ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Β΄ ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ3ΘΟ(α)

ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 27 Απριλίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε απόδειξη θεωρήματος σχολικού βιβλίου σελίδα 263.

Α2. Βλέπε ορισμό σχολικού βιβλίου σελίδα 280.

Α3. Βλέπε ορισμό σχολικού βιβλίου σελίδα 303.

Α4. $\alpha \to \Lambda$. Το σωστό είναι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$. Βλέπε σελίδα 171 σχολικού βιβλίου.

$\beta \to \Sigma$. Βλέπε σελίδα 217 σχολικού βιβλίου.

$\gamma \to \Sigma$. Βλέπε σελίδα 330 σχολικού βιβλίου.

$\delta \to \Sigma$. Βλέπε σελίδα 192 σχολικού βιβλίου.

$\varepsilon \to \Lambda$. Το σωστό είναι: τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ. Βλέπε σελίδα 261 σχολικού βιβλίου.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής αρκεί να δείξουμε ότι είναι συνεχής στο $x_0=1$, καθώς η f για κάθε $x\neq 1$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$.

1ος τρόπος

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^{u}-1}{u}=1=f(1)$.
Θέτοντας $u=x-1$ ισχύει αν $x\to 1$ τότε $u\to 0$ και έτσι το όριο γίνεται: $\lim\limits_{x\to 1}=\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^{u}-1}{u}=1$ το οποίο είναι η παράγωγος της συνάρτησης $h(x)=e^x$, για $x=0$.

Άρα $h'(x)=e^x$, οπότε $\lim\limits_{x\to u}\dfrac{e^{u}-1}{u}=h'(0)=1$.

2ος τρόπος

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\overset{\frac{0}{0}\ DLH}{=}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(e^{x-1}-1\right)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1} e^{x-1}\cdot(x-1)'=\lim_{x\to 1} e^{x-1}=e^0=1=f(1).$$

Β2. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{e^{x-1}-1}{x-1}-1}{x-1}=$

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1-x+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-x}{(x-1)^2}\overset{\frac{0}{0}\ DLH}{=}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(e^{x-1}-x\right)'}{\left((x-1)^2\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{2(x-1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{1}{2}f(1)=\frac{1}{2}\in\mathbb{R}.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$,με $f'(1)=\frac{1}{2}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι:

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$, δηλαδή $y-1=\frac{1}{2}(x-1)$ οπότε $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

Β3. Η συνάρτηση $g(x)=(x-2)e^{x-1}+1$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών στο $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$, με $g'(x)=e^{x-1}+(x-2)\cdot e^{x-1}=e^{x-1}(1+x-2)=e^{x-1}\cdot(x-1)$.

Έχουμε: $g'(x)\geq 0$, οπότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$e^{x-1}(x-1)\geq 0 \overset{e^{x-1}>0}{\Leftrightarrow} x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$.

Ομοίως αν $g'(x)<0$ προκύπτει $x<1$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	min	↗

Επειδή η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$ το $g(1)=(1-2)\cdot e^{1-1}+1=-1+1=0$, ισχύει $g(x)\geq g(1)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δηλαδή ισχύει $g(x)\geq 0$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=\frac{e^{x-1}(x-1)-(e^{x-1}-1)}{(x-1)^2}=\frac{xe^{x-1}-e^{x-1}-e^{x-1}+1}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{xe^{x-1}-2e^{x-1}+1}{(x-1)^2}=\frac{(x-2)e^{x-1}+1}{(x-1)^2}=\frac{g(x)}{(x-1)^2}>0 \text{ για κάθε } x\neq 1.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ έπεται ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Β4. Ισχύει ότι:

- Η g είναι συνεχής στο διάστημα $[2015,2016]$ ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- $g(x)>0$ για κάθε $x\in[2015,2016]$, καθώς η συνάρτηση g μηδενίζεται μόνο στο $x=1$.

Οπότε από γνωστό Θεώρημα έχουμε: $\int_{2015}^{2016} g(x)dx>0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f(x)\geq -\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}\Leftrightarrow f(x)+\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}\geq 0. \ (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}$, με $x\in\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι:

$$g(0)=f(0)-\sqrt{3}=\sqrt{3}-\sqrt{3}=0.$$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$(1)\Leftrightarrow g(x)\geq g(0)$.

