

Γ Λυκείου

4^ο ΓΛΧ

2015 - 2016

Μ.Ι. Παπαρηγοράκης
Χανιά

[Μαθηματικά]

Θετικών Σπουδών

Β ΜΕΡΟΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

*Τάξη: Γ Γενικού Λυκείου
Μαθηματικά Θετικών Σπουδών
Μέρος Β: Διαφορικός Λογισμός
Έκδοση 15.07*

*Η συλλογή αυτή διανέμεται δωρεάν σε ψηφιακή μορφή μέσω διαδικτύου
προορίζεται για σχολική χρήση και είναι ελεύθερη για αξιοποίηση
αρκεί να μην αλλάξει η μορφή της*

*Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Μαθηματικός ΜΕδ
Χανιά 2015*

Ιστοσελίδα: <http://users.sch.gr/mipapagr>

2 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ- ΟΡΙΣΜΟΣ

2.01 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2

2.02 Να εξεταστεί αν είναι παραγωγίσιμη στο 0 η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{αν } x < 0 \\ 1 - \sin x & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

2.03 Αν $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & \text{αν } x \leq 2 \\ \sqrt{x+2} - 2 & \text{αν } x > 2 \end{cases}$ να

βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 2

2.04 Αν $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = -7$ και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$ να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 3

2.05 Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $[0, +\infty)$ και ισχύει ότι $\eta\mu x \leq f(x) \leq x\sqrt{x} + \eta\mu x$, για $x \geq 0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

2.06 Αν για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $|f(x) - x^2| \leq (x-1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

2.07 Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $\alpha \in \mathbb{R}$ με $f'(\alpha) = g'(\alpha) = 3$. Υπολογίστε τα:

$$\text{A) } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}} \quad \text{B) } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{(f(x))^2 - (f(\alpha))^2}{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}}$$

$$\text{Γ) } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha^2 f(x) - x^2 f(\alpha)}{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}} \quad \text{Δ) } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(\alpha)f(x) - f(\alpha)g(x)}{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}}$$

2.08 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0 και στο 1 με $f(0) = f(1)$. Να

αποδείξετε ότι η $g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{αν } x \leq \frac{1}{2} \\ f(2x-1) & \text{αν } x > \frac{1}{2} \end{cases}$ είναι

παραγωγίσιμη στο $\frac{1}{2}$ αν και μόνο αν $f'(0) = f'(1)$

2.09 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f(x_0) = 3$, $f'(x_0) = 2$. Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2f(x) - 6}{x - x_0}$

2.10 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 3$. Αποδείξετε ότι $f'(0) = 3$

2.11 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 1 για την οποία ισχύει ότι $f'(1) = 2$. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[f(1) - f\left(\frac{x}{x+1}\right) \right] = 2$$

2.12 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } x \leq x_0 \\ f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) & \text{αν } x > x_0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0

2.13 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0 και ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

2.14 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο 0. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(3x) - f^2(2x)}{x} = 2f(0)f'(0)$$

2.15 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = \alpha$ και ισχύει:

$$f(xy) = xf(y) + yf(x) \text{ για κάθε } x, y \in (0, +\infty). \text{ Να}$$

δειχθεί ότι $f'(x_0) = \alpha + \frac{f(x_0)}{x_0}$ για κάθε $0 < x_0 \neq 1$

2.16 ** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$

τέτοια ώστε $f^3(x) - 2x^4 f(x) = 8$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και ότι $f'(0) = 0$

2.17 Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R} και παραγωγίσιμη στο $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - f(x-2h)}{h} = 5f'(x)$$

2.18 Αν για την συνεχή συνάρτηση f ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+2)}{x} = 3 \text{ τότε:}$$

A) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και ότι $f'(2) = 3$

B) Να βρεθούν τα όρια:

$$i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - f(x)}{x^2 - 4} \quad ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\eta\mu x f\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) \right)$$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ-ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

2.19 Βρείτε τις παράγωγους των συναρτήσεων

$$A) f(x) = \frac{e^x}{1 + \sqrt{x}} \quad B) f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

$$Γ) g(x) = \sqrt{x} \eta\mu x + \frac{\ln x}{x-1} \quad Δ) f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$$

$$E). g(x) = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{1 + \epsilon\phi x} \quad Στ) g(x) = \frac{\ln x}{x+2}$$

$$Ζ) f(x) = \frac{2 + \eta\mu x}{1 - \eta\mu x} \quad Η) f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$$

$$Θ) h(x) = \frac{2x+1}{e^x} \quad I) f(x) = \frac{1 - \eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$$

2.20 Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα P με

$$P(x) = [P'(x)]^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

2.21 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

παραγωγίσιμη στο $x_0 = e$. δείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(e^x) - xf(e)}{x-1} = ef'(e) - f(e)$$

2.22 Να υπολογίσετε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\eta\mu(\pi+h)} - 1}{h}$

2.23 Να αποδείξετε ότι

$$A) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad B) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 2^5}{x-2} = 80$$

2.24 Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο

\mathbb{R} , με $g(e) = 1$ και $g'(e) = 2$. Αν

$$f(x) = x^2 g(x) + \frac{x^2}{\ln x} \text{ να βρείτε τον } f'(e)$$

2.25 Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x) + xy + \alpha \text{ για κάθε}$$

$x, y \in \mathbb{R}$ Να αποδείξετε ότι:

$$A) f(0) = -\alpha \quad B) \eta f(0) = 0$$

Γ) Αν είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} τότε ισχύει

$$\text{ότι } f'(x_0) = f(x_0) + f'(0)e^{x_0} + x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Δ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 τότε είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει

$$f'(x_0) = f(x_0) + f'(0)e^{x_0} + x_0 \text{ για κάθε } x_0 \in \mathbb{R}$$

2.26 Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \alpha, \alpha > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$A) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) \ln x - f(\alpha) \ln \alpha}{x - \alpha} = \frac{f(\alpha)}{\alpha} + f'(\alpha) \ln \alpha$$

$$B) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha f(x) - xf(\alpha)}{x^2 - \alpha x} = f'(\alpha) - \frac{f(\alpha)}{\alpha}$$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

2.27 Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

$$f(x) = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 3x,$$

$$f(x) = \epsilon\phi^2(4x^3 + 1)$$

$$f(x) = \ln^3(x^2 + 3x) + \ln 3$$

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu\sqrt{\ln^3(2x) + \sqrt{2}}$$

$$f(x) = \eta\mu(2^x + 3^x) + \eta\mu t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = (x^2 + 3)^4 (x^3 - 5)^3 + y^2, \quad y \in \mathbb{R}$$

2.28 Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

A) $f(x) = \sigma\upsilon\nu\sqrt{\ln x}, \quad x > 1$

B) $f(x) = \log(2^x + 3^x)$

Γ) $f(x) = (x^2 + 3)^4 (2x^3 - 5)^3$

2.29 Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

A) $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

B) $f(x) = x^2 + |x - 3| + 2$

Γ) $f(x) = x^{\log x}, \quad x > 0$

Δ) $f(x) = (\eta\mu x)^x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

E) $f(x) = 2^{\epsilon\phi x}$

2.30 Δίνεται η $f(x) = e^x + x^3 + x, \quad x \in \mathbb{R}$.

A) Αποδείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

B) Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $D_{f^{-1}}$,

να δείξετε ότι $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$.

2.31 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και ισχύει: $f^3(x) + x^2 f(x) = 2x^2 \eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρεθεί η $f'(0)$.

