



ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 13 Ιανουαρίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 114.

A2. (α) Ψευδής

(β) Για τις συναρτήσεις $f(x) = x - |x|$, $g(x) = x + |x|$ με $A_f = A_g = \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x) \cdot g(x) = (x - |x|) \cdot (x + |x|) = x^2 - |x|^2 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

όμως καμία από τις συναρτήσεις δεν είναι μηδενική.

Σημείωση: Το παραπάνω αποτελεί ένα αντιπαράδειγμα που τεκμηριώνει το ψευδές της πρότασης και προφανώς δεν είναι το μοναδικό.

A3. 1. (α)

Εξήγηση:

Η $f(x) = e^{x-2} + 2$, $x \in \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη την $f^{-1}(x) = \ln(x-2) + 2$, $x > 2$ διότι:

$$f(x) = y \Leftrightarrow e^{x-2} + 2 = y \Leftrightarrow e^{x-2} = y - 2 \stackrel{y>2}{\Leftrightarrow} x - 2 = \ln(y - 2) \Leftrightarrow x = \ln(y - 2) + 2$$

2. (γ)

Εξήγηση:

$$f(x) = 3^{x^2} = e^{\ln 3^{x^2}} = e^{x^2 \ln 3}$$

$$f'(x) = \left(e^{x^2 \ln 3} \right)' = e^{x^2 \ln 3} \left(x^2 \ln 3 \right)' = 3^{x^2} \cdot 2x \ln 3$$

3. (β)

Εξήγηση

Από τα δεδομένα της εκφώνησης η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών.

Άρα για οποιονδήποτε αριθμό ανάμεσα στα $f(-1), f(1)$ στην προκειμένη περίπτωση τον αριθμό π υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1, 1)$ ώστε $f(x_0) = \pi$

Α4. 1.ΣΩΣΤΟ 2.ΛΑΘΟΣ 3.ΛΑΘΟΣ 4.ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Εφόσον η f συνεχής στο \mathbb{R} θα είναι συνεχής και στο $x = 3$ δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 4)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 4) = 7$
- $f(3) = k^2 - 2k + 8$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow k^2 - 2k + 8 = 7 \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow (k - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

Άρα

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$$

$$\text{Για } x \neq 3 \text{ έχουμε } f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 4)}{x - 3} = x + 4$$

Για $x = 3$ ισχύει: $f(3) = 7$ και εφόσον η f συνεχής θα έχουμε $f(x) = x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

B2. Το πεδίο ορισμού της $h \circ f$ αποτελείται από εκείνα τα $x \in A_f$ για τα οποία $f(x) \in A_h$

Δηλαδή: $x \in \mathbb{R}$ και $0 \leq x + 4 \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq -3$

Οπότε $A_{f \circ h} = [-4, -3]$ και $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = (x + 4)^{2017} + (x + 4)^{2019}$

Άρα $g(x) = (h \circ f)(x) = (x + 4)^{2017} + (x + 4)^{2019}$ με πεδίο ορισμού $A = [-4, -3]$

B3. (α) Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 4 < x_2 + 4 \Rightarrow (x_1 + 4)^{2017} < (x_2 + 4)^{2017} \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 4 < x_2 + 4 \Rightarrow (x_1 + 4)^{2019} < (x_2 + 4)^{2019} \quad (2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) προκύπτει: $g(x_1) < g(x_2)$ επομένως η g γνησίως αύξουσα στο A

Η g συνεχής ως πολυωνυμική στο $A = [-4, -3]$ και γνησίως αύξουσα σε αυτό επομένως

$$g(A) = [g(-4), g(-3)] = [0, 2]$$

διότι:

$$g(-4) = (-4 + 4)^{2017} + (-4 + 4)^{2019} = 0$$

και

$$g(-3) = (-3 + 4)^{2017} + (-3 + 4)^{2019} = 1 + 1 = 2$$

(β) Α-τρόπος

Η εξίσωση $2018 \cdot g(x) - 2035 = 0$ είναι ισοδύναμη με $g(x) = \frac{2035}{2018}$

Ο αριθμός $\frac{2035}{2018}$ είναι θετικός και μικρότερος του 2 άρα ανήκει στο σύνολο

