Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Μαθηματικά
Προσανατολισμού

2019-2020

Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Χανιά

ανάλυση

β΄

Παράγωγοι

360

Ταξινομημένες ασκήσεις για λύση

Ταξη: Γ Γενικού Λυκείου
Μαθηματικά Θετικών Σπουδών και Σπουδών οικονομίας & πληροφορικής
Μέρος Β: Διαφορικός Λογισμός
Έκδοση 19.07

Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Μαθηματικός M.Ed.
Χανιά 2019

Ιστοσελίδα: http:users.sch.gr/mipapagr

2 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ- ΟΡΙΣΜΟΣ

2.01 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2\text{-}5x+6}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2

2.02 Να εξεταστεί αν είναι παραγωγίσιμη στο 0 η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & \text{αν } x<0 \\ 1-\text{συν}x & \text{αν } x\ge 0\end{cases}$

2.03 Αν $f(x)=\begin{cases} \alpha x+\beta & \text{αν } x\le 2 \\ \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{αν } x>2\end{cases}$ βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 2

2.04 Αν $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}=-7$ και f συνεχής στο $x_0=3$, δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 3

2.05 Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $[0.+\infty)$ και ισχύει ότι $\eta\mu x\le f(x)\le x\sqrt{x}+\eta\mu x$, για $x\ge 0$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$

2.06 Αν για την συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει $\left|f(x)-x^2\right|\le (x-1)^2$ για κάθε $x\in R$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$

2.07 Έστω $f,g:R\to R$ συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $\alpha\in R$ με $f'(\alpha)=g'(\alpha)=3$.

Υπολογίσετε τα:

Α) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}$ Β) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{(f(x))^2-(f(\alpha))^2}{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}$

Γ) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\alpha^2 f(x)-x^2 f(\alpha)}{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}$ Δ) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{g(\alpha)f(x)-f(\alpha)g(x)}{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}$

2.08 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o με $f(x_o)=3$, $f'(x_o)=2$. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{2f(x)\text{-}6}{x\text{-}x_o}$

2.09 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο 0 και στο 1 με $f(0)=f(1)$. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=\begin{cases} f(2x) & \text{αν } x\le\frac{1}{2} \\ f(2x\text{-}1) & \text{αν } x>\frac{1}{2}\end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\dfrac{1}{2}$ αν και μόνο αν $f'(0)=f'(1)$

2.10 Έστω $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=3$. Αποδείξτε ότι $f'(0)=3$

2.11 Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο 1 με ότι $f'(1)=2$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left[f(1)-f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right]=2$

2.12 Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o\in R$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{αν } x\le x_o \\ f'(x_o)(x\text{-}x_o)+f(x_o) & \text{αν } x>x_o\end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o

2.13 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο 0 και ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ για κάθε $x,y\in R$, δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R.

2.14 Αν για την συνεχή συνάρτηση f ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+2)}{x}=3$ τότε: Α) Δείξτε ότι η f είναι παραγωγισιμη στο 2 με $f'(2)=3$

Β) Υπολογίστε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-f(x)}{x^2-4}$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\eta\mu x\, f\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)\right)$

2.15 Έστω συνάρτηση $f:R\to R$, παραγωγίσιμη στο 0. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^2(3x)-f^2(2x)}{x}=2f(0)f'(0)$

2.16 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=\alpha$ και ισχύει:

$f(xy)=xf(y)+yf(x)$ για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$. Να δειχθεί ότι $f'(x_0)=\alpha+\frac{f(x_0)}{x_0}$ για κάθε $0<x_0\neq 1$

2.17 ** Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to(0,+\infty)$ τέτοια ώστε $f^3(x)-2x^4f(x)=8$, για κάθε $x\in R$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ και ότι $f'(0)=0$

2.18 Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο R και παραγωγίσιμη στο $x\in R$, να δείξετε ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x-2h)}{h}=5f'(x)$$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ-ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

2.19 Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων

Α) $f(x)=\frac{e^x}{1+\sqrt{x}}$ Β) $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$

Γ) $g(x)=\sqrt{x}\eta\mu x+\frac{\ln x}{x-1}$ Δ) $f(x)=\frac{\ln x}{e^x}$

Ε). $g(x)=\frac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{1+\varepsilon\varphi x}$ Στ) $g(x)=\frac{\ln x}{x+2}$

Ζ) $f(x)=\frac{2+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}$ Η) $f(x)=\frac{x^2}{\ln x}$

Θ) $h(x)=\frac{2x+1}{e^x}$ Ι) $f(x)=\frac{1-\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$

2.20 Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{1+h}-e}{h},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x+1}-e}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-1}{x}$$

2.21 Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα P με $P(x)=\left[P'(x)\right]^2$ για κάθε $x\in R$.

2.22 Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο $x_o=e$. δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(e^x)-xf(e)}{x-1}=ef'(e)-f(e)$

2.23 Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{\eta\mu(\pi+h)}-1}{h}$

2.24 Να αποδείξετε ότι

Α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ Β) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^5-2^5}{x-2}=80$

2.25 Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R με $g(e)=1$ και $g'(e)=2$. Αν $f(x)=x^2g(x)+\frac{x^2}{\ln x}$ να βρείτε τον $f'(e)$

2.26 Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$f(x+y)=e^xf(y)+e^yf(x)+xy+\alpha$ για κάθε $x,y\in R$

Να αποδείξετε ότι:

Α) $f(0)=-\alpha$ Β) η $f(0)=0$

Γ) Αν είναι παραγωγίσιμη στο R τότε ισχύει ότι $f'(x_o)=f(x_o)+f'(0)e^{x_o}+x_o$, $x_o\in R$.

Δ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 τότε είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x_o)=f(x_o)+f'(0)e^{x_o}+x_o$ για κάθε $x_o\in R$

2.27 Αν μια συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=\alpha,\alpha>0$, να αποδείξετε ότι:

Α) $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)\ln x-f(\alpha)\ln\alpha}{x-\alpha}=\frac{f(\alpha)}{\alpha}+f'(\alpha)\ln\alpha$

Β) $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\alpha f(x)-xf(\alpha)}{x^2-\alpha x}=f'(\alpha)-\frac{f(\alpha)}{\alpha}$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

2.28 Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

$f(x)=\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2 3x$,

$f(x)=\varepsilon\varphi^2(4x^3+1)$

$f(x)=\ln^3\left(x^2+3x\right)+\ln 3$

$f(x)=\sigma\upsilon\nu\sqrt{\ln^3(2x)}+\sqrt{2}$

$f(x)=\eta\mu\left(2^x+3^x\right)+\eta\mu t \ ,\ t\in R$

$f(x)=\left(x^2+3\right)^4\left(x^3-5\right)^3+y^2 \ ,\ y\in R$

2.29 Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

Α) $f(x)=\sigma\upsilon\nu\sqrt{\ln x}$, $x>1$

Β) $f(x)=\log\left(2^x+3^x\right)$

Γ) $f(x)=\left(x^2+3\right)^4\left(2x^3-5\right)^3$

2.30 Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

Α) $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x} & \text{αν } x\neq 0 \\ 0 & \text{αν } x=0\end{cases}$

Β) $f(x)=x^2+|x-3|+2$

Γ) $f(x)=x^{\log x}$, $x>0$

Δ) $f(x)=(\eta\mu x)^x$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

Ε) $f(x)=2^{\varepsilon\varphi x}$

2.31 Δίνεται η $f(x)=e^x+x^3+x$, $x\in R$.

Α) Αποδείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

Β) Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $D_{f^{-1}}$, να δείξετε ότι $\left(f^{-1}\right)'(1)=\dfrac{1}{2}$.

2.32 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και ισχύει: $f^3(x)+x^2 f(x)=2x^2\eta\mu x$, για κάθε $x\in R$ να βρεθεί η $f'(0)$.

2.33 Α) Αν $f(x)=c(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ με $c,\alpha,\beta,\gamma\in R$ και $x\neq\alpha,\beta,\gamma$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}$$

Β) Να βρεθεί η f' αν $f(x)=\dfrac{(x^2+5)^3(1+x^4)^2}{\sqrt{1+x^2}}$

2.34 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$.

Α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $y=|f(x)|$ είναι παραγωγίσιμη στο R.

