αποδείξετε ότι και συνάρτηση $g(x) = f(f'(x))-f'\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$ είναι άρτια.

63. Αν f,g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο x_0 με $f'(x_0)\neq 0$ και για τη συνάρτηση $G(x) = \frac{g(x)}{e^{f(x)}}$ ισχύει $G'(x_0) = 0$ να αποδείξετε ότι $g'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0)$.

64. Να αποδειχθούν οι τύποι των νιοστών παραγώγων των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=e^{\alpha x}$, $f^{(\nu)}(x)=\alpha^\nu e^{\alpha x}$ β) $f(x)= \eta\mu(\alpha x)$, $f^{\nu)}(x)=\alpha^\nu\eta\mu(\alpha x+\frac{\nu\pi}{2})$

65. Να βρειτε τη νιοστη παραγωγο των συναρτησεων ι) $f(x)=\eta\mu\frac{x}{2}, x\in R$

ιι) $f(x)=\frac{1}{x}, x\in R^*$

ΙΙΙ. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

66. Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα P με $P(x) = [P'(x)]^2$ για κάθε $x\in\Re$. Να

βρείτε το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού P με $P(x)- P'(x) = 2x^2-7x+7$, $\forall\ x\in \Re$.

67. Να βρείτε πολυώνυμο P(x) ώστε να ισχύει: α) $\left(e^{-x}P(x)\right)'=e^{-x}x(x-1)$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$

β) Να έχει βαθμό $\nu\geq 1$ και να ισχύει $[P'(x)]^2=P(x)$, με $P(1)=0$

γ) Να έχει βαθμό $\nu\geq 1$ και να ισχύει $P(2x)= P'(x)P''(x)$

68. Αν το $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$, έχει δύο άνισες ρίζες ρ_1,ρ_2, να αποδείξετε ότι:
I) $f'(\rho_1)+ f'(\rho_2) = 0$ **ii)** $f'(\rho_1)f'(\rho_2)\neq 0$ **ιιι)** $\rho_1/f'(\rho_1)+ \rho_2/f'(\rho_2) = 1/\alpha$.

69. Να υπολογισθούν τα αθροίσματα: **I)** $A = 1 + 2x +3x^2+....+\nu x^{\nu-1}$, $x\in \Re$ και $\nu\in N^*$

Ιι) $B = 2x + 4x^3 + 6x^5 + ...+ 2\nu x^{2\nu-1}$, $x\in \Re$ και $\nu\in N^*$.

70. Αν f(x) πολυώνυμο βαθμού $\nu\geq 2$, να αποδειχθεί ότι: **I)** $f(x) = (x-\rho)^2\pi(x) \Leftrightarrow f(\rho) = f'(\rho) = 0$ **ii)** Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in \Re$ για τις οποίες το πολυώνυμο $(x-1)^2$ είνα παράγοντας του πολυωνύμου $f(x) = \alpha x^{\nu+2}- \beta x^{\nu+1}+2$ με $\nu\geq 2$.

71. Έστω $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+ \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ \ldots\ +\alpha_1 x+ \alpha_0$, $\alpha_\nu\neq 0$, $\alpha_0\neq 0$ με ρίζες $\rho_1, \rho_2, \ldots ,\rho_\nu$ διάφορες ανά δύο. Να δείξετε ότι:

i) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x-\rho_1}+\dfrac{1}{x-\rho_2}+ \ldots\ldots\ +\dfrac{1}{x-\rho_\nu}$, $x\neq\rho_i$ $i=1,2,3, \ldots ,\nu$

ii) $f(x)f''(x) < [f'(x)]^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

iii) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{1}{\rho_2}+ \ldots\ldots\ +\dfrac{1}{\rho_\nu}$

iv) Αν $f(\rho_1)= f''(\rho_1)=0$ και $f'(\rho_1)\neq 0$ να δείξετε ότι $\dfrac{1}{\rho_1-\rho_2}+\dfrac{1}{\rho_1-\rho_3}+ \ldots\ldots\ +\dfrac{1}{\rho_1-\rho_\nu}=0$

IV. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

72. Να αποδειχθεί ότι: I) Η συνάρτηση $f: (0,\pi) \to R$, με $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, είναι Αντιστρέψιμη Ιι)Η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (-1,1 και ότι $[f^{-1}(x)]'= \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in(-1,1)$.

73. Έστω μια συνάρτηση $f: (0,+\infty)\to(0,+\infty)$, με την ιδιότητα $f(x)f'\left(\dfrac{1}{x}\right)= x$,για κάθε $x>0$ Να αποδειχθεί ότι:I) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1/xf'(x)$, για κάθε $x\succ 0$.

Ιι) $[f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right)]'=0$, για κάθε $x\succ 0$.

74. Εστω η συναρτηση f(x) = ημx, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ να βρειτε την παραγωγο της f^{-1}

75. Η συναρτηση $f: R \to R$ είναι 1-1 παραγωγισιμη στο R και $f(R) = R$ Αν για καποιο σημειο $\alpha \in R$ ισχυει $f'(f^{-1}(\alpha)) = 0$ Να αποδειξετε ότι η f^{-1} δεν είναι παραγωγισιμη στο $x_0 = \alpha$

76. Οι συναρτησεις f,g είναι 1-1 και εχουν πεδιο τιμων το R. Αν είναι παραγωγισιμες στο R και ισχυει $f'(x) = g^{-1}(x)$, $g'(x) = f^{-1}(x)$, $x \in R$ Να αποδειξετε ότι $(f \circ g + g \circ f)'(x) = x\left[(f+g)'(x)\right]$

77. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=5e^x+x-2$. Να δειχθεί ότι αντιστρέφεται και έπειτα να δείξετε α) $f(\alpha) \neq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ β) $(f^{-1})'(f(\alpha)) = \frac{1}{f'(\alpha)}$ γ) $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{6}$

V. ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

78. Η συναρτηση f είναι παραγωγισιμηστο $(0,+\infty)$ και για κάθε α, β $\in (0,+\infty)$ ισχυει $f(\alpha \cdot \beta) = \alpha \cdot f(\beta) + \beta \cdot f(\alpha)$. Να αποδειξετε ότι **ι)** $f(1) = 0$ **ιι)** $x \cdot f'(x) - f(x) = x \cdot f'(1)$, $x > 0$.

79. Αν η f είναιπαραγωγισιμη στο R, και ισχυει $f(x+\psi) = e^x \cdot f(\psi) + e^{\psi} f(x) + x.\psi + \alpha$ x , ψ $\in R$ Να δειξετε ότι

ι) f(0) = -α = 0 **ιι)** $f'(x) = f(x) + f'(0)e^x + x$

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

80. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=e^x\ln(2-e^x)$ στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$

81. Στις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη x_0:

ι) $f(x) = (x^2-1)\sqrt{x}$, $x_0 = 4$ ii) $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x - x\sigma\upsilon\nu x}$, $x_0 = \pi$ ιιι) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x_0 = 1$

iv) $f(x) = \frac{x}{e^x}$, $x_0 = 0$ v) $f(x) = \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$, $x_0 = \frac{\pi}{12}$

82. Αν $f(x) = x^3-4x$, να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία τομής της με τον άξονα $x'x$.

83. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f της συνάρτησης $f(x)=\frac{x^2-5}{x-1}$, στο σημείο $M(x_0,f(x_0))$ αν $f(x_0) + f'(x_0) = 4$

84. Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x) = 1 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$: για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ διέρχεται από το σημείο $B(f(1), 2)$.

ΙΙ.ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΣΕ ΓΝΩΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ $\neq X_0$

85. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3+x^2+x$ που διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$

86. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

87. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f της $f(x)=x^3$ που διέρχεται από το σημείο $A(0,-16)$.

88. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f της $f(x)=\frac{x}{x+2}$, που διέρχονται από το σημείο $A(0,1)$.

89. Μία συνάρτηση $f: R \to R$ έχει την ιδιότητα: $3f(x+1) - 2f(x-2) = x^2 + 14x - 5$, $\forall\ x \in R$. I) Να βρεθεί ο τύπος της f. Ιι) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f, οι οποίες άγονται από το σημείο $A(1,-\frac{1}{4})$, είναι κάθετες.

90. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(\ln x) = x \cdot \ln x - x$, $x > 0$.

α. Να αποδείξετε ότι η C_f' διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 0$

91. Να αποδειχθεί ότι από το σημείο $P(\alpha,\beta)$ με $\beta \prec \alpha^2$ διέρχονται δύο εφαπτόμενες της παραβολής $c: \psi = x^2$. ii) Αν το P βρίσκεται πάνω στην ευθεία $\delta: \psi = -\frac{1}{4}$, να αποδειχθεί ότι οι εφαπτόμενες είναι κάθετες.

92. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1-x}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}^*$ και το σημείο $M(\lambda,f(\lambda))$, $\lambda\neq 0$ της C_f

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(\lambda,f(\lambda))$

β) Να δείξετε ότι η παραπάνω εφαπτομένη:

i) Για $\lambda=3$ δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την C_f

ii) Για $\lambda=1$ έχει και άλλο κοινό σημείο με την C_f το οποίο και να βρεθεί

III.ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΜΕ ΓΝΩΣΤΟ λ

93. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x + 1$ (εφόσον υπάρχει), σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις: **α)** έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 3$.
β) σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x΄x.
γ) είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 3$.
δ) είναι κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{1}{2}x + 3$.
ε) είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.
στ) είναι παράλληλη στον άξονα y΄y.

94. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x+\ln(x-3)^2$ i) με συντελεστή διευθύνσεως $\lambda=3$

ii) που σχηματίζει γωνία 45ο με τον x΄x

iii) που είναι κάθετη στον άξονα y΄y

III. ΕΥΘΕΙΑ ΝΑ ΕΦΑΠΤΕΤΑΙ ΤΗΣ C_f

95. Να δειχθεί ότι η ευθεία $y=3x-8$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)= x+\ln(x-3)^2$

96. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $2f(x)=1+xf^3(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να δειχθεί ότι η ευθεία $y=-x+2$ εφάπτεται της C_f

97. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\beta x+2$ και η ευθεία ε: $y=-x+\beta$ Να βρείτε τις τιμές του β για τις οποίες η ευθεία ε εφάπτεται της C_f

98. Αν $0<\alpha\neq 1$, να βρείτε την τιμή του α ώστε η ευθεία ε: $y=x$ να είναι εφαπτομένη της C_f με $f(x)=\alpha^x$.

IV. ΚΟΙΝΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΣΕ ΚΟΙΝΟ ΣΗΜΕΙΟ

99. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = f(x)ημ(αx)$, $α \neq 0$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο Rμε $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$. Αν $(x_0,ψ_0)$ κοινό σημείο των C_f και C_g, να δείξετε ότι οι C_f και C_g δέχονται κοινή εφαπτόμενη στο $(x_0,ψ_0)$.

100. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \frac{1}{x-1}$ και $f(x) = αx^2 - βx + 9$. Να βρείτε τα $α,β \in R$, ώστε οι C_f και C_g να δέχονται κοινή εφαπτόμενη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη 2.

101. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ για τις οποίες οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=γ+x^x$ και $g(x)= αx^2+βx+2$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο M(1,2)

102. Για τις συναρτήσεις f,g,φ ισχύουν: Η f είναι παραγωγίσιμη στο Rμε $f(x) \neq 0$, $x \in R$

i)Η φ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R

ii) $g(x) = f(x)φ'(x)$, για κάθε $x \in R$

ιιι) $[φ(x)]^2 + [φ'(x)]^2 = 1$, για κάθε $x \in R$ Αν $A(x_0,ψ_0)$ είναι κοινό σημείο των C_f και C_g, να αποδειχθεί ότι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη

103. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεω $f(x)=\frac{1}{x}$ και $g(x)=x^2-x+1$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο οι εφαπτόμενές τους είναι κάθετες

104. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(x)=f(x)ημ3x$, να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν εφαπτομένη σε κάθε κοινό τους σημείο

V. ΚΟΙΝΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΣΕ ΜΗ ΚΟΙΝΟ ΣΗΜΕΙΟ

105. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=2x^2-αx+β$ και $f(x)=\frac{-3x^2+2x-4}{x}$. Να βρείτε τα α $β \in \mathbb{R}$, ώστε οι C_f και C_g να διέρχονται από το ίδιο σημείο στο οποίο δέχονται κοινή εφαπτόμενη με συντελεστή διεύθυνσης 2.

106. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4(1-x)e^{2x} = 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα(0,1). ii) Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη, όπου $f(x) = e^x$ και $g(x) = \sqrt{x}$.

107. Αν $f(x)=e^{-x}$ και $g(x)=-\ln x$ και είναι A το σημειο τομης της c_f με

τον ψ'ψ και Β το σημειο τομης της c_g με τον x'x, να δειξετε ότι η ευθεια ΑΒ είναι κοινη εφαπτομενη των γραφικων παραστασεων των συναρτησεων f και g

108. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=-x^2-x$. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α(0,1) εφάπτεται και στην C_g

109. Αν C_f, C_g είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(x)=ημx και $g(x)=x^3-3x^2+4x-1$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη των C_f, C_g

110. Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες των γρ. παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=4-x^2$ και $g(x)=-x^2+8x-20$.

VI. ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ

111. Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση για την οποία ισχύουν: $f'(4)=0$ και $(f'(x))^2=f(x)$ για κάθε $x\in R$, **α)** να βρεθεί ο τύπος της f. **β)** να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-x+1$

112. Η συναρτηση f ειναι παραγωγισιμη στο $[0,+\infty)$ και για $\forall\ x\in R$ ισχυει $f(e^{-x})=x^2+2x+3$. Να βρειτε την εξισωση της εφαπτομενης της c_f στο $A(1,f(1))$

113. Αν η ευθεια ε : ψ = 2x+1 εφαπτεται στην παραγωγισιμη συναρτηση f στο -1 , να βρεθει το $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(f\left(\frac{x+1}{2-x}\right)+1\right).(x-2)\right]$

114. Αν η ευθεια ε : ψ =2x-4 εφαπτεται στην $g(x)=\ln(f(x))$ στο $x_0=2$ οπου f συναρτηση με συνεχη παραγωγο να αποδειχθει ότι είναι συνεχης η $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2f(x)-4}{(x-2)f'(x)}, & x\neq 2\\ 6, & x=2\end{cases}$

115. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g , h: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν $f(x)\neq 0$, $g(x)=f(x)h(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οι f , g , h είναι δύο φορές παραγωγίσιμες και $h^2(x)=1-[h'(x)]^2$, να δείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στα κοινά τους σημεία.

116. Μία συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(\kappa-x)=f(\kappa+x)$, $\kappa\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία της $A(\kappa-\alpha,f(\kappa-\alpha))$ και $B(\kappa+\alpha,f(\kappa+\alpha))$ με $\kappa\neq\alpha$ τέμνονται πάνω στην ευθεία με

εξίσωση x=κ.

117. Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία $f'(1)=1$ και g η συνάρτηση που ορίζεται ως $g(x)=f(x^2+x+1)-1$, $x\in\mathbb{R}$ Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A(1,f(1)) εφάπτεται της C_g στο σημείο B(0,g(0))

118. Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:
$f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x) = 1 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A (0, f(0)) διέρχεται από το σημείο B (f(1), 2).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΡΥΘΜΟ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

119. Μια σφαιρική μπάλα αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της που ελαττώνεται δίνεται σε cm από τον τύπο $r = 4-t^2$, όπου t ο χρόνος σε sec Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας E και του όγκου V της μπάλας όταν t=1sec

120. Ένα σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2 + y^2 = 4$. Καθώς περνάει από το σημείο $A(-1,\sqrt{3})$, η τετμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό 6 m/sec.Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης τη χρονική στιγμή που το σώμα περνάει από το A. Το σώμα περνάει από το A ακολουθώντας τη θετική φορά κίνησης ή όχι;

121. Έστω $x>0$ και E το εμβαδόν του τριγώνου OAB, το οποίο έχει κορυφές τα σημεία O(0,0), A(4x,0) και $B(0,\sqrt{x}-2)$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 2cm/sec, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του E όταν x = 9 cm.

122. Η περίμετρος μιας κυκλικής κηλίδας μεταβάλλεται με ρυθμό 2m/sec όταν η ακτίνα της είναι 12m. Να βρεθεί την ίδια στιγμή ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού της

123. Ένα σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2 + \psi^2 = \rho^2$ με $\frac{\partial x}{\partial t} = \psi$.
Βρείτε το $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ όταν $\psi \neq 0$.Το σώμα κινείται στον κύκλο κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού ή αντίθετα;

124. Ένα σημείο A κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x$.

Τη χρονική στιγμή t_0 βρίσκεται στη θέση (2,0) και το x αυξάνει με ρυθμό 3 cm/sec.i) Να βρεθεί το $\psi'(t)$ τη χρονική στιγμή t_0.
Να βρείτε σε ποια θέση $\psi'(t) = x'(t) \neq 0$, όπου ψ = f(x).

125. Ένας πληθυσμός μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $N(t) = \frac{40}{1+19.2^{-t}}$, όπου t ο χρόνος σε λεπτά. Αν οι φυσιολογικές απώλειες $M(t) = N'(t)$ κάθε λεπτό είναι ανάλογες του τετραγώνου του υπάρχοντος πληθυσμού με συντελεστή $\kappa = 10^{-3}$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής Μ.