Δηλαδή η g παρουσιάζει στο 0 ολικό ελάχιστο.
Επίσης το 0 είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$ και η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$g'(x)=\left(f(x)+\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}\right)'=f'(x)+\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat ισχύει ότι:

$$g'(0)=0\Leftrightarrow f'(0)+\frac{\sqrt{3}}{3}=0\Leftrightarrow f'(0)=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Γ2. **<u>1ος τρόπος</u>**

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f(x)\cdot f'(x)+f(x)\cdot f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$f(x)\cdot f'(x)+f(x)\cdot f''(x)+f'(x)\cdot f'(x)=0 \Leftrightarrow$$
$$f(x)\cdot f''(x)+f'(x)\cdot f'(x)+f(x)\cdot f'(x)=0 \Leftrightarrow$$
$$\left(f(x)\cdot f'(x)\right)'+f(x)\cdot f'(x)=0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}$$
$$e^x\left(f(x)\cdot f'(x)\right)'+e^x\cdot f(x)\cdot f'(x)=0 \Leftrightarrow$$
$$e^x\left(f(x)\cdot f'(x)\right)'+\left(e^x\right)'\cdot f(x)\cdot f'(x)=0 \Leftrightarrow$$
$$\left(e^x\cdot f(x)\cdot f'(x)\right)'=0$$

<u>2ος τρόπος</u>

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f(x)\cdot f'(x)+f(x)\cdot f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$f(x)\cdot f'(x)+f(x)\cdot f''(x)+f'(x)\cdot f'(x)=0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}$$
$$e^x\cdot f(x)\cdot f'(x)+e^x\cdot f(x)\cdot f''(x)+e^x\cdot f'(x)\cdot f'(x)=0 \Leftrightarrow$$
$$\left(e^x\right)'\cdot f(x)\cdot f'(x)+e^x\cdot f(x)\cdot\left(f'(x)\right)'+e^x\cdot f'(x)\cdot f'(x)=0 \Leftrightarrow$$
$$\left(e^x\cdot f(x)\cdot f'(x)\right)'=0$$

Με εφαρμογή των Συνεπειών του Θεωρήματος Μέσης Τιμής προκύπτει ότι υπάρχει σταθερά $c_1 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$e^x\cdot f(x)\cdot f'(x)=c_1.$$

Για $x=0$, έχουμε:

$$e^0\cdot f(0)\cdot f'(0)=c_1 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=c_1 \Leftrightarrow c_1=-1.$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$e^x \cdot f(x) \cdot f'(x) = -1 \Leftrightarrow f(x) \cdot f'(x) = -e^{-x} \Leftrightarrow$

$2 \cdot f(x) \cdot f'(x) = -2e^{-x} \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)' = \left(2e^{-x}\right)'$.

Με εφαρμογή των Συνεπειών του Θεωρήματος Μέσης Τιμής προκύπτει ότι υπάρχει σταθερά $c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$f^2(x) = 2e^{-x} + c_2$.

Για $x = 0$, έχουμε:

$f^2(0) = 2e^0 + c_2 \Leftrightarrow 3 = 2 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 1$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$f^2(x) = 2e^{-x} + 1 \neq 0$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.
Επειδή $f(0) = \sqrt{3} > 0$, θα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Επομένως:

$f(x) = \sqrt{2e^{-x} + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ3. **<u>1ος τρόπος</u>**

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$.
Έχουμε:

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \sqrt{2e^{-x_1} + 1} = \sqrt{2e^{-x_2} + 1} \Leftrightarrow$

$2e^{-x_1} + 1 = 2e^{-x_2} + 1 \Leftrightarrow 2e^{-x_1} = 2e^{-x_2} \Leftrightarrow$

$e^{-x_1} = e^{-x_2} \overset{1-1}{\Leftrightarrow} -x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Άρα η συνάρτηση f είναι 1-1 συνάρτηση, οπότε αντιστρέφεται.