Β) Αν ισχύει ότι $f(-2)=-5$ και $f'(-2)=4$ να αποδείξετε ότι $|f(-2)|'=-4$

2.35 Η συνάρτηση f είναι παραγωγισιμη στο R και ισχύει $f(x^2)+3f\left(2x^2-1\right)=5\ln x+3x$ για κάθε $x>0$. Να βρεθεί το $f'(1)$.

2.36 Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=\alpha,\alpha>0$. Να αποδείξετε ότι:

Α) $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)\ln x-f(\alpha)\ln\alpha}{x-\alpha}=\frac{f(\alpha)}{\alpha}+f'(\alpha)\ln\alpha$

Β) $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{\alpha f(x)-xf(\alpha)}{x^2-\alpha x}=f'(\alpha)-\frac{f(\alpha)}{\alpha}$

2.37 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x, x\in(0,\pi)$

Α) Να δείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1}

Β) Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in(-1,1)$$

2.38 Έστω η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ ώστε $f\left(\sqrt{x}\right)=\sqrt{x}\eta\mu\sqrt{x}+e^x$, $\forall\, x\geq 0$. Αν f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ τότε

να δείξετε ότι $f'(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x+2xe^{x^2}$ και να υπολογίσετε το $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x^2}$

2.39 Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία είναι $f(x+y)=f(x)f(y)$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x,y\in R$. Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\ell\in R$ να αποδειχτεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R

2.40 Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο 0 τέτοια ώστε για κάθε $x\in R$ να ισχύει $f\left(f(x)\right)=f\left(x\right)+2x$. Δείξτε ότι $f'\left(0\right)=-1$ ή $f'\left(0\right)=2$

2.41 Οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο R και για κάθε $x\in R$ ισχύει ότι $g\left(x\right)=e^{f(x^2)}$, με $f'\left(1\right)\neq 0$, να αποδειχτεί ότι $g'\left(1\right)=2g(1)f'\left(1\right)$

2.42 Έστω η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x+x^2\eta\mu\frac{2}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Να εξετάστε αν η $f'\left(x\right)$ είναι συνεχής στο $x_o=0$

2.43 Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R. Να αποδείξετε ότι

Α) Αν η f είναι άρτια τότε η f' είναι περιττή

Β) Αν η f είναι περιττή τότε η f' είναι άρτια

Γ) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και περιττή τότε:

α) Η C_f διέρχεται από το $\left(0,0\right)$

β) $f''\left(-x\right)=-f''\left(x\right)$

γ) $f''\left(0\right)=0$

Δ) Αν η f είναι άρτια και $g(x)=(x^2+1)f(x)+3x$ τότε $g'(0)=3$

2.44 Έστω ότι η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη στο R και αντιστράψιμη. Να αποδειχτεί ότι για κάθε σημείο με τετμημένη $x_0\in R$ ισχύει ότι το γινόμενο των κλίσεων των εφαπτομένων της C_f στο x_0 και της $C_{f^{-1}}$ στο $f\left(x_0\right)$ ισούται με ένα.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

2.45 Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο συνεχή. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(4-x)}{x-1}=5$ να δείξετε ότι $f''\left(3\right)=-5$

2.46 Έστω μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Να αποδείξετε ότι:

Α) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{h}=2f''(x)$, $x\in R$

Β) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(x-h)-f'(x)}{h}=-f''(x)$, $x\in R$

Γ) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{4f'(x+2h)+6f'(x-h)-10f'(x)}{h}=2f''(x)$ για κάθε $x\in R$

2.47 Να αποδειχτεί ότι:

Α) Αν $y=\ln\left(e^{2x}+1\right)-x$ τότε $y''=\left(1-y'\right)\left(1+y'\right)$

Β) Αν $y=\eta\mu\left(\ln x\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\ln x\right)$ τότε $x^2y''+xy'+y=0$

2.48 Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x\in R$ ισχύει $f\left(x^2\right)=xf\left(x\right)$, να αποδείξετε ότι $f''\left(1\right)=0$.

2.49 Να αποδείξετε ότι:

Α) Αν $f\left(x\right)=\sigma\upsilon\nu x$, τότε $f^{(\nu)}\left(x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\nu\pi}{2}\right)$

Β) Αν $f\left(x\right)=xe^x$ τότε $f^{(\nu)}\left(x\right)=e^x\left(x+\nu\right)$

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

2.50 Βρείτε την εφαπτομένης της C_f στο $x_0=0$ αν $f(x)=\begin{cases} x^2 \eta\mu\frac{1}{x} & \alpha\nu \quad x>0 \\ x^3 & \alpha\nu \quad x\le 0 \end{cases}$

2.51 Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o=1$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-x^2}{x-1}=7$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι κάθετη στην ευθεία $x+9y+5=0$

2.52 Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3$. Βρείτε τις εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από το $M(-2,-8)$

2.53 Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι: $x\ln x\le f(x)\le x^2-x$ για κάθε $x\in\Delta$. Να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1,f(1))$.

2.54 Αν $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(x)=\frac{1}{x}$ και $\alpha>0$, να αποδειχτεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ημιάξονες Ox, Oy και η εφαπτομένη της καμπύλης στο $x_o=\alpha$ είναι ανεξάρτητο του α.

2.55 Να βρεθούν οι εφαπτόμενες των C_f, C_g όταν $f(x)=x^2+2$ και $g(x)=-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}$ που τέμνονται στον $y'y$ και είναι κάθετες μεταξύ τους.

2.56 Αν $f(x)=\alpha\ln x+\beta x^2+3$, να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε η ευθεία ε: $2x-y+4=0$ να είναι εφαπτόμενη της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$.

2.57 * Αν $f(x)=\frac{1}{x}$ και $g(x)=e^{-x}$, αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη.

2.58 Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει ότι $f(2+x)-f(2-x)=-2x$, $\forall x\in R$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $(2,f(2))$ είναι κάθετη στην $y=x$.

2.59 Αν $f(x)=\begin{cases} \alpha x^2+2\alpha x+\beta+\alpha & x\ge 2 \\ \frac{\gamma}{x+1} & x<2 \end{cases}$, να βρεθούν τα $\alpha,\beta,\gamma\in R$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(2,f(2))$ να είναι παράλληλη στην $2x+y-1=0$

2.60 Αν $f(x)=4-x^2$ και $g(x)=-x^2+8x-20$. Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των C_f και C_g.

2.61 Για ποια τιμή του $\alpha\neq 0$ η εφαπτόμενη της $f(x)=x^2-3x$ στο $(1,f(1))$, εφάπτεται της $g(x)=\frac{\alpha}{x}$

2.62 Δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ και $g(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\eta\mu x$ έχουν κοινή εφαπτομένη σε κάθε κοινό τους σημείο.

2.63 Θεωρούμε την συνάρτηση f που έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο R με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$. Αν η C_g της g με $g(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$ τέμνει τον άξονα $x'x$, να δειχτεί ότι η εφαπτομένη στο σημείο τομής, σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^o

2.64 ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-4x^2-3x$. Να βρεθεί ευθεία που να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε δύο διαφορετικά σημεία της. (mathematica)

2.65 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\alpha\cdot\ln x$, $x>0$, όπου $\alpha\in R$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο της $M(1,f(1))$ και αποδείξετε ότι διέρχεται από σταθερό σημείο P για κάθε $\alpha\in R$.

2.66 Μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα: $f(x-2)\le x^2-3x+2\le f(x-3)+2x-4$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Έστω μεταβλητή ευθεία η οποία διέρχεται από το $M\left(-\frac{1}{2},0\right)$ και τέμνει τη C_f σε δύο διαφορετικά σημεία Α και Β. Να βρείτε τον τύπο της f και να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα Α και Β τέμνονται κάθετα.

2.67 Αν η ευθεία $y-2x=0$ είναι η εφαπτομένη του διαγράμματος της $y=f(x)$, στο σημείο της με $x_o=-1$, να βρεθεί η εφαπτομένη στη C_g της $g(x)=f\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ στο σημείο με $x_1=1$

2.68 Δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $g(x)=e^x$ και $f(x)=2x^2$, έχουν κοινή εφαπτομένη

2.69 Να βρείτε τον $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με $f(x)=\alpha^x$, να έχει εφαπτομένη την $y=x$.