126. Ένας άνθρωπος ύψους 170cm κινείται προς μια φωτεινή πηγή που απέχει από το έδαφος 300cm. Αν η ταχύτητα του ανθρώπου είναι 7,2Km/h να βρεθεί με τι ταχύτητα κινείται η σκιά του κεφαλιού του

127. Το εμβαδόν της περιοχής ανάμεσα σε δύο ομόκεντρους κύκλους είναι πάντα 9π cm^2. Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του μεγαλύτερου κύκλου είναι10π cm^2/sec. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του μήκους του μικρού κύκλου όταν αυτός έχει εμβαδόν 16π cm^2.

128. Μια σκάλα μήκους 13m είναι ακουμπισμένη σ' έναν κατακόρυφο τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας έλκεται από τον τοίχο με ρυθμό 2m/sec. Να βρείτε:
ι. Πόσο γρήγορα γλιστράει το πάνω άκρο της σκάλας όταν το κάτω άκρο απέχει από τον τοίχο 5m.
Ιι.Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου που σχηματίζει η σκάλα με τον τοίχο και το έδαφος όταν το κάτω άκρο της απέχει από τον τοίχο 12m.

129. Δίνεται η συνάρτηση f(x) =lnx, $x \succ 0$ και το σημείο M(α,lnα), $\alpha \succ 0$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Μ. Για ποια τιμή του α η εφαπτόμενη διέρχεται από την αρχή των αξόνων;
Αν το σημείο Μ απομακρύνεται από τον άξονα ψ'ψ με σταθερή ταχύτητα v = 2m/sec, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία η εφαπτομένη στο Μ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

130. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$, και το σημείο $M(\alpha,\alpha^3)$, $\alpha > 0$, που απομακρύνεται από τον άξονα y'y με σταθερή ταχύτητα v = 3 m/sec.

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Μ.

ii) Να αποδειχθεί ότι η παραπάνω εφαπτόμενη τέμνει τηC_f και σε δεύτερο σημείο Ν.

iii) Να εκφραστεί το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΜΒΝ (με διαγώνιο ΜΝ και πλευρές παράλληλες προς τους άξονες) με μεταβλητή το α.

iv) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το Μ απέχει από τον άξονα y΄y απόσταση 2m.

ΚΑΝΟΝΕΣ De L΄Hospital

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

I. ΜΟΡΦΗ $\frac{0}{0}$

131. Να υπολογισετε τα ορια

ι) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\eta\mu\chi + x\ln(1+x)}{\eta\mu^2\chi}$ **ιι)** $\lim\limits_{x\to \pi/4}\frac{\sqrt{2}-\eta\mu\chi-\sigma\upsilon\nu\chi}{\ln(\eta\mu 2\chi)}$ **ιιι)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{1-\sigma\upsilon\nu\chi}$ **ιν)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\eta\mu x}}{x-\eta\mu\chi}$

132. Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2+2\sigma\upsilon\nu x-2}$ β) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln^2 x}{e^x-ex}$ γ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}$ δ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x+1}{x^2}$ ε) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\ln x}$

II. ΜΟΡΦΗ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

133. Να υπολογισετε τα ορια

ι) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\chi^3}{e^x}$ **ιι)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{e^{\frac{1}{x}}}$ **ιιι)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}, \alpha>0, \beta>0$ **ιν)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2\ln x}{x^3+x^2+x+1}$

134. Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\ln(\sqrt{x}+2)}$ β) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^{\alpha x}}{x^\kappa}$ γ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2+x+\eta\mu x}{e^x+x+2}$

II. ΜΟΡΦΗ $0\cdot(\pm\infty)$

135. Να υπολογισετε τα ορια

ι) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\chi\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$ **ιι)** $\lim\limits_{x\to 1}\left[\ln x\cdot\ln(1-x)\right]$ **ιιι)** $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x\cdot\eta\mu\chi)$

136. Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2\ln^3 x)$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}\right)$ γ) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\eta\mu^{12}x\ln x)$

III. ΜΟΡΦΗ $(\pm\infty)-(\pm\infty)$

137. Να υπολογισετε τα ορια

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sigma\varphi\chi-\frac{1}{\chi}\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^x-\ln x\right)$ **iii)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\eta\mu^2\chi}-\frac{1}{\chi^2}\right)$ **iv)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\chi}-\frac{1}{2^\chi-1}\right)$

138. Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$ β) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2+\ln x-e^x)$ γ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}-\frac{e^x}{\eta\mu x}\right)$

IV. ΜΟΡΦΕΣ $0^0, 1^\infty, (\infty)^0$

139. Να υπολογισετε τα ορια

ι) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\eta\mu\chi)^{\eta\mu\chi}$ **ιι)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\chi^\chi$ **ιιι)** $\lim\limits_{x\to 1}\left[\chi^{\frac{1}{\chi-1}}\right]$ **ιν)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\chi+3}{\chi-3}\right)^{\chi^2}$ **ν)** $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu 3\chi+\sigma\upsilon\nu 2\chi)^{\frac{3}{\chi}}$

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ

140. Δινεται η συναρτηση $g(x)=\begin{cases}\frac{xf(x)}{\eta\mu^2\chi}, & 0<\chi<\pi\\ 0, & \chi\le 0\end{cases}$ οπου f μια παραγωγισιμη στο R συναρτηση με $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$. Να δειξετε ότι η f είναι παραγωγισιμη και να βρειτε την g'

141. Η συναρτηση f είναι παραγωγισιμη στο R και ισχυει f(0)=0.Να αποδειξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{e^x-1}=2f'(0)$

142. Η συναρτηση f δυο είναι φορες παραγωγισιμη στο R και η f'' είναι συνεχης στο x=0 .Αν $f(0)=f'(0)=0$ και $f''(0)\neq 0$, να αποδειξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu\chi^2+f(x)}{(e^x-1)f'(x)}=1$ αν και μονο αν $f''(0)=2$

143. Δινεται η συναρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{x\cdot\ln x+x-1}{1-x}, & 0<x\neq 1\\ -2, & x=1\end{cases}$ Να δειξετε ότι η f είναι

συνεχης και $f'(1) = -\frac{1}{2}$

144. Δινεται η συναρτηση $f(x) = \begin{cases} (1-e^{-x^2})\ln x^2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ **ι)** Να υπολογισετε τα ορια $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}$ και $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 \ln x^2)$ **ιι)** Να αποδειξετε ότι η f είναι συνεχης στο x=0. **ιιι)** Να βρειτε την εξισωση της εφαπτομενης της γραφικης παραστασης της f στο σημειο O(0,0)

145. Η συναρτηση f είναι παραγωγισιμη στο $x_0 = 0$ και $f(0) = 0$. Να αποδειξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{f(x)} = 1$

146. Η συναρτηση $f: R \to R$ είναι παραγωγισιμη με $f(x) \geq \varphi > 0$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x) + f'(x)) = l \in R$. Να δειξετε ότι $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = l$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x) = 0$

147. Αν η συναρτηση f εχει δευτερη παραγωγο στο α και $f'(\alpha) \neq 0$, να αποδειξετε ότι

$$\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{1}{(x-\alpha)f(\alpha)} - \frac{1}{f(x)-f(a)}\right] = \frac{f''(\alpha)}{2f^2(\alpha)}$$

148. Αν $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f''(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f'''(x)}{xf''(x)} = 1$ να δειξτε ότι

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 + f(x)}{xf'(x)} = 0$$

149. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f: $\Re \to \Re$ για την οποία ισχύει $xf(x)+e^{\eta\mu x}=f(x)\eta\mu x+e^x$ για κάθε $x \in \Re$. Να βρείτε την f(0).

150. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f: $\Re \to \Re$ για την οποία ισχύει (1-συνx)f(x) = ln(1+x)-x για κάθε $x \succ -1$. Να βρείτε την f(0).

151. i) Να λύσετε την εξίσωση 1+lnx = x στο (0,2).
ii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f με f(x) = xlnx+x+2, $x \in (0,2)$ που διέρχεται από τα ο σημείο A(2,5) και το f((0,2)).

152. Έστω η συνάρτηση f : $\Re \to \Re$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+2h) - 3f(x) + 2f(x-h)}{h^2} = 3f''(x)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ Θ. ROLLE

Ι. ΑΜΕΣΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

153. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τις παρακάτω συναρτήσεις στο αντίστοιχο διάστημα α) $f(x)=2x^3+x^2-8x+1$, $x\in[-2,2]$

β) $f(x)=\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu 2x-1$, $x\in[0,\pi]$ γ) $f(x)=x^2-4x+|x-2|+3$, $x\in[1,3]$

154. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{9x^2-14x+9}, & \alpha\nu\ x\le 1 \\ x+1 , & \alpha\nu\ x\succ 1 \end{cases}$.Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται τα Θ.ROLLE στο διάστημα [0,2] για τη συνάρτηση f.

155. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x , & \alpha\nu\ x\le 0 \\ \alpha x^2+\beta x , & \alpha\nu\ x\succ 0 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές $\alpha,\beta\in R$ για τις οποίες η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. ROLLE στο διάστημα [-π,1] και έπειτα να βρείτε όλα $x_0\in(-\pi,1)$ για τα οποία ισχύει $f'(x_0) = 0$.

156. Δίνεται η συναρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+a & x\le 0 \\ x^3+(\beta-1)\chi, & \chi>0 \end{cases}$ Να βρειτε τις τιμές των α , $\beta\in R$ ώστε να εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο [-1,1]

157. Να αποδείξετε ότι: **i)**Η συνάρτηση f(x) = χσυνχ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. ROLLE στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ **ii)** Η εξίσωση χεφχ = 1 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

158. Έστω f μια συνάρτηση για την οποία ισχύουν: Είναι συνεχής στο [α,β] Είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και f(α) = f(β) = 0 Να αποδείξετε ότι:

a) Για τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x-c}$ όπου $c\notin[\alpha,\beta]$ εφαρμόζεται το Θ. ROLLE στο διάστημα [α,β]. b)Αν $c\notin[\alpha,\beta]$, τότε υπάρχει $c_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $(c_0, f(c_0))$ να διέρχεται από το σημείο (c,0).

159. Δίνεται η συναρτηση f: [α,β]→R, η οποία είναι συνεχής στο [α,β] καιπαραγωγισ ιμη στο (α,β). Να αποδειξετε ότι : **Ι)** για τη συναρτηση $g(x) = e^{f(x)}(x-a)(x-\beta)$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο [α,β]

ιι) Υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο , ώστε $f'(\xi)=\frac{1}{a-\xi}+\frac{1}{\beta-\xi}$

160. Έστω f,g δύο συναρτήσεις που ικανοποιούν τις συνθήκες: Είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα [α,β] $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f(x) \neq 0$ $x \in (\alpha,\beta)$ Να αποδείξετε ότι: a) Για τη συνάρτηση $h(x) = f(x)e^{-g(x)}$, $x \in [\alpha,\beta]$ εφαρμόζεται το Θ. ROLLE στο διάστημα [α,β]. b)Υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $A(x_0,g(x_0))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία δ: $f'(x_0).x - f(x_0).\psi + \kappa = 0$.

161. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\nu}(x-1)^{\mu}$ με $\nu,\mu \in N^*$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει

$x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$ και το σημείο $\Gamma(x_0,0)$ ώστε $\mu\overrightarrow{AM} = \nu\overrightarrow{MB}$ όπου A(0,0) και B(1,0).

162. Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [α,γ] και ισχύουν $f(\alpha) = f(\gamma)$ και $f'(\alpha) = f'(\gamma) = 0$, να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία $x_1, x_2 \in (\alpha,\gamma)$ τέτοια, ώστε $f''(x_1) = f''(x_2)$.

163. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β], παραγωγίσιμη στο (α,β)και $0 \notin [\alpha,\beta]$, Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta^2-\alpha^2} = \frac{f'(x_0)}{2x_0}$.

164. Αν οι συναρτήσεις f ,g είναι συνεχείς στο [α,β], παραγωγίσιμες στο (α,β) με $f(\alpha) = f(\beta)e^{g(\beta)-g(\alpha)}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(x_0) + f(x_0).g'(x_0) = 0$.

165. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο Rκαι ισχύει $10f(x) \leq 6f(5)+4f(3)$ για κάθε x, να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ με $f'(\xi) = 0$.

166. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο [2,3] και $f(3) - f(2) = \ln 3 - \ln 2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2,3)$, ώστε $f'(\xi) = \frac{1}{\xi}$.

167. Σ' έναν αγώνα δρόμου δύο αθλητές τερματίζουν με την ίδια ταχύτητα. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον χρονική στιγμή κατά τη διάρκεια του αγώνα που έχουν την ίδια επιτάχυνση

168. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β], παραγωγίσιμη στο (α,β). Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(x_0) = \frac{f(x_0)-f(\alpha)}{\beta - x_0}$.

169. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,2] και παραγωγίσιμη στο (0,2), να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = f'(2-\xi)$.

170. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β], παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(\alpha) - f(\beta) = \alpha^2-\beta^2$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(x_0) = 2x_0$.

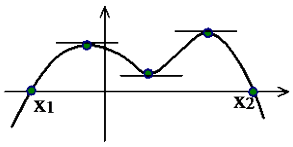
171. Η συνάρτηση $f: [1,4] \to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν $f(1) = 2$

και f(4) = 8. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

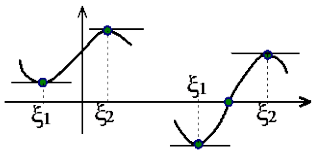
172. Δίνεται η συναρτηση f: [α,β]→ R συνεχής στο [α,β] ,παραγωγισιμη στο (α,β) Αν $f(x) \neq 0$ να αποδειξετε ότι υπάρχει $\theta \in (\alpha,\beta)$ τετοιο ,ωστε $\frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \frac{1}{\alpha-\theta} + \frac{1}{\beta-\theta}$

173. (Για παραγωγίσιμες συναρτήσεις)

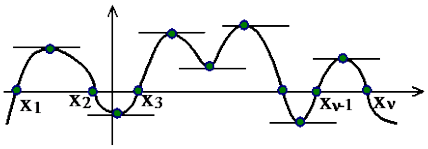
α) Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών x_1 , x_2 της συνάρτησης f υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της παραγώγου f'



β) Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών ξ_1 , ξ_2 της παραγώγου f' υπάρχει το πολύ μία ρίζα της συνάρτησης f



γ) Αν η f έχει ν ρίζες x_1 , x_2 , … , x_ν τότε η f' έχει ν-1 τουλάχιστον ρίζες



II. ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE ΚΑΙ ΡΙΖΕΣ

Ορισμός:

Παράγουσα (ή αρχική) της **f** στο διάστημα Δ: Λέγεται κάθε συνάρτηση **F** που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $\mathbf{F'(x) = f(x)}$, για κάθε $x \in \Delta$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ

συνάρτηση f	παράγουσα F	μορφή συνάρτησης f	μορφή παράγουσας F
0	c	$f'(x)$	$f(x)$
1	x	$f(x)\, f'(x)$	$\frac{1}{2} f^2(x)$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$f^\alpha(x)\, f'(x)$	$\frac{1}{\alpha+1} f^{\alpha+1}(x)$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$	$2\sqrt{f(x)}$

ημx	-συνx	ημf(x) f΄(x)	-συνf(x)
συνx	ημx	συνf(x) f΄(x)	ημf(x)
e^x	e^x	$e^{f(x)}$ f΄(x)	$e^{f(x)}$
$\frac{1}{x}$	ln|x|	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	ln|f(x)|
α^x	$\frac{\alpha^x}{\ln\alpha}$	$\alpha^{f(x)}$ f΄(x)	$\frac{\alpha^{f(x)}}{\ln\alpha}$
και κάποιες γενικότερες μορφές			
μορφή συνάρτησης f	μορφή παράγουσας F	μορφή συνάρτησης f	μορφή παράγουσας F
f΄(x)g(x) + f(x)g΄(x)	f(x)g(x)	f΄(x) +x f΄(x)	x f(x)
$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f(x)-xf'(x)}{x^2}$	$\frac{f(x)}{x}$
$[f'(x)]^2+f(x)f''(x)$	f(x) f΄(x)	$[f'(x)+f(x)g'(x)]e^{g(x)}$	$f(x)e^{g(x)}$

174. Αν $\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}+\gamma=0$ $\alpha,\beta,\gamma\in R$ $\alpha\neq 0$.Να δειχθεί ότι η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ δέχεται στο διάστημα (0 , 1) τουλάχιστον μια ρίζα .

175. Να δειχθεί ότι η εξίσωση ημx + (x-1) συνx=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0 ,1)

176. Αν $\frac{\alpha_\nu}{\nu+1}+\frac{\alpha_{\nu-1}}{\nu}+.....+\frac{\alpha_2}{3}+\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_0}{1}=0,\ \nu\in N^*$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+.....+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0=0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

177. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $8\alpha x^3+9\beta x^2-6\beta x-2\alpha=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (0,1)

178. Να δειχθεί ότι η εξίσωση (x^2-4)συνx+2xημx=0 έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα (-2,2)

179. Έστω f συνεχής στο [α,β] , α>0 και παραγωγίσιμη στο (α,β) για την οποία είναι $\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\beta)}{\beta}$ α) Να δείξετε ότι η εξίσωση xf΄(x)=f(x) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α,β) β) Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων

180. Να δειχθεί ότι μεταξύ δυο οιονδήποτε ριζών της e^x ημx=1 , υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της e^x συνx= -1

181. Να δειχθεί ότι μεταξύ δυο ριζών της εξίσωσης $e^{4x+x^2} = 2ημx$ υπάρχει πάντα μια ρίζα της εξίσωσης $2x + 4 = σφx$

► Ύπαρξη το πολύ ν ριζών εξίσωσης (με άτοπο)

182. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3 - 3x + α=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(-1, 1)$

183. Να αποδειχθει ότι η εξίσωση $x^{2ν} + αx + β = 0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες

184. Δίνεται η συναρτηση $f: R \to R$ δυο φορές παραγωγισιμη στο R με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$. Να αποδειξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ δυο ρίζες.