τιμών της g , επομένως θα υπάρχει $x_0 \in A$ ώστε $g(x_0) = \frac{2018}{2035}$, το x_0 μοναδικό

διότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

Β-τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = 2018 \cdot g(x) - 2035, x \in [-4, -3]$ η οποία είναι συνεχής στο $[-4, -3]$

Επίσης $\varphi(-4) = -2035$

και $\varphi(-3) = 2018 \cdot g(-3) - 2035 = 2018 \cdot 2 - 2035 = 2036 - 2035 = 1$

δηλαδή $\varphi(-4) \cdot \varphi(-3) < 0$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-4, -3)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = 0$

Για κάθε $x_1, x_2 \in [-4, -3]$ με $x_1 < x_2$

$$x_1 < x_2 \stackrel{g^1}{\Rightarrow} g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow 2035 \cdot g(x_1) < 2035 \cdot g(x_2)$$

$$\Leftrightarrow 2018 \cdot g(x_1) - 2035 < 2018 \cdot g(x_2) - 2035 \Leftrightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2)$$

Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα άρα το x_0 μοναδικό.

Β4

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\eta\mu f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\eta\mu(x+4)}{(x+4)^{2017} + (x+4)^{2019}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\eta\mu(x+4)}{(x+4) \left[(x+4)^{2016} + (x+4)^{2018} \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow -4} \left[\frac{\eta\mu(x+4)}{(x+4)} \cdot \frac{1}{(x+4)^{2016} + (x+4)^{2018}} \right] = +\infty \\ \text{διότι: } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\eta\mu(x+4)^{(*)}}{x+4} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1, \\ \text{(*)} \text{ θέτοντας } u &= x+4 \text{ άρα } u_0 = \lim_{x \rightarrow -4} u = \lim_{x \rightarrow -4} (x+4) = 0 \end{aligned}$$

Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow -4} \left[(x+4)^{2016} + (x+4)^{2018} \right] = 0$$

και $\left[(x+4)^{2016} + (x+4)^{2018} \right] > 0$ κοντά στο -4

άρα

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{(x+4)^{2016} + (x+4)^{2018}} = +\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από τη σχέση $f^2(x) - 2f(x) = e^{2x} + 2e^x$ η οποία ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f^2(x) - 2f(x) = e^{2x} + 2e^x \Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x) + 1 = e^{2x} + 2e^x + 1$$

$$\Leftrightarrow (f(x) - 1)^2 = (e^x + 1)^2 \Leftrightarrow |f(x) - 1| = |e^x + 1| \Leftrightarrow |f(x) - 1| = e^x + 1$$

Θεωρούμε $h(x) = f(x) - 1$ άρα η τελευταία ισότητα γίνεται $|h(x)| = e^x + 1$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow |h(x)| = 0 \Leftrightarrow e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = -1$ αδύνατη επομένως $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επειδή η h συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο \mathbb{R}

$h(0) = f(0) - 1 > 0$ άρα $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε

$$|h(x)| = e^x + 1 \Leftrightarrow h(x) = e^x + 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 = e^x + 1 \Leftrightarrow f(x) = e^x + 2$$

Γ2. (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = e^x + 4x, x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα διότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$x_1 < x_2 \text{ έχουμε: } \begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x_1} < e^{x_2} \quad (+) \\ 4x_1 < 4x_2 \end{cases} \Rightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2)$$

Η φ συνεχής και γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} επομένως το σύνολο τιμών της είναι

$$\varphi(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

διότι: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 4x) = 0 + (-\infty) = -\infty$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 4x) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

Ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης φ οποιαδήποτε και αν είναι η τιμή του επομένως υπάρχει πάντα $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $\varphi(x_0) = \lambda$, το x_0 θα είναι μοναδικό διότι η φ είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως η εξίσωση $e^x + 4x = \lambda$ έχει μοναδική ρίζα στο \mathbb{R} για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$

(β) Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, g(\beta))$ σημεία των γραφικών παραστάσεων f, g αντίστοιχα.