2.70 Έστω f δευτεροβάθμια πολυωνυμική συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι: $3f(x+1)-2f(x-2)=x^2+14x-5$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Α) Να βρεθεί ο τύπος της f.

Β) Αποδείξτε ότι οι εφαπτόμενες της C_f που άγονται από το σημείο $A\left(1,-\frac{1}{4}\right)$, είναι κάθετες.

2.71 Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο $x_0=2$ για την οποία ισχύει

$|f(x)+\ln(x-1)|\le(x-2)^2$ για κάθε $x>1$

2.72 ** Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, και ισχύει $f(\ln x)=x\ln x-x$, $x>0$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου το οποίο σχηματίζεται από την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με $x_o=1$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$

2.73 ** Έστω η $f(x)=\frac{\ln(\alpha x)}{x}$ με $\alpha,x>0$

Α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x_o,f(x_o))$.

Β) Αποδείξτε ότι οι παραπάνω εφαπτόμενες στο σημείο $(x_o,f(x_o))$, καθώς μεταβάλλεται το α, διέρχονται από το ίδιο σημείο.

2.74 Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με $f(x^2)+f(x)=3\cdot\ln x+4$

Α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της f στο $(1,f(1))$

Β) Υπολογίστε το όριο: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x\cdot f(x)-2}{x^2-1}$.

2.75 Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{\alpha x}+x$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$

Α) Βρείτε το σημείο M της C_f στο οποίο η εφαπτόμενη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου M όταν το α διατρέχει το $\mathbb{R}$

2.76 Θεωρούμε τις παραβολές $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2\lambda x-2\lambda(1-\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω παραβολές έχουν μία κοινή εφαπτομένη.

Β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία των C_f για τα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$, βρίσκονται στην ευθεία $y=x$.

Γ) Αν $\lambda=0$, να βρείτε το σύνολο των σημείων του επιπέδου από τα οποία άγονται κάθετες εφαπτόμενες τη συνάρτηση f

2.77 Αν $f(x)=x^2-1$ και $g(x)=(x^2-1)\sigma\upsilon\nu x$, να αποδείξετε ότι σε άπειρα από τα κοινά τους σημεία, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν κοινή εφαπτομένη.

Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΩΣ ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

2.78 Ενα σημείο $M(x,y)$ κινείται στην C_f, με $f(x)=\sqrt{x}$. Να βρείτε τη θέση όπου ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

2.79 Σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Oxy ένα κινητό κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^x$, $x>0$. Έστω M η θέση του κινητού στο επίπεδο κάθε στιγμή και έστω A, B οι προβολές του M στους άξονες Ox και Oy αντίστοιχα. Η τετμημένη του σημείου M μεταβάλεται με ρυθμό $1\ m/\sec$. Τη χρονική στιγμή t_o που το κινητό βρίσκεται στο σημείο $(1,e)$, βρείτε το ρυθμό μεταβολής:

Α) του εμβαδού του τριγώνου OAM Β) της απόστασης (AB)

Γ) της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M, με τον άξονα $x'x$

2.80 Ένα αυτοκίνητο A απομακρύνεται από τη διασταύρωση δύο κάθετων δρόμων Ox και Oy, που κατευθύνονται προς τα ανατολικά και βόρεια αντίστοιχα. Η απόσταση του αυτοκινήτου από το δρόμο Oy ισούται με το τετράγωνο της απόστασής του από το δρόμο Ox.

Το αυτοκίνητο A απομακρύνεται προς τα ανατολικά με ρυθμό $v=\sqrt{10}\ km/min$.

Α) Με ποια ταχύτητα απομακρύνεται το αυτοκίνητο προς τα Βόρεια; (συναρτήσει της θέσης του)

Β) Πόσο γρήγορα απομακρύνεται το A από το σημείο $O(0,0)$ τη χρονική στιγμή που έχει απομακρυνθεί $3\ km$ προς τα βόρεια;

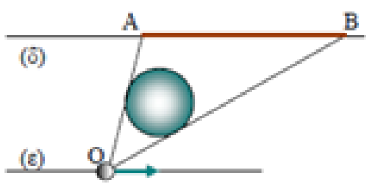
2.81 Μια κολόνα ύψους $4m$ φωτίζει ένα στενό δρομάκι, το οποίο καταλήγει κάθετα σε έναν τοίχο. Η λάμπα βρίσκεται $1m$ κάτω από την κορυφή της κολόνας. Ένας παίχτης του μπάσκετ με ύψος $2m$ προχωράει προς τον τοίχο με ταχύτητα $1m/\sec$. Αν η κολόνα απέχει $6m$ από τον τοίχο, τότε, να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνει το ύψος της σκιάς που ρίχνει ο άνδρας στον τοίχο όταν βρίσκεται σε απόσταση $2m$ από τον τοίχο.

2.82 Το ύψος του νερού σε ένα κυλινδρικό δοχείο ανεβαίνει με ρυθμό $\frac{10}{\pi}\ cm/sec$. Αν η ακτίνα της βάσης του δοχείου είναι $80cm$, να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνει ο όγκος του νερού .

2.83 Ένα μπαλόνι ανεβαίνει κατακόρυφα με σταθερή ταχύτητα $1m/sec$. Ένα αυτοκίνητο περνά κάτω από το μπαλόνι όταν αυτό βρίσκεται σε ύψος $39m$ και κινείται κατά μήκος ενός ίσιου δρόμου με σταθερή ταχύτητα $v=30m/sec$.

Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης αυτοκινήτου - μπαλονιού στο πρώτο δευτερόλεπτο της κίνησης.

2.84 ***Το κινητό O κινείται με σταθερή ταχύτητα $2m/\sec$ κατά μήκος της ευθείας (ε). Κυκλικό εμπόδιο έχει το κέντρο του στην μεσοπαράλληλη των ευθειών $(\varepsilon),(\delta)$, έχει διάμετρο $2m$ ίση με το μισό της απόστασης των $(\varepsilon),(\delta)$ και δημιουργεί την «σκιά» AB. Να βρεθεί ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του μήκους AB την στιγμή κατά την οποία το τρίγωνο OAB γίνεται ορθογώνιο για πρώτη φορά (Άσκηση από www.mathematica.gr)



Θ. Rolle –Θ.Μ.Τ.

2.85 Εφαρμόστε το θ. Rolle για τη συνάρτηση $f(x)=(x-1)(x+\eta\mu x)$ στο διάστημα $[0,1]$

2.86 Αν $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x+\beta & x<0 \\ 3+(\gamma-\alpha)x & x\geq 0 \end{cases}$ να βρεθούν οι $\alpha,\beta,\gamma\in R$ ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[-1,1]$ και να βρεθεί $\xi\in(-1,1)$ ώστε $f'(\xi)=0$.

2.87 Έστω συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη και δεν μηδενίζεται στο $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ ώστε $f'(x_o)=f(x_o)\varepsilon\varphi x_o$.

2.88 Δίνεται ότι η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, $\alpha>0$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\beta)}{\beta}$. Να δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $\xi f'(\xi)=f(\xi)$

2.89 Έστω η $f:[\alpha,\beta]\to R$ παραγωγίσιμη, ώστε: $f^2(\alpha)-f^2(\beta)=\alpha^2-\beta^2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $f(\xi)f'(\xi)=\xi$

2.90 Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R με $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$ και $\frac{f(2)}{f(1)}=e$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

2.91 Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=e^x+2x$ και $g(x)=e^{-x}-x^3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο που βρίσκεται στον $y'y$

2.92 Έστω $f:R\to R$ τρεις φορές παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι $f(1)=f(0)=f'(0)=f''(0)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x\in(0,1)$ ώστε $f^{(3)}(x)=0$.

2.93 Α) Δείξτε ότι η $f(x)=x^3+\lambda x^2-3x+1$ για κάθε $x\in R$ με $\lambda\in R$ δεν είναι $1-1$ συνάρτηση.
Β) Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το θ. Rolle για τη συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}+x^2+\lambda x-3$

2.94 Έστω f παραγωγίσιμη στο $[0,5]$ με $f(5)=f(0)+1$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\kappa,\lambda\in(0,5)$ ώστε $2f'(\kappa)+3f'(\lambda)=1$

2.95 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,4]$ και για κάθε $x\in R$ ισχύει $f(4x)=4f(x)$ και $f(0,4)=1$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(1,4)$ ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=12$

2.96 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log x$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(1,20)$ ώστε $\xi=\frac{19\cdot\log e}{1+\log 2}$.