185. Αν $α \neq 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4+αx^3+α^2x^2+βx+γ = 0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

186. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 + 18x + μ = 21x^2$ έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

187. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x + μ$, όπου η παράμετρος $μ \in R$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει το πολύ δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

188. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $αx^3+βx^2+γx+δ = e^x$ έχει το πολύ τέσσερις πραγματικές ρίζες.

189. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4+2x^3+3x^2-λx + μ = 0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $λ,μ \in R$.

190. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2-2x+2\ln(x+1)=0$ έχει το πολύ μία ρίζα

► Ύπαρξη ακριβώς ν ριζών εξίσωσης

191. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^4-x^3+5x^2+αx+β=0$ με $α, β \in \mathbb{R}$ και $β<0$ έχει δύο μόνο ρίζες άνισες

192. I) Αν ο ν είναι άρτιος θετικός ακέραιος και $α \neq 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x+α)^ν = x^ν + α^ν$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

II) Να λυθεί η εξίσωση: $(x+3)^{1996} = (x+1)^{1996} + 16^{499}$.

193. Αν η εξίσωση $x^4 + \alpha x^3 + 3\beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$ έχει όλες τις ρίζες της πραγματικές και άνισες μεταξύ τους , να αποδειξετε ότι $\alpha^2 > 8\beta$

194. Δίνεται το πολυώνυμο $\Pi(x) = (2x-1)(2x+1)(x^2-3x)$. Να αποδείξετε ότι τι πολυώνυμο $\Pi'(x) = 0$, έχει τρεις ρίζες ανά δύο διαφορετικές

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ Θ.Μ.Τ

I. ΑΜΕΣΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ Θ.Μ.Τ

195. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x+2, & x \le -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [-3,2] και αν ναι, να βρείτε όλα τα $\xi \in (-3,2)$ που να επαληθεύουν το Θ.Μ.Τ.

196. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x(1-\ln x)$. Να εξετάσετε αν η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [1,e] και αν ναι, να βρείτε όλα τα $\xi \in (1,e)$ που να επαληθεύουν το Θ.Μ.Τ.

197. Έστω η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β], παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(x) \succ 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο [α,β] για τη συνάρτηση $f(x) = \ln f(x)$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f(\alpha) = f(\beta)e^{(\alpha-\beta)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}$

II. ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΜΕ Θ.Μ.Τ

198. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [1,3] με f(1) = 2005 και $-\frac{1}{2} \le f'(x) \le \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in (1,3)$, να αποδείξετε ότι $2004 \le f(3) \le 2006$.

199. Αν η συνάρτηση $f'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R και είναι f(0) = 0, να αποδείξετε ότι: $f'(1) \prec f(1) \prec f'(0)$.

200. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [1,5] με f(1) = -2και $|f'(x)| \prec 2$ για κάθε $x \in (1,5)$, να αποδείξετε ότι: $-10 \prec f(5) \prec 6$.

201. α)Αν f ' γνησίως αύξουσα στο [α,β] να δείξετε: $f'(\alpha) < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < f'(\beta)$

β) Αν f ' γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$ να δείξετε: $f'(\alpha) < \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} < f'(x)$

202. Να αποδειχθούν οι ανισότητες :

α) $e^{\alpha} < \frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha} < e^{\beta}$, για κάθε α , $\beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$

β) $x+1 \le e^{x} \le xe^{x}+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$, για κάθε x>-1 και $x \neq 0$. Στη συνέχεια να δείξετε:

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$, ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^3} = 0$

δ) $|\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha| \le |\beta-\alpha|$ για κάθε α , $\beta \in \mathbb{R}$

203. Αν $0 \prec \alpha \prec \beta$, να αποδειχθεί: $e^{\beta} - e^{\alpha} \prec \beta\, e^{\beta} - \alpha\, e^{\alpha}$.

204. Να αποδείξετε ότι: $\left|\ln\frac{x^2+1}{\psi^2+1}\right| \le |x-\psi|$, για κάθε $x,\psi \in R$.

205. Αν ισχύουν $\alpha \prec \gamma \prec \beta$, και $f'(\gamma) = 0$ και $|f''(x)| \le \theta$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι $|f'(\alpha)+f'(\beta)| \le \theta(\beta-\alpha)$.

206. Να αποδείξετε ότι: i) $\sigma\varphi\beta \prec \frac{\ln(\eta\mu\beta)-\ln(\eta\mu\alpha)}{\beta-\alpha} \prec \sigma\varphi\alpha$, αν $0 \prec \alpha \prec \beta \prec \frac{\pi}{2}$.

ii) $|\eta\mu^2\beta - \eta\mu^2\alpha| \le |\beta-\alpha|$. iii) $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$, αν $x > 0$.

ιv) $1+\frac{x}{2\sqrt{1+x}} \prec \sqrt{x+1} \prec 1+\frac{x}{2}$, αν $-1 \prec x \prec 0$. v) $x \le e^{x-1} \le 1+(x-1)e$, αν $x \in (1,2)$.

Θ.Μ.Τ και ROLLE

207. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία της γραφικής παράστασης C_f, να δείξετε ότι:

i) Υπάρχουν δύο σημεία της C_f στα οποία οι εφαπτόμενες είναι μεταξύ τους παράλληλες ii) Υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$

iii) Εξετάστε αν εφαρμόζεται το θ. Rolle για την συνάρτηση $\varphi(x)=\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$

στο διάστημα [β,γ] και να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\beta,\gamma)$ με $f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(\alpha)}{\xi-\alpha}$

208. Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο R.Αν οι αριθμοί f(2), f(4), f(6) είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2,6)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

209. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R της οποίας η παράγωγος f' είναι γνησίως φθίνουσα στο R .Αν οι αριθμοί α,β,γ,δ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικήςπροόδου με $\alpha \prec \beta \prec \gamma \prec \delta$, να αποδείξετεότι: $f(\alpha) + f(\delta) \prec f(\beta) + f(\gamma)$.

210. Η συναρτηση f είναι συνεχής στο [-3,3] δυο φορές παραγωγισιμη στο (-3,3) με2 f(0)= f (3)+f (-3) .Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (-3, 3)$ ώστε $f''(\xi)=0$

211. Με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ. να λύσετε την εξίσωση: $3^x + 6^x = 5^x + 4^x$.

212. Έστω η f είναι συνεχής στο [α,β] , παραγωγίσιμη στο (α,β)

α) Αν η f ' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (α,β) να δείξετε ότι

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

β) Αν η f ' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (α,β) να δείξετε ότι

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

γ) Αν $f'(x) \le 1$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$, f(α)=α και f(β)=β να δείξετε ότι

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{\alpha+\beta}{2}$$ (ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ JENSEN)

213. Έστω $\alpha>0$ και η δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [-α,α] συνάρτηση g. Αν 2g(0) = g(α) + g(-α), να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-\alpha,\alpha)$ τέτοιο, ώστε: $g''(\xi) = 0$.

214. Η συνάρτηση $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) και συνεχής με f(α) = f(β) = 0. Να αποδείξετε ότι:

i) αν υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ με $f(x_0)>0$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)<0$,

ii) αν υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ με $f(x_0)<0$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)>0$.

215. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(\ln\alpha)=f(\ln\beta)$. Αν ισχύει $\ln\alpha<\ln\gamma<\ln\beta$, με α, β, γ >0 και $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\beta}{\gamma}=e^2$,να

δειχθεί ότι υπάρχουν αριθμοί ξ_1, ξ_2 τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1)+f'\xi_2)=0$.

IV. Θ.Μ.Τ ΚΑΙ BOLZANO

216. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] , παραγωγίσιμη στο (α,β) και f(α)=α , f(β)=β $\alpha \neq \beta$ να δείξετε ότι: α) Υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\alpha+\beta-\xi$

β) Υπάρχουν ξ_1 , $\xi_2 \in (\alpha,\beta)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=1$

217. Έστω συνεχής $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,2)$ Να δείξετε ότι:

α) $f(0) \neq f(2)$ β) Υπάρχει $x_0 \in (0,2)$ με $5f(x_0)=2f(0)+3f(2)$

γ) Υπάρχουν ξ_1 , ξ_2 , $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $\frac{3}{f'(\xi_1)}+\frac{2}{f'(\xi_2)}=\frac{5}{f'(\xi)}$

218. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα [0,1], με f(0) = 0 και f(1) = 1, να αποδείξετε ότι: i) υπάρχει $\gamma \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε: $f(\gamma) = \frac{1}{2}$

ii) υπάρχουν ξ_1, $\xi_2 \in (0,1)$ τέτοια, ώστε: $\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=2$.

219. Αν $\exists f'(x) \neq 0, \forall x \in [\alpha,b]$ και η *f* είναι γνήσια μονότονη δείξτε ότι : Υπάρχουν μοναδικά $c,d \in (\alpha,b)$ και πραγματικός αριθμός *κ* : $\begin{array}{l} f(c)-f(a)=2k \\ f(d)-f(c)=k \\ f(b)-f(d)=3k \end{array}$

Στην συνέχεια δείξτε ότι υπάρχουν αριθμοί ξ_1 , ξ_2 και ξ_3 στο (α,b) *:*

$$\frac{2}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}+\frac{3}{f'(\xi_2)}=\frac{6(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

V.ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΙΣΟΤΗΤΩΝ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+\ldots+f'(\xi_\nu)=c$

220. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [0,2], παραγωγίσιμη στο (0,2) με f(0)= f(2) , να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία α, $\beta \in (0,2)$ τέτοια ώστε: $f'(\alpha) + f'(\beta) = 0$. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το συμπέρασμα.

221. Εστω συναρτηση f παραγωγισιμη στο [1 , 4] με f(4x)= 4 f(x) και $f(\frac{1}{4})=2$. Να δειχθει ότι υπαρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (1,4)$ ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3) = 24$

VI.ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΙΣΟΤΗΤΩΝ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\kappa_1 f'(\xi_1) + \kappa_2 f'(\xi_2) + \ldots + \kappa_\nu f'(\xi_\nu) = c$

222. Έστω f συνεχής στο [α,b] , παραγωγίσιμη στο (α,b) και f(a)=f(b) Δείξτε ότι υπάρχουν ξ_1,ξ_2 στο (α,b) : $f'(\xi_1)+3f'(\xi_2)=0$. Εξηγείστε γεωμετρικά

223. Έστω f συνεχής στο [α,b] , παραγωγίσιμη στο (α,b) ,f(a)=f(b) και k,l,m>0 Δείξτε ότι υπάρχουν ξ_1,ξ_2,ξ_3 στο (α,b) : $k f'(\xi_1)+l f'(\xi_2)+m f'(\xi_3)=0$.

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ Θ.Μ.Τ- ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ι. ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

224. Για τη συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύουν: f(0) = α και $f'(x) = \alpha f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση g(x) = f(x) f(-x) είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της.

225. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f , g : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)= -g^2(x)$ και $g'(x)=f^2(x)$, $\in\mathbb{R}$

α) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $h(x)=f^3(x)+g^3(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

β) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης h αν f(0)=1 και g(0)=2

226. Έστω f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x)=2f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ για την οποία f(0)=1 και f(x)>0, για κάθε x . Να δειχθεί ότι:

α) Η συνάρτηση G(x)=lnf(x)-2x είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

β) $f(x)=e^{2x}$, για κάθε $x \in\mathbb{R}$

227. Έστω f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία $f(x)+ f''(x)=0$, για κάθε $x \in\mathbb{R}$ α) Αν f(0)=f'(0)=0 να δειχθεί ότι:

I) συνάρτηση $h=(f')^2+f^2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ ii) f(x)=0, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) Αν $g(x)+g''(x)=0$ με g(0)=0 , g'(0)=1 να δειχθεί ότι g(x)=ημx

228. Αν οι συναρτήσεις f , g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο R με f(x) +f''(x) = g(x) + g''(x) και οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν σε κοινό τους σημείο κοινή εφαπτόμενη, να αποδείξετε ότι f(x) = g(x) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

229. Δίνεται η τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $R\to\Re$ για την οποία ισχύει: 2f(x) = x(1 + f'(x)) για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f''είναι σταθερή

230. Υποθέτουμε $|f(x)-f(\psi)|\le(x-\psi)^{\nu}$ για κάθε $x,\psi\in R$, όπου ν άρτιος θετικός ακέραιος. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή

231. Αν f''(x) = -f(x) για κάθε $x\in R$, f(0) = 1, και f'(0) = 0, να αποδείξετε ότι: $(f(x))^2 + (f'(x))^2 = 1$, η συνάρτηση h(x) = f(x) – συνx ικανοποιεί την ισότητα $(h(x))^2 + (h'(x))^2 = 0$, Να δειξετε ότι f(x) = συνx, $x\in R$.

ΙΙ. ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

232. Να βρεθεί η συνάρτηση f όταν:

α) $f'(x)=3\text{συν}x-4\text{ημ}2x-e^{-x}$ και f(0)=5 β) $f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ και f(0)=1

γ) $f'(x)=2x\text{συν}x-x^2\text{ημ}x$ και f(0)=1 δ) xf'(x)+f(x)=2 , x>0 και f(1)=0

ε) f συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2})$ και f'(x)- σφx f(x)=ημx με $f(\frac{\pi}{6})=\frac{2009}{2}+\frac{\pi}{12}$

στ) f'(x)=2f(x) , για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με f(0)= 1

233. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(0,+\infty)$ με f(x)>0 ισχύουν:

i) Η κλίση της εφαπτομένης σε κάθε σημείο της γραφικής παράστασης είναι ανάλογη με το πηλίκο $\frac{x}{f(x)}$

ii) Η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο A(1,1) iii) Η εφαπτομένη στο A έχει κλίση ίση με 1. Να βρείτε τον τύπο της

234. Να βρεθεί η συνάρτηση f: R $\to\Re$ για την οποία ισχύει:

$f'(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x+2}$, $x\in\Re$, και f(-1) = 1.

235. Η κλίση της παραγωγίσιμης συνάρτησης f: $R\to\Re$ στο τυχαίο σημείο M(x,f(x))

είναι ίση με το διπλάσιο της τιμής της f στο x. Αν f(0) = 1, να βρεθεί ο τύπος της f.

236. Δίνεται η συνάρτηση f: $R \to \Re$ για την οποία ισχύει: $(x-2)f'(x) = 2x^2 - 5x + 2$ για κάθε $x \in R$. Αν f(3) = 7, να βρεθεί ο τύπος της f.

237. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: $R \to \Re$ για την οποία ισχύει: $f'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in R$. Αν f(0) = 3, να βρεθεί ο τύπος της f.

238. Δίνεται η συνάρτηση f: $R \to \Re$ με f(0) = 2, για την οποία ισχύει:
$(f(x)-e^x)(f'(x)-e^x) = 0$ για κάθε $x \in R$.i) Να αποδείξετε ότι $(f(x)-e^x)^2 = 1$.
ii) Να αποδείξετε ότι η $h(x) = f(x)-e^x$ διατηρεί σταθερό θετικό πρόσημο στο R.
Iii)Να βρείτε τον τύπο της f.

239. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $R \to \Re$ για την οποία ισχύει:
$f(x+\psi) \le f(x)f(\psi) + x\psi$ για κάθε $x,\psi \in R$ και f(0) = 1, f'(0) = 1. Να αποδείξετε ότι: i) $f(x+h) - f(x) \le f(x)(f(h)-1) + xh$ ii) $f'(x) = f(x) + x$

240. Να αποδείξετε ότι: i)$f'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in R$,αν και μόνο αν υπάρχει $c \in R$ έτσι, ώστε $f(x) = ce^{-x}$ για κάθε $x \in R$, ii)αν για κάθε $x \in R$ ισχύουν $g'(x) = -g(x)$ και $h'(x) = -h(x)$ και η h δεν είναι μηδενική συνάρτηση, τότε υπάρχει $c \in R$ έτσι, ώστε g = ch.

241. Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα P(x) για τα οποία ισχύει
$P(x) + P(\psi) = P(x+\psi) - x\psi - 1$ για κάθε $x,\psi \in R$ και $P'(0) = -1$.

242. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f: $\Delta \to \Re$, όταν για κάθε $x \in \Delta$ είναι:
$(f(x))^2.(f'(x)) = 3x^8$, f(0) = 0 και $\Delta = R$ i) $f'(x) = 2xe^{-f(x)}$, f(0) = 0 και $\Delta = R$
ii) $\text{συν}^2x.f'(x) + (f(x))^2 = 0$, $f(x) \ne 0, f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ και $\Delta = (0, \frac{\pi}{2})$.

