



ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 21 Απριλίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 217
- A2.** Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 15
- A3.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 76 μόνο η διατύπωση του θεωρήματος που βρίσκεται στο πλαίσιο.
- A4.** α) Λάθος, β) Λάθος, γ) Σωστό, δ) Λάθος, ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

- B1.** Η f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με
- $f'(x) = (1+x)' \cdot e^{-x} + (1+x) \cdot (e^{-x})' = e^{-x} - (1+x) \cdot e^{-x} = -xe^{-x} \leq 0$
- για κάθε $x \geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και στη θέση $x = 0$ η f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο το $f(0) = 1$

Η f' παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με

$$f''(x) = (-xe^{-x})' = -e^{-x} + xe^{-x} = (x-1) \cdot e^{-x}, \quad x \geq 0$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot e^{-x} > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot e^{-x} < 0 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	○	+
$f(x)$	↷		↶

Άρα η f κοίλη στο $[0, 1]$ και κυρτή στο $[1, +\infty)$.

Η f για $x=1$ παρουσιάζει καμπή και $M\left(1, \frac{2}{e}\right)$ είναι το σημείο καμπής.

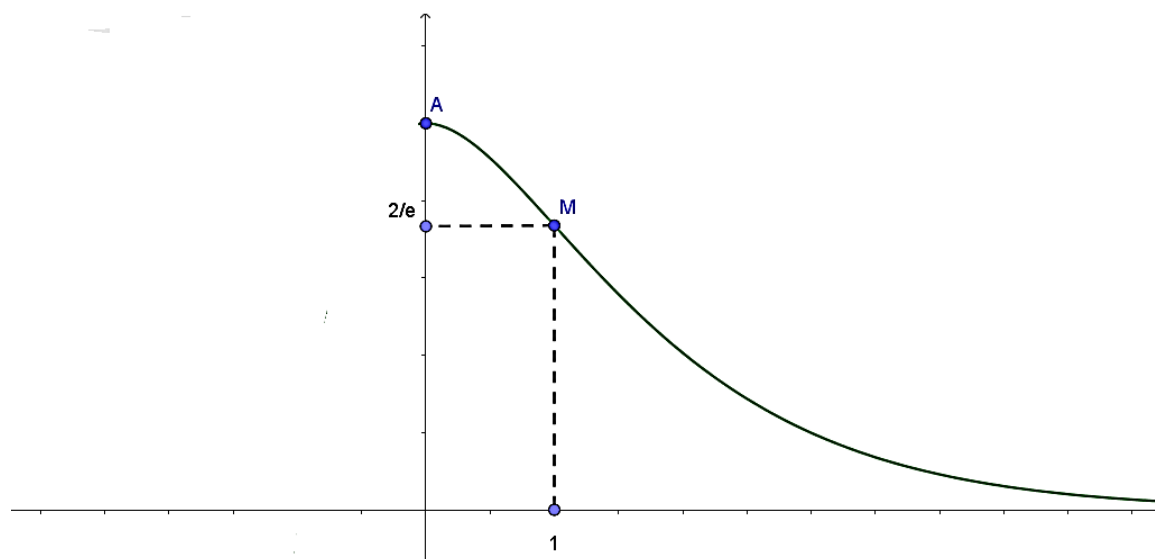
B2. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x) \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{e^x}$ (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Πίνακας μεταβολών της f - Γραφική παράσταση

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f''(x)$	-	○	+
$f(x)$	↷		↶
	Φθίνουσα και κοίλη		Φθίνουσα και κυρτή



B3. Η συνάρτηση $f \circ g$ ορίζεται όταν

$$A' = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\} \neq \emptyset$$

Επομένως πρέπει

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \text{ άρα } x \geq 1$$

Άρα $A_{f \circ g} = [1, +\infty)$ και ο τύπος της είναι :

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = (1 + g(x)) \cdot e^{-g(x)} \\ &= (1 + \ln x) \cdot e^{-\ln x} = \frac{1 + \ln x}{e^{\ln x}} = \frac{1 + \ln x}{x}, \quad x \geq 1 \end{aligned}$$

B4. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \int_1^{\lambda} \left| \frac{1 + \ln x}{x} \right| dx$

Όμως $1 + \ln x > 0$ για κάθε $x \in [1, \lambda]$ αφού $\ln x \geq 0$ για $x \geq 1$

Άρα

$$\begin{aligned}
 E &= \int_1^{\lambda} \frac{1 + \ln x}{x} dx = \int_1^{\lambda} \frac{1}{x} dx + \int_1^{\lambda} \frac{\ln x}{x} dx \\
 &= \int_1^{\lambda} (\ln x)' dx + \frac{1}{2} \int_1^{\lambda} 2(\ln x)' \cdot \ln x dx \\
 &= [\ln x]_1^{\lambda} + \frac{1}{2} [(\ln x)^2]_1^{\lambda} = \ln \lambda + \frac{1}{2} (\ln \lambda)^2, \lambda > 1
 \end{aligned}$$

Πρέπει :

$$E = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln \lambda + \frac{1}{2} (\ln \lambda)^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 \ln \lambda + (\ln \lambda)^2 = 3 \Leftrightarrow (\ln \lambda)^2 + 2 \ln \lambda - 3 = 0$$

$$\text{Αν } \ln \lambda = \kappa \text{ έχουμε } \kappa^2 + 2\kappa - 3 = 0 \Leftrightarrow \kappa = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} \kappa = -3 \\ \kappa = 1 \end{cases}$$

Άρα

$$\ln \lambda = -3 \Leftrightarrow \lambda = e^{-3} = \frac{1}{e^3} < 1 \text{ απορρίπτεται}$$

$$\text{ή } \ln \lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = e > 1 \text{ δεκτή.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο και $\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x) \cdot (x - x_0)$ η εξίσωση της εφαπτομένης σ' αυτό.