2.97 …Η απόσταση δύο πόλεων που συνδέονται με ευθεία σιδηροδρομική γραμμή είναι 51 km. Μια αμαξοστοιχία διανύει τη μεταξύ τους απόσταση σε 0,6 ώρες. Να αποδειχτεί ότι για κάποια χρονική στιγμή η αμαξοστοιχία έχει ταχύτητα 85 km / h.

2.98 Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2^x-2^{\eta\mu x}}{x-\eta\mu x}$.

2.99 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\alpha]$ με $\alpha>1$ και ισχύει $f(0)=0$ και $f(x^2)=2f(x),\ \forall x\in[0,\alpha]$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,\alpha)$ ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=\frac{f(\alpha)}{2\left(\sqrt{\alpha}-1\right)}$.

2.100 Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία της C_f, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in R$ με $f''(\xi)=0$.

2.101 Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[-2,2]$ με $f(-2)=-f(2)=-2$. Αν $f'(x)\le 1$, $\forall x\in(-2,2)$ να αποδειχθεί ότι $f(x)=x$, $x\in[-2,2]$

2.102 Έστω $f:R\to R$ τρεις φορές παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι $f(1)=f(0)=f'(0)=f''(0)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x\in(0,1)$ ώστε $f^{(3)}(x)=0$.

2.103 Έστω $f(x)=\alpha^2x^6+\beta x^4+x^2+\gamma+\delta$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R^*$ με $3\beta^2<5\alpha^2$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τρία διαφορετικά συνευθειακά σημεία που να ανήκουν στη γραφική παράσταση της.

2.104 Έστω η παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(\ln\alpha)=f(\ln\beta)$. Αν ισχύει $\ln\alpha<\ln\gamma<\ln\beta$, με $\alpha,\beta,\gamma>0$ και $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\beta}{\gamma}=e^2$, να δειχτεί ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in R$ με $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$

2.105 Η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β), με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι:

A) αν υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ με $f(x_o)>0$, τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f''(\xi)<0$,

B) αν υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ με $f(x_o)<0$, τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f''(\xi)>0$.

2.106 Η συνάρτηση $f:[1,4]\to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν $f(1)=2$ και $f(4)=8$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

2.107 Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R με $f(-1)=-1$, $f(1)=1$. Δείξτε ότι υπάρχουν

A) $-1<\xi_1<\xi_2<1$ ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2$

B) $-1<\kappa_1<\kappa_2<1$ ώστε $\frac{1}{f'(\kappa_1)}+\frac{1}{f'(\kappa_2)}=2$

2.108 Αν $\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{3}+\frac{\gamma}{2}+\delta=0$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ μηδενίζεται σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος $(0,1)$

2.109 Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, με $f(\alpha)=2\beta$, $f(\beta)=2\alpha$

A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

B) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=4$.

2.110 Για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θ. Rolle, στο διάστημα στο $[2,20]$. Να αποδείξετε ότι:

A) υπάρχουν αριθμοί $\xi_1,\xi_2\in(2,20)$ με $\xi_1<\xi_2$ και $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.

B) υπάρχουν $\kappa_1,\kappa_2\in(2,20)$ με $\kappa_1<\kappa_2$ ώστε $3f'(\kappa_1)+2f'(\kappa_2)=0$

Γ) ότι η εξίσωση $f'(x)=f(x)-f(\alpha)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2,20)$.

Δ) υπάρχουν κ,λ,μ με $2<\kappa<\lambda<\mu<20$ ώστε $2f'(\kappa)+3f'(\lambda)+4f'(\mu)=0$

2.111 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(2)=0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in R$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $M(\xi,f(\xi))$ να τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $P(2\xi,0)$

2.112 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln(2x)$. Να αποδείξετε ότι:

A) Υπάρχει $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον $x'x$

B) Η εξίσωση $(2x)^x=e^{2-2x}$ έχει ρίζα στο $\left(\frac{1}{2},1\right)$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

2.113 Να λύσετε την εξίσωση $1-2^x+3^{x-1}=0$

2.114 Να λύσετε την εξίσωση $ln\left(1+xe^x\right)=x$

2.115 Να λύσετε την εξίσωση $2^x+5^x=2+5x$

2.116 Να λύσετε την εξίσωση $5^x=x+4^x$

2.117 Να λύσετε την εξίσωση $ln\,x-x+1=0$

2.118 Να λύσετε την εξίσωση $xe^x+1=e^x$

2.119 Να λύσετε την εξίσωση: $x^2+x+ln\,x=2$

2.120 Λύστε την εξίσωση
$(x+3)^{96}=(x+1)^{96}+16^{24}$

2.121 Δείξτε ότι η εξίσωση $4x^3+2\lambda x-\lambda-1=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$ για κάθε $\lambda\in R$.

2.122 Αποδείξτε ότι για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in R$ η εξίσωση $e^x=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ έχει μέχρι τρείς ρίζες στο R

2.123 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$ με $\beta^2<\alpha\gamma$, $\alpha\neq 0$ έχει μοναδική ρίζα στο R

2.124 Δείξτε ότι η εξίσωση $x^8=7x+6$ δεν έχει περισσότερες από δύο διαφορετικές ρίζες στο R

2.125 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha\cdot ln^3x+\beta\cdot ln^2x+\gamma\cdot ln\,x+\delta=0$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ και $3(2\alpha+\gamma+\delta)+4\beta=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(1,e^2\right)$

2.126 Να δείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών της εξίσωσης $e^x\eta\mu x=1$ υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $e^x\sigma\upsilon\nu x=-1$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

2.127 Αποδείξτε ότι $\frac{1}{x+1}<\ln\frac{x+1}{x}<\frac{1}{x}$, $x>0$

2.128 Αποδείξτε ότι $\left|\ln\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}\right|\leq|\alpha-\beta|$, $\alpha,\beta\in R$

2.129 Δείξτε ότι $|\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha|\leq|\beta-\alpha|$, $\alpha,\beta\in R$

2.130 Δείξτε ότι $1+x\leq e^x\leq 1+xe^x$, $0\leq x\leq 1$

2.131 Να αποδείξετε τις ανισότητες:

Α) $xe^{\frac{1}{x+1}}<x+1<xe^{\frac{1}{x}}$ για κάθε $x>0$.

Β) $2-\frac{e}{\pi}<\ln\pi<\frac{\pi}{e}$

2.132 Να αποδείξετε τις ανισότητες:

Α) $\frac{x}{x+1}<\ln(x+1)<x$ αν $x>0$

Β) $x\leq e^{x-1}\leq 1+(x-1)e$ αν $x\in(1,2)$

2.133 Δείξτε ότι $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$, $x>0$

2.134 Για κάθε $0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{4}$ να αποδειχτεί ότι

$$1+2\alpha\leq\varepsilon\varphi\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\leq 1+\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+\frac{\pi}{4})}$$

2.135 Έστω f παραγωγίσιμη στο R της οποίας η παράγωγος είναι γνησίως φθίνουσα στο R. Δείξτε ότι: $f(1999)+f(2002)<f(2000)+f(2001)$

2.136 Αν f συνεχής στο $[1,5]$ με $f(1)=-2$ και $|f'(x)|<2$, $\forall x\in(1,5)$ να δείξετε ότι $-10<f(5)<6$

2.137 Έστω f παραγωγίσιμη στο R. Αν $f(x)\geq\frac{f(0)+f(10)}{2}$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(0,10)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o)=0$

ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

2.138 Δίνεται συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε: $f'''(x)+2f'(x)=f''(x)+2f(x)$, για κάθε $x\in R$ και $f(0)=f'(0)=f''(0)=1$. Να αποδείξετε ότι :

Α) Οι συναρτήσεις $h(x)=f(x)e^{-x}$ και $g(x)=\left[f''(x)-f'(x)\right]^2+2\left[f'(x)-f(x)\right]^2$ είναι σταθερές συναρτήσεις

Β) Να βρεθεί ο τύπος της f.