<u>2ος τρόπος</u>

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$f'(x) = \left(\sqrt{2e^{-x} + 1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{2e^{-x} + 1}}\left(2e^{-x} + 1\right)' = \frac{-e^{-x}}{\sqrt{2e^{-x} + 1}} < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε και 1-1 συνάρτηση, συνεπώς αντιστρέφεται.

Θέτουμε $y = f(x)$ και έχουμε:

$y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{2e^{-x}+1}$ (1)

Θα πρέπει $y \geq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$y^2 = 2e^{-x}+1 \Leftrightarrow y^2-1 = 2e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{y^2-1}{2} \quad (2)$$

Θα πρέπει $\frac{y^2-1}{2} > 0 \Leftrightarrow y^2-1>0 \overset{y>0}{\Leftrightarrow} y>1$.

Με αυτόν τον επιπλέον περιορισμό έχουμε:

$$\ln e^{-x} = \ln\left(\frac{y^2-1}{2}\right) \Leftrightarrow -x = \ln\left(\frac{y^2-1}{2}\right) \Leftrightarrow x = -\ln\left(\frac{y^2-1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$x = \ln\left(\frac{y^2-1}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{2}{y^2-1}\right) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{2}{y^2-1}\right), \ y>1$$

Άρα είναι:

$$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{2}{x^2-1}\right), \ x>1.$$

Υποσημείωση: Το σύνολο τιμών της f ,το οποίο είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1}, μπορεί να βρεθεί από την συνέχεια και την μονοτονία της f.

Γ4. Θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\ln(e-2)}^{0} \frac{e^x+1}{f^2(x)}dx$.

Έχουμε:

$$I = \int_{\ln(e-2)}^{0} \frac{e^x+1}{f^2(x)}dx = \int_{\ln(e-2)}^{0} \frac{e^x+1}{2e^{-x}+1}dx = \int_{\ln(e-2)}^{0} \frac{e^x+1}{\frac{2}{e^x}+1}dx = \int_{\ln(e-2)}^{0} \frac{e^x+1}{\frac{2+e^x}{e^x}}dx = \int_{\ln(e-2)}^{0} \frac{e^x\left(e^x+1\right)}{e^x+2}dx$$

Θέτουμε $e^x = u$, οπότε $e^x dx = du$.

Επίσης $e^x+1 = u+1>0$ και $e^x+2 = u+2>0$.

Για $x = \ln(e-2)$ είναι $u = e^{\ln(e-2)} = e-2$.

Για $x = 0$ είναι $u = e^0 = 1$.

Επομένως:

$$I = \int_{e-2}^{1} \frac{u+1}{u+2}du = \int_{e-2}^{1} \frac{u+2-1}{u+2}du = \int_{e-2}^{1}\left(1-\frac{1}{u+2}\right)du =$$

$$= \left[u\right]_{e-2}^{1} - \left[\ln\left(u+2\right)\right]_{e-2}^{1} = 1-(e-2)-(\ln 3-\ln(e-2+2)) =$$

$$= 1-e+2-\ln 3+\ln e = 4-e-\ln 3.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0$, ή ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Η συνάρτηση $g(x)=\ln x+x$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ με:

$g'(x)=(\ln x+x)'=\dfrac{1}{x}+x>0$, για κάθε $x>0$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

1ος τρόπος

Συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1)$ και επειδή είναι συνεχής στο $(0,1)$, έχουμε:

$g((0,1))=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} g(x), \lim\limits_{x\to 1^-} g(x)\right)=(-\infty,1)$,

αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x+x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(\ln x+x)=1$

Επειδή $0\in g((0,1))$ η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ρίζα στο διάστημα $(0,1)$ και αφού η είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό η ρίζα θα είναι μοναδική.

2ος τρόπος

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x+x)=-\infty$.

Οπότε υπάρχει α κοντά στο 0^+ με $0<\alpha<1$ τέτοιο, ώστε $g(\alpha)<0$.

Επίσης $g(1)=\ln 1+1=1>0$.

Επομένως $g(\alpha)\cdot g(1)<0$.