243. Δίνεται η συνάρτηση f: $(0, +\infty) \to R$, για την οποία ισχύουν:
$f(x\psi) = f(x).f(\psi)$ για κάθε $x,\psi \succ 0$, ii)$f(x) \ne 0$ για κάθε $x \succ 0$, iii)$f'(1) = 2005$.
Να αποδειχθεί ότι: α) η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, β) να βρείτε τον τύπο της f

244. Μια συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη έχει την ιδιότητα:
$f''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και f(0) = 1, f '(0) = 1.
Να αποδείξετε ότι: ι) $f(x) + f'(x) = 2e^x$, $x \in R$. Ιι) $f(x) = e^x$, $x \in R$.

245. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύουν f(0) = 1 , f '(0)=2, f(x)> 0 και f''(x) – 2f'(x) + f(x) = e^x για κάθε x>0 αφού πρώτα δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}-x$ ε ίναι σταθερή.

246. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: f(x)f'(-x) =1 για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν f(0) = 1, να αποδείξετε ότι:

ι)f(-x)f'(x) = 1 για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ιι)f(-x)f(x) = 1 για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ιιι) f(x) = e^x για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ι.ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΤΗΣ f ΑΠΟ ΤΟ ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΗΣ f′

247. Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων: i)f(x) = $x+\frac{1}{x}$ ii) f(x) = $\frac{x}{\ln x}$

ιιι) f(x) = $x^2\ln x$ ιν) f(x) = $x\sqrt{9-x^2}$ v) f(x) = $x^2(\ln x-\frac{3}{2})-x(\ln x-2)+2$

248. Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων:

i) f(x) = $\ln|x|+\frac{2}{x^2}$ **ii)** f(x) = $\ln x+\frac{2}{x}-2\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}$ **iii)** f(x) = $\begin{cases} e^x-ex, x\le 0 \\ x^2\ln x+1, x\succ 0\end{cases}$

iv) f(x) = $\begin{cases} x^2-6x+1, x\ge 1 \\ 1+x^2+x^3, x\prec 1\end{cases}$ **v)** f(x) = $|x^2-7x|$.

249. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-1+\frac{1}{x-1}$. Να βρείτε

α) Τα $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ β) Τα διαστήματα μονοτονίας της f . Τι παρατηρείτε για την μονοτονία στα διαστήματα [0,1) και (1,2] ;

250. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}^*$ για τις οποίες η $f(x)=\alpha x^3+3x^2+x+1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

251. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3(\lambda - 1)x^2 + 6(1 - \lambda)x + 1$, $\lambda \in R$ Να βρεθούν οι

τιμές του λ, ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως αύξουσα.

II. ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΤΗΣ f ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

252. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο

253. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x \succ 0$. i) Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης f. Ii) να αποδείξετε ότι: $e^{\pi} \succ \pi^{e}$ iii) να αποδείξετε ότι: $e^{x} \geq x^{e}$, για κάθε $x \succ 0$ ανοικτό διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$

254. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{\ln(1+x)}, x \succ 0$ i) να μελετήσετε τη μονοτονία της f

ii) να αποδείξετε ότι $(1+\beta)^{\ln\alpha} \prec (1+\alpha)^{\ln\beta}$ όταν $1 \prec \alpha \prec \beta$

255. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{\ln x}, x \in [2,+\infty)$ να μελετήσετε τη μονοτονία της f
ii) να αποδείξετε ότι α) $\ln(e-1)\ln(e+1) \prec 1$ β) $\ln(e^{\pi}-1)\ln(e^{\pi}+1) \prec \pi^2$.

256. **i)** Να αποδείξετε ότι $x\ln x + 1 \succ x$ για κάθε $x \succ 1$
ii) Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$
iii) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό μ που ικανοποιεί τη σχέση $(\mu+1)^2\ln(\mu^2+5) = (\mu^2+4)\ln(\mu^2+2\mu+2)$.

II. ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΤΗΣ f ΜΕ ΧΡΗΣΗ Θ.Μ.Τ

---

257. Αν η συνάρτηση $f: R \to R$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0) = 0$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}, x \succ 0$, είναι γνησίως φθίνουσα.

258. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β], δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f''(x) \succ 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

259. Δίνεται η συνάρτηση f: $R \to R$ με $f''(x) \prec 0$ για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha \in R$, τότε ισχύει $f(x) \le f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$ για κάθε $x \in R$.

III. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΤΗΣ f στο (α,β) Και $D_f = (\alpha, x_0) \bigcup (\chi_0, \beta)$

260. Αν $f(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 4\ln x + \frac{7}{2}$ τότε:

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

β) Να λυθεί η εξίσωση f(x)=0

261. Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε :

$2xf(x) + (x^2+1)f'(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $f(0) = 1$. α) Να αποδείξετε ότι

$f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$. β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

262. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1)$ και $(0,+\infty)$.

IV. ΧΡΗΣΗ f″ ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΤΗΣ f

263. Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \ln\frac{1+e^x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x}{2}$, $x \le 0$

264. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, +\infty)$, με $f''(x) > 0$ για κάθε $x>0$ και $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση

$g(x) = \frac{f(x)}{2x}$ γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

V. ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ- ΠΛΗΘΟΣ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ f

265. α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3-9x}{x^2-1}$ είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να λυθεί η εξίσωση $x^3-\alpha x^2-9x+\alpha=0$, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$

266. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$.

i) Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της f.

ii) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τέσσερις ακριβώς πραγματικές ρίζες, δύο αρνητικές και δύο θετικές.

267. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 -12x + 5\alpha^2$.

i) Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της f.

ii) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ όταν το α διατρέχει το R.

268. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $x^3 -\alpha x^2 - 9x + \alpha = 0$ όταν το $\alpha \in R$

269. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = 8x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

ii) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $8x^2\sqrt{x} - \alpha\sqrt{x} + 1 = 0$ όταν το α διατρέχει το R.

270. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = x^2 - 2 - (1- x)(\ln x-2)$.

i) Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της f.

ii) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

iv) Να αποδείξετε ότι: $(1- x)(\ln x-2)\le x^2 - 1$ για κάθε $x\succ 0$.

271. Οταν η παράμετρος α διατρέχει το σύνολο R να βρεθεί το πλήθος' πραγματικών ριζών των εξισώσεων: **i)** $2x^3-15x^2+24x-\alpha=0$ **II)** $3x^4 - 4\alpha x^3+\alpha=0$

VI. ΥΠΑΡΞΗ-ΕΥΡΕΣΗ ΛΥΣΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

272. Να λυθούν οι εξισώσεις α) $2^x+3^x+4^x=9^x$ β) $e^x=1+\ln(x+1)$

273. Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $\ln x - x + 1 = 0$ ii) $xe^x + 1 = e^x$ iii) $x^2 + x+ \ln x = 0$

274. Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x + \ln(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}) = \sigma\upsilon\nu x\ln(\eta\mu x)$ $x\in(0,\pi)$.

275. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x\ln x = 1$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $[1,e]$.

276. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [1 , e] με $0<f(x)<1$ και $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[1 , e]$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_o\in(1 , e)$ τέτοιος ώστε $f(x_o)+ x_o\ln x_o = x_o$.

277. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) =e^x -1$ και $g(x) = x - x^2$ έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο και κοινή εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

278. Έστω οι συναρτήσεις f , g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δίνεται ότι η συνάρτηση $f\circ g$ είναι 1 – 1 .

α) Να δείξετε ότι η g είναι 1 – 1 .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση : $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζ

V. ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΗΣ f

279. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [0,1] με $f''(x) \succ 0$ για κάθε $x\in(0,1)$ και $f(0) = f(1) = 0$, να αποδείξετε ότι είναι $f(x) \prec 0$ για κάθε $x\in(0,1)$.

280. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x\ln x-x^2+1$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού Α της f , η $f'(x)$ και η $f''(x)$

β) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το πρόσημο της f

γ) Να λυθεί η εξίσωση $2\ln x=\frac{x^2-1}{x}$

281. Αν f,g παραγωγίσιμες για κάθε $x\in(1,+\infty)$ και συνεχείς στο $[1,+\infty)$, ακόμη $xf'(x) - f(x) - x^2g'(x) \succ 0$. Να αποδειχθεί ότι $f(x) \succ xg(x)$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$.

282. Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύουν: η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα[α,β] $f'(α) \succ 0$ και $f''(x) \succ 0$ για κάθε $x\in[α,β]$ Να αποδειχθεί ότι: $f(α) \succ f(β)$.

VI. ΑΠΟΔΕΙΞΗ-ΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΗΣ

283. Να αποδειχθούν οι ανισότητες

α) $x\ln x\geq x-1$, για κάθε $x>0$ β) $e^x-x>1-\frac{x^2}{2}$, για κάθε $x>0$

γ) i) $ημx<2x$, $x>0$ ii) $ημx>x-\frac{x^3}{3}$, $x>0$

δ) Αν $0 < x \neq 1$, να αποδειχθεί ότι $\frac{x\ln x}{x^2-1} < \frac{1}{2}$

284. Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

α) Να λυθεί η ανίσωση $g(x^2-2x)>g(x-2)$

β) Να λυθεί η ανίσωση $\alpha^{x^2-2x} - \alpha^{x-2} \leq -x^2+3x-2$, $\alpha < 1$

Πότε ισχύει το ίσον;

285. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2-(1-x)(\ln x-2)$

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία

β) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 - 2=(1-x)(\ln x-2)$

γ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f

δ) Να αποδειχθεί ότι $(1-x)(\ln x-2) \leq x^2-1$, για κάθε $x>0$

286. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[\nu]{x} - \sqrt[\nu]{x+2}, \nu \in N^*, \nu \succ 2$

i) να μελετήσετε τη μονοτονία της f

ii) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[\nu]{\nu} + \sqrt[\nu]{\nu+4}, 2\sqrt[\nu]{\nu+2}, \nu \in N^*, \nu \succ 2$.

287. **i)** Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης: $f(x) = \alpha^x - x$, $0 \prec \alpha \prec 1$

ii) Αν $0 \prec \alpha \prec 1$ να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in R$ που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} = (\lambda^2-4)-(\lambda-2)$$

288. **i)** Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης

$f(x) = (\alpha+x)e^{\frac{\alpha+x}{2}} - \alpha e^{\alpha} - xe^{x}$, $x \in [\alpha,\beta]$ με $\alpha \succ 0$

ii) Αν $0 \prec \alpha \prec \beta$, να αποδειχθεί ότι $(\alpha+\beta)e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \prec \alpha e^{\alpha} + \beta e^{\beta}$.

289. **i)** Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, με $x \succ 0$

ii) Να βρεθεί ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}....., \sqrt[\nu]{\nu}$ (όπου $\nu \in N$ με $\nu \geq 2$).

290. **i)** Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης: $f(x) = (x+1)\ln(x+1)x - x$, $x \geq 0$

ii) Αν $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ και ισχύει $e^{\beta}(\alpha+1)^{\alpha+1} = e^{\alpha}(\beta+1)^{\beta+1}$, να αποδειχθεί ότι $\alpha = \beta$.

291. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \ln\frac{x+\alpha}{2} - \frac{\alpha\ln\alpha}{x+\alpha} - \frac{x\ln x}{x+\alpha}$, $x \geq \alpha \succ 0$

i) Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης f.

ii) Αν $\beta \succ \alpha$, να αποδειχθεί ότι: $\ln\frac{\alpha+\beta}{2} \prec \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\ln\alpha + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\ln\beta$.

292. Έστω η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο (α,β), να αποδείξετε ότι για κάθε

$x\in(\alpha,\beta)$ ισχύει: $\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\succ\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

293. Έστω συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f'(x)\succ 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $\gamma\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f(\gamma)=0$ να αποδείξετε ότι είναι: $\gamma+\dfrac{f(\beta)}{f'(\beta)}\prec\beta\prec\gamma+\dfrac{f(\beta)}{f'(\alpha)}$.

294. Αν f , g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, με f(1)=g(1)

α) Αν $f'(x)>g'(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δειχθεί ότι $f(x)<g(x)$ στο $(-\infty,1)$ και $f(x)>g(x)$ στο $(1,+\infty)$

β) Αν $f'(x)g'(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$

ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

I. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

295. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\sqrt{x}+\dfrac{\beta\ln x}{\sqrt{x}}$, $x\succ 0$.

i) Να προσδιοριστούν οι α και $\beta\in R$, ώστε η f να έχει στη θέση $x_0=1$ τοπικό ακρότατο με τιμή -2.

ii) Για α = -2 και β = 1, να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

296. Να προσδιοριστούν οι α και $\beta\in R$, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\alpha\ln x+\beta x^2-20x+1$ να έχει στη Θέση $x_0=1$ τοπικό ακρότατο με τιμή 6

297. Να προσδιοριστούν οι α και $\beta\in R$, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\alpha\ln 2x+\dfrac{\beta}{x}+\alpha$ να έχει στη θέση $x_0=1$ τοπικό ακρότατο με τιμή 2+ln2.

II. ΑΝΙΣΟΙΣΟΤΗΤΑ $\overset{\text{FERMAT}}{\Rightarrow}$ ΙΣΟΤΗΤΑ

298. Αν $0\prec\alpha\neq 1$ και για κάθε $x\succ 0$ ισχύει $x^{\alpha}\geq\alpha^{x}$, να αποδείξετε ότι α=e, με δεδομένο ότι για κάποιο $x_0\succ 0$ ισχύει η ισότης.

299. Αν για κάθε $x \succ 0$ ισχύει $\ln x + \frac{\alpha}{x} \geq \alpha$, να βρείτε το α

300. Αν $\alpha,\beta \succ 0$ και ισχύει $\alpha^{\frac{\ln x}{x}} + \beta^{\frac{x-1}{x}} \leq 2$ για κάθε $x \succ 0$, να αποδείξετε ότι αβ=1.

301. Έστω μια συνάρτηση f: $R \to R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει: $(1+e^{1-x})\, f(x)+\text{συν}\pi x \geq 3$ για κάθε $x \in R$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο A(1,2).

302. Έστω οι συναρτήσεις f,g: $R \to R$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και ισχύουν: $f(x) \geq x+1$ και $f(x)\, e^{g(x)} = e^x - x$ για κάθε $x \in R$.Αν η C_f διέρχεται από το σημείο A(0,1), να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στο $x_0=0$, τέμνονται κάθετα.

303. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, $A(1,2) \in C_f$, και $f(x) \leq x^2+x$ για κάθε $x \succ 0$, να αποδείξετε ότι $f'(1) = 3$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

304. Η παράγωγος μιας συνάρτησης f είναι $f'(x) = -2(x+1)^3(x-1)^2(x-2)$, $x \in R$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in R$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και για ποιες τοπικό ελάχιστο.

305. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων:

i) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ ii) $f(x) = x^4 \ln x$ iii) $f(x) = x^{x^{\ln x}}$ iv) $f(x) = \frac{e^x}{2x}$

306. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \begin{cases} x^2-2x, & x \leq 2 \\ \ln(x-1), & x \succ 2 \end{cases}$ ii) $f(x) = \begin{cases} 1-e^{x-1}, & x \geq 1 \\ \ln(1-x), & x \prec 1 \end{cases}$ iii) $f(x) = |x^2-x-2|$, $x \in R$

iv) $f(x) = \begin{cases} 2x^3-3x^2-12x+30, & x \prec 1 \\ x^4-4x^3-8x^2+48x-20, & x \geq 1 \end{cases}$ v) $f(x) = \begin{cases} -x^2+4x-6, & x \leq 3 \\ 2x^3-15x^2+24x+6, & x \succ 3 \end{cases}$

307. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2(x+\alpha)^2(x-\beta)^2$ με $\alpha,\beta \succ 0$ έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

308. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^\kappa(x-1)^\nu$ έχει ένα τουλάχιστον τοπικό ελάχιστο,όπου $\kappa,\nu \in N$ με $\kappa,\nu \geq 2$.

309. Για ποια τιμή της θετικής σταθεράς α η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^\alpha e^{2\alpha-x}, x \succ 0$, γίνεται ελάχιστη;

310. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^2-2(\ln\lambda)x+1$, $\lambda \geq 1$.
Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ελάχιστη τιμή της f να γίνεται ελάχιστη.

311. Για ποια τιμή της θετικής σταθεράς α η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^{2\alpha}e^{4\alpha}+e^x}{e^x}, x \succ 0$, γίνεται ελάχιστη;

312. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x-\lambda x-1$, $\lambda \succ 0$. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ελάχιστη τιμή της f να γίνεται μέγιστη.Για την παραπάνω τιμή που βρήκατε του λ να δείξετε ότι η ευθεία ε: $\psi = \lambda x+1$ εφάπτεται στη C_g όπου $g(x) = e^x$.

313. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του $\alpha \in R$ για την οποία ισχύει: $3x^4-4x^3+\alpha \geq 0$ για κάθε $x \in R$.

314. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\kappa \in R$ για την οποία ισχύει: $e^x \geq \kappa x^2$ για κάθε $x \succ 0$.

315. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x-\lambda x$, $\lambda \succ 0$. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του $\lambda \succ 0$ για την οποία ισχύει: $\ln x \leq \lambda x$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$. Για την παραπάνω τιμή που βρήκατε του λ να δείξετε ότι η ευθεία

ε: $\psi = \lambda x$ εφάπτεται στη C_g όπου $g(x) = \ln x$.

316. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{e^x}+1-\lambda$, $\lambda \in R$. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ για την οποία ισχύει $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in R$.
Αν $\lambda \geq \frac{1}{e}+1$ να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (1-\lambda)x-\frac{x+1}{e^x}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

317. Έστω μια συνάρτηση $f: (0,+\infty) \to R$ με $f(x) \succ 0$ για κάθε $x \succ 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει: $\ln f(x)+e^{f(x)}=2x\ln x-3x+2\sqrt{e}+e$ για κάθε $x \succ 0$.
Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

318. Έστω μια συνάρτηση $f: R \to R$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$. Αν η f' είναι συνεχής να λύσετε την εξίσωση: $f(\sigma\upsilon\nu x)-f(2-x^2) = 0$.