2.32 A) Αν $f(x) = c(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ με $c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $x \neq \alpha, \beta, \gamma$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - \alpha} + \frac{1}{x - \beta} + \frac{1}{x - \gamma}$$

B) Να βρεθεί η f' αν $f(x) = \frac{(x^2 + 5)^3 (1 + x^4)^2}{\sqrt{1 + x^2}}$

2.33 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $y = |f(x)|$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

B) Αν ισχύει ότι $f(-2) = -5$ και $f'(-2) = 4$ να αποδείξετε ότι $|f(-2)|' = -4$

2.34 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(2x + 3) = x^2 + 3x + 5 \quad \text{να βρεθεί το } f'(3)$$

2.35 Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \alpha, \alpha > 0$, να αποδείξετε ότι:

A) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) \ln x - f(\alpha) \ln \alpha}{x - \alpha} = \frac{f(\alpha)}{\alpha} + f'(\alpha) \ln \alpha$

B) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha f(x) - x f(\alpha)}{x^2 - \alpha x} = f'(\alpha) - \frac{f(\alpha)}{\alpha}$

2.36 Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Να αποδειχτεί ότι αν:

A) η f είναι άρτια τότε η f' είναι περιττή
B) η f είναι περιττή τότε η f' είναι άρτια

2.37 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x, x \in (0, \pi)$

A) Να δείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1}

B) Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι

$$(f^{-1})'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

2.38 Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο 0 τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f(f(x)) = f(x) + 2x$. Δείξτε ότι $f'(0) = -1$ ή $f'(0) = 2$

2.39 Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία είναι $f(x+y) = f(x)f(y)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = \ell \in \mathbb{R}$ να αποδειχτεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}

2.40 Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $g(x) = e^{f(x^2)}$, με $f'(1) \neq 0$, να αποδειχτεί ότι $g'(1) = 2g(1)f'(1)$

2.41 Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ για τα οποία ισχύει ότι $P(x) = [P'(x)]^2$

2.42 Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \eta\mu \frac{2}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η $f'(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

2.43 Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Να αποδείξετε ότι

A) Αν η f είναι άρτια τότε η f' είναι περιττή

B) Αν η f είναι περιττή τότε η f' είναι άρτια

Γ) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και περιττή τότε:

α) Η C_f διέρχεται από το $(0,0)$

β) $f''(-x) = -f''(x)$

γ) $f''(0) = 0$

Δ) Αν η f είναι άρτια και

$$g(x) = (x^2 + 1)f(x) + 3x \text{ τότε } g'(0) = 3$$

2.44 Έστω η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(\sqrt{x}) = \sqrt{x} \eta\mu \sqrt{x} + e^x, \forall x \geq 0$. Αν f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ τότε

να δείξετε ότι $f'(x) = \eta\mu x + \chi\sigma\upsilon\nu x + 2xe^{x^2}$ και να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-1}{x^2}$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

2.45 Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με παράγωγο συνεχή. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(4-x)}{x-1} = 5$ να δείξετε ότι $f''(3) = -5$

2.46 Έστω μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Να αποδείξετε ότι:

A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+2h) - f'(x)}{h} = 2f''(x), x \in \mathbb{R}$

B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x-h) - f'(x)}{h} = -f''(x), x \in \mathbb{R}$

Γ) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4f'(x+2h) + 6f'(x-h) - 10f'(x)}{h} = 2f''(x)$ για

κάθε $x \in \mathbb{R}$

2.47 Να αποδειχτεί ότι:

A) Αν $y = \ln(e^{2x} + 1) - x$ τότε $y'' = (1-y')(1+y')$

B) Αν $y = \eta\mu(\ln x) + \sigma\upsilon\nu(\ln x)$ τότε

$$x^2 y'' + xy' + y = 0$$

2.48 Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x^2) = xf(x)$, να αποδείξετε ότι $f''(1) = 0$.

2.49 Να αποδείξετε ότι:

A) Αν $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, τότε $f^{(v)}(x) = \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{v\pi}{2}\right)$

B) Αν $f(x) = xe^x$ τότε $f^{(v)}(x) = e^x(x+v)$

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

2.50 Βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο

$$x_0 = 0 \text{ αν } f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x} & \text{αν } x > 0 \\ x^3 & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

2.51 Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο

$$x_0 = 1 \text{ και ισχύει } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^2}{x - 1} = 7. \text{ Να αποδείξετε}$$

ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$

είναι κάθετη στην ευθεία $x + 9y + 5 = 0$

2.52 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$. Να βρείτε

τις εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από το $M(-2, -8)$

2.53 Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει

ότι: $x \ln x \leq f(x) \leq x^2 - x$ για κάθε $x \in \Delta$. Να

αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και

να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f

στο σημείο $M(1, f(1))$.

2.54 Αν $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$ και $\alpha > 0$,

να αποδειχτεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου που

σχηματίζουν οι ημιάξονες Ox, Oy και η

εφαπτομένη της καμπύλης στο $x_0 = \alpha$ είναι

ανεξάρτητο του α .

2.55 Να βρεθούν οι εφαπτόμενες των C_f, C_g

όταν $f(x) = x^2 + 2$ και $g(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}$ που

τέμνονται στον $y'y$ και είναι κάθετες μεταξύ τους.

2.56 Αν $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2 + 3$, να βρείτε τα

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $\epsilon: 2x - y + 4 = 0$ να είναι

εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

2.57 Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει ότι $f(2+x) - f(2-x) = -2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $(2, f(2))$ είναι κάθετη στην $y = x$.

2.58 Αν $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + 2\alpha x + \beta + \alpha & x \geq 2 \\ \frac{\gamma}{x+1} & x < 2 \end{cases}$, να

βρεθούν τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η εφαπτομένη της C_f

στο $A(2, f(2))$ να είναι παράλληλη προς την

$$2x + y - 1 = 0$$

2.59 Αν $f(x) = 4 - x^2$ και $g(x) = -x^2 + 8x - 20$.

Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των C_f και C_g .

2.60 Για ποια τιμή του $\alpha \neq 0$ η εφαπτομένη της

$f(x) = x^2 - 3x$ στο $(1, f(1))$ είναι εφαπτομένη της

$$g(x) = \frac{\alpha}{x}$$

2.61 Δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ και } g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \eta \mu \chi \text{ έχουν}$$

κοινή εφαπτομένη σε κάθε κοινό τους σημείο.

2.62 Θεωρούμε την συνάρτηση f που έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο \mathbb{R} με $f'(x) \neq 0$ για

κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η C_g της g με $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ τέμνει

τον άξονα $x'x$, να αποδειχτεί ότι η εφαπτομένη

στο σημείο τομής, σχηματίζει με τον άξονα $x'x$

γωνία 45°

2.63 ** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 - 4x^2 - 3x. \text{ Να βρεθεί ευθεία που να}$$

είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της

f σε δύο διαφορετικά σημεία της. (mathematica)

2.64 Μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα: $f(x-2) \leq x^2 - 3x + 2 \leq f(x-3) + 2x - 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Έστω μεταβλητή ευθεία η οποία διέρχεται από το $M\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ και τέμνει τη C_f σε δύο διαφορετικά σημεία A και B. Να βρείτε τον τύπο της f και να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα A και B τέμνονται κάθετα.

2.65 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\alpha \cdot \ln x$, $x > 0$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$ και αποδείξετε ότι διέρχεται από σταθερό σημείο P για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.66 Αν η ευθεία $y - 2x = 0$ είναι η εφαπτομένη του διαγράμματος της $y = f(x)$, στο σημείο της με $x_0 = -1$, να βρεθεί η εφαπτομένη στη C_g της $g(x) = f\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ στο σημείο με $x_1 = 1$

2.67 * Αν $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = e^{-x}$, αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη.