Επειδή η g είναι και συνεχής στο $[\alpha,1]\subseteq(0,1)$ σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano η συνάρτηση g έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(\alpha,1)\subseteq(0,1)$.

Επιπλέον η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$, οπότε η ρίζα θα είναι μοναδική.

3ος τρόπος

Ενδεικτικά, εφαρμόζουμε Θεώρημα Bolzano για την g στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{e},1\right]$.

Στη συνέχεια θα λύσουμε την εξίσωση $e^{x-x_0}=\dfrac{x_0}{x}$.

Επειδή $x_0>0$ θα πρέπει και $x>0$, οπότε η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$e^{x-x_0}=\frac{x_0}{x}\Leftrightarrow \ln e^{x-x_0}=\ln\frac{x_0}{x}\Leftrightarrow x-x_0=\ln x_0-\ln x\Leftrightarrow$$

$$x+\ln x=x_0+\ln x_0\Leftrightarrow g(x)=g(x_0)\,.\ (1)$$

Όμως η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, οπότε έχουμε:

$$(1)\Leftrightarrow g(x)=g(x_0)\overset{g:1-1}{\Leftrightarrow}x=x_0\,.$$

Δ2. **i)** Για $0<\alpha<1$, το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{1}\left|g(x)-x\right|dx\,.$$

Έχουμε:

$$x\le 1\overset{\ln x\nearrow}{\Leftrightarrow}\ln x\le\ln 1\Leftrightarrow\ln x\le 0\Leftrightarrow\ln x+x\le x\Leftrightarrow g(x)\le x\Leftrightarrow g(x)-x\le 0\,.$$

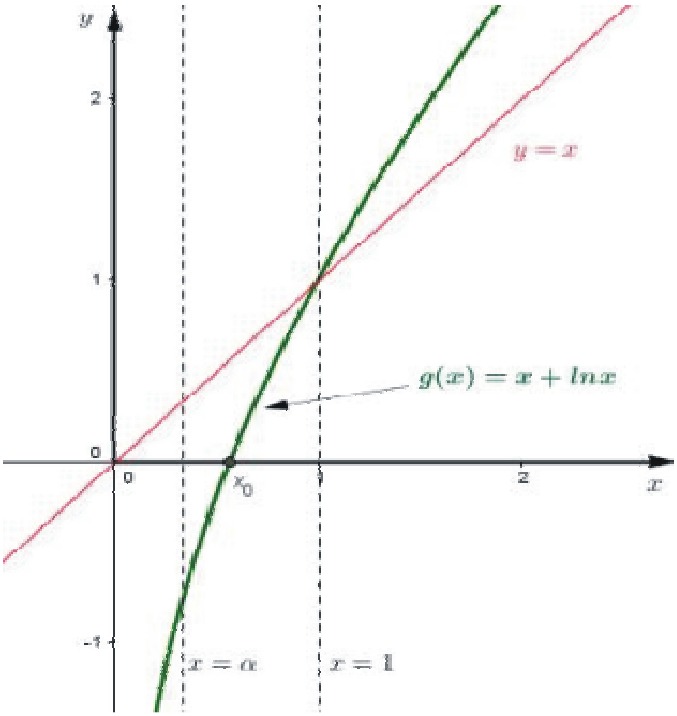
Συνεπώς στο $[\alpha,1]$ είναι $\left|g(x)-x\right|=x-g(x)$.

Επομένως είναι:

$$\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{1}\left(x-g(x)\right)dx=\int_{\alpha}^{1}\left(x-\ln x-x\right)dx=\int_{\alpha}^{1}\left(-\ln x\right)dx=\int_{1}^{a}\ln x dx=$$

$$=\int_{1}^{a}(x)'\ln x dx=\left[x\ln x\right]_1^a-\int_1^a x\left(\ln x\right)'dx=a\ln a-\int_1^a x\frac{1}{x}dx=$$

$$=a\ln a-\int_1^a 1dx=a\ln a-\left[x\right]_1^a=a\ln a-a+1\ \text{τ.μ.}$$



ii) Από υπόθεση έχουμε ότι $\alpha'(t) = 1\,\text{cm/sec}$.