2.139 Θεωρούμε συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει ότι: $|f(x)-f(y)|+\sigma\upsilon\nu(x-y)\le 1$ για κάθε $x,y\in R$. Να δειχτεί ότι η f είναι σταθερή

2.140 Να βρείτε την f αν $f'(1-2x)=7-12x$, $x\in R$ και $f(1)=2$

2.141 Να βρείτε την f αν $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, $x\in R^*$ και $f(-1)=f(1)=2$

2.142 Να αποδειχτεί ότι:

Α) αν $f''(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=f'(0)=1$ τότε $f(x)=e^x$, $x\in R$,

Β) αν $\delta''(x)=\delta(x)+5x$ για κάθε $x\in R$, $\delta(0)=1$ και $\delta'(0)=-4$, τότε $\delta(x)=e^x-5x$, $x\in R$

2.143 Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο R παραγωγίσιμη στο R^* με $f(0)=0$, της οποίας όλες οι εφαπτόμενες διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Να βρείτε εκείνη τη συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $(2,1)$ και $(-2,1)$

2.144 Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x)=(2x+1)f(x)$, $\forall x\in R$ αν και μόνο αν υπάρχει $c\in R$ ώστε $f(x)=ce^{x^2+x}$

2.145 Να βρείτε την f, αν για κάθε $x\in R$ ισχύει $f'(x)-f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ και $f(0)=1$.

2.146 Αν η $f:(0,\pi)\to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ και $f''(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ να αποδείξετε ότι $f(x)=\alpha\eta\mu x$, $\alpha\in R$.

2.147 Να βρεθεί η συνάρτηση $f:R\to R$ αν ισχύει: $(x-2)f'(x)=2x^2-5x+2$, $x\in R$ και $f(3)=7$

2.148 Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ αν ισχύει ότι $f'(x)=f(x)\cdot\ln[f(x)]$ για κάθε $x>0$ και $f'(1)=0$

2.149 Να βρεθεί, αν υπάρχει, συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο R^* και για κάθε $x\in R^*$ ισχύει $f(x)=xf'(x)$, $f(1)=1$ και $f(-1)=2$.

2.150 Να βρείτε τη συνάρτησης f με $f(0)=2$, αν ισχύει $\left(f(x)-e^x\right)\left(f'(x)-e^x\right)=0$, $\forall\ x\in R$

2.151 Βρείτε την εξίσωση της καμπύλης που διέρχεται από το $M(0,-3)$ και σε κάθε σημείο της με τετμημένη α έχει εφαπτομένη με $\lambda_{\varepsilon\varphi}=\dfrac{4\alpha}{4\alpha^2+1}$

2.152 Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, αν ισχύει ότι $f'(1)=0$ και $f'(x)=f(x)\cdot\ln[f(x)]$ για κάθε $x>0$

2.153 Δίνεται η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R ώστε να ισχύει $[f'(x)+f(x)]e^{2x}=f(x)-f'(x)$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=1$. Βρείτε τον τύπο της f

2.154 Αν η $f:(0,\pi)\to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ και $f''(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in(0,\pi)$, δείξτε ότι $f(x)=\alpha\eta\mu x$, $\alpha\in R$.

2.155 Να βρεθεί συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f(x)>0$, $x\in R$, $f(1)=9$ και της οποίας η γραφική παράσταση σε κάθε σημείο $M(x,f(x))$ έχει εφαπτομένη με κλίση $4x\sqrt{f(x)}$, $x\in R$

2.156 Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f αν είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, η C_f διέρχεται από το $O(0,0)$ η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $O(0,0)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $-2x+y+3=0$ και ισχύει $(x^2+1)\cdot f''(x)+4x\cdot f'(x)+2f(x)=0,\ x\in R$

2.157 Έστω οι συναρτήσεις f και g δυο φορές παραγωγισιμες στο R με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ Αν δέχονται κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο τους και ισχύει $f''(x)g(x)=f(x)g''(x)$ για κάθε $x\in R$, να δείξετε ότι $f(x)=g(x)$

2.158 A) Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $f''(x)+f(x)=0$, $x\in R$ και $f(0)=f'(0)=0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι η μηδενική συνάρτηση.

B) Έστω συνάρτηση $g:R\to R$ με $g''(x)+g(x)=0$ για κάθε $x\in R$ και $g(0)=0$, $g'(0)=1$. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=\eta\mu x$.

2.159 * Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f(0)=0$ για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x)\left(e^{f(x)}+1\right)=2x+\frac{2x}{x^2+1}$$ για κάθε $x\in R$. Να βρεθεί ο τύπος της f.

2.160 Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ και $\nu\in N$. Αν $\nu\geq 2$ και ισχύει $|f(x)-f(y)|\leq|x-y|^{\nu}$, $\forall x,y\in R$ τότε ναδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

2.161 Να βρείτε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R, αν η εφαπτομένη στη γραφική της παράσταση σε κάθε σημείο $(x,f(x))$ να έχει κλίση $2xe^{-x}-f(x)$ και το $A\left(1,\frac{2}{e}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f

2.162 * Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,\ y\in(0,+\infty)$ και $f(e)=e$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ότι $f(x)=e\ln x$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

2.163 Έστωι η συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε να ισχύει ότι και $f(x+y)=xy+y^2+f(x)$ για κάθε $x,y\in R$, $f(1)=-1$, $f(2)=2$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρεθεί ο τύπος της

2.164 Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R με $f'(0)=2$ και ισχύει $f(y+x)=f(y)f(x)e^{2xy}$, για κάθε $x,y\in R$. Να αποδείξετε ότι:

A) $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=1$

B) η f είναι παραγωγίσιμη στο R

Γ) ο τύπος της f είναι $f(x)=e^{x^2+2x}$

2.165 Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1)=1$ για την οποία ισχύει $f(xy)=x^2f(y)+y^2f(x)$. για κάθε $x,y>0$.

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$

B) Δείξτε ότι $f(x)=x^2\ln(x)$ για κάθε $x>0$

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ- ΑΚΡΟΤΑΤΑ

2.166 Μελετήστε τη μονοτονία των συναρτήσεων

Α) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ Β) $f(x)=\dfrac{x^x}{(x-1)^{x-1}}$, $x\in(1,+\infty)$

Β) $f(x)=x+συνx$, $x\in[0,2π)$

2.167 Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}e^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R

2.168 Μελετήστε τη μονοτονία των συναρτήσεων

Α) $f(x)=\begin{cases} e^x-ex-1 & x\le 0 \\ x^2\ln x & x>0 \end{cases}$

Β) $f(x)=\ln(1+x^2)-e^{-x}+1$

2.169 Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x^2|x-1|}$ στο $\left[0,\dfrac{2}{3}\right]$

2.170 Να βρεθεί ο $α\in R$, ώστε η συνάρτηση $f(x)=(x^2+αx+1)e^x$ να είναι γνησίως αύξουσα στο R

2.171 Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0)=0$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x>0$ είναι γνησίως φθίνουσα.

2.172 Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ και για κάθε $x\in[0,+\infty)$ ισχύει

$$f^5(x)+f(x)=(x+1)\ln(x+1)-x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+1.$$

Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

2.173 Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases} -2x & αν\ -3\le x<0 \\ -x^2+4x & αν\ \ 0<x<4 \\ -x-2 & αν\ \ 4\le x\le 6 \end{cases}$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ -ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

2.174 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln(x-1)}{\ln x}$, $x\ge 2$

Α) να μελετήσετε τη μονοτονία της f

Β) να αποδείξετε ότι:

α) $\ln(e^π-1)\ln(e^π+1)<π^2$.