2.68 Δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $g(x) = e^x$ και $f(x) = 2x^2$, έχουν κοινή εφαπτομένη

2.69 Να βρείτε τον $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha^x$, να έχει εφαπτομένη την $y = x$.

2.70 Έστω f δευτεροβάθμια πολωνομική συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι:

$$3f(x+1) - 2f(x-2) = x^2 + 14x - 5, \forall x \in \mathbb{R}$$

- A) Να βρεθεί ο τύπος της f .
- B) Αποδείξτε ότι οι εφαπτόμενες της C_f που άγονται από το σημείο $A\left(1, -\frac{1}{4}\right)$, είναι κάθετες.

2.71 ** Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , και ισχύει $f(\ln x) = x \ln x - x$, $x > 0$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου το οποίο σχηματίζεται από την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με $x_0 = 1$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

2.72 ** Έστω η $f(x) = \frac{\ln(ax)}{x}$ με $\alpha, x > 0$

- A) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.
- B) Αποδείξτε ότι οι παραπάνω εφαπτόμενες στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, καθώς μεταβάλλεται το α , διέρχονται από το ίδιο σημείο.

2.73 Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x^2) + f(x) = 3 \cdot \ln x + 4$

- A) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $(1, f(1))$
- B) Υπολογίστε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot f(x) - 2}{x^2 - 1}$.

2.74 Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{\alpha x} + x$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$

- A) Βρείτε το σημείο M της C_f στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- B) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου M όταν το α διατρέχει το \mathbb{R}

2.75 Θεωρούμε τις παραβολές

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2\lambda x - 2\lambda(1 - \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$$

- A) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω παραβολές έχουν μία κοινή εφαπτομένη.
- B) Να αποδείξετε ότι τα σημεία των C_f για τα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$, βρίσκονται στην ευθεία $y = x$.
- Γ) Αν $\lambda = 0$, να βρείτε το σύνολο των σημείων του επιπέδου από τα οποία άγονται κάθετες εφαπτόμενες τη συνάρτηση f

Θ. Rolle - Θ.Μ.Τ.

2.81 Εφαρμόστε το θ. Rolle για τη συνάρτηση

$$f(x) = (x-1)(x+\eta\mu x) \text{ στο διάστημα } [0,1]$$

2.82 Αν $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta & x < 0 \\ 3 + (\gamma - \alpha)x & x \geq 0 \end{cases}$ να βρεθούν

οι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα

Rolle στο $[-1,1]$ και να βρεθεί $\xi \in (-1,1)$ ώστε

$$f'(\xi) = 0.$$

2.83 Θεωρούμε μια συνάρτηση f η οποία είναι

συνεχής και μη μηδενική στο $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ και

παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Αποδείξτε ότι

υπάρχει $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ώστε $f'(x_0) = f(x_0) \operatorname{ef} x_0$.

2.84 Δίνεται ότι η f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, $\alpha > 0$

και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\beta)}{\beta}$. Να

δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $\xi f'(\xi) = f(\xi)$

2.85 Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο

$[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Να

αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε

$$3\xi^2 \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta^3 - \alpha^3} = f'(\xi)$$

2.86 Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$

παραγωγίσιμες στο (α, β) με $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{f(\beta)}{g(\beta)}$ και

$g(x)g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να δείξετε ότι

υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε να ισχύει $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$

2.87 Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση

στο \mathbb{R} με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\frac{f(2)}{f(1)} = e$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = f(x)$ έχει μια

τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

2.88 Έστω η $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, ώστε:

$f^2(\alpha) - f^2(\beta) = \alpha^2 - \beta^2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει

$\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε: $f(\xi)f'(\xi) = \xi$

2.89 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη

στο $[-1,1]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-1,1)$,

ώστε $2f'(\xi) = 5\xi^4 (f(1) - f(-1))$.

2.90 Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g που είναι

συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ παραγωγίσιμες στο (α, β) με

$f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και

$\ln f(\alpha) - \ln f(\beta) = g(\beta) - g(\alpha)$. Να αποδείξετε ότι

υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi) = 0$

2.91 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τρεις φορές

παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι

$f(1) = f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι

υπάρχει $x \in (0,1)$ ώστε $f^{(3)}(x) = 0$.

2.92 Α) Δείξτε ότι η $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 3x + 1$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ δεν είναι 1-1.

Β) Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το θ. Rolle για

τη συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)} + x^2 + \lambda x - 3$

2.93 Να αποδείξετε ότι οι γραφικές

παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x + 2x$ και

$g(x) = e^{-x} - x^3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο που

βρίσκεται στον $y'y$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

2.94 Να λύσετε την εξίσωση $1 - 2^x + 3^{x-1} = 0$

2.95 Να λύσετε την εξίσωση $\ln(1 + xe^x) = x$

2.96 Να λύσετε την εξίσωση $2^x + 5^x = 2 + 5x$

2.97 Να λύσετε την εξίσωση $5^x = x + 4^x$

2.98 Να λύσετε την εξίσωση $\ln x - x + 1 = 0$

2.99 Να λύσετε την εξίσωση $xe^x + 1 = e^x$

2.100 Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 + x + \ln x = 2$

2.101 Λύστε την εξίσωση $(x+3)^{96} = (x+1)^{96} + 16^{24}$

2.102 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5 + 3x - \alpha = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο \mathbb{R}

2.103 Να δειχθεί ότι η εξίσωση $2013x^{2012} - 2012(\lambda + 1)x^{2011} + \lambda = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

2.110 Η απόσταση δύο πόλεων που συνδέονται με ευθεία σιδηροδρομική γραμμή είναι 51 km. Μια αμαξοστοιχία διανύει τη μεταξύ τους απόσταση σε 0,6 ώρες. Να αποδειχθεί ότι για κάποια χρονική στιγμή η αμαξοστοιχία έχει ταχύτητα 85 km/h.

2.111 Αν f συνεχής στο $[1,5]$ με $f(1) = -2$ και $|f'(x)| < 2, \forall x \in (1,5)$ να δείξετε ότι $-10 < f(5) < 6$

2.112 Έστω f παραγωγίσιμη στο $[0,5]$ με $f(5) = f(0) + 1$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\kappa, \lambda \in (0,5)$ ώστε $2f'(\kappa) + 3f'(\lambda) = 1$

2.104 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει μέχρι τρεις ρίζες στο \mathbb{R}

2.105 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$ με $\beta^2 < \alpha\gamma, \alpha \neq 0$ έχει μοναδική ρίζα στο \mathbb{R}

2.106 Δείξτε ότι η εξίσωση $x^8 = 7x + 6$ δεν έχει περισσότερες από δύο διαφορετικές ρίζες στο \mathbb{R}

2.107 Να δείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών της εξίσωσης $e^x \eta \mu x = 1$ υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $e^x \sigma \nu x = -1$

2.108 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha \cdot \ln^3 x + \beta \cdot \ln^2 x + \gamma \cdot \ln x + \delta = 0, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ώστε $3(2\alpha + \gamma + \delta) + 4\beta = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, e^2)$

2.109 Αν η εξίσωση $x^4 + \alpha x^3 + 3\beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ έχει τέσσερις ρίζες πραγματικές και άνισες μεταξύ τους, να αποδείξετε ότι $\alpha^2 > 8\beta$

2.113 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,4]$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(4x) = 4f(x)$ και $f\left(\frac{25}{100}\right) = 1$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (1,4)$ ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 12$

2.114 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log x$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (1,20)$ ώστε $\xi = \frac{19 \cdot \log e}{1 + \log 2}$.