Αυτό σημαίνει ότι η τιμή του αριθμού α αυξάνει, δηλαδή κινείται απομακρυνόμενος από το 0 και προσεγγίζοντας το 1, αφού $0 < \alpha < 1$.

Επειδή η θέση του αριθμού α είναι συνάρτηση του χρόνου t έχουμε:

$\mathrm{E}(t) = \alpha(t) \cdot \ln\big(\alpha(t)\big) - \alpha(t) + 1$.

Ο ρυθμός μεταβολής του είναι:

$$E'(t) = a'(t) \cdot \ln(a(t)) + a(t) \cdot (\ln(a(t))' - a'(t) =$$

$$= a'(t) \cdot \ln(a(t)) + a(t) \cdot \frac{a'(t)}{a(t)} - a'(t) =$$

$$= a'(t) \cdot \ln(a(t)) + a'(t) - a'(t) = a'(t) \cdot \ln(a(t)).$$

Την χρονική στιγμή t_0 στην οποία είναι $\alpha(t_0) = x_0$ έχουμε:

$\mathrm{E}'(t_0) = \alpha'(t_0) \cdot \ln\big(\alpha(t_0)\big) = 1 \cdot \ln x_0 = \ln x_0$.

Όμως από Δ1. ερώτημα ισχύει ότι:

$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 + x_0 = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = -x_0$.

Συνεπώς $\mathrm{E}'(t_0) = -x_0$ cm²/sec.

Δ3. Επειδή για κάθε $x>0$ είναι $g'(x)=1+\frac{1}{x}>0$ η g είναι γνησίως αύξουσα.

Παρατηρούμε ότι:

$0<g^{-1}(x)<-\frac{1}{x}$ (1) για κάθε $x<0$

Πράγματι το $0<g^{-1}(x)$ προκύπτει γιατί το σύνολο τιμών της g^{-1} είναι το $(0,+\infty)$. Για το $g^{-1}(x)<-\frac{1}{x}$ έχουμε τις ισοδυναμίες:

$g^{-1}(x)<-\frac{1}{x}\Leftrightarrow g(g^{-1}(x))<g\left(-\frac{1}{x}\right)$ [g γνησίως αύξουσα]

$\Leftrightarrow x<-\frac{1}{x}+\ln\left(-\frac{1}{x}\right)$

$\Leftrightarrow x^2>-1+x\ln\left(-\frac{1}{x}\right)$ [$x<0$]

$\Leftrightarrow x^2>-1+x(-\ln(-x))$ $\left[\ \ln\left(\frac{1}{\theta}\right)=-\ln(\theta)\ \right]$

$\Leftrightarrow x^2+1+x\ln(-x)>0$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει, αφού από την γνωστή σχέση $\ln x\le x-1$, $x>0$, έχουμε για κάθε $x<0$:

$$\ln(-x)\le -x-1\Rightarrow x\ln(-x)\ge -x^2-x\Rightarrow x^2+x\ln(-x)+1\ge -x+1>0$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$, από το κριτήριο παρεμβολής η (1) δίνει $\lim\limits_{x\to-\infty}g^{-1}(x)=0$

Η σχέση $f(g(x))=f(x)+e^x(x-1)+\ln x,\ x>0$ με την αντικατάσταση του x με το $g^{-1}(x)>0,\ x\in\mathbb{R}$ δίνει:

$f(x)=f(g^{-1}(x))+e^{g^{-1}(x)}(g^{-1}(x)-1)+\ln(g^{-1}(x))$, (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Θέτουμε $g^{-1}(x)=u$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}g^{-1}(x)=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}u=0$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(g^{-1}(x))=\lim\limits_{u\to0}f(u)=f(0)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{g^{-1}(x)}(g^{-1}(x)-1)=\lim\limits_{u\to0}e^u(u-1)=-1$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\ln(g^{-1}(x)))=\lim\limits_{u\to0}(\ln u)=-\infty$

Επομένως

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(g^{-1}(x))+e^{g^{-1}(x)}(g^{-1}(x)-1)+\ln(g^{-1}(x))\right]=-\infty \overset{(2)}{\Rightarrow} \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