β) $\ln(x-1)\cdot\ln(x+1)<\ln^2 x$, $x>2$

2.175 Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln(x-1)+x^2+x-6=0$

2.176 Λύστε την εξίσωση $\ln(x+1)-\dfrac{2x}{x+2}+x=0$

2.177 Να λύσετε την εξίσωση $e^{x+1}+2x-e=0$

2.178 Για κάθε $x\in[2+\infty)$ να αποδείξετε ότι

$$(x+1)συν\frac{π}{x+1}-xσυν\frac{π}{x}>1$$

2.179 Δείξτε ότι $2\ln(ημx)<ημ^2x$, $x\in(0,π)$

2.180 Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει ότι $f(1-x)=-f(1+x)$ για κάθε $x\in R$. Αν ισχύει $f'(x)\ne 0$, $\forall x\in R$, λύστε την εξίσωση $f(x)=0$

2.181 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία, ισχύουν $f(x)>0$ και $f^3(x)+\ln(f(x))+e^{f(x)}=x^3+x^2+2x-1$ για κάθε $x\in R$. Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x)=f(1-x^2)$

2.182 Αν $xg'(x)>συνx-g(x)$ για κάθε $x\in R$, να αποδείξετε ότι $g(x)>\dfrac{ημx}{x}$ για κάθε $x\ne 0$.

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

2.183 Να μελετήσετε τις συναρτήσεις ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα:

Α) $f(x)=x^2\ln x$ Β) $f(x)=2^{\sigma\upsilon\nu x}, 0\le x<2\pi$

Γ) $f(x)=\dfrac{\ell nx}{x^2}$ Δ) $f(x)=\dfrac{e^x}{2x}$ Ε) $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

2.184 Να μελετήσετε τις συναρτήσεις ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα:

Α) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x\le 0\\ \dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$ Β) $f(x)=\begin{cases}1-e^{x-1}, & x\ge 1\\ \ln(1-x), & x\prec 1\end{cases}$

2.185 Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^2\left(e^x-e\right)^2$ έχει ακριβώς τρία τοπικά ακρότατα.

2.186 Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha,\beta\in R$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\alpha\ln 2x+\dfrac{\beta}{x}+\alpha$ να έχει στη θέση $x_o=1$ τοπικό ακρότατο με τιμή $2+\ln 2$.

2.187 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $(f(x))^2+x^2=1+2xf(x)$, $\forall x\in R$. Δείξτε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

2.188 Έστω η συνάρτηση $f(x)=x\ln^2 x$. Βρείτε το σημείο της C_f όπου η f έχει τη μικρότερη κλίση.

2.189 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$ αν η συνάρτηση $f(x)=x^3-(\lambda-1)x^2+(\lambda+5)x-2$ δεν έχει ακρότατα.

2.190 Να βρεθεί ο $\kappa\in R$ ώστε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=xe^{2\kappa-x}$ να είναι το e.

2.191 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $(x_0,f(x_0))$, όπου x_o η θέση του τοπικού ακροτάτου της $f(x)=x\ln x+\lambda x$, $\lambda\in R$ όταν το λ διατρέχει το R

2.192 Για μια συνεχή συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει ότι $f'(x)=\begin{cases}(x+2)(x+1) & x<1\\ (x-2)(x+3) & x>1\end{cases}$. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f, τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακρότατων της f

2.193 Εστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[0,3]$ με $f'(x)>0$ και $f(1)=-1$, $f(2)=1$. Αν $g(x)=\dfrac{f(x)}{1+f^2(x)}$, $0\le x\le 3$, βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και το σύνολο τιμών της g

2.194 Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$. Αν υπάρχουν $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιοι ώστε $f(\alpha),f(\beta)\in\left(f(x_1),f(x_2)\right)$, αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ ώστε $f''(\xi)=0$.

2.195 Μία συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο R. Αν υπάρχει $\alpha\in R$ ώστε $f(\alpha)=f'(\alpha)=f''(\alpha)=0$ και $f'''(x)>0$ για κάθε x, τότε να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις $f''(x)=0$, $f'(x)=0$ και $f(x)=0$ έχουν μοναδική ρίζα.

2.196 Έστω η συνάρτηση $f:(0,1)\to R$, η οποία είναι παραγωγίσιμη τρεις φορές με $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Αν υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,1)$ με $x_1\ne x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=f(x_2)=0$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με $f^{(3)}(\xi)=0$.

2.197 **Αν $\left(x^2-4x\right)f'(x)+f(x)=0$, $\forall x\in[0,4]$, δείξτε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[0,4]$.

2.198 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$ ώστε η $f(x)=x^3-(\lambda-1)x^2+(\lambda+5)x-2$ να μην έχει ακρότατα

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

2.199 Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $συνx+2=x$ έχει στο $[0,π]$ ακριβώς μια λύση

2.200 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f^3(x)+f(x)=συνx$, $\forall x\in[0,π]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,π)$

2.201 Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $2\ln x=λx^2+1$ για κάθε $λ>0$

2.202 Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $8x^2\sqrt{x}-α\sqrt{x}+1=0$ όταν το $α\in R$

2.203 Να αποδείξετε ότι για κάθε $α\in R$ η εξίσωση $x^3-αx^2-4x+α=0$ έχει τρεις ρίζες

2.204 Αποδείξτε ότι για κάθε $α>0$ η εξίσωση $2αe^x=2+2x+x^2$ έχει μοναδική ρίζα στο R

2.205 ** Αν $f(x)=x^2-1+\ln(x)$, να λύσετε τις εξισώσεις:

A) $f(\ln(x-1))-f(6-x^2-x)=0$

B) $f(x)+f(x^{17})=f(x^3)+f(x^{2008})$

2.206 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x-1)\ln x=x+1$ έχει δύο ακριβώς ρίζες, οι οποίες είναι αντίστροφοι αριθμοί.

2.207 *Να βρείτε, για κάθε $α>0$, το πλήθος των θετικών ριζών της εξίσωσης $x^2+α=\sqrt{α}\,x^3$

2.208 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$. Βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(e^{-x})=f(x+α)$

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

2.209 Δείξτε ότι $εφx>x$, $\forall x\in\left(0,\frac{π}{2}\right)$.

2.210 Δείξτε ότι $6ημx\geq 6x-x^3$ για κάθε $x\geq 0$

2.211 A) Μελετήστε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x}{x^ν}, ν\in N^*$

B) Να δείξετε ότι $e^x\geq\left(\frac{ex}{ν}\right)^ν$, $\forall x\in(0,+\infty)$

2.212 A) να αποδείξετε ότι $e^π>π^e$

B) Να δειχθεί ότι: $π^{1821}>\left(1+\frac{1821}{π}\right)^π$

2.213 A) Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x)=2x^3-2x^2-x-\ln x$, $x>0$

B) Αν $α,β,γ\in(0,+\infty)$ με $α\cdot β\cdot γ=1$, δείξτε ότι $2(α^3+β^3+γ^3)+3\geq 2(α^2+β^2+γ^2)+α+β+γ$

2.214 Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f με $f(x)=\ln(1+x^2-e^{-x})$ είναι γνησίως αυξουσα

2.215 ** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln(1+x^2)-e^{-x}+1$ είναι γνήσια αύξουσα στο R και λύστε την εξίσωση $f(\ln x)=f(1-x^2)$

2.216 Να αποδείξετε ότι από το σημείο $A(1,1)$ άγονται ακριβώς δύο εφαπτόμενες προς τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^x$

2.217 Για κάθε $α>0$, $β>0$ με $α\neq β$ να δείξετε ότι $\ln\left(\frac{α+β}{2}\right)<\frac{α}{α+β}\ln α+\frac{β}{α+β}\ln β$

2.218 Δείξτε ότι $x^{\sqrt{x}}<e^{x-1}$, $\forall x\in(1,+\infty)$

ΔΙΝΕΤΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

2.219 Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύουν: $f(0)=1$ και $e^{2x}f(x)-1\le 0$, για κάθε $x\in R$. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,1)$

2.220 Αν ισχύει $e^x\ge \kappa x^2$ για κάθε $x>0$, $\kappa\in R$ να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\kappa\in R$

2.221 Αν $\alpha,\beta>0$ και ισχύει $\alpha^{\frac{\ln x}{x}}+\beta^{\frac{x-1}{x}}\le 2$ για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι $\alpha\cdot\beta=1$.

2.222 ¨Εστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-x^\alpha$, x>0, λ>0 με $f(x)\ge 0$, $\forall x>0$. Να δείξετε ότι $\alpha=e$ και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$.