2.115 Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^x - 2^{\eta \mu x}}{x - \eta \mu x}$.

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

2.116 Αποδείξτε ότι $\frac{1}{x+1} < \ln \frac{x+1}{x} < \frac{1}{x}$, $x > 0$

2.117 Αποδείξτε ότι $\left| \ln \frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1} \right| \leq |\alpha-\beta|$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2.118 Δειξτε ότι $|\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha| \leq |\beta - \alpha|$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2.119 Δειξτε ότι $1+x \leq e^x \leq 1+xe^x$, $0 \leq x \leq 1$

2.120 Να αποδείξετε τις ανισότητες:

A) $\frac{1}{xe^{x+1}} < x+1 < xe^x$ για κάθε $x > 0$.

B) $2 - \frac{e}{\pi} < \ln \pi < \frac{\pi}{e}$

2.125 Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία της C_f , να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ με $f''(\xi) = 0$.

2.126 Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ με $f(-2) = -f(2) = -2$. Αν $f'(x) \leq 1$, $\forall x \in (-2, 2)$ να αποδειχθεί ότι $f(x) = x$, $x \in [-2, 2]$

2.127 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τρεις φορές παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι $f(1) = f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x \in (0, 1)$ ώστε $f^{(3)}(x) = 0$.

2.128 Έστω $f(x) = \alpha^2 x^6 + \beta x^4 + x^2 + \gamma + \delta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^*$ με $3\beta^2 < 5\alpha^2$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τρία διαφορετικά συνευθειακά σημεία που να ανήκουν στη γραφική παράσταση της.

2.121 Να αποδείξετε τις ανισότητες:

A) $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$ αν $x > 0$

B) $x \leq e^{x-1} \leq 1 + (x-1)e$ αν $x \in (1, 2)$

2.122 Δειξτε ότι $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$, $x > 0$

2.123 Για κάθε $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ να αποδειχτεί ότι

$$1 + 2\alpha \leq \varepsilon\phi\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 + \frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}$$

2.124 Έστω f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} της οποίας η παράγωγος είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

Δειξτε ότι: $f(1999) + f(2002) < f(2000) + f(2001)$

2.129 Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(\ln \alpha) = f(\ln \beta)$.

Αν ισχύει $\ln \alpha < \ln \gamma < \ln \beta$, με $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta}{\gamma} = e^2, \text{ να δειχτεί ότι υπάρχουν } \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R} \text{ με}$$

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$$

2.130 Έστω συνάρτηση f , δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε

$$f'(x_0) = f(x_0)f''(x_0).$$

2.131 Η συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) , με

$f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

A) αν υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f(x_0) > 0$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f''(\xi) < 0$,

B) αν υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f(x_0) < 0$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f''(\xi) > 0$.

2.132 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 + 2\lambda x - \lambda - 1 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.133 Έστω η συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$. Δείξτε ότι υπάρχουν

A) $-1 < \xi_1 < \xi_2 < 1$ ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2$

B) $-1 < \kappa_1 < \kappa_2 < 1$ ώστε $\frac{1}{f'(\kappa_1)} + \frac{1}{f'(\kappa_2)} = 2$

2.134 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \alpha]$ με $\alpha > 1$ και ισχύει $f(0) = 0$ και $f(x^2) = 2f(x)$, $\forall x \in [0, \alpha]$. Να δείξετε ότι υπάρχουν

$\xi_1, \xi_2 \in (0, \alpha)$ ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = \frac{f(\alpha)}{2(\sqrt{\alpha} - 1)}$.

2.135 Αν για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[2, 20]$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, τότε να αποδείξετε ότι:

A) υπάρχουν αριθμοί $\xi_1, \xi_2 \in (2, 20)$ με $\xi_1 < \xi_2$ και $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.

B) υπάρχουν $\kappa_1, \kappa_2 \in (2, 20)$ με $\kappa_1 < \kappa_2$ ώστε $3f'(\kappa_1) + 2f'(\kappa_2) = 0$

Γ) ότι η εξίσωση $f'(x) = f(x) - f(\alpha)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2, 20)$.

Δ) υπάρχουν κ, λ, μ με $2 < \kappa < \lambda < \mu < 20$ ώστε $2f'(\kappa) + 3f'(\lambda) + 4f'(\mu) = 0$

2.136 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $M(\xi, f(\xi))$, να τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $P(2\xi, 0)$

2.137 Η συνάρτηση $f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν $f(1) = 2$ και $f(4) = 8$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

2.138 Έστω συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, με $f(\alpha) = 2\beta$, $f(\beta) = 2\alpha$

A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .

B) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 4$.

2.139 Αν $\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{2} + \delta = 0$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ μηδενίζεται σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος $(0, 1)$

2.140 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha \cdot \ln^3 x + \beta \cdot \ln^2 x + \gamma \cdot \ln x + \delta = 0$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ώστε $3(2\alpha + \gamma + \delta) + 4\beta = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, e^2)$.

2.141 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln(2x)$. Να αποδείξετε ότι:

A) Υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον $x'x$

B) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2x)^x = e^{2-2x}$ έχει ρίζα στο $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

2.142 Έστω f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Αν $f(x) \geq \frac{f(0) + f(10)}{2}$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 10)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$

ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

2.143 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε:
 $f'''(x) + 2f'(x) = f''(x) + 2f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
 $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$. Να αποδείξετε ότι :

- A) Οι συναρτήσεις $h(x) = f(x)e^{-x}$ και
 $g(x) = [f''(x) - f'(x)]^2 + 2[f'(x) - f(x)]^2$ είναι
σταθερές συναρτήσεις
B) Να βρεθεί ο τύπος της f .

2.144 Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την
οποία ισχύει ότι: $|f(x) - f(y)| + \sin(x - y) \leq 1$ για
κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείχτει ότι η f είναι σταθερή

2.145 Να βρείτε την f αν $f'(1 - 2x) = 7 - 12x$,
 $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 2$

2.146 Να βρείτε την f αν $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R}^*$
και $f(-1) = f(1) = 2$

2.147 Να αποδειχτεί ότι:

- A) αν $f''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
 $f(0) = f'(0) = 1$ τότε $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$,
B) αν $\delta''(x) = \delta(x) + 5x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
 $\delta(0) = 1$ και $\delta'(0) = -4$, τότε $\delta(x) = e^x - 5x$, $x \in \mathbb{R}$

2.148 Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R}
παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* με $f(0) = 0$, της οποίας
όλες οι εφαπτόμενες διέρχονται από την αρχή των
αξόνων. Να βρείτε εκείνη τη συνάρτηση f της
οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα
σημεία $(2, 1)$ και $(-2, 1)$

2.149 Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο \mathbb{R} .
Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x) = (2x + 1)f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$
αν και μόνο αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = ce^{x^2+x}$

2.150 Να βρείτε την f , αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
 $f'(x) - f(x) = \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x$ και $f(0) = 1$.

2.151 Αν η $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές
παραγωγίσιμη με $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ και $f''(x) = -f(x)$ για
κάθε $x \in (0, \pi)$ να αποδείξετε ότι $f(x) = a \eta \mu x$,
 $a \in \mathbb{R}$.

2.152 Να βρεθεί η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν
ισχύει: $(x - 2)f'(x) = 2x^2 - 5x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ και
 $f(3) = 7$

2.153 Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση
 $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ αν ισχύει ότι
 $f'(x) = f(x) \cdot \ln[f(x)]$ για κάθε $x > 0$ και $f'(1) = 0$

2.154 Να βρεθεί, αν υπάρχει, συνάρτηση f που
είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$
ισχύει $f(x) = xf'(x)$, $f(1) = 1$ και $f(-1) = 2$.