319. Έστω η συνάρτηση $f: [0,2] \to R$ για την οποία ισχύουν για κάθε $x \in [0,2]$, $f(x) = f(2-x)$ και $f''(x) \neq 0$. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

320. Αν η f'' είναι συνεχής στο [0,2]και $f(0) \succ f(1)$ να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

321. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x\ln^2 x$. Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η f έχει τη μικρότερη κλίση

322. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$, $x \in R$ και $g(x) = \ln x$, $x > 0$.
i) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους δεν τέμνονται.
ii) Να βρείτε τη μικρότερη απόσταση την οποία μπορεί να έχει ένα σημείο της C_f από την ευθεία $y = x$.
iii) Να βρείτε το σημείο της $y = e^x$, το οποίο απέχει τη μικρότερη απόσταση από την $y = x$.
iv) Ποια νομίζετε ότι είναι τα σημεία των C_f και C_g που να απέχουν την ελάχιστη απόσταση;

323. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β με $\beta \neq 0$. Να αποδειχθεί ότι:

$$\beta^2 e^{\frac{\alpha}{\beta}} + \alpha^2 \geq \alpha\beta + \beta^2.$$

324. Να αποδειχθει ότι $\ln a^a + e^{b-1} \geq ab$, $a > 0$

325. Να αποδειχθεί ότι: $\frac{\ln\beta}{\beta} \prec \frac{\ln\alpha}{\beta} + \frac{1}{\alpha}$ όταν $0<\alpha<\beta$.

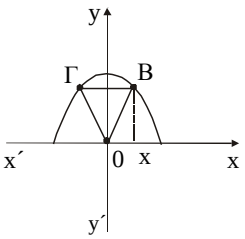
326. Αν $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ να αποδειχθεί ότι: $\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta} < \frac{\beta}{\alpha}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

327. Η αξία μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία μειώνεται με το χρόνο t, σύμφωνα με τη συνάρτηση $f(t) = \frac{7A}{2}e^{-\frac{t+28}{14}}, t \geq 0$ όπου $A \succ 0$. Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους K(t) από την πώληση των βιβλίων που εκτυπώνει η συγκεκριμένη μηχανή δίνεται από τη συνάρτηση $K'(t) = \frac{A}{4}e^{-\frac{t}{7}}, t \geq 0$ και υποθέτουμε ότι K(0) = 0.
Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία πρέπει να πωληθεί η μηχανή, έτσι ώστε το συνολικό κέρδος P(t) από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής να γίνεται μέγιστο, καθώς και το μέγιστο κέρδος.

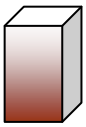
328. Στο σχήμα φαίνεται τμήμα παραβολής με εξίσωση $y = \frac{1}{14}(48 - x^2)$, και το ισοσκελές τρίγωνο ΟΒΓ με ΟΒ = ΟΓ.
i) Να βρείτε τα σημεία Β, Γ για τα οποία το
ii) εμβαδόν του τριγώνου ΟΒΓ γίνεται μέγιστο.
iii) Ποιο είναι αυτό το μέγιστο εμβαδόν;



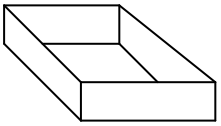
329. Βρείτε δυο αριθμούς με άθροισμα *8* και ελάχιστο άθροισμα κύβων.

330. Να διαιρεθεί ο αριθμός *8* σε δύο μέρη ώστε το γινόμενο των δύο μερών επί την διαφορά τους να γίνεται μέγιστο.

331. Ο όγκος του κουτιού είναι $72m^3$ και η πρόσθια πλευρά του έχει λόγο διαστάσεων *1* προς *2*. Βρείτε τις διαστάσεις του κουτιού ώστε να έχει την ελάχιστη επιφάνεια.

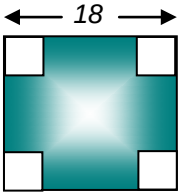


332. Από ένα ορθογώνιο χαρτόνι 18 επί 18 cm^2 κόβουμε 4 μικρά τετράγωνα με πλευρά x cm το καθένα και



φτιάχνουμε το διπλανό κουτί χωρίς οροφή.

Να βρείτε το x ώστε ο όγκος του κουτιού να είναι ο μέγιστος δυνατός.



333. Μια βιομηχανία παράγει x ποσότητα από ένα προϊόν με κόστος που δίνεται από τη συνάρτηση $K(x) = \frac{\alpha}{4}x^3$ όπου $x \succ 0$ και η παράμετρος $\alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$.

Τα έσοδα από την πώληση x ποσότητας του προϊόντος δίνονται από τη συνάρτηση $E(x) = x^2$, $x \succ 0$και το κέρδος δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = E(x)-K(x)$, $x \succ 0$.

Να βρείτε την ποσότητα x_0 για την οποία έχουμε το μέγιστο κέρδος, το οποίο συμβολίζουμε M(α). Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$ για την οποία το M(α) γίνεται μέγιστο, καθώς και το μέγιστο αυτό

334. Δίνονται τα σημεία A(4,0) , B(-4,0) και η ευθεία (ε):4x+5y-2

i)Να βρεθεί σημείο M της (ε) (MA)+(MB)=min

ii)Να βρεθεί η εξίσωση έλλειψης με εστίες τα A,B που εφάπτεται της (ε)

335. Έστω *x* ο αριθμός τεμαχίων ενός προϊόντος. Ο ρυθμός μεταβολής της τιμής μονάδος είναι $\frac{dP}{dx} = \frac{3}{176}(54x - 8x^2)$, ενώ το κόστος των x τεμαχίων με x<7 *είναι* $K(x)=x^3-18x^2+105x$ (x σε εκατομμύρια)

i) Να βρεθεί ο αριθμός τεμαχίων που μεγιστοποιεί την τιμή μονάδος

ii) Να βρεθεί ο αριθμός τεμαχίων που μεγιστοποιεί το κόστος

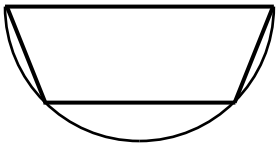
iii) Να βρεθεί ο αριθμός τεμαχίων που μεγιστοποιεί τις πωλήσεις

iv)Να βρεθεί ότι ο αριθμός τεμαχίων που ελαχιστοποιεί τα κέρδη

336. Ένα βιβλιοπωλείο αγοράζει ένα βιβλίο από τον εκδότη 3 ευρώ το καθένα . Όταν το διαθέτει στην αγορά με 15 ευρώ τότε πουλά 200 αντίτυπα τον μήνα. Εκτιμήθηκε τώρα ότι αν η τιμή πώλησης μειωθεί, τότε για κάθε 1 ευρώ μείωσης θα πωλούνται 20 περισσότερα αντίτυπα τον μήνα. Να βρείτε την τιμή πώλησης που μεγιστοποιεί τα κέρδη.

337. Σε δοσμένο ημικύκλιο διαμέτρου 2R να εγγραφεί τραπέζιο

Όπως στο σχήμα με μέγιστο εμβαδό



338. Η ναύλωση μιας κρουαζιέρας απαιτεί τη συμμετοχή τουλάχιστον 100 ατόμων. Αν δηλώσουν συμμετοχήακριβώς 100 άτομα, το αντίτιμο ανέρχεται σε 1000 ευρώ το άτομο . Για κάθε επί πλέον άτομο το αντίτιμο ανά άτομο μειώνεται κατά 5 ευρώ. Πόσα άτομα πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ –ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ι. ΜΕΛΕΤΗ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

339. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη όταν:

i) $f(x) = x\ln\frac{1}{x}$ ii) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ iii) $f(x) = \frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$

iii) $f(x) = \frac{x^5}{20}-\frac{x^4}{12}-3x+1$ v) $f(x) = x^x$ vi) $f(x) = \frac{x^2}{2}\ln x-\frac{3}{4}x^2,\ x\succ 0$

340. Έστω μια συνάρτηση $f : R\rightarrow R$ για την οποία ισχύει $f'(x)\prec\frac{f''(x)+f(x)}{2}$ $\forall\ x\in R$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-x}$ είναι κυρτή στο R.

341. Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R και η συνάρτηση g κοίλη στο R. Να αποδείξετε ότι: Οι C_f ,Cg έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία. Αν οι C_f και Cg έχουν κοινή εφαπτομένη σε κάποιο κοινό σημείο τους, τότε οι C_f και Cg έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

342. Έστω μια συνάρτηση $f : R\rightarrow R$ για την οποία ισχύει $f(x)\succ 0$ για κάθε $x\in R$, και η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Αν $g(x) = \ln f(x)$ και $g''(x)\succ 0$ για κάθε $x\in R$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = e^{\lambda x}f(x)$ είναι κυρτή στο R για κάθε $\lambda\in R$.

343. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0,+\infty)\rightarrow R$ για την οποία ισχύουν $f(x)\prec x$ και $f'(x) = \frac{x}{x-f(x)}$ για κάθε $x\succ 0$. Να δείξετε ότι: Η f είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη Η f είναι κυρτή στο (0,+ ∞).

344. Να αποδειχθεί ότι: α) η συνάρτηση g(x) = xlnx είναι κυρτή στο διάστημα (0,+ ∞).
β) $\alpha^{\alpha}\beta^{\beta} > \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{\alpha+\beta}$ για κάθε 0<α<β.

345. i) Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f η οποία είναι κυρτή στο διάστημα Δ.
Αν α,β,γ∈Δ και α<β<γ να δείξετε ότι: $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < \frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$.

ii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f(x) = xlnx είναι κυρτή.
iii)Αν 0 < α<γ και α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου,
να δείξετε ότι: $\beta^{\beta} < \sqrt{\alpha^{\alpha}\gamma^{\gamma}}$.

346. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και κυρτή στο Δ.
Αν α,β∈Δ με α≺β, να αποδειχθεί ότι: $f(\alpha)+f(\beta) \succ 2f(\frac{\alpha+\beta}{2})$.

347. Αν α,β∈ A_f, να δείξετε ότι $\ln\frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\ln\alpha.\ln\beta}$.

348. Αν η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ = (α,β) και x_0 ∈ Δ με $f''(x_0) = 0$ και $f^{(3)}(x) \prec 0$ για κάθε x ∈Δ-$\{x_0\}$, να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο διάστημα (α, x_0] και κοίλη στο διάστημα [x_0,β).

349. Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R, να αποδείξετε ότι αν η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, τότε αυτό είναι και ολικό ελάχιστο της f.

350. Οι συναρτήσεις f και g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο R με f '(x) > O και g"(x) > O για κάθε x ∈ R . Αν η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h = f o g είναι κυρτή στο R .

351. Αν η f είνα κυρτη στο (α,β) να αποδειξετε ότι αν η f εναι περιττη,τοτε η f είναι κοιλη στο (-β,-α)

352. Αν η f είναι κυρτη στο R , να αποδειξετε ότι για κάθε x≠0 ισχυει
$f(\lambda x)-f(0) > \lambda f(x)-\lambda f(0)$ αν λ>1 και f(λx) - f(0) < λ f(x) – λ f(0) αν λ<1

II. ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

353. **i)**Να μελετήσετε τη συνάρτηση f(x) = lnx-x ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
ii) Να δείξετε ότι συνάρτηση g(x) = ln2x+2xlnx+x2-3 είναι κυρτή στο (0,+∞).
iii) Να βρείτε την εφαπτομένη της Cg στο x_0=1.

iv) Να δείξετε ότι: $x+\ln x \sqrt{4x-3}$ για κάθε $x > 1$.

354. Έστω f: $\Re \to \Re$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-2x}{x-2}=3$ και f(3)=4
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0=2$. Αν η f είναι κυρτή στο $\Re$ να δείξετε ότι $f(x)-5x+6\geq 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\zeta\in(2,3)$ στο οποίο η f παρουσιάζει ελάχιστο.

355. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}\ln x$. α) Να βρείτε:

i) τα διαστήματα που η f είναι κοίλη ή κυρτή και τα σημεία καμπής

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο καμπής

β) Να δειχθεί ότι $\sqrt{x}\ln x \leq x-1$, για κάθε $x\in[1,+\infty)$

356. α) Να δείξετε ότι $e^x > 2x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) Έστω η $f(x)=e^x-\frac{x^3}{3}-1$ i) Να δείξετε ότι είναι κυρτή

ii) Να δείξετε ότι $e^x > \frac{x^3}{3}+x+1$, για κάθε x

ΙΙΙ. ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

357. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της C_f ,όταν:

i) $f(x) = \sqrt{x}\ln\sqrt{x}$ ii) $f(x) = \frac{x^5}{20}-\frac{x^3}{6}$ iii) $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x+\frac{x^2}{2}$, $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

iv) $f(x) = xe^{-x^2}$ v) $f(x) = x^2\ln x$ vi) $f(x) = \ln(\ln x)$ vii) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

viii) $f(x) = x^4-6x\ln x^2-12$ ix) $f(x) = \frac{1}{4}e^{2x}-3e^x+2$ x) $f(x) = (1+x^2)e^{-x}$.

358. Έστω f: $R\to R$ παραγωγίσιμη για κάθε $x\in R$ με $f^3(x)+4f(x)=4x$
Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της.
Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής (αν υπάρχουν). Αν g(x) = 2x=f(x) να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.
Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2-x-2)+2x\prec 2x^2$.

359. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2\ln x$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα
Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (ΙΟΥΝΙΟΣ 2004)

360. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α,β] που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α,β). Αν ισχύει f(α) = f(β) = 0 και υπάρχουν

αριθμοί $\gamma\in(\alpha,\beta)$, $\delta\in(\alpha,\beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma)\cdot f(\delta)<0$, να αποδείξετε ότι:
α)Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα (α,β).
β).Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1)<0$ και $f''(\xi_2)>0$.
γ).Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.
(ΙΟΥΝΙΟΣ 2003).

361. Έστω f μία συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f''\downarrow$ στο R, $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$, $f'(1)\succ 0$ και η συνάρτηση $g(x) = f(x)-f(2-x)$, για κάθε $x\in R$.
I) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της g. II)Να βρείτε τα διαστήματα που η g είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής της C_g.

362. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\sqrt{x}+\beta\ln x+\beta x$.
Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$, ώστε το A(1,3) να είναι σημείο καμπής της C_f.
Για $\alpha = 4$ και $\beta = -1$: Να βρείτε τα διαστήματα που η C_f είναι κυρτή ή κοίλη.
Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της
Να δείξετε ότι $4\sqrt{x}-\ln x\le x+3$ για κάθε $x\ge 1$.

363. Να αποδειξετε ότι αν η συναρτηση $f(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + x + 1$ εχει σημεια καμπης ισχυει $3\alpha^2 > 8\beta$

364. Για την παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, να αποδείξετε ότι δεν είναι δυνατόν η f να έχει στο x_0 τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής.

365. Να αποδείξετε ότι η C_f της συνάρτησης : $f(x) = \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\alpha\neq 0$ και $\beta^2 = 3\alpha\gamma$ δέχεται στο σημείο καμπής της οριζόντια εφαπτομένη.

366. Να αποδείξετε ότι η C_f της συνάρτησης : $f(x) = 2x^4+4\alpha x^3+3(2\alpha^2-4\alpha+5)x^2+\alpha x+1$, $\alpha\in R$ δεν έχει σημεία καμπής

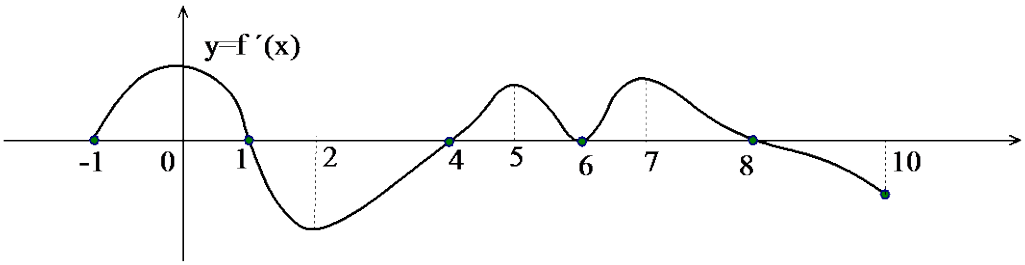
367. Έστω g μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $(g(x))^2 = 5g(x)- e^x-\alpha^x+2005$ για κάθε $x\in R$ και $1\neq\alpha\succ 0$. Να αποδείξετε ότι η C_g δεν έχει σημεία καμπής.

368. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x3 -3x^2 -12x + 5$. Αν x_1, x_2 και x_3 είναι αντίστοιχα οι θέσεις στις οποίες η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και η C_f σημείο καμπής, να αποδείξετε ότι τα αντίστοιχα σημεία της C_f είναι συνευθειακά.

369. Έστω f μία συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) για την οποία ισχύει: $[f(x)]^2 = 2x(x-2)$, $x\in(\alpha,\beta)$. Να δείξετε ότι η f δεν έχει σημείο καμπής

370. Μια συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο IR και για κάθε $X\in R$ ισχύει $f'(x) + [f''(x)]^{2000} = \sigma\upsilon\nu^2 x -3x + e^{-x}$ Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.

371. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f στο διάστημα [-1,10]



α) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων και των σημείων καμπής

β) Να κάνετε μία πρόχειρη γραφική παράσταση της f

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

I. ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΕΣ

372. Να βρειτε τις κατακορυφες ασυμπτωτες της C_f όταν

ι) $f(x)=\sqrt{\frac{x+3}{3-x}}$ **ιι)** $f(x)=\ln(4-x^2)$ **ιιι)** $f(x)=\ln\frac{x^2}{|x^2-1|}$

ιv) $f(x)=x\cdot \eta\mu\frac{2}{x}$ **v)** $f(x)=\frac{(x-1)^3}{x^2}$ **vi)** $f(x)=x-1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}$

vii) $f(x)=\sqrt{4x^2+x}+2x$ **viii)** $f(x)=\frac{x\cdot\sqrt{x^2+2}}{x-4}$ **ix)** $f(x)=\frac{\eta\mu 2x}{x}$

x) $f(x)=\frac{x^4-3x}{x^2-4}$ **xi)** $f(x)=\frac{x^3-2x+6}{x^2-9}$ **xii)** $f(x)=\frac{1+3\ln x}{x}$

xiii) $f(x)=\frac{x^2}{(x+1)e^x}$ **xiv)** $f(x)=\frac{x\ln(x-1)}{x^2-4}$

II. ΠΛΑΓΙΕΣ - ΟΡΙΖΟΝΤΙΕΣ

373. Να βρεθούν οι πλαγιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-1}$ ii) $f(x)=\frac{x^2+3x-5}{x+1}$ iii) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x-2}$

iv) $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$ v) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ vi) $f(x)=x\,e^{\frac{1}{x^2}}$.

374. Να βρειτε τις ασυμπτωτες της C_f όταν **ι)** $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ **ιι)** $f(x)=x\ln x^2$

375. Να προσδιορισετε τα α,β ώστε η ευθεια ψ=3x+β να είναι ασυμπτωτη της γραφικης παραστασης της συναρτησης $f(x)=\dfrac{(\alpha+2)x^2-3\alpha x+4}{2x-1}$

376. Να βρειτε για ποιες τιμες του $\alpha\in R$ η ευθεια x=1 είναι ασυμπτωτη της γραφικης παραστασης της συναρτησης $f(x)=\dfrac{x^2+x+\alpha-1}{x-\alpha^4}$

377. Αν η συναρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x+1}{x-\beta}$ εχει ασυμπτωτες τις ευθειες x= -1 και ψ=3 δειξτε ότι α=3 και β= -1

ΙΙΙ. ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ

378. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\Re$, έτσι ώστε να είναι:

i) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+4x+3}-(\alpha x+\beta))=0$ ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2xe^{-\frac{1}{x}}-\alpha x+2\beta)=0$ .iii) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\dfrac{1}{x}-\alpha x-\beta)=2$

379. Αν η ευθεία ψ=3x+4 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f: R\to R$ στο $+\infty$, να βρεθούν οι τιμές του $\mu\in R$, ώστε: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mu f(x)+6x}{xf(x)-3x^2+5x+2}=1$.

380. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία ψ=x+2, ναβρείτε τον $\mu\in R$, ώστε: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+1}f(x)+3\mu x^2+4}{x^2f(x)+\sqrt{x^4+1}-x^3+2}=10$.

381. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g: $R\to R$ για τις οποίες ισχύει f(x)-g(x) = x-4 για κάθε $x\in R$ Αν η ευθεία ψ=3x-7 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ψ = 2x-3 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο + ∞

382. Έστω οι συναρτήσεις f: $(0,+\infty)\to\Re$ για τις οποίες ισχύει g'(x) = f '(x)-2 για κάθε $x\in R$ και οι C_f και C_g τέμνονται πάνω στην ευθεία x=1. Αν η C_f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ τον άξονα x'x, να βρείτε στο $+\infty$ την ασύμπτωτη της C_g

383. Έστω μια συνάρτηση f: $(0,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει $e^{-x}\le xf(x)\le 1$ για κάθε $x\succ 0$. Να δείξετε ότι ο άξονας x'x είναι ασύμπτωτη της C_f.

384. Έστω μια συνάρτηση f: $(0,+\infty)\to\Re$ με f ''(x) = $\dfrac{2}{x^3}$ για κάθε $x\succ 0$. Αν η ευθεία ε: ψ = x-1 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f να βρείτε την f.

385. Δινεται η συνεχης συναρτηση $f:R\to R$ με $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$. Αν $g(x)=f(x)-2x+1$, να βρειτε τις ασυμπτωτες της γραφικης παραστασης της g.

386. Για μια συναρτηση f ισχυει $2x+3\le f(x)\le \dfrac{2x^3+3x^2+1}{x^2}$, για κάθε $x\neq 0$. Να βρεθουν οι πλαγιες ασυμτωτες της C_f

387. Η συναρτηση $f:R\to R$ ικανοποιει τη σχεση $x+2\ge x^2 f(x)\ge x+1$, για κάθε $x\in R$. Δειξτε ότι η γραφικης της παρασταση εχει μια τουλαχιστον κατακορυφη ασυμπτωτη.

388. Αν η ψ=2x-3 είναι ασυμπτωτη της C_f στο $-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}f(x)+2mx^2+x+3}{x^2f(x)-2x^3+2x-1}=-4$ να βρειτε τον $m\in R$

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

389. Να μελετηθούν και παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις

I) $f(x)=\dfrac{x^2-x+4}{x-1}$ ιι) $f(x)=x-\eta\mu x$, $x\in[-2\pi,2\pi]$

390. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

B1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία f η είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

Μονάδες 6

B2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία f η είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 9

B3..Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 7

Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **B1**, **B2**, **B3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ - ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τις παράγουσες **F** των παρακάτω συναρτήσεων

α. $f(x)=(x^2+3)(x-1)^2$ γ. $f(x)=(x^3+1)(x-2)^2+100^{\log(x-1)}$, $x>1$

β. $f(x)=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}\right)e^{\ln(x-1)}, x>1$ δ. $f(x)=5x^3+e^{\ln(x-3)}$, $x>3$

2. Να βρείτε τις παράγουσες **F** των παρακάτω συναρτήσεων

α. $f(x)=(x+1)e^x$ γ. $f(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $x>0$

β. $f(x)=x(2\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)$ δ. $f(x)=-\frac{1+e^x}{e^{2x}}$

3. Να βρείτε τις παράγουσες Fτων παρακάτω συναρτήσεων

α. $f(x)=(2x+3)e^{x^2+3x-1}$ γ. $f(x)=e^{x^2+x+1+\ln(2x+1)}$, $x>0$

β. $f(x)=5^{x^2+\pi}\times x$ δ. $f(x)=10^{x^3+3x+7+\log(x^2+1)}$

4. Να βρείτε τις παράγουσες **F** των παρακάτω συναρτήσεων

α. $f(x)=\frac{x^3-x^2-x-2}{x-2}$, $x>2$ β. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^3+x^2+x-3}$,$x<1$

5. Να βρείτε τις παράγουσες **F** της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu x & , x\le 0\\ e^x & , x>0\end{cases}$,στο διάστημα $[-\pi,\pi]$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ : ΤΟ ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΕΙΝΑΙ Η ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

6. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: (ι) $\int 5e^{3x-2}dx$ (ii) $\int \frac{5}{2-3x}dx$ (iii) $\int \sigma\upsilon\nu(\frac{x}{3}+5)dx$

7. Να υπολογισετε τα ολοκληρωματα

ι) $\int(3x^2-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)dx$ **ii)** $\int\frac{x^3-x^2+1}{x^3}dx$ **iii)** $\int(e^x-2)(e^{-x}+1)\,dx$ **iv)** $\int\varepsilon\varphi x dx$

v) $\int\varepsilon\varphi^2 x dx$ **vi)** $\int\frac{\eta\mu^3 x+4}{\eta\mu^2 x}dx$ **vii)** $\int\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}dx$ **viii)** $\int\frac{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}{1+\sigma\upsilon\nu 2x}dx$ **ix)** $\int\frac{1-\ln x}{x^2}dx$

ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

8. Να βρεθεί συνάρτηση f τέτοια, ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο **A(1, 2)** και να ισχύει f '(x) = ημx + 2συνx,, για κάθε $x \in R$.

9. Να βρείτε τη συνάρτηση f αν f '(x) = ημx + 2συνx, x $\in R$ και η c_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

10. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$,με $x(f'(x)-f(x))=f(x)$, για κάθε $x>0$ και $f(1)=e^2$. Να βρείτε τον τύπο της **f**.

11. Έστω η συνάρτηση $f:R-\{0\}\to R$, με $f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=x$, για κάθε $x\neq 0$.Να βρείτε την συνάρτηση $y=f(x)$

12. Να βρείτε τη συνάρτηση f: $\Re\to\Re$, αν η εφαπτομένη της C_f έχει σε κάθε σημείο της συντελεστή διεύθυνσης τετραπλάσιο από την τετμημένη του σημείου αυτού και f(1) = 6.

13. Να βρείτε τη συνάρτηση f: $\Re\to\Re$, αν $f'(x^2) = x$, f(0) = 0 και η f είναι άρτια.

14. Να βρείτε τη συνάρτηση f: $\Re^*\to\Re$ αν για κάθε $x\neq 0$ ισχύει: $f'(\frac{1}{x}) = x-1$ και f(1)=0

15. Έστω η συνεχής συνάρτηση f: $\Re\to\Re$ και F μια αρχική της. Αν f(1) = 1 και για κάθε $x\in\Re$ είναι $f(x) = e^{x-F(x)}$, να βρεθεί η f.

16. Έστω η συνάρτηση f: $\Re\to\Re$ και F μια αρχική της με την ιδιότητα $f(x)F(x) = -e^{-2x}$ για κάθε $x\in\Re$. Αν f(0) = 1, να βρεθεί η f.

17. Έστω η συνάρτηση f: $\Re\to\Re$ και F μια αρχική της με την ιδιότητα f(x)F(1-x) = 1 για κάθε $x\in\Re$. Αν $f(\frac{1}{2}) = 1$, να αποδείξετε: (ι) f(1-x)F(x) = 1 (ii) $[F(x)F(1-x)]' = 0$

(iii) $F(\frac{1}{2}) = 1$ (iv)F(x)F(1-x)=1 v)f(x)=F(x), (vi)$F(x)=e^{x-\frac{1}{2}}$ (vif(x)=$e^{x-\frac{1}{2}}$

18. Έστω η συνεχής συνάρτηση f: $\Re\to\Re$ και F μια αρχική της f στο $\Re$ με $F''(x)\neq 0$, Αν για κάθε $x\in\Re$ ισχύει F(x) = F(2-x) να λύσετε την εξίσωση f(x)=0

19. Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγΙσιμη στο R αν $f'(x^3 + x) = (x^3+x)^4$, $x \in R$ και f(0) = 5

20. Εστω η παραγωγισιμη συναρτηση f στο [0, 1] ώστε $2 f(x) f'(x) = 1+ f^2(x)$, $x\in [0,1]$ Να δειξετε ότι $\frac{1+f^2(1)}{1+f^2(0)}=e$

21. Εστω η συναρτηση f: $(0, +\infty)\to R$, ώστε να ισχυει $2f(x)+xf(\frac{1}{x})=\frac{x^{12}+2}{x^{10}+x}$, $x>0$.

I) Να δειχθει ότι $f(x) = \dfrac{1}{x^{10}+x}$ **ii)** Να βρεθει το $\int f(x)dx$

22. Αν F είναι αρχικη της f και ισχυει $F(2-x)+F(x^2-4)=6x-2,\quad x\in R$

Να βρειτε τις τιμες f(0) και f(2).

23. Δίνεται ότι η συνάρτηση **F(x)** είναι παράγουσα της συνάρτησης $f:R\to R$ και ισχύει

$F(2-x)+F(x^2-4)+F'\left(e^x+x^2\right)=6x-2+f\left(e^x+x^2\right)$ για κάθε $x\in R$.

α. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(2)$.

β.Αν η **f** είναι παραγωγίσιμη στο R ,να δείξετε ότι:

i) Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σ΄ένα τουλάχιστο σημείο.

ii)Υπάρχει $x_0\in(0,2)$ έτσι ώστε . $f'(x_0)=-4$.

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

24. Να αποδείξετε ότι: $3\int_{-6}^{2}\dfrac{x^2+6}{x^2+9}dx-\int_{2}^{-6}\dfrac{1}{x^2+9}dx=24$.

25. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο **R,** να γραφούν στη μορφή $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$ οι παρακάτω συναρτήσεις: (i) $\int_{-3}^{5}f(x)dx+\int_{5}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{10}f(x)dx$ (ii) $\int_{-4}^{0}f(x)dx-\int_{-4}^{10}f(x)dx+\int_{0}^{20}f(x)dx$

26. Να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa\in$ **R** για την οποία ισχύει:

$$2\int_{-4}^{\kappa}\frac{x^2}{3x^2+12}dx-\int_{\kappa}^{-4}\frac{8}{3x^2+12}dx=1$$

27. Αν $3\prec\alpha\prec\beta$, να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-3x)dx\geq 0$.

28. Να αποδείξετε ότι: $\int_{2}^{5}\dfrac{1}{x^2+1}dx\leq\int_{2}^{5}\dfrac{x}{10}dx$.

29. Να αποδείξετε ότι αν $0\prec\alpha\prec\beta$, τότε $\dfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(x+\dfrac{1}{x})dx\geq\beta-\alpha$.

30. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [1,5], να αποδείξετε ότι:

$$1+\int_{1}^{5}f^2(x)dx\geq\int_{1}^{5}|f(x)|dx.$$

31. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο **R,** να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{\gamma}^{\delta}f(t)g(x)dx\right)dt=\int_{\gamma}^{\delta}\left(\int_{\alpha}^{\beta}f(t)g(x)dt\right)dx.$$

32. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο **R** και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\gamma}^{\delta} f(x)dx$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx = \int_{\beta}^{\delta} f(x)dx.$$

33. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο **R** και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in$ **R.** Να αποδείξετε ότι: (i) $\int_{-1}^{9} f(x)dx \geq \int_{0}^{8} f(x)dx$ (ii) $\int_{3}^{1} f(x)dx \leq \int_{2}^{1} f(x)dx$.

34. Έστω f , g συνεχείς στο [α,β]. Να αποδείξετε ότι :

i) Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

ii) Αν m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f στο [α,β] τότε

$m(\beta-\alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq M(\beta-\alpha)$ iii) $\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$

35. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [3,4] με $1 \leq f(x) \leq 2$ για κάθε $x \in [3,4]$ και $\int_{3}^{4} f^2(x)dx=4$, να αποδείξετε ότι $\int_{3}^{4} f(x)dx \geq 2$.

II . ΑΜΕΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

36. Να υπολογισθούν τα ορισμένα ολοκληρώματα:

α) $\int_{1}^{2} (e^{2t} + \frac{1}{t})dt$ β) $\int_{0}^{1} (x+2e^x - \eta\mu(\frac{\pi}{2}x))dx$ γ) $\int_{0}^{1} (x-2)^5 dx$

δ) $\int_{0}^{1} \frac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}}dx$ ε) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}dx$ στ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\varepsilon\varphi^8 x + \varepsilon\varphi^6 x)dx$

III ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

37. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

1. $\int_{-3}^{3} |x^3 - 3x + 2|dx$ **2.** $\int_{-1}^{1} |x|(x-3)dx$ **3.** $\int_{-1}^{1} (|x| + |x^2 - x|)dx$ **4.** $\int_{0}^{x} (t + |t|)dt$

5. $\int_{0}^{x} (|t-1| + |t-2| + ... + |t-\nu|)dt$ **6** . $\int_{-4}^{4} |x^2 - \sigma\upsilon\nu(\pi x) - 2|dx$ **7.** $\int_{0}^{3} |3^x + 4^x - 5^x|dx$

38. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{0}^{\pi/2} |x - \eta\mu x|\, dx$

39. Δίνεται η $f(x) = e^x - x - 1$

α)Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία-ακρότατα.

β)Να βρείτε το πρόσημο της.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1}\left|e^x - x - 1\right| dx$

40. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει οτι $f(x) - x + 2 > e^{1-x}, x \in R$ και $\int_0^1 \left|f(x)\right| dx = 4$

α) Να δείξετε οτι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R το οποίο και να βρείτε.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \left|f(x) - e^{1-x} + x^2 - 2x + 5\right| dx$

41. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{1/2}^{3/2}\left(\left|\frac{x^4 - 8x}{x-2}\right| + \left|\frac{x^7 + x^5}{x^5 + x^3}\right|\right)dx$

42. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 \left(\left|4 - \left|-x^2 + 2x - 1\right|\right| - \left|\left|x^2 + 4\right| + 4x\right|\right) dx$

43. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{-2}^{1}(|x+1| + 2|x-2|)dx$

IV. ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

44. Αν ισχυει ότι $\int_7^8 f(x)dx = -2$, τοτε να υπολογισετε το ολοκληρωμα $\int_1^9\left(\int_8^7 xf(t)dt\right)dx$

45. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α. $\int_0^6\left(\int_2^x 12x^2 dt\right)dx$ **β.** $\int_{-1}^4\left(\int_0^x x(2t^3 - 2t)dt\right)dx$ **γ.** $\int_0^1\left(\int_x^4 (e^t + t)dt\right)dx$

46. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α. $\int_\alpha^\beta\left(\int_\alpha^x (1+t)dt\right)dx$ **β.** $\int_\alpha^\beta\left(\int_\alpha^x\left(\int_\alpha^\beta 1dz\right)dy\right)dx$

V. ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ f ΟΤΑΝ ΔΙΝΕΤΑΙ ΤΟ $\int_\alpha^\beta f(x)dx$

47. Να βρειτε τον τυπο της συνεχους συναρτησης $f: R \to R$ όταν $f(x) = -6x + \int_0^4 f(x)dx$

48. Να βρειτε τον τυπο της συνεχους συναρτησης $f: R \to R$ όταν $f(x) = 3x^2 - 6x\int_0^1 f(x)dx$

49. Να βρειτε τον τυπο της συνεχους συναρτησης $f: [0,+\infty) \to R$ όταν $xf'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)dt$

50. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις *f* στο *[α,β]* ώστε $\int_\alpha^\beta f^2(x)dx = 0$.