Δ4. Για κάθε $x>0$, έχουμε:

$$f\left(g(x)\right)=f(x)+e^x(x-1)+\ln x \Leftrightarrow f\left(g(x)\right)-f(x)=xe^x-e^x+\ln x \Leftrightarrow$$
$$f\left(g(x)\right)-f(x)=e^{\ln x}e^x-e^x+\ln x \Leftrightarrow f\left(g(x)\right)-f(x)=e^{\ln x+x}-e^x+\ln x \Leftrightarrow$$
$$f\left(g(x)\right)-f(x)=e^{g(x)}-e^x+\ln x.$$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη της τελευταίας ισότητας με τον όρο $g(x)-x=\ln x>0$, για κάθε $x>1$ και έχουμε:

$$\frac{f\left(g(x)\right)-f(x)}{g(x)-x}=\frac{e^{g(x)}-e^x}{g(x)-x}+\frac{\ln x}{g(x)-x} \Leftrightarrow$$
$$\frac{f\left(g(x)\right)-f(x)}{g(x)-x}=\frac{e^{g(x)}-e^x}{g(x)-x}+\frac{\ln x}{\ln x} \Leftrightarrow$$
$$\frac{f\left(g(x)\right)-f(x)}{g(x)-x}=\frac{e^{g(x)}-e^x}{g(x)-x}+1. \quad (1)$$

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι συνεχής στο $[x,g(x)]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,g(x))$, για κάθε $x>1$.
  Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την f στο $[x,g(x)]$, επομένως θα υπάρχει $\xi_1\in(x,g(x))$ με $1<x<\xi_1<g(x)$ τέτοιο, ώστε:

  $$f'(\xi_1)=\frac{f\left(g(x)\right)-f(x)}{g(x)-x}. \quad (2)$$

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^x$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι συνεχής στο $[x,g(x)]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,g(x))$, για κάθε $x>1$, με $h'(x)=e^x$.
  Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την h στο $[x,g(x)]$, επομένως θα υπάρχει $\xi_2\in(x,g(x))$ με $1<x<\xi_2<g(x)$ τέτοιο, ώστε:

  $$h'(\xi_2)=e^{\xi_2}=\frac{e^{g(x)}-e^x}{g(x)-x}. \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) η (1) δίνει: $f'(\xi_1)=e^{\xi_2}+1$, με $\xi_1>1$ και $\xi_2>1$.

Ενδεικτικά ένας 2ος τρόπος είναι:

Για κάθε $x>0$, έχουμε:

$$f(g(x))=f(x)+e^x(x-1)+\ln x \Leftrightarrow f(g(x))-f(x)=xe^x-e^x+\ln x \Leftrightarrow$$

$$f(g(x))-f(x)=e^{\ln x}e^x-e^x+\ln x \Leftrightarrow f(g(x))-f(x)=e^{\ln x+x}-e^x+\ln x \Leftrightarrow$$

$$f(g(x))-f(x)=e^{g(x)}-e^x+\ln x.$$

Οπότε: $f(g(x))-e^{g(x)}-g(x)=f(x)-e^x-x$.(1)

Έστω η συνάρτηση $y(x)=f(x)-e^x-x, x>0$.

Τότε η (1) γίνεται: $y(g(x))=y(x)$, για κάθε $x>0$. (2)

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την συνάρτηση y στο $[x,g(x)]$

για κάθε $x>1$.

Η y είναι συνεχής στο $[x,g(x)]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,g(x))$ για κάθε $x>1$, ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων στα διαστήματα αυτά.

Λόγω της (2) ισχύει $y(g(x))=y(x)$.

Άρα υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\xi\in(x,g(x))$, άρα και $\xi>1$, τέτοιος ώστε $y'(\xi)=0$.

Όμως $y'(x)=f'(x)-e^x-1$, οπότε $f'(\xi)-e^{\xi}-1=0$.

Οπότε έχουμε $f'(\xi)=e^{\xi}+1, \xi>1$.

Για $\xi_1=\xi_2=\xi$ έπεται το ζητούμενο.