2.155 Να βρείτε τη συνάρτησης f με $f(0) = 2$,
αν ισχύει $(f(x) - e^x)(f'(x) - e^x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

2.156 Βρείτε την εξίσωση της καμπύλης που
διέρχεται από το $M(0, -3)$ και σε κάθε σημείο της
με τετμημένη α έχει εφαπτομένη με $\lambda_{\text{εφ}} = \frac{4\alpha}{4\alpha^2 + 1}$

2.157 Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση
 $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, αν ισχύει ότι $f'(1) = 0$ και
 $f'(x) = f(x) \cdot \ln[f(x)]$ για κάθε $x > 0$

2.158 Δίνεται η συνάρτηση f , παραγωγίσιμη
στο \mathbb{R} ώστε να ισχύει $[f'(x) + f(x)]e^{2x} = f(x) - f'(x)$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$. Βρείτε τον τύπο της f

2.159 Αν η $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ και $f''(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in (0, \pi)$, δείξτε ότι $f(x) = a \sin x$, $a \in \mathbb{R}$.

2.160 Να βρεθεί συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $f(1) = 9$ και της οποίας η γραφική παράσταση σε κάθε σημείο $M(x, f(x))$ έχει εφαπτομένη με κλίση $4x\sqrt{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$

2.161 Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f αν είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , η C_f διέρχεται από το $O(0,0)$ η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $O(0,0)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $-2x + y + 3 = 0$ και ισχύει $(x^2 + 1) \cdot f''(x) + 4x \cdot f'(x) + 2f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$

2.162 Έστω οι συναρτήσεις f και g δύο φορές παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν δέχονται κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο τους και ισχύει $f''(x)g(x) = f(x)g''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(x) = g(x)$

2.163 Α) Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f''(x) + f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = f'(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι η μηδενική συνάρτηση.

Β) Έστω συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g''(x) + g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$. Να αποδείξετε ότι η $g(x) = \sin x$.

2.164 * Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f(0) = 0$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x)(e^{f(x)} + 1) = 2x + \frac{2x}{x^2 + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της f .

2.165 Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $v \in \mathbb{N}$. Αν $v \geq 2$ και ισχύει $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^v$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ τότε να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

2.166 Να βρείτε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , αν η εφαπτομένη στη γραφική της παράσταση σε κάθε σημείο $(x, f(x))$ να έχει κλίση $2xe^{-x} - f(x)$ και το $A\left(1, \frac{2}{e}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f

2.167 * Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(xy) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$ και $f(e) = e$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ότι $f(x) = e \ln x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

2.168 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει ότι και $f(x+y) = xy + y^2 + f(x)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, $f(1) = -1$, $f(2) = 2$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και να βρεθεί ο τύπος της

2.169 Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο \mathbb{R} με $f'(0) = 2$ και ισχύει $f(y+x) = f(y)f(x)e^{2xy}$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

Α) $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$

Β) η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}

Γ) ο τύπος της f είναι $f(x) = e^{x^2 + 2x}$

2.170 Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 1$ για την οποία ισχύει $f(xy) = x^2 f(y) + y^2 f(x)$ για κάθε $x, y > 0$.

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$

Β) Δείξτε ότι $f(x) = x^2 \ln(x)$ για κάθε $x > 0$

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ- ΑΚΡΟΤΑΤΑ

2.171 Μελετήστε τη μονοτονία των

συναρτήσεων Α) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Β) $f(x) = x + \sin x, x \in [0, 2\pi]$

2.172 Να μελετήσετε τη μονοτονία των

συναρτήσεων Α) $f(x) = \begin{cases} e^x - ex - 1 & x \leq 0 \\ x^2 \ln x & x > 0 \end{cases}$

Β) $f(x) = \ln(1+x^2) - e^{-x} + 1$

2.173 Να μελετήσετε τη μονοτονία της

συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2|x-1|}$ στο $\left[0, \frac{2}{3}\right]$

2.174 Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 + (\alpha - 1)x^2 + 2x + 10$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

2.175 Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0) = 0$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$g(x) = \frac{f(x)}{x}, x > 0$, είναι γνησίως φθίνουσα.

2.176 Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} με $f(0) = g(0)$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύουν $f'(x)g(x) > f(x)g'(x)$ και $g(x) > 0$. Να αποδείξετε ότι: $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in (-\infty, 0]$.

2.177 * Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[0, +\infty)$ ώστε $[f(x)]^5 + 2[f(x)]^3 + 3f(x) = (x+1)\ln(x+1) - \frac{4}{5}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 2015$. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία της.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

2.178 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{\ln x}, x \geq 2$

Α) να μελετήσετε τη μονοτονία της f

Β) να αποδείξετε ότι:

α) $\ln(e^n - 1)\ln(e^n + 1) < \pi^2$.

β) $\ln(x-1) \cdot \ln(x+1) < \ln^2 x, x > 2$

2.179 Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln(x-1) + x^2 + x - 6 = 0$

2.180 Λύστε την εξίσωση $\ln(x+1) - \frac{2x}{x+2} + x = 0$

2.181 Να λύσετε την εξίσωση $e^{x+1} + 2x - e = 0$

2.182 Για κάθε $x \in [2, +\infty)$ να αποδείξετε ότι

$(x+1)\operatorname{cosec} \frac{\pi}{x+1} - x \operatorname{cosec} \frac{\pi}{x} > 1$

2.183 Δείξτε ότι $2\ln(\eta\mu x) < \eta\mu^2 x, x \in (0, \pi)$

2.184 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(1-x) = -f(1+x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

2.185 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία, ισχύουν $f(x) > 0$ και $f^3(x) + \ln(f(x)) + e^{f(x)} = x^3 + x^2 + 2x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x) = f(1-x^2)$

2.186 Αν $xg'(x) > \sin x - g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $g(x) > \frac{\eta\mu x}{x}$ για κάθε $x \neq 0$.

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

2.187 Να μελετήσετε τις συναρτήσεις ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα:

A) $f(x) = x^2 \ln x$ B) $f(x) = 2^{\sin x}, 0 \leq x < 2\pi$

Γ) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ Δ) $f(x) = \frac{e^x}{2x}$ Ε) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

2.188 Να μελετήσετε τις συναρτήσεις ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα:

A) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ B) $f(x) = \begin{cases} 1 - e^{x-1}, & x \geq 1 \\ \ln(1-x), & x < 1 \end{cases}$

2.189 Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2(e^x - e)^2$ έχει ακριβώς τρία τοπικά ακρότατα.

2.190 Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln 2x + \frac{\beta}{x} + \alpha$ να έχει στη θέση $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο με τιμή $2 + \ln 2$.

2.191 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f(x))^2 + x^2 = 1 + 2xf(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

2.192 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x \ln^2 x$. Να βρείτε το σημείο της C_f όπου η f έχει τη μικρότερη κλίση.

2.193 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ αν η συνάρτηση $f(x) = x^3 - (\lambda - 1)x^2 + (\lambda + 5)x - 2$ δεν έχει ακρότατα.

2.194 Έστω η συνάρτηση $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη τρεις φορές με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0,1)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ με $f^{(3)}(\xi) = 0$.

2.195 Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f^2(3x+1) + 4 \leq 4 \cdot f(2x^2 + x + 1)$. Να αποδείξετε ότι:

A Υπάρχει $\xi \in (1,4)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = 0$

B Η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται

Γ $f'(1) = f'(4)$

Δ Η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο \mathbb{R}

2.196 Να βρεθεί ο $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = xe^{2\kappa-x}$ να είναι το e .