51. Έστω *f* συνεχής στο *[1,2]* ώστε: $1 + \int_1^2 t^2 f^2(t)dt = 2\int_1^2 tf(t)dt$. Να βρείτε τον τύπο της *f*.

52. Έστω $f: R \to R$ παραγωγίσιμη : $4f(x)+f'(x)=\int_a^b f(t)dt=k$, $\forall x \in R$. Βρείτε τον τύπο της

53. Αν $\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 f^2(t)dt=1$. Να δείξετε ότι *f(x)=1* για κάθε *x∈[0,1].*

ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Ι ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

54. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

ι) $\int_1^2 x e^{-x}dx$ **ιι)** $\int_{\pi/4}^{\pi/2} e^{-x}\sigma\upsilon\nu x\, dx$ **ιιι)** $\int_0^1 (x^2+3x+1)e^x dx$

ιv) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} x\, e^x \eta\mu x dx$ **v)** $\int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu^2 x}{e^x}dx$ **vi)** $\int_0^{\pi} x\eta\mu\frac{x}{2}\, dx$ **vii)** $\int_0^{\pi} \ln(1+\frac{3}{x})dx$

viii) $\int_1^e \ln^2 x\, dx$ **ix)** $\int_1^e x^\nu \ln x\, dx$ **x)** $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}dx$ **xi)** $\int_e^{3e} 2x(\ln x)^2 dx$

55. Να αποδειχθει ότι $f'(1)=\int_0^1 [xf''(x)+f'(x)]dx$

56. Αν f(a)= f(β), να αποδειξετε ότι $\int_\alpha^\beta x f''(x)dx=\beta f'(\beta)-\alpha f'(\alpha)$

57. Αν $f''(x)=2f(x)$, να βρειτε το ολοκληρωμα $\int_1^e f(x)\eta\mu\chi\, dx$

58. Αν η συναρτηση f εχει συνεχη παραγωγο στο [0,α] και f(α)=2 να υπολογισετε το ολοκληρωμα $\int_0^\alpha x[x f'(x)+2f(x)]dx$

58. Αν οι f,g έχουν συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση F', όπου $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, πληρεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[\alpha,\beta]$ με $g^2(\alpha)=g^2(\beta)=1$ να δειχθεί ότι : $\int_\alpha^\beta f''(x)g(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)g''(x)dx$.

59. Έστω η συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $\int_0^1 \frac{f(x)-f''(x)}{e^x}dx=1$. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x=0$

και εφάπτεται στον xx' στο $x=1$, να βρεθεί το $f(0)$. Κατόπιν να δειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ στο οποίο η εφαπτομένη της f είναι παράλληλη στην δ: $x+y+1=0$

ΑΝΑΓΩΓΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

60. Αν $I_\nu = \int_0^1 x^\nu e^x dx$, να αποδειχθει ότι $I_{\nu+1} + (\nu+1) I_\nu$. Να βρεθει το I_3

61. Αν $I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^\nu x\, dx$. Να αποδειχθει ότι $I_\nu = \frac{\nu-1}{\nu} . I_{\nu-2}$ $\nu \geq 2$

62. Αν $I_\nu = \int_1^e x(\ln x)^\nu dx$ να αποδειξετε ότι $2I_\nu + \nu I_{\nu-1} = e^2$

63. Βρείτε μια αναδρομική σχέση για τα

1. $I_\nu = \int_0^1 x^\nu e^x dx$ $\upsilon \in N$ **2.** $I_\nu = \int_0^1 x^\nu e^{-x} dx$ $\upsilon \in N$ **3.** $I_\nu = \int_1^e (\ell nx)^\nu dx$ $\upsilon \in N$,

64. Έστω $I_\nu = \int_0^{\pi/4} \varepsilon\phi^\nu x dx$ $(\upsilon \in N^*-\{1\})$: δείξτε ότι

α) $I_{\nu+1} < I_\nu$ β) $I_{\nu+1} + I_{\nu-1} = \frac{1}{\nu}$ γ) $\frac{1}{\nu+1} < 2I_\nu < \frac{1}{\nu-1}$.

ΙΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

65. Να υπολογισετε τα ολοκληρωματα

ι) $\int_{-1}^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$ **ιι)** $\int_2^3 \frac{2}{u(\ln u)^2} du$ **ιιι)** $\int_0^{\pi/2} \frac{2\sigma\upsilon\nu x}{(5+4\eta\mu x)^2} dx$

ιν) $\int_1^3 (x^4+2x^3+4)^{12}(8x^3+12x^2)\,dx$

ν) $\int_2^1 \frac{2x+3}{(x^3+3x+5)^4} dx$ **νι)** $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$ **νιι)** $\int_0^\pi \eta\mu(3x+1)\,dx$

νιιι) $\int_0^\pi \eta\mu 2t(1+\eta\mu^2 t)\,dt$ **ιx)** $\int_1^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$ **x)** $\int_0^\pi e^{\eta\mu x} 4\sigma\upsilon\nu x\,dx$

xι) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{3+x^2}} dx$ **xιι)** $\int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} \frac{dx}{1+\sigma\upsilon\nu(\alpha x)}$

66. Να υπολογισετε τα ολοκληρωματα

ι) $\int_0^1 \frac{4x^2}{1+x^3} dx$ **ιι)** $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$ **ιιι)** $\int_0^1 \frac{3e^{x/2}}{1+e^{x/2}} dx$ **ιν)** $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^{2x}+\alpha^2} dx$

ΕΙΔΙΚΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

Α ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

67. Να υπολογισετε τα ολοκληρωματα

ι) $\int_2^4 \frac{dx}{x^2-1}$ **ιι)** $\int_0^1 \frac{2x}{x^2-5x+6}dx$ **ιιι)** $\int_2^3 \frac{4x^2+x+4}{(x-1)(x+2)^2}dx$

ιν) $\int_0^3 \frac{x^3+2x+4}{x^2-1}dx$ **ν)** $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+x+1}$ **vi)** $\int_0^1 \frac{3x^4-4x+2}{(x^2+3)^2}dx$

68. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

α) $I_1=\int_{-1}^{0}\frac{x^2-2x+2}{x^2-3x+2}dx$ β) $I_2=\int_{-1}^{0}\frac{x^2+1}{x^2-3x+2}dx$ $I_3=\int_{-1}^{2}\frac{3x\,dx}{x^2+3x+10}$

69. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-1}^{0}\frac{x^2-1}{x^3+x^2+x-3}dx$

Β ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΑΡΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

70. Να υπολογισετε τα ολοκληρωματα

i) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ ii) $\int_1^3 \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}$ **ii)** $\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \frac{4dx}{\sqrt{1+x^2}}$ iv) $\int_{-1}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$

71. Να υπολογισετε τα ολοκληρωματα

Ι) $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx$ **ιι)** $\int_3^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-1}}$ **ιιι)** $\int_4^1 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

ιν) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-x^2}}dx$ **ν)** $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$ **vi)** $\int_1^4 x(\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}})dx$

Γ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

72. Να υπολογισετε τα ολοκληρωματα

ι) $\int_0^{\pi} \eta\mu^3 x \sigma\upsilon\nu^2 x\, dx$ **ιι)** $\int_{-\pi}^{0} \eta\mu^4 x\, dx$ **ιιι)** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^4 x \sigma\upsilon\nu^2 x\, dx$ **ιν)** $\int_0^{\pi} \eta\mu^5 x\, dx$ **ν)** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^7 x}{\eta\mu^3 x} dx$

νι) $\int_0^{\pi} \eta\mu(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{2})\eta\mu 3x\, dx$ **vii)** $\int_0^{\pi/4} 2\eta\mu 5x \sigma\upsilon\nu 7x\, dx$ **viii)** $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\eta\mu x}$ **ix)** $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\varepsilon\varphi x\, dx}{\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}$

Δ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

73. Έστω $f(x)$ γνησίως φθίνουσα, με συνεχή παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$ και σύνολο τιμών το $[\alpha,\beta]$. α) Να αποδειχθεί ότι $\int_{\beta}^{\alpha} f^{-1}(y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$

74. Αν f παραγωγίσιμη και αντιστρέψιμη στο $[\alpha,\beta]$, να αποδειχθεί ότι :
$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(y)dy = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$

75. Να δειχθεί ότι η $f(x) = x^3 + 2x - 3$ αντιστρέφεται. Κατόπιν να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-3}^{0} f^{-1}(x)dx.$

76. Έστω $f(x)$ γνησίως αύξουσα, με συνεχή παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$ και σύνολο τιμών το $[\alpha,\beta]$. α) Να δειχθεί ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (2x - f(x))dx.$
β) Αν $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{2}$ να βρεθεί το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} f^{-1}(y)dy.$

77. Αν $e^{f(x)} + f(x) = x+1$, να δειχθεί ότι η f αντιστρέφεται. Να βρεθούν οι ρίζες ρ_1, ρ_2 των $f^{-1}(x) = 0$ και $f^{-1}(x) = e$ καθώς και το $\int_0^e f(x)dx$.

78. Αν $f^3(x) + 3f(x) = x$, να δειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η $f^{-1}(x)$. Κατόπιν να υπολογιστεί το $I = \int_0^4 f(x)dx$.

79. Αν $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1-ex), x \le 0 \\ x^3 - x^2 - x, x > 0 \end{cases}$ να βρεθεί το $I = \int_{-1}^{1} f^{-1}(y)dy.$

80. α) Να δειχθεί ότι $e^x > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
β) Έστω συνάρτηση $f(x)$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία , για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f(x)e^{f(x)} - f^2(x) = x$.
β.1) Να βρεθεί το πρόσημο της $f(x)$ στο $\mathbb{R}$.
β.2) Να δειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η f^{-1} .
γ) Να βρεθεί το $I = \int_0^{e-1} \frac{x}{e^{f(x)} - f(x) + f(x)(e^{f(x)}-1)} dx$

81. Αν f είναι συνεχης στο [α,β] , γνησιως αυξουσα με $f(x) \ge 0$ και $\alpha \ge 0$ να

αποδειξετε ότι $2\int_{a}^{\beta} xf(x)dx + \int_{f(a)}^{f(\beta)} (f^{-1})^2(x)dx = \beta^2 f(\beta) - a^2 f(a)$

Ε .ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ - ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ

**** Αν στο Ι έχουμε** $f(e^x)$ **θα θέτουμε** $e^x = u \Leftrightarrow x = \ln u$ **με** $dx = \frac{1}{u}du$ **.**

**** Αν στο Ι έχουμε** $f(\ln x)$ **θα θέτουμε** $\ln x = u \Leftrightarrow x = e^u$ **με** $dx = e^u du$ **.**

82. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}dx$.

83. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e (\ln x^2 - 2)(\ln x^3 - 3)dx$.

84. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e \sigma\upsilon\nu x(\ln x)dx$.

ΣΤ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΑΡΤΙΑΣ- ΠΕΡΙΤΤΗΣ ΜΕ ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΑΚΡΑ

85. **α.** Αν η συναρτηση $f:[-\alpha,\alpha] \to R$ είναι συνεχης και περιττη να αποδειξετε οτι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$$

β. Να υπολογισετε τα ολοκληρωματα :

i) $\int_{-4}^{4} \frac{x^{2017}\sigma\upsilon\nu x}{6 + \eta\mu^4 x}dx$ ii) $\int_{-1}^{1} \frac{\sigma\upsilon\nu x(1 - e^x)}{1 + e^x}dx$

86. **α.** Αν η συναρτηση $f:[-\alpha,\alpha] \to R$ είναι συνεχης και αρτια να αποδειξετε οτι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$$

β. Να υπολογισετε τα ολοκληρωματα :

i) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^5\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu^2 x}dx$ **ii)** $\int_{-1}^{1} \frac{x^4\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x + x^{2016}}dx$

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

87. Να υπολογισετε τα ολοκληρωματα **ι)** $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{2\ln x|\ln x| - \ln x - 1}{x}dx$

ιι) $\int_{0}^{3} \frac{dx}{(\sqrt{x^2 + 9})^3}$ **ιιι)** $\int_{a}^{b} \sqrt{16 - \left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right)^2}dx$ με $a = 2\sqrt{3} + 2, b = 2\sqrt{6} + 2$

88. Αν f είναι συνεχης στο [α, β] και $c,\delta \in R$ δειξτε ότι

$$\int_{a}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha+c}^{\beta+c} f(x-c)dx = \frac{1}{\delta}\int_{a\delta}^{\beta\delta} f\left(\frac{x}{\delta}\right)dx$$

89. Να υπολογισετε τα ολοκληρωματα

ι) $\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{2002}\text{συν}x\,dx$ **ιι)** $\int_0^1 x^2(1-x)^{100}dx$ **ιιι)** $\int_0^{\pi}\text{ημ}x f(-\text{συν}x)dx$

90. Να αποδειξετε ότι

ι) $\int_0^a x^{\nu}(\alpha-x)^2dx = \int_0^a x^2(\alpha-x)^{\nu}dx$ **ιι)** $\int_0^{\alpha} x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha^2} xf(x)dx$, α>0

91. **ι)** Αν η f είναι συνεχης στο [0,1] δειξτε ότι $\int_0^1 x^{4\nu-1}f(x^{2\nu})dx = \frac{1}{2\nu}\int_0^1 xf(x)dx$

ιι) Υπολογιστε το $\int_0^1 x^{67}e^{34}dx$

92. Αν f είναι συνεχης στο R , να αποδειξετε ότι **ι)** $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a} f(-x)dx$

ιι) $\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a [f(a+x)+f(a-x)]dx = \int_0^a [f(x)+f(2a-x)]dx = \int_{-a}^{a} f(a-x)dx = \int_{-a}^{a} f(a+x)dx$

93. Αν f είναι συνεχης στο R και f(a-x) = - f(x) να αποδειξετε ότι

ι) $\int_0^a f(x)dx = 0$ **ιι)** $\int_b^a f(x)dx = -\int_0^b f(x)dx$

94. Αν f είναι συνεχης στο [-α,α] και f(x)+f (-x)=$|x|$ δειξτε ότι $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \frac{a^2}{2}$

95. Αν η f είναι συνεχης στο [-α,α] και ισχυει f(x)+f (-x)=1, $x \in [0,a]$ να αποδειξετε **ι)** f(x)+f(-x)=1 , $\forall x \in [-a,a]$ **ii)** $\int_{-a}^{a} f(x)dx = a$

96. Αν η f είναι συνεχης στο [0,1] και f(x)+ f(1-x)=x-x^2, δειξτε ότι $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{12}$

97. Αν η f είναι συνεχης R και f(2a-x) = f(x) , δειξτε ότι $\int_0^{2a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$ και υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int_0^{2486\pi} |\text{ημ}x|dx$

98. Αν f είναι συνεχης στο R και f(a-x)+ f(a+x)=b δειξτε ότι $\int_0^{2a} f(x)dx = ab$ Να αποδειξετε ότι $\int_a^b \frac{f(x-a)}{f(x-a)+f(b-x)}dx = \frac{b-a}{2}$

99. Αν η f είναι συνεχης στο [α,b] και f(x)= f(a+b-x) να αποδειξετε ότι

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx = (a+b)\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx$$

100. Αν η f είναι συνεχης στο [0,1] να αποδειξετε ότι

$$\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx = \pi\int_0^{\pi/2} f(\eta\mu x)dx$$ και να υπολογισετε το $\int_0^{\pi}\frac{x\eta\mu^{2\nu}x}{\eta\mu^{2\nu}x+\sigma\upsilon\nu^{2\nu}x}dx$

101. Με την αντικατασταση x= a+b-t , να αποδειξετε ότι $\int_a^b \frac{f(b-t)dt}{f(b-t)+f(t-a)} = \frac{b-a}{2}$

102. Να δειξετε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^3x\,dx}{\sigma\upsilon\nu^3x+\eta\mu^3x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^3x\,dx}{\sigma\upsilon\nu^3x+\eta\mu^3x} = \frac{\pi}{4}$

ΙΙΙ.ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

103. Να δείξετε ότι :

Α1. $-2 \le \int_{-1}^{1}\frac{t^5}{t+2}dt \le \frac{2}{3}$. **Α2.** $\frac{\pi}{2e} \le \int_{-\pi/4}^{\pi/4} e^{\varepsilon\varphi x}dx \le \frac{\pi e}{2}$. **Α3.** $\int_{-1}^{2}\frac{t}{e^t}dt \le \frac{3}{e}$.

Α4. $\frac{1}{4} \le \int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sigma\upsilon\nu t}{t}dt \le \frac{\sqrt{3}}{2}$. **Α5.** $\int_0^{3\pi}\frac{1}{2+\sigma\upsilon\nu^2 t}dt \ge \pi$.

