



**ΤΑΞΗ:** Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία:** Τρίτη 7 Ιανουαρίου 2020  
**Διάρκεια Εξέτασης:** 3 ώρες

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** α) Να αποδείξετε ότι: αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 5**

β) Με τη βοήθεια της συνάρτησης  $f(x) = |x|$ , να αποδείξετε ότι δεν ισχύει το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης.

**Μονάδες 3**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της ;

**Μονάδες 3**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

Στα ερωτήματα γ, ε να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση "1–1".

**Μονάδες 2**



β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = +\infty$ .

Μονάδες 2

γ)  $|\eta\mu x| < x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 4

δ) Αν  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $[\alpha, \beta]$  μία μέγιστη τιμή  $M$  και μία ελάχιστη  $m$ .

Μονάδες 2

ε) Αν για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει το Θεώρημα Bolzano στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε ισχύει και το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών στο  $[\alpha, \beta]$ .

Μονάδες 4

### ΘΕΜΑ Β

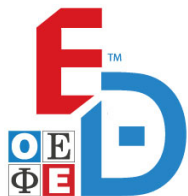
Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ ax + \beta, & x < 0 \end{cases}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και η συνάρτηση  $g(x) = \ln x, x > 0$ . Να αποδείξετε ότι:

B1.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{de^x}{dx} \Big|_{x=0} = 1$ .

Μονάδες 5

B2.  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ x + 1, & x < 0 \end{cases}$  και με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της  $f$  να βρείτε τη μονοτονία της.

Μονάδες 9

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020  
Α΄ ΦΑΣΗ

Ε\_3.Μλ3ΘΟ(ε)

**B3.**  $h(x) = (f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x \geq 1 \\ \ln x + 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$

Μονάδες 6

**B4.** Η  $h$  αντιστρέφεται και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $|h^{-1}|$ .

Μονάδες 5

## ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = e^{2x} + x - 1, x \in \mathbb{R}$ .

**Γ1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της.

Μονάδες 6

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3f(x) - 5}{2f(x)}$ .

Μονάδες 5

**Γ3. α)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f^{-1}$  ορίζεται και μάλιστα στο  $\mathbb{R}$ .

**β)** Να αποδείξετε ότι η  $h(x) = \left(e^{f^{-1}(x)}\right)^2 + f^{-1}(x) - x$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}$ .

Μονάδες 8

**Γ4.** Να εξετάσετε αν η ευθεία  $(\varepsilon): y = 3f^{-1}(e^2)x$ , εφάπτεται της  $C_f$ .

Μονάδες 6

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι τέτοια ώστε:

$$f\left(\frac{x}{e}\right) + 1 - \frac{x}{e} \leq \ln x \leq f(x) - x, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = \ln x + x, x \in (0, +\infty)$ .

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Να λύσετε την ανίσωση:  $x \ln x < 1 - x$  και να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(\eta\mu x) - f(x))$ .

**Μονάδες 8**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει ακριβώς μία ρίζα, έστω  $x_0 \in (0, 1)$  και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g(x) = f(f(x)) - 2(x - 1)$ .

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι οι  $C_f, C_g$  έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1.

**Μονάδες 5**