2.197 Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$. Αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιοι ώστε $f(\alpha), f(\beta) \in (f(x_1), f(x_2))$, αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ ώστε $f''(\xi) = 0$.

2.198 Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύουν: $f(0) = 1$ και $e^{2x}f(x) - 1 \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,1)$

2.199 Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και ισχύουν: $f(x) \geq x+1$ και $f(x)e^{g(x)} = e^x - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στο $x_0 = 0$ τέμνονται κάθετα

2.200 Αν ισχύει ότι $\ln x + \frac{\alpha}{x} \geq \alpha, \forall x > 0$, να βρείτε το α

Μ. Παπαηγοροπούλου

2.201 Αν $\alpha, \beta > 0$ και ισχύει $\alpha^{\frac{\ln x}{x}} + \beta^{\frac{x-1}{x}} \leq 2$ για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 1$.

2.202 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - x^\alpha$, $x > 0$, $\lambda > 0$ με $f(x) \geq 0$, $\forall x > 0$. Να δείξετε ότι $\alpha = e$ και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[e, +\infty)$.

2.203 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{e^x} + 1 - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

A) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ για την οποία ισχύει $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B) Αν $\lambda \geq 1 + \frac{1}{e}$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$g(x) = (1 - \lambda)x - \frac{x+1}{e^x}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

2.204 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x) > f''(x)$, $x \in \mathbb{R}$ που παρουσιάζει για $x_0 = 0$ τοπικό ακρότατο το $f(0) = 0$. Να δείξετε ότι: $x(f(x) - f'(x)) > 0$

2.205 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $(x_0, f(x_0))$, όπου x_0 η θέση του τοπικού ακροτάτου της $f(x) = x \ln x + \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$ όταν το λ διατρέχει το \mathbb{R}

2.206 Έστω συνάρτηση $f(x) = x^\lambda - \ln(x)$, $\lambda > 0$

A) Να βρείτε την μικρότερη τιμή του λ για την οποία ισχύει ότι $x^\lambda \geq \ln(x)$ για κάθε $x > 0$

B) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το ελάχιστο της f παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

2.207 Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[0, 3]$ με $f'(x) > 0$ και $f(1) = -1$, $f(2) = 1$. Αν

$g(x) = \frac{f(x)}{1 + f^2(x)}$, $0 \leq x \leq 3$, βρείτε τα διαστήματα

μονοτονίας και το σύνολο τιμών της g

2.208 Μία συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Αν υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = 0$ και $f'''(x) > 0$ για κάθε x , τότε να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις $f''(x) = 0$, $f'(x) = 0$ και $f(x) = 0$ έχουν μοναδική ρίζα.

2.209 **Αν $(x^2 - 4x)f'(x) + f(x) = 0$, $\forall x \in [0, 4]$ να αποδείξετε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 4]$.

2.210 Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(x) < 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δείξτε ότι $f(1) < \frac{1}{3}$

2.211 Να αποδείξετε ότι από το σημείο $A(1, 1)$ άγονται ακριβώς δύο εφαπτόμενες προς τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

2.212 Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $\sin x + 2 = x$ έχει στο $[0, \pi]$ ακριβώς μια λύση

2.213 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f^3(x) + f(x) = \sin x$, $\forall x \in [0, \pi]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, \pi)$

2.214 Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $2 \ln x = \lambda x^2 + 1$, $\lambda > 0$

2.215 Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $8x^2 \sqrt{x} - \alpha \sqrt{x} + 1 = 0$ όταν το $\alpha \in \mathbb{R}$

2.216 Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^3 - \alpha x^2 - 4x + \alpha = 0$ έχει τρεις ρίζες

2.217 Αποδείξτε ότι για κάθε $\alpha > 0$ η εξίσωση $2\alpha e^x = 2 + 2x + x^2$ έχει μοναδική ρίζα στο \mathbb{R}

2.218 ** Αν $f(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$, να λύσετε τις εξισώσεις:

A) $f(\ln(x-1)) - f(6-x^2-x) = 0$

B) $f(x) + f(x^{17}) = f(x^3) + f(x^{2008})$

2.219 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x-1)\ln x = x+1$ έχει δύο ακριβώς ρίζες, οι οποίες είναι αντίστροφοι αριθμοί.

2.220 Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(1+x^2 - e^{-x})$ είναι γνησίως αυξουσα

2.221 A) Μελετήστε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^v}, v \in \mathbb{N}^*$

B) Να δείξετε ότι $e^x \geq \left(\frac{ex}{v}\right)^v, \forall x \in (0, +\infty)$

2.222 Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2 - x - 1$

A) Να αποδείξετε ότι η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη σε ένα μόνο σημείο της.

B) Να λύσετε την εξίσωση $e^x + x^2 = x + 1$.

Γ) Να αποδείξετε ότι $e^x - 1 \geq x(1-x), \forall x \in \mathbb{R}$

2.223 *Να βρείτε, για κάθε $\alpha > 0$, το πλήθος των θετικών ριζών της εξίσωσης $x^2 + \alpha = \sqrt{\alpha} x^3$

2.224 Έστω συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f(0) = 2, f'(0) = 0$, και $f''(x) + x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $f(x) \geq 2\left(1 - \frac{x^3}{12}\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

2.225 A) να αποδείξετε ότι $e^\pi > \pi^e$

B) Να δειχθεί ότι: $\pi^{1821} > \left(1 + \frac{1821}{\pi}\right)^\pi$

2.226 Αν ισχύει $e^x \geq kx^2$ για κάθε $x > 0, k \in \mathbb{R}$ να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $k \in \mathbb{R}$

2.227 A) Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - x - \ln x, x > 0$

B) Αν $\alpha, \beta, \gamma \in (0, +\infty)$ με $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$, αποδείξτε ότι

$$2(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) + 3 \geq 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \alpha + \beta + \gamma$$

2.228 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(e^{-x}) = f(x + \alpha)$

2.229 ** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x^2) - e^{-x} + 1$ είναι γνήσια αύξουσα στο \mathbb{R} και να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x) = f(1-x^2)$

2.230 Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x) > 2f(x)$ και $f(0) = 1$. Να αποδείξετε ότι $f(x) > e^{2x}$ για κάθε $x > 0$.

2.231 Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0) = 0$ και $f'(x) + f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε $xf(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f , που είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και ισχύει ότι $f'(x) \leq f(1) - f(0)$ για κάθε $x \in (0, 1)$

ΚΥΡΤΕΣ-ΚΟΙΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

2.232 Να μελετήσετε τις συναρτήσεις ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

A) $h(x) = x^2 + \frac{8}{x}$ B) $g(x) = 3x^5 - 5x^3$

Γ). $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ Δ) $f(x) = xe^{-x}$

2.233 Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$ έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής

2.234 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln^2 x + 2x \ln x + x^2 - 3$ είναι κυρτή

2.235 Αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 5\alpha x^4 + 10\beta x^3 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχει τρία σημεία καμπής, να αποδείξετε ότι $\alpha^2 > \beta$.

2.236 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για

την οποία ισχύουν $f(x) < x$ και $f'(x) = \frac{x}{x - f(x)}$

για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

2.237 Δίνεται ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha\sqrt{x} + \beta \ln x + \beta x$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχει σημείο καμπής το $A(1, 3)$

A) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = -1$:

B) Βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της και να αποδείξετε ότι

$$4\sqrt{x} - \ln x \leq x + 3, \quad \forall x \geq 1.$$

2.238 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $(x^2 + x + 1)f''(x) + xe^{f(x)} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

2.239 Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Να αποδείξετε ότι δεν είναι δυνατόν η f να έχει στο x_0 τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής.