Η (ε) διέρχεται από το $M(\alpha, 0)$ όταν:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (\alpha - x_0) \Leftrightarrow -f(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0) \quad (1)$$

Είναι $f'(x) = e^x + 1$ οπότε η (1) γράφεται:

$$\begin{aligned}
 -e^{x_0} - x_0 + \alpha &= \alpha \cdot (e^{x_0} + 1) - x_0 (e^{x_0} + 1) \Leftrightarrow \\
 -e^{x_0} - x_0 + \alpha &= \alpha \cdot e^{x_0} + \alpha - x_0 e^{x_0} - x_0 \Leftrightarrow \\
 -e^{x_0} - \alpha e^{x_0} + x_0 e^{x_0} &= 0 \Leftrightarrow (-1 - \alpha + x_0) \cdot e^{x_0} = 0
 \end{aligned}$$

Άρα

$$-1 - \alpha + x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 + \alpha$$

Η f παραγωγισιμη τουλάχιστον 2 φορές στο \mathbb{R} με $f'(x) = e^x + 1$ και

$f''(x) = e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως η f κυρτή στο \mathbb{R} .

Άρα η εφαπτομένη (ε) της C_f βρίσκεται κάτω από αυτήν με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Δηλαδή η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο A δεν έχει άλλο κοινό σημείο με αυτή.

Γ2.

- Επειδή $f'(x) = e^x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x - \alpha) = 0 - \infty - \alpha = -\infty$ και
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x - \alpha) = +\infty + \infty - \alpha = +\infty$

$$\text{Άρα } f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \mathbb{R}$$

Το $0 \in f(\mathbb{R})$ και f γνησίως αύξουσα, επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση $x_0 \in \mathbb{R}$.

Γ3. Ισχύει $f(x_0) = e^{x_0} + x_0 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha - x_0 = e^{x_0} > 0$ άρα $x_0 < \alpha$.

$$\text{Έχουμε } e^{x_0} + 1 < \frac{e^\alpha}{e^{x_0}} < e^\alpha + 1 \Leftrightarrow e^{x_0} + 1 < \frac{e^\alpha}{\alpha - x_0} < e^\alpha + 1 \quad (1)$$

Ισχύει το Θ.Μ.Τ για την f στο $[x_0, \alpha]$ διότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} άρα και συνεχής

Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_0, \alpha)$ τέτοιος ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\alpha) - f(x_0)}{\alpha - x_0} = \frac{f(\alpha)}{\alpha - x_0} = \frac{e^\alpha}{\alpha - x_0}$$

Η (1) γράφεται $f'(x_0) < f'(\xi) < f'(\alpha)$ που ισχύει διότι $x_0 < \xi < \alpha$ και f' γνησίως αύξουσα εφόσον η f κυρτή στο \mathbb{R}

Γ4.

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g(e^x) - g(\alpha - x) \leq 0$

Έστω $h(x) = g(e^x) - g(\alpha - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Για } x = x_0, h(x_0) = g(e^{x_0}) - g(\alpha - x_0) = g(e^{x_0}) - g(e^{x_0}) = 0$$

Άρα $h(x) \leq h(x_0)$, $x \in \mathbb{R}$ που σημαίνει ότι η h για $x = x_0$ παρουσιάζει μέγιστο, είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό και το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της.

Σύμφωνα με το Θ.Fermat $h'(x_0) = 0$.

$$h'(x) = g'(e^x) \cdot e^x + g'(a - x)$$

Άρα

$$h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow g'(e^{x_0})e^{x_0} + g'(a - x_0) = 0 \Leftrightarrow g'(e^{x_0})e^{x_0} + g'(e^{x_0}) = 0$$

$$\Leftrightarrow g'(e^{x_0})(e^{x_0} + 1) = 0 \Leftrightarrow g'(e^{x_0}) = 0 \text{ ύ } e^{x_0} + 1 \neq 0$$

Επομένως η εφαπτομένη της C_g στο σημείο με τετμημένη $x = e^{x_0}$ είναι παράλληλη στον $x'x$.