Η εξίσωση εφαπτομένης της f στο A είναι:

$$(\varepsilon_1): y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y = f'(\alpha)x - \alpha f'(\alpha) + f(\alpha)$$

Η εξίσωση εφαπτομένης της g στο B είναι:

$$(\varepsilon_2): y - g(\beta) = g'(\beta)(x - \beta) \Leftrightarrow y = g'(\beta)x - \beta g'(\beta) + g(\beta)$$

Για να έχουν κοινή εφαπτομένη πρέπει οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ να ταυτίζονται δηλαδή

$$f'(\alpha) = g'(\beta) \text{ και } -\alpha \cdot f'(\alpha) + f(\alpha) = -\beta \cdot g'(\beta) + g(\beta) .$$

Από τη σχέση $f'(\alpha) = g'(\beta)$ παίρνουμε

$$f'(\alpha) = g'(\beta) \Leftrightarrow e^\alpha = -2\beta \Leftrightarrow \beta = -\frac{e^\alpha}{2} \quad (1)$$

$$-\alpha \cdot f'(\alpha) + f(\alpha) = -\beta \cdot g'(\beta) + g(\beta) \Leftrightarrow -\alpha e^\alpha + e^\alpha + 2 = -\beta(-2\beta) - \beta^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow -\alpha e^\alpha + e^\alpha = \beta^2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} -\alpha e^\alpha + e^\alpha = \left(-\frac{e^\alpha}{2}\right)^2 \Leftrightarrow -\alpha e^\alpha + e^\alpha = \frac{e^{2\alpha}}{4} \Leftrightarrow -\alpha + 1 = \frac{e^\alpha}{4}$$

$$\Leftrightarrow e^\alpha = -4\alpha + 4 \Leftrightarrow e^\alpha + 4\alpha = 4$$

Η τελευταία εξίσωση έχει μοναδική ρίζα **(Γ2(α))** για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ άρα υπάρχει και μοναδικό $\beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\beta = -\frac{e^\alpha}{2}$ επομένως οι συναρτήσεις f, g έχουν μόνο μια κοινή εφαπτομένη.

Γ3.

$$f(x^2) - f(-x+2) > 4g(x) - 4x \Leftrightarrow e^{x^2} + 2 - (e^{-x+2} + 2) > 4(-x^2 + 2) - 4x$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2} + 4x^2 > e^{-x+2} + 4(-x+2) \Leftrightarrow \varphi(x^2) > \varphi(-x+2) \Leftrightarrow x^2 > -x+2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } x > 1$$

Γ4. $y_1(t) = e^{x(t)} + 2$ **άρα** $y_1'(t) = e^{x(t)} \cdot x'(t)$

$$y_2(t) = -x^2(t) + 2 \text{ **άρα** } y_2'(t) = -2 \cdot x(t) \cdot x'(t)$$

Ισχύει $x'(t) = 1 \text{ cm / sec}$

$$y_1'(t) = 2y_2'(t) + 1 \Leftrightarrow e^{x(t)} \cdot x'(t) = 2(-2 \cdot x(t) \cdot x'(t)) + 1$$

$$\Leftrightarrow e^{x(t)} = -4x(t) + 1 \Leftrightarrow e^{x(t)} + 4x(t) = 1 \Leftrightarrow \varphi(x(t)) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x(t)) = \varphi(0) \Leftrightarrow x(t) = 0$$

Άρα στο σημείο $A(0, f(0))$ για την f και στο σημείο $B(0, g(0))$ για την g ισχύει

$$y_1'(t) = 2y_2'(t) + 1 \text{ δηλαδή στα σημεία } A(0, 3) \text{ και } B(0, 2)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}, x \neq 1$ (1) με $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2$

Από τη σχέση (1) έχουμε $f(x) = h(x)(x-1) + 1$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [h(x)(x-1) + 1] \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \text{ και επειδή η συνάρτηση } f$$

είναι πολυωνυμική συνάρτηση ορισμένη στο \mathbb{R} θα είναι συνεχής επομένως

$$f(1) = 1$$

(β) Η f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως πολυωνυμική επομένως

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{f(1)=1}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = 2$$

Δ2. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + 1} = 1$ (2)

Έστω $f(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_0$, $\alpha_v \neq 0, v \in \mathbb{N}$

τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_0}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_v x^v}{x^2}$ έχουμε τις εξής περιπτώσεις

Αν $v > 2$ τότε $\alpha_v \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{v-2} = \begin{cases} +\infty, \alpha_v > 0 \\ \text{ή} & \text{σε κάθε περίπτωση άτοπο λόγω της (2)} \\ -\infty, \alpha_v < 0 \end{cases}$

Αν $0 \leq v < 2$ τότε $\alpha_v \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{2-v}} = 0$ άτοπο λόγω της (2)

Άρα $v = 2$ δηλαδή η f είναι πολωνυμική συνάρτηση 2^{ου} βαθμού οπότε

$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ επομένως $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2}{x^2 + 1} = \alpha$ και λόγω της (2)

έχουμε $\alpha = 1$

Άρα $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ από τις σχέσεις $f(1) = 1$ και $f'(1) = 2$ έχουμε:

$$f(1) = 1 \Leftrightarrow 1 + \beta + \gamma = 1 \Leftrightarrow \beta + \gamma = 0$$

Η f παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x + \beta$ οπότε:

$$f'(1) = 2 \Leftrightarrow 2 + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 0 \text{ άρα και } \gamma = 0 \text{ οπότε } f(x) = x^2$$

Δ3. Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ έχει ελάχιστο στη θέση $x = 0$ με τιμή $f(0) = 0$ ενώ η συνάρτηση g έχει ελάχιστο στη θέση $x = \alpha$ με $\alpha > 0$ με τιμή $g(\alpha) = 0$

Για να δείξουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \alpha)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) \Leftrightarrow h(x) = x^2 - g(x)$

Η h συνεχής στο διάστημα $[0, \alpha]$

$$h(0) = -g(0) < 0$$

διότι εφόσον η g έχει ελάχιστο $g(x) \geq g(\alpha)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δηλαδή $g(x) \geq 0$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = \alpha$ άρα $g(0) > 0 \Leftrightarrow -g(0) < 0$

$$h(\alpha) = \alpha^2 - g(\alpha) = \alpha^2 > 0 \text{ εφόσον } \alpha \neq 0$$

Δηλαδή $h(0) \cdot h(\alpha) < 0$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, \alpha)$ ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$

Δ4. Έχουμε ότι
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(g(x_0) + h) - g(g(x_0) - h)}{2h} = g'(\eta\mu g(x_0))$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(g(x_0) + h) + g(g(x_0)) - g(g(x_0)) - g(g(x_0) - h)}{2h} = g'(\eta\mu g(x_0))$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(g(x_0) + h) - g(g(x_0))}{2h} + \frac{g(g(x_0) - h) - g(g(x_0))}{2h} \right] = g'(\eta\mu(g(x_0)))$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(g(x_0) + h) - g(g(x_0))}{h} + \frac{g(g(x_0) - h) - g(g(x_0))}{h} \right] = g'(\eta\mu(g(x_0))) \quad (A)$$

Για το $\frac{g(g(x_0) + h) - g(g(x_0))}{h}$ θέτουμε $u = g(x_0) + h$ άρα

$$\lim_{u \rightarrow g(x_0)} \frac{g(u) - g(g(x_0))}{u - g(x_0)} = g'(g(x_0))$$

Για το $\frac{g(g(x_0) - h) - g(g(x_0))}{h}$ θέτουμε $u = g(x_0) - h$ άρα

$$\lim_{u \rightarrow g(x_0)} \frac{g(u) - g(g(x_0))}{-u + g(x_0)} = - \lim_{u \rightarrow g(x_0)} \frac{g(u) - g(g(x_0))}{u - g(x_0)} = -g'(g(x_0))$$



Άρα η σχέση (Α) γίνεται

$$\frac{1}{2}(g'(g(x_0)) + g'(g(x_0))) = g'(\eta\mu g(x_0)) \Leftrightarrow g'(g(x_0)) = g'(\eta\mu g(x_0))$$

Αν η συνάρτηση g' είναι αντιστρέψιμη τότε $g(x_0) = \eta\mu g(x_0) \Leftrightarrow g(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ άτοπο διότι } x_0 \in (0, \alpha)$$