2.240 Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = 2x^4 + 4\alpha x^3 + 3(2\alpha^2 - 4\alpha + 5)x^2 + \alpha x + 1$$

με $x \in \mathbb{R}$, δεν έχει σημεία καμπής.

2.241 Έστω συνάρτηση $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει ότι $f^2(x) + (x - 4)f(x) + x = 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής

2.242 Η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και $xf''(x) - \eta\mu 2x = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι το $A(0, f(0))$ δεν μπορεί να είναι σημείο καμπής της C_f

2.243 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'' \searrow$ στο \mathbb{R} , $f'(x) \neq 0$,

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(1) > 0$ και η συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - f(2 - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A) Βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της g .

B) Να βρείτε τα διαστήματα που η g είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής της C_g

2.244 Έστω συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι κυρτή με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

είναι γνήσια αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

2.245 Αν $f(x) = 2e^{\lambda x} - x^2 - \frac{2}{\lambda^2}$, $\lambda > 0$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων καμψής της γραφικής παράστασης της f , για κάθε $\lambda \in (0, +\infty)$

2.246 Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = 1 + x - x^2 - e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση

- A) δεν έχει σημεία καμψής
B) έχει ένα ακριβώς κρίσιμο σημείο.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

2.247 A) Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σε διάστημα Δ . Να δείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad (\text{Jensen})$$

B) Να αποδείξετε ότι: $e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} - 1 > \sqrt{(e^\alpha - 1)(e^\beta - 1)}$
 $\forall \alpha \neq \beta \in \mathbb{R}_+$

Γ) Δείξτε ότι $\ln \frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\ln \alpha \cdot \ln \beta}$, $\forall \alpha, \beta \in A_f$

2.248 Αν $x > 0$, $y > 0$, $\alpha > 1$ και $x + y = 1$, να αποδείξετε ότι ισχύει $\left(x + \frac{1}{x}\right)^\alpha + \left(y + \frac{1}{y}\right)^\alpha \geq \frac{5^\alpha}{2^{\alpha-1}}$

2.249 Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει ότι $f''(x) > f(x)$ και $f(0) = f'(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο \mathbb{R}

2.250 Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο \mathbb{R} και η γραφική παράσταση της f περνά από την αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $3f(x) \geq 4f\left(\frac{3x}{4}\right)$

2.251 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με παράγωγο γνήσια αύξουσα και $f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι $f'(x)(x-1) - f(x) + 1 > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

2.252 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με f' γνήσια αύξουσα και $f(1) = 0$. Δείξτε ότι $f'(x)(x-1) > f(x)$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

2.253 Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(x) > 0$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

2.254 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{e^{x-1}}{e^{x-1} + 1}$ για $x \in \mathbb{R}$.

- A) Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και τα σημεία καμψής.
B) Να δειχθεί ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει $f(\ln x) + f'(x-1) < f(x-1) + f'(\ln x)$

2.255 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με παράγωγο γνήσια αύξουσα και $f(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι $f'(x)(x-1) > f(x)$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

2.256 Αν οι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ με $\alpha < \beta < \gamma$, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου δείξτε ότι $\beta^\beta < \sqrt{\alpha^\alpha \gamma^\gamma}$

2.257 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με παράγωγο γνήσια αύξουσα και $f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι $f'(x)(x-1) - f(x) + 1 > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL**2.258** Να βρεθούν τα παρακάτω όρια

A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$ B) $\lim_{x \rightarrow 1} [\ln x \cdot \ln(\ln x)]$

Γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right)$ Δ) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$

2.259 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - \chi\sigma\upsilon\nu x}{x(e^x - 1)\eta\mu x}$ B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$

Γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} + 2x + 1}{4e^{-x} - x + 3}$

2.260 Αποδείξτε ότι είναι συνεχής η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1-x}, & 0 < x \neq 1 \\ -1, & x=1 \end{cases} \text{ και ότι } f'(1) = -0,5.$$

2.261 Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \eta\mu \frac{1}{x}$ **2.262** Να υπολογίσετε τα $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x}}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x}$ **2.263** Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu(x^3 \ln^2 x)}{(x^6 \ln^4 x)}$ **2.264** Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} + 2x + 1}{4e^{-x} - x + 3}$ **2.265** Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x + \ln x)(e^x + e^{-x})}{(x + \ln x)(e^x - e^{-x})}$ **2.266** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - \eta\mu(\ln x)}{2 \ln x + \sigma\upsilon\nu(\ln x)}$ **2.267** Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x - \eta\mu x}{\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu x}}$ **2.268** Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 (e^x - x - 1)}{(\sin x - x)^2} = 18$ **2.269** Αν $f(x) = \frac{2e^x - 2x - 2 - x^2}{x^2}$ να υπολογίσετε

το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sqrt{f(x)}}}{e^{f(x)}}$

2.270 Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf(x) + e^{\eta\mu x} = f(x)\eta\mu x + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(0)$.**2.271** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής συνάρτηση, για την οποία ισχύει $(1 - \sigma\upsilon\nu x)f(x) = \ln(1+x) - x$ για κάθε $x > -1$. Να βρείτε το $f(0)$. Η συνάρτηση f έχει συνεχή 2η παράγωγο στο \mathbb{R} με $f''(0) = \frac{3}{2}$ και

$$f(0) = f'(0) = 0. \text{ Να δείξετε ότι: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = 3$$

2.272 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+4h) - 2f(x+2h) + f(x)}{h^2} = 24x - 8 \text{ και η}$$

εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ έχειεξίσωση $y = 5x - 8$, να βρείτε τον τύπο της f **2.273** Αν $f(x) = \begin{cases} x \ln x + \alpha x - \beta, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ \frac{1}{e^x} \ln(-x) + \alpha, & x < 0 \end{cases}$ να βρείτετα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ **2.274** Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί

$$\alpha, \beta, \gamma \text{ ώστε } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha e^x + \beta e^{-x} + \gamma}{x^2} = 1$$

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

2.275 Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

$$h(x) = \frac{e^x}{x^3}, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x-1}, \quad k(x) = xe^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lambda(x) = x - \ln(e^x + 1)$$

2.276 Έστω οι συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) + x + \ln(x+1) - \ln x$ για κάθε $x > 0$. Αν η ευθεία $y = x + 3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

2.277 Να αποδείξετε ότι η $y = 2x - 2\ln 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x) = 2\ln(e^x + 1) - 2\ln 2$

2.278 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και η g με $g(x) = xf(e^{-x})$. Αν η ευθεία $y = 2x + 1$ εφάπτεται της C_f στο 0 , να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

2.279 Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - x^2}{\ln x + x} = 2.$$

Αποδείξτε ότι η $y = x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

2.285 Να μελετήσετε τις συναρτήσεις A) $f(x) = x^3 - 12x$ B) $f(x) = \eta\mu x + x, x \in [-\pi, \pi]$

$$\Gamma) f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad \Delta) f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{E) } f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$$

2.286 Να κάνετε μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση (για λόγους απλότητας θεωρείστε $\sigma = 1$ και $\mu = 0$)

2.280 Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της f με $f(x) = \frac{(\alpha-1)x^2 + \beta x + 5}{3x + \gamma}$ να έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες $x = -2$ και $y = 3$.

2.281 Δίνεται ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2 + \alpha x + \beta}$ έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

τις ευθείες $x = 3$ και $x = 5$

A) Να βρεθούν οι αριθμοί α και β .

B) Να αποδειχτεί ότι η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

2.282 Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{-x} \leq xf(x) \leq 1$ για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι ασύμπτωτη της C_f .