104. Έστω *f* συνεχής στο *[α,β]* $m = \min_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)$, $M = \max_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)$, *α>0* τότε δείξτε ότι

$$m\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \le \int_\alpha^\beta \frac{f(t)}{t}dt \le M\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

105. α) $\forall x\in[0,1]$ δείξτε ότι $x - x^2 \le \ln(1+x) \le x$, β) δείξτε τώρα ότι: $\frac{1}{6} \le \int_0^1 \ln(1+t)dt \le \frac{1}{2}$.

106. Αν *α>0* και $x\in[0,1]$ δείξτε ότι $1-x^\alpha \le \sqrt{1-x^\alpha} \le 1-\frac{1}{2}x^\alpha$ και στην συνέχεια δείξτε ότι:

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} \le \int_0^1\sqrt{1-x^\alpha}dx \le \frac{\alpha+\frac{1}{2}}{\alpha+1}.$$ Ποιο το $\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^1\sqrt{1-x^\alpha}dx$.

107. Δείξτε ότι: $\frac{\pi^2}{64} \le \int_0^{\pi/4}\frac{xdx}{1+\varepsilon\phi^2 x} \le \frac{\pi^2}{32}$.

108. Αν f' είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ $f(1)=0$, $\ln x \le f'(x) \le x-1$, $\forall x\in(0,+\infty)$ τότε να μελετήσετε την μονοτονία και τα ακρότατα της f Να δείξετε ότι η f δεν έχει ασύμπτωτους και ότι η εξίσωση $f(x)=m\ge 1$ έχει μοναδική λύση

109. Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $\left(f(x)-\eta\mu x\right)^2+\left(f(x)-\sigma\upsilon\nu x\right)^2\geq 0$ και με δεδομένο ότι $\int_0^1 f(x)\eta\mu x dx=\int_0^1 f(x)\sigma\upsilon\nu x dx=1$ δείξτε ότι για την συνεχή συνάρτηση f ισχύει: $\int_0^1 f^2(x)dx\geq\frac{3}{2}$.

110. Αν $f(0)=0$, $0\leq\frac{x}{2}\leq f(x)\leq xf'(x)$, $\forall x\in[0,+\infty)$ δείξτε ότι θα ισχύει : $\frac{1}{4}\leq\int_0^1 f(t)dt\leq\frac{1}{2}f(1)$

111. Έστω $f(x)\geq 0$, $f(a)=0$, $f(\beta)=1$ και η συνεχής συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω τότε δείξτε ότι: $\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ και $\int_\alpha^\beta f^2(x)dx\leq\frac{\beta-\alpha}{3}$

112. **Β1.** Δείξτε ότι: $\int_0^1 e^{t^2}dt\geq\frac{4}{3}$. **Β2.** Δείξτε ότι: $\int_0^1\frac{\ln(2+t^2)}{1+t^2}dt\leq 1$.

113. Με μια γεωμετρική ερμηνεία της υπόθεσης $f''(x)>0$ $\forall x\in[a,\beta]$ δείξτε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt\leq\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\left(f(\beta)+f(\alpha)\right).$$

114. Και πάλι με γεωμετρικό τρόπο μπορείτε να δείξετε ότι αν $f''(x)<0$ $\forall x\in[a,\beta]$

τότε $\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}f'(\alpha)\geq\int_\alpha^\beta f(x)dx-(\beta-\alpha)f(\alpha)$.

115. Αν η συνεχής συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω στο $[a,\beta]$ δείξτε ότι:

α) $f(x)\leq\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}f(\beta)+\frac{x-\beta}{\alpha-\beta}f(\alpha)$ και $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\{f(x)+f(a+\beta-x)\}$

β) $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\leq\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq\frac{1}{2}\left(f(\alpha)+f(\beta)\right)$.

116. Έστω f παραγωγίσιμη και $f(0)=0$, $f(1)=1$ τότε $\int_0^1\left|f'(x)-f(x)\right|dx\geq\frac{1}{e}$.

117. Έστω $f''(x)>0$, f' αύξουσα και $f(0)=0$ δείξτε ότι: $f'(x)\geq f(x), x\in[0,1]$, $\int_0^1 f(x)dx\leq f(1)$.

118. Έστω f αύξουσα και συνεχής, $a\in[0,1]$ τότε δείξτε ότι: $\int_0^\alpha f(x)dx\leq\alpha\int_0^1 f(x)dx$.

119. Έστω f συνεχής στο $[a,\beta]$. Ονομάζουμε με $I_f=\int_\alpha^\beta\left(f^2(x)-2xf(x)\right)dx$. Βρείτε την ελάχιστη τιμή του I_f καθώς και την αντίστοιχη f που ελαχιστοποιεί το I_f.

120. Έστω f παραγωγίσιμη κυρτή και $\uparrow$, $f(a)=0$, $f(\beta)=1$. Δείξτε ότι:

α) $f(x)\le 1+(x-\beta)f'(x)\ \ \forall x\in[a,\beta]$, β) $f^2(x)\le f(x)+\frac{1}{2}(x-\beta)\left(f^2(x)\right)'$,

γ) $\int_\alpha^\beta f^2(x)dx\le\frac{2}{3}\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

121. Έστω f 'αύξουσα και συνεχής δείξτε ότι:

$f(x)\le f(-1)+(x+1)f'(x)\ \ \forall x\in[-1,1]$, $\int_{-1}^{1} f(x)dx\le f(-1)+f(1)$.

IV ΕΜΒΑΔΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΕΜΒΑΔΑ

ΕΜΒΑΔΟΝ ΧΩΡΙΟΥ ΠΟΥ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ C_f ΤΟΝ XX' ΚΑΙ ΤΙΣ ΕΥΘΕΙΕΣ x=α , x=β

122. Στις παρακάτω ασκήσεις να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f τις ευθείες $x=a$, $x=\beta$ και τον άξονα xx' όταν:

A1. $f(x)=x^2-1$ $a=-2$, $\beta=2$ **A2.** $f(x)=\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu 2x$ $a=0$, $\beta=\frac{5\pi}{3}$ **A3.** $f(x)=\frac{2\ell nx-1}{x^2}$ $a=\frac{1}{2}$ $\beta=2$

A4. $f(x)=x+\frac{4}{(1+x)^2}$ $a=-\lambda$, $\beta=\lambda$, $0<\lambda<1$ **A5.** $f(x)=\frac{\ell nx}{x}$ $a=\frac{1}{e}$, $\beta=e$

A6. $f(x)=\frac{2x^2}{x-1}$ $a=2$, $\beta=4$ **A7.** $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+\lambda^2}}$ $a=-1$, $\beta=\lambda>0$

A8. $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$ $a=0$, $\beta=\lambda>0$ **A9.** $f(x)=5|x|-x^2$ $a=-1$, $\beta=1$

A10. $f(x)=x-e\ell nx$ $a=1$, $\beta=e$ **A11.** $f(x)=\frac{2x-\ell nx}{2\sqrt{x}}$ $a=1$, $\beta=2$

123. Δίνεται η συνάρτηση $f: R^* \to (0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν $f(x) = x^2 f'(x)$ και $f(1) = \frac{2004}{e}$. **α)** Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 2004\cdot e^{-\frac{1}{x}}$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τη γραφική παράσταση τη συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, τον άξονα x'x και τις ευθείες x = 1 και x = 2.

124. Βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f: $f(x)=e^{-x}(x^2+3x+1)+e^2$ και τις ευθείες $x=a$, $x=\beta$ όπου στο a,β η f παρουσιάζει ακρότατα.

125. Βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f: $f(x)=(1-x)e^{4x}$ και τις ευθείες $x=a$, $x=\beta$ όπου στο a η f παρουσιάζει ακρότατο και στο β καμπή.

126. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x)=-x^2+2x+3$, τον $x'x$ και τις ευθείες $x=-2, x=4$.

127. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις της $f(x)=x^4-5x^2+4$ και τον $x'x$.

128. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των $f(x)=\sigma\varphi^2 x-\frac{1}{3}, x'x$ και τις ευθείες $x=\frac{\pi}{4}, x=\frac{3\pi}{4}$.

129. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις της $f(x)=x\sqrt{|x^2-1|}, x'x$ και τις ευθείες $x=-2, x=2$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΧΩΡΙΟΥ ΠΟΥ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ C_f ΤΗΝ C_g ΚΑΙ ΤΙΣ ΕΥΘΕΙΕΣ x=α , x=β

130. Να υπολογίσετε λοιπόν τα εμβαδά των χωρίων του επιπέδου που περικλείονται από τις καμπύλες με εξισώσεις: **Α1.** $2y=x^2,\ x^2+y^2=8$ **Α2.** $y^2=2x+1,\ x-y-1=0$

Α6. $y=\frac{\ell nx}{4x}, y=x\ell nx$ **Α7.** $2|x|+|y|=2$ **Α8.** $y=x^3,\ y=x$

131. Να βρείτε ευθεία που διέρχεται από το *(0,0)* και χωρίζει σε 2 ισεμβαδικά χωρία το εμβαδόν που περικλείεται από την $y=x-x^2$ και τον άξονα xx'.

132. Να βρείτε ευθεία που διέρχεται από το *(a,0)* και χωρίζει σε δυο ισεμβαδικά χωρία το χωρίο που περικλείεται από τον άξονα x και την γραφική παράσταση της $f(x)=(x-a)(x-b), 0<a<b$

133. Να βρείτε ευθεία της μορφής $x=x_0$ ώστε τα εμβαδά που περικλείονται από τις: $y=x^5$, $y=f(2)$, $x=x_0$ και $y=x^5$, $x=x_0>0$, $y=f(1)$ να είναι ίσα.

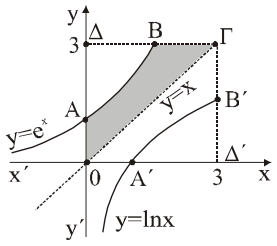
133. Βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f: f(x)=ημx+συνx και τις ευθείες y=f(α), ψ=f(β) όπου στο α η f παρουσιάζει ελάχιστο στο [0,2π] και στο β η f παρουσιάζει μέγιστο στο [0,2π].

134. Βρείτε το εμβαδόν (ως κάποιο όριο ή αν χρειαστεί και ως δύο όρια) που περικλείεται μεταξύ της C_f και της ή των ασύμπτωτων της. Αν μπορείτε κάντε ένα σχεδιάγραμμα θα βοηθήσει κατά πολύ την διασαφήνιση του τι ακριβώς ζητείται , όπου C_f είναι:

Α1. $f(x)=\frac{1}{x^2}, x\geq 1$ **Α2.** $f(x)=xe^{-x^2/2}$ **Α3.** $f(x)=\sqrt{\frac{8-4x}{x}}$

135. **α)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Α΄Β΄Δ΄.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.



136. Δίνεται η συνάρτηση f (x) = 1 + $\frac{1}{x^2}$. **α)** Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά.

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{5}{4} \leq \int_1^2 f(x)\,dx \leq 2$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 2 και x = 4.

δ) Να προσδιορίσετε την κάθετη ευθεία στον άξονα x΄x που χωρίζει το χωρίο του προηγούμενου ερωτήματος σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

137. Δίνεται η συνάρτηση h (x) = e^x.

α) Να βρείτε μια άρτια συνάρτηση f και μια περιττή συνάρτηση g στο R, τέτοιες ώστε f (x) + g (x) = h (x).

β) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα των f, g.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε (λ) του χωρίου που περικλείεται από τις f, g και τις ευθείες x = 0 και x = λ > 1.

δ) Να βρείτε το $\lim_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$.

138. Να βρειτε το εμβαδον του χωριου που περικλειεται από τις γραφικες παραστασεις των συναρτησεων $f(x)=3x^4+x^2$ και $g(x)=2x^4+2x^2$ Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των $f(x)=\sqrt{x}, g(x)=x-2$ και των $x=0, x=5$.

139. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των $f(x)=e^x, g(x)=x^2+1$ και της ευθείας $x=1$.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΧΩΡΙΟΥ ΠΟΥ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΑΠΟ ΔΥΟ Η ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΕΣ ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

140. Να βρειτε το εμβαδον του χωριου που περικλειεται από την γραφικη παρασταση της $f(x)=x^2$, την εφαπτομενη της c_f στο σημειο A(-2,4) και τον αξονα x΄x.

141. Να βρειτε το εμβαδον του χωριου που περικλειεται από τις γραφικες παραστασεις των συναρτησεων $\psi=4$, $\psi=2^x$, x=0 , $\psi=x-1$

142. Να βρειτε το εμβαδον του χωριου που περικλειεται από την c_f την εφαπτομενη της στο σημειο A(2α, 8α²) και τον ψ΄ψ.

143. Δινεται η συναρτηση $f(x)=1-\frac{1}{x^2}, x\neq 0$. Να βρειτε τις ασυμτωτες της γραφικης παραστασης της f. **α)** Να βρειτε τις ασυμτωτες της c_f
β) Η οριζοντια ασυμπτωτη της c_f , ο αξονας xx' και οι ευθειες x=1 και x=α με α >1 οριζουν ένα ορθογωνιο. Να βρειτε για ποια τιμη του α η c_f χωριζει το ορθογωνιο σε δυο ισεμβαδικα χωρια

144. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις της $f(x)=e^{|x|}$ και της $g(x)=|ex|$.

145. Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-x$ και $g(x)=\ln x$ έχουν κοινή εφαπτομένη και κατόπιν να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $f(x), g(x)$ και την $y=2$

146. Δίνεται η παραβολή $C: x^2=2py, p>0$. Να δειχθεί ότι εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C , τον xx' και από μία εφαπτομένη της C σε σημείο της $P(x_0,y_0)$ με $x>0$, είναι ίσο με $E=\frac{1}{12}x_0y_0$

147. α) Έστω $f(x)=x(x-\alpha)(x-\beta)$. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε οι εφαπτόμενες της f στα $x=0$ και $x=\alpha$ να είναι οι $y=2x$ και $y=-x+1$.

β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την f και την εφαπτομένη της στο $x=0$.

γ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται από την f και τις δύο παραπάνω εφαπτόμενες .

148. Να δειχθεί ότι η $f(x)=\ln(x+1)+x$ αντιστρέφεται και να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την f^{-1} , τον $x'x$ και την ευθεία $x=e$.

149. Έστω οι παραγωγίσιμες f,g στο $[0,+\infty]$ που διέρχονται από το ίδιο σημείο του $y'y$ και για αυτές ισχύει ότι $g'(x)=e^{x^2}$ και $\frac{f'(x)}{g''(x)}+x=0$ για κάθε $x\in[0,+\infty]$. Να βρεθεί

το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις f, g και τις ευθείες $x=0, x=1$.

150. Δείξτε ότι η $f(x)=e^x+x-1$ αντιστρέφεται και βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την f^{-1} τον $x'x$ και την $x=e$.

151. Δείξτε ότι η $f(x)=x^3+x-2$ αντιστρέφεται και βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την f^{-1} και τους άξονες $x'x, y'y$.

152. Αν η $f(x)$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\mathbb{R}$ και στο σημείο $A(1,1)$ εμφανίζει ακρότατο , να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την f' , τον $x'x$ και τις $x=-1, x=3$ αν ισχύει ότι $f(-1)+f(3)=-4$.

153. Έστω $f(x)$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύουν $f(1)=e$ και $f(0)=0$. Αν $f'(x)e^{-x}\le x+1$ για κάθε $x\in[0,1]$, να βρεθεί το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από την f^{-1} τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την $x=e$.

154. Έστω συνάρτηση f με συνεχή παράγωγο $f'(x)<0$ στο $\mathbb{R}$, η οποία περνά από τα Α(0,1) και Β(1,0).Αν το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την συνάρτηση $g(x)=x\cdot f^{-1}(x)$ και τους άξονες $x'x$, $y'y$ ισούται με 4, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $h(x)=f^2(x)$ και τους άξονες $x'x$, $y'y$.

155. Έστω $f(x)$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύουν $f(e)=2$ και $f(1)=1$. Αν $f'(x)x\ge 2\ln x$ για κάθε $x\in[1.e]$, να βρεθεί το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από την f^{-1} τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1, x=2$.

156. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x}+1, & 0<x<1\\ 1\ , & x=1\\ \dfrac{\ln x}{x-1}, & x>1\end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ (μονάδες 3) και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Δ2. Να αποδείξετε ότι το $x_0=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

Δ3. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

(μονάδες 3)

ii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=1$ και $x=x_0$, όπου x_0 η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι

$E=\dfrac{-x_0^2-2x_0+2}{2}$ (μονάδες 4)

Δ4. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[1,+\infty)$, να αποδείξετε ότι

$(x+1)F(x) > xF(1) + F(x^2)$ για κάθε $x > 1$. **(μονάδες 2+5+7+8)**

157. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\eta\mu x\right)dx = \pi$
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$.
- $e^{f(x)} + x = f\left(f(x)\right) + e^x$ για κάθε και $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(\pi)=\pi$ (μονάδες 4) και $f'(0)=1$ (μονάδες 3).

Μονάδες 7

Δ2. α) Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 2)

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$.

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι $0<\int_1^{e^{\pi}}\dfrac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$.

Μονάδες 6

"Οι μεγάλοι άνθρωποι μιλούν για ιδέες. Οι μεσαίοι άνθρωποι μιλούν για γεγονότα. Οι μικροί άνθρωποι μιλούν για τους άλλους."

Πλάτωνας