β) Αφού η g είναι κοίλη, η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .
και $g'(e^{x_0}) = 0$, οπότε

- $x < e^{x_0} \Leftrightarrow g'(e^x) > g'(e^{x_0}) \Leftrightarrow g'(e^x) > 0$
- $x > e^{x_0} \Leftrightarrow g'(e^x) < g'(e^{x_0}) \Leftrightarrow g'(e^x) < 0$

Το πρόσημο της g' και η μονοτονία της g φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί

x	$-\infty$	e^{x_0}	$+\infty$
$g'(x)$		○	-
$g(x)$		↗	↘

Άρα η g γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, e^{x_0}]$ και η g γνησίως φθίνουσα στο $[e^{x_0}, +\infty)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ η ισότητα

$$\left(f(x) - \frac{x^2}{2}\right)' \cdot e^{f(x) - \frac{x^2}{2}} = -\eta\mu x$$

γράφεται

$$\left(e^{f(x) - \frac{x^2}{2}}\right)' = (\sigma\upsilon\upsilon x)'$$

Άρα

$$e^{f(x) - \frac{x^2}{2}} = \sigma\upsilon\upsilon x + c \quad (1)$$

Για $x = 0$ η (1) γίνεται : $e^{f(0)} = \sigma\upsilon\upsilon 0 + c \Leftrightarrow e^0 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$

Επομένως $e^{f(x) - \frac{x^2}{2}} = \sigma\upsilon\upsilon x$, οπότε

$$\ln\left(e^{f(x) - \frac{x^2}{2}}\right) = \ln(\sigma\upsilon\upsilon x) \Leftrightarrow f(x) - \frac{x^2}{2} = \ln(\sigma\upsilon\upsilon x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(\sigma\upsilon\upsilon x), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Δ2. Η f παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με

$$f'(x) = x + \frac{(\sigma\upsilon\upsilon x)'}{\sigma\upsilon\upsilon x} = x - \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\upsilon x} = \frac{x\sigma\upsilon\upsilon x - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\upsilon x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Ισχύει $f'(0) = 0$ και $\sigma\upsilon\upsilon x > 0$ στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $x = 0$ είναι μοναδική ρίζα και στη συνέχεια ότι

$f'(x) > 0$ στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και $f'(x) < 0$ στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

- Έστω $\varphi(x) = x \sin x - \eta \mu x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ η οποία έχει προφανή ρίζα την $x = 0$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με

$$\varphi'(x) = \sin x - x \eta \mu x - \sigma \nu \nu x = -x \eta \mu x$$

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow -x \eta \mu x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \eta \mu x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Το πρόσημο της φ' και η μονοτονία της φ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
-x	+	○	-
ημx	-	○	+
$\varphi'(x)$	-	○	-
$\varphi(x)$		↘	

- Για κάθε $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ ισχύει $\varphi(x) > \varphi(0) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$
- Για κάθε $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ισχύει $\varphi(0) > \varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(x) < 0$

Επομένως για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε :

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\varphi(x)}{\sigma\upsilon\nu x} = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\varphi(x)}{\sigma\upsilon\nu x} > 0 \Leftrightarrow \varphi(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < x < 0$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{\varphi(x)}{\sigma\upsilon\nu x} < 0 \Leftrightarrow \varphi(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
f'(x)		+	○
f(x)		↗	↘

Άρα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ η f γνησίως αύξουσα και στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα συνεπώς η f για $x = 0$ παρουσιάζει μοναδικό μέγιστο το

$$f(0) = \ln(\sigma\upsilon\nu 0) = \ln 1 = 0$$

Σημείωση:

Μπορούσαμε να βρούμε την $f''(x)$. Θεωρήσαμε τη $\varphi(x) = x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$ και βρήκαμε το πρόσημό της, το οποίο χρειάζεται στο ερώτημα Δ3.

Δ3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2}{2} + \ln(\sigma\upsilon\nu x) \right) = 0$

Σύμφωνα με τον κανόνα του D'Hospital έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\eta\mu x)'}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \frac{1}{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} \right]$$

Αλλά $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sigma\upsilon\nu^2 x = \sigma\upsilon\nu^2 0 = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$

και $x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x < 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (ερώτημα Δ₂)

οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} = -\infty$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} = 1 \cdot (-\infty) = -\infty$

Δ4. Σύμφωνα με το ερώτημα Δ₂ η f για $x = 0$ παρουσιάζει μέγιστο το $f(0) = 0$.

Άρα για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ ισχύει

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \ln(\sigma\upsilon\nu x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(\sigma\upsilon\nu x) \leq -\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$e^{\ln(\sigma\upsilon\nu x)} \leq e^{-\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \leq e^{-\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} - \sigma\upsilon\nu x \geq 0 \quad (1)$$

- Η $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} - \sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ και δεν είναι παντού ίση με μηδέν, διότι η ισότητα στην (1) ισχύει μόνο για $x = 0$.

Επομένως

$$\int_0^{\pi/6} h(x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^{\pi/6} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} - \sigma\upsilon\nu x \right) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^{\pi/6} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_0^{\pi/6} \sigma\upsilon\nu x dx > 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi/6} e^{-\frac{x^2}{2}} dx > \int_0^{\pi/6} \sigma\upsilon\nu x dx \Leftrightarrow \int_0^{\pi/6} e^{-\frac{x^2}{2}} dx > [\eta\mu x]_0^{\pi/6} = \eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$