2.283 Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x \ln x, x > 0$ δεν έχει ασύμπτωτες.

2.284 Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2x + 3$.

$$\text{Βρείτε το } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \eta\mu x - x^2 e^{-x}}{xf(x) - 2x^2 - \ln x + x^2 \eta\mu \frac{1}{x}}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

2.287 Αν M το σημείο του διαγράμματος της f με $f(x) = x \ln x - \lambda x + 3$ που αντιστοιχεί στο τοπικό της ελάχιστο, να βρεθεί η απόσταση OM όταν ο ρυθμός μεταβολής του OM ως προς λ γίνει μηδέν.

2.288 Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$, για το οποίο ισχύουν τα εξής. Η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες $(-4, 0)$, η κορυφή A είναι στο διάστημα $[0, 4]$ του άξονα $x'x$ και η κορυφή B είναι σημείο της παραβολής $y = 4x - x^2$. Για ποια τιμή των συντεταγμένων του B το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ γίνεται μέγιστο ;

2.289 Μια εταιρεία αυτοκινήτων εκτιμά ότι μπορεί να πουλήσει 2000 αυτοκίνητα τον μήνα, αν η τιμή πώληση του κάθε αυτοκινήτου είναι 5000 €. Έχει επίσης υπολογίσει ότι για κάθε μείωση της τιμής κατά 500 € το ένα, οι πωλήσεις αυξάνονται κατά 1000 αυτοκίνητα τον μήνα. Η αύξηση των πωλήσεων λόγω μείωσης της τιμής είναι ανάλογη της μείωσης αυτής. Αν η τιμή ενός αυτοκινήτου δεν μπορεί να είναι μικρότερη από 2000 €. Πόσα αυτοκίνητα πρέπει να πουλήσει η εταιρεία, ώστε να έχει τα μέγιστα έσοδα;

2.290 Ένα τουριστικό γραφείο οργανώνει εκδρομές με λεωφορεία. Κάθε λεωφορείο έχει 70 θέσεις. Ορίζεται ότι για να γίνει η εκδρομή χρειάζονται τουλάχιστον 30 συμμετοχές και τότε η τιμή ορίζεται στα 30 € για κάθε άτομο. Για να αυξήσει τις συμμετοχές το γραφείο κάνει της εξής προσφορά. «Για κάθε επιβάτη επιπλέον των 30, θα μειώνει κατά 30 λεπτά την χρέωση κάθε επιβάτη».

- A) Ποιο το πλήθος των επιπλέον επιβατών κάθε λεωφορείου που μεγιστοποιεί τα έσοδα;
 B) Ποια το μέγιστα έσοδα του γραφείου από κάθε λεωφορείο;

2.291 Ένα φορτηγό διανύει καθημερινά 100 km με σταθερή ταχύτητα x km/h. Τα καύσιμα κοστίζουν 0,8 € το λίτρο και καταναλώνονται με ρυθμό $2 + \frac{x^2}{400}$ lt/h. Τα υπόλοιπα έξοδα του φορτηγού είναι 9 €/ώρα

- A) να εκφράσετε το κόστος της διαδρομής αυτής ως συνάρτηση της ταχύτητας x ,
 B) να βρείτε την ταχύτητα που πρέπει να έχει το φορτηγό, ώστε τα έξοδά του να είναι τα ελάχιστα,
 Γ) πόσα είναι τα ελάχιστα αυτά έξοδα;

2.292 Η συνάρτηση που μας δίνει το κέρδος μιας επιχείρησης είναι: $P(t) = \frac{\ln(t+1)}{(t+1)^2}$, $t \geq 0$. Να βρείτε:

- A) την χρονική στιγμή, κατά την οποία η επιχείρηση θα παρουσιάσει μέγιστο κέρδος.
 B) το μέγιστο κέρδος της επιχείρησης.

2.293 Δίνεται η ευθεία $y = -2x - 3$. Να βρείτε το σημείο της ευθείας αυτής το οποίο απέχει από το σημείο $A(9, 4)$ τη μικρότερη δυνατή απόσταση.

2.294 Το άθροισμα δύο αριθμών είναι 82. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το γινόμενο τους.

2.305 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- A) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x) = |f(x)|$
- B) Αν επιπλέον είναι $0 < f(x) \neq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = e$, $f'(1) = 1$ τότε:
- α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x) = |\ln(f(x))|$
- B) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = |\ln(f(x))|$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$

2.306 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο \mathbb{R} .

Αν ισχύει ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(x-3h) - 5f(x) + 3f(x+2h)}{h^2} = \frac{60}{x^3}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \sqrt{4x^2 + 9}) = 2004$, να δείξετε ότι

- A) $f''(x) = \frac{4}{x^3}$
- B) η ευθεία $y = 2x + 2004$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$
- Γ) $f(x) = \frac{2}{x} + 2x + 2004$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

2.307 ** Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι: $f(0) = 0$ και $f'(x) = \frac{1}{3f^2(x) + 1}$ για

κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- A. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f^3(x) + f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή.
- B) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$
- Γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 0$
- Δ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3} = 0$

2.308 ** Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει ότι $f(f'(x)) + f(x) = 0$ για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι:

- A) η f είναι 1-1 B) $f'(f'(x)) = x$ για κάθε $x > 0$ Γ) αν $f(1) = 1$ τότε $f(x) = \ln x$

2.309 Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$

- A) Να δείξετε ότι υπάρχει ξ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 1$
- B) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια ώστε $2f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 3$
- Γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{2\alpha + \beta}{3}$.
- Δ) Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{2}{f'(x_2)} = 3$$

2.310 * Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ παραγωγίσιμη στο (α, β) και κυρτή στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f(\alpha) < f(\beta)$ να αποδείξετε ότι:

- A) υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$.
- B) υπάρχουν $x_1 \in (\alpha, \beta)$ και $x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε: $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2 \cdot \frac{\beta - \alpha}{f(\beta) - f(\alpha)}$
- Γ) το x_0 του (A) ερωτήματος βρίσκεται πλησιέστερα στο β απ' ότι στο α .

2.311 Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ με $f(1) = 2$, $f(e) = e + 1$ και σύνολο τιμών το $[-1, 4]$. Να αποδείξετε ότι :

- Aα) Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, e)$ με $x_1 \neq x_2$ ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$
- β) Υπάρχει $\xi \in (1, e)$ ώστε $f''(\xi) = 0$
- γ) Υπάρχει $x_0 \in (1, e)$ ώστε $f(x_0)(f'(x_0) - 4f^4(x_0)) = x_0$
- Bα) Η ευθεία $y = -x + e + 2$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο $(1, e)$
- β) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, e)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ ώστε να ισχύει ότι $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$

2.312 Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f^2(3x+1) + 4 \leq 4f(2x^2 + x + 1)$. Να αποδείξετε τα εξής:

- A Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 4)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = 0$
- B Η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται
- Γ $f'(1) = f'(4)$
- Δ Η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο \mathbb{R}

2.313 Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει ότι $2 \cdot \frac{f(x)}{\ln x} + x \cdot f'(x) = 0$. Αν $f(e) = 1$ τότε να βρεθεί ο τύπος της f .

2.314 Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , συνεχείς το $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμες στο (α, β) με $g(x)g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ και οι μιγαδικοί $w = 2f(\alpha) - ig(\beta)$, $z = g(\alpha) - 2if(\beta)$ ώστε να ισχύει ότι $|2w + \bar{z}| = |2\bar{w} - z|$

. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = 0$

2.315 Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $f(0) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1]$. Να αποδείξετε ότι: υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $(1 - \xi) \cdot f'(\xi) = f(\xi)$