2.223 Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f, που είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και ισχύει $f'(x)\le f(1)-f(0)$ για κάθε $x\in(0,1)$

2.224 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{e^x}+1-\lambda$, $\lambda\in R$

A) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ για την οποία ισχύει $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in R$.

B) Αν $\lambda\ge 1+\dfrac{1}{e}$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$g(x)=(1-\lambda)x-\dfrac{x+1}{e^x}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

2.225 Έστω συνάρτηση $f(x)=x^\lambda-\ln(x)$, $\lambda>0$

A) Να βρείτε την μικρότερη τιμή του λ για την οποία ισχύει ότι $x^\lambda\ge\ln(x)$ για κάθε $x>0$

B) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το ελάχιστο της f παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

2.226 Έστω μια συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x)>2f(x)$ και $f(0)=1$. Να αποδείξετε ότι $f(x)>e^{2x}$ για κάθε $x>0$.

2.227 Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0)=0$ και $f'(x)+f(x)>0$ για κάθε $x\in R$, δείξτε ότι $xf(x)>0$ για κάθε $x\ne 0$

2.228 Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f(0)=f'(0)=0$ και $f''(x)<2x$ για κάθε $x\in R$. Δείξτε ότι $3f(1)<1$

2.229 Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο R με $f(0)=g(0)$ και για κάθε $x\in R$ να ισχύουν $f'(x)g(x)>f(x)g'(x)$ και $g(x)>0$. Να αποδείξετε ότι: $f(x)\ge g(x)$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ και $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in(-\infty,0]$.

2.230 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x)>f''(x)$, $x\in R$ που παρουσιάζει για $x_o=0$ τοπικό ακρότατο το $f(0)=0$. Να δείξετε ότι: $x\big(f(x)-f'(x)\big)>0$

2.231 Έστω συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f(0)=2$, $f'(0)=0$, και $f''(x)+x>0$ για κάθε $x\in R$, δείξτε ότι

$f(x)\ge 2\left(1-\dfrac{x^3}{12}\right)$, $x\in R$

2.232 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^\alpha e^{2-x}$ με $x>0$, $\alpha\in(0,+\infty)$. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία το μέγιστο της f παίρνει την ελάχιστη τιμή του

2.233 Έστω οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$ που είναι παραγωγίσιμες και για κάθε $x\in R$ ισχύουν $f(x)\ge x+1$ και $f(x)e^{g(x)}=e^x-x$. Αν η C_f διέρχεται από το $(0,1)$ δείξτε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στο $x_o=0$ τέμνονται κάθετα

ΚΥΡΤΕΣ-ΚΟΙΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

2.234 Να μελετήσετε τις συναρτήσεις ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

Α) $h(x)=x^2+\frac{8}{x}$ Β) $g(x)=3x^5-5x^3$

Γ). $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ Δ) $f(x)=xe^{-x}$

2.235 Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)$, $x\in IR$ έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής

2.236 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\ln^2 x+2x\ln x+x^2-3$ είναι κυρτή

2.237 Αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $f(x)=x^5+5\alpha x^4+10\beta x^3+x^2$, $x\in R$, $\alpha,\beta\in R$ έχει τρία σημεία καμπής, να αποδείξετε ότι $\alpha^2>\beta$.

2.238 Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν $f(x)<x$ και $f'(x)=\frac{x}{x-f(x)}$ για κάθε $x>0$. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

2.239 Δίνεται ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha\sqrt{x}+\beta\ln x+\beta x$ με $\alpha,\beta\in R$, έχει σημείο καμπής το $A(1,3)$

Α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=4$ και $\beta=-1$:

Β) Βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο A και να αποδείξετε ότι $4\sqrt{x}-\ln x\le x+3$, $\forall x\ge 1$.

2.240 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ με την ιδιότητα $(x^2+x+1)f''(x)+xe^{f(x)}=0$ για κάθε $x\in R$. Να δειχθεί ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

2.241 Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Να αποδείξετε ότι δεν είναι δυνατόν η f να έχει στο x_o τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής.

2.242 Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha\in IR$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2x^4+4\alpha x^3+3\left(2\alpha^2-4\alpha+5\right)x^2+\alpha x+1$ με $x\in R$, δεν έχει σημεία καμπής.

2.243 Έστω συνάρτηση $f:(0,1)\to R$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει ότι $f^2(x)+(x-4)f(x)+x=0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής

2.244 Έστω συνάρτηση f με f'' συνεχή και $xf''(x)-\eta\mu 2x=0$, $x\in R$. Να δείξετε ότι το $A(0,f(0))$ δεν μπορεί να είναι σημείο καμπής της C_f

2.245 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f''\searrow$ στο R $f'(x)\neq 0$, $\forall x\in R$, $f'(1)>0$ και η συνάρτηση $g(x)=f(x)-f(2-x)$, $\forall x\in R$. Να βρείτε τις ρίζες το πρόσημο της g, τα διαστήματα που η g είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής της C_g

2.246 Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ η οποία είναι κυρτή με $f(0)=0$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ είναι γνήσια αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

2.247 Αν $f(x)=2e^{\lambda x}-x^2-\frac{2}{\lambda^2}$, $\lambda>0$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων καμπής της γραφικής παράστασης της f, για κάθε $\lambda\in(0,+\infty)$

2.248 Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f(x)+e^{f(x)}=1+x-x^2-e^x$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση

Α) δεν έχει σημεία καμπής

Β) έχει ένα ακριβώς κρίσιμο σημείο.

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

2.249 A) Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σε διάστημα Δ. Να δείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \text{ (Jensen)}$$

B) Δείξτε ότι $e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}-1 \ge \sqrt{(e^{\alpha}-1)(e^{\beta}-1)}$ $\forall \alpha,\beta \in R_+$

Γ) Δείξτε ότι $\ln\frac{\alpha+\beta}{2} \ge \sqrt{\ln\alpha \cdot \ln\beta}$, $\forall \alpha,\beta \in A_f$

2.250 Αν $x>0$, $y>0$, $\alpha>1$ και $x+y=1$, να αποδείξετε ότι ισχύει $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\alpha}+\left(y+\frac{1}{y}\right)^{\alpha} \ge \frac{5^{\alpha}}{2^{\alpha-1}}$

2.251 Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και ισχύει ότι $f''(x)>f(x)$ και $f(0)=f'(0)=0$. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή στο R

2.252 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$ με f' γνήσια αύξουσα και $f(1)=0$ Δείξτε ότι $f'(x)(x-1)>f(x)$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$.

2.253 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$ με παράγωγο γνήσια αύξουσα και $f(1)=0$. Δείξτε ότι $f'(x)(x-1)>f(x)$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$.

2.254 Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f:R\to R$ ώστε $f(x)>0$ και $f''(x)<0$, $\forall x\in R$

2.255 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ με

$$f(x)=\frac{e^{x-1}}{e^{x-1}+1} \text{ για } x\in R.$$

A) Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

B) Να δειχθεί ότι για κάθε $x>1$ ισχύει $f(\ln x)+f'(x-1)<f(x-1)+f'(\ln x)$

2.256 Αν οι $\alpha,\beta,\gamma\in R_+$ με $\alpha<\beta<\gamma$, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου δείξτε ότι $\beta^{\beta}<\sqrt{\alpha^{\alpha}\gamma^{\gamma}}$

2.257 Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο R και η γραφική παράσταση της f περνά από την αρχή των αξόνων, να δείξετε ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει ότι $3f(x)\ge 4f\left(\frac{3x}{4}\right)$

2.258 Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x+x^2-x-1$

A) Να αποδείξετε ότι η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη σε ένα μόνο σημείο της.

B) Να λύσετε την εξίσωση $e^x+x^2=x+1$.

Γ) Να αποδείξετε ότι $e^x-1\ge x(1-x)$, $\forall x\in R$

ΚΑΝΟΝΕΣ DE L΄ HOSPITAL

2.259 Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x)$,

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(xe^{\frac{1}{x}}\right)$, $\lim\limits_{x\to0^+}(xe^{-x}\ln x)$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

2.260 Να υπολογίσετε τα όρια:

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1-\sigma\upsilon\nu x)}{x}$ $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x\ln x)$

2.261 Να υπολογίσετε τα $\lim\limits_{x\to0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ και $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x}{\frac{1}{e^x}}$

2.262 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια

A) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$ B) $\lim\limits_{x\to1}[\ln x\cdot\ln(\ln x)]$

Γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right)$ Δ) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$ Ε) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\varepsilon\varphi x}$

2.263 Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$, ώστε να είναι παραγωγίσιμη στο x_o η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\ln x+\alpha-1, & x>1\\ e^{x-1}+\beta x-\beta, & x\le1\end{cases} \text{ και } x_o=1.$$

2.264 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

Α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{x\left(e^x-1\right)\eta\mu x}$ Β) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

Γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}}$ Δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}+2x+1}{4e^{-x}-x+3}$

2.265 Αποδείξτε ότι είναι συνεχής η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{1-x}, & 0\prec x\neq 1\\ -1 & , x=1\end{cases}$$ και ότι $f'(1)=-0,5$.

2.266 Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\eta\mu x}x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$

2.267 Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\left(x^3\ln^2 x\right)}{\left(x^6\ln^4 x\right)}$

2.268 Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}+2x+1}{4e^{-x}-x+3}$

2.269 Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3x+\ln x)\left(e^x+e^{-x}\right)}{(x+\ln x)\left(e^x-e^{-x}\right)}$

2.270 Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x-\eta\mu(\ln x)}{2\ln x+\sigma\upsilon\nu(\ln x)}$

2.271 Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x-\eta\mu x}{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}$

2.272 Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(e^{\eta\mu x}-1\right)\cdot\ln\left(e^x-1\right)\right)$

2.273 Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(\ln(x))-\ln x)$

2.274 Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\ln x-e^x\right)$

2.275 Αν $f(x)=\dfrac{2e^x-2x-2-x^2}{x^2}$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\sqrt{f(x)}}}{e^{f(x)}}$

2.276 Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{e^x-2-x}$

2.277 Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\ln x-e^x\right)^2}{e^{e^x-\ln x}}$

2.278 Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $xf(x)+e^{\eta\mu x}=f(x)\eta\mu x+e^x$ για κάθε $x\in R$. Να βρείτε το $f(0)$.

2.279 Έστω $f:R\to R$, συνεχής συνάρτηση, για την οποία ισχύει $(1-\sigma\upsilon\nu x)f(x)=\ln(1+x)-x$ για κάθε $x>-1$. Να βρείτε το $f(0)$.

2.280 Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Αν για κάθε $x\in R$ ισχύει $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+4h)-2f(x+2h)+f(x)}{h^2}=24x-8$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1,f(1))$ έχει εξίσωση $y=5x-8$, να βρείτε τον τύπο της f

2.281 Αν $f(x)=\begin{cases}x\ln x+\alpha x-\beta, & x\succ 0\\ 1 & , x=0\\ e^{\frac{1}{x}}\ln(-x)+\alpha, & x\prec 0\end{cases}$ να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_o=0$

2.282 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β,γ ώστε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\alpha e^x+\beta e^{-x}+\gamma}{x^2}=1$

2.283 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}e^{2\lambda}+x+1, & x<1\\ -\lambda^3x+3 & , x\geq 1\end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

2.284 Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1-e^x}$

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$, $k(x)=xe^{\frac{1}{x^2}}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\eta\mu x}{e^x-1}, & x>0\\ 0 & , x=0\end{cases}$,

$h(x)=e^x x^{-3}$, $\lambda(x)=x-\ln(e^x+1)$, ,

2.285 Έστω οι συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to R$ με $g(x)=f(x)+x+\ln(x+1)-\ln x$ για κάθε $x>0$. Αν η ευθεία $y=x+3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

2.286 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ και η g με $g(x)=xf(e^{-x})$. Αν η $y=2x+1$ εφάπτεται της C_f στο 0, να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

2.287 Έστω συνάρτηση $f:R\to R$, τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-x^2}{\ln x+x}=2$.

Αποδείξτε ότι η $y=x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

2.288 Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in R$ ώστε η γραφική παράσταση της f με $f(x)=\dfrac{(\alpha-1)x^2+\beta x+5}{3x+\gamma}$ να έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες $x=-2$ και $y=3$.

2.289 Να αποδείξετε ότι η $y=2x-2\ln 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)=2\ln(e^x+1)-2\ln 2$

2.290 Δίνεται ότι η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{1}{x^2+\alpha x+\beta}$ έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x=3$ και $x=5$. Να βρεθούν οι πραγματικοί α και β και να αποδειχτεί ότι η ευθεία $y=0$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

2.291 Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει $e^{-x}\le xf(x)\le 1$ για κάθε $x>0$. Να δείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι ασύμπτωτη της C_f.

2.292 Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της $f(x)=\eta\mu x\ln x$, $x>0$ δεν έχει ασύμπτωτες.

2.293 Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2x+3$.

Βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-\eta\mu x-x^2e^{-x}}{xf(x)-2x^2-\ln x+x^2\eta\mu\frac{1}{x}}$.

2.294 Για τη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ ισχύει ότι $x^2f'(x)=-f(x)$ για κάθε $x>0$ και $f(1)=e$. Να βρείτε τον τύπο της f και τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης

2.295 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in R$ ώστε να είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(2xe^{-\frac{1}{x}}-\alpha x+2\beta)=0$

2.296 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in R$ ώστε να είναι $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}-\alpha x-\beta\right)=2$

2.297 Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης f, που είναι συνεχής στο $R-\{0\}$ και για κάθε $x\in R-\{0\}$ ισχύει ότι $2x+\dfrac{3}{x}\le f(x)\le\dfrac{2x^3+3x+1}{x^2}$

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

2.298 Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

Α) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ Β) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ Γ) $f(x)=\ln(x^2+1)$,

2.299 Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

Α) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ Β) $f(x)=ημx+x$, $x\in[-π,π]$ Γ) $f(x)=x^3-12x$

2.300 Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

Α) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$, Β) $f(x)=ln(x^2+1)-x$ Γ) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$,

2.301 Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

Α) $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\geq 1\\ 1-x, & x<1\end{cases}$, Β) $f(x)=e^x(x^2-2x+2)$, Γ) $f(x)=x^x$, Δ) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

2.302 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

2.303 Αν Μ το σημείο του διαγράμματος της f με $f(x)=x\,ln\,x-λx+3$ που αντιστοιχεί στο τοπικό της ελάχιστο, να βρεθεί η απόσταση OM όταν ο ρυθμός μεταβολής του OM ως προς λ γίνει μηδέν.

2.304 Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $Α=90^o$, για το οποίο ισχύουν τα εξής. Η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες $(-4,0)$, η κορυφή A είναι στο διάστημα $[0,4]$ του άξονα $x'x$ και η κορυφή B είναι σημείο της παραβολής $y=4x-x^2$. Για ποια τιμή των συντεταγμένων του B το εμβαδό του τριγώνου $ΑΒΓ$ γίνεται μέγιστο ;

2.305 Το συνολικό κόστος x μονάδων ενός προϊόντος είναι $K(x)=30x^2-1000x-50$ και η συνολική είσπραξη $E(x)=2x^3-60x^2+200x+100$ σε χιλιάδες ευρώ. Να βρεθεί ο αριθμός των μονάδων του προϊόντος που πρέπει να παραχθεί ώστε να έχουμε θετικό ρυθμό μεταβολής του κέρδους (κερδοφόρα επιχείρηση).

2.306 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με (ΑΒ)=(ΑΓ)=1 cm. Να βρεθεί το μήκος της τρίτης πλευράς έτσι ώστε το εμβαδό του τρίγωνο να γίνεται μέγιστο.

2.307 Μια εταιρεία αυτοκινήτων εκτιμά ότι μπορεί να πουλήσει 2000 αυτοκίνητα τον μήνα, αν η τιμή πώληση του κάθε αυτοκινήτου είναι 5000 €. 'Εχει επίσης υπολογίσει ότι για κάθε μείωση της τιμής κατά 500 € το ένα, οι πωλήσεις αυξάνονται κατά 1000 αυτοκίνητα τον μήνα. Η αύξηση των πωλήσεων λόγω μείωσης της τιμής είναι ανάλογη της μείωσης αυτής. Αν η τιμή ενός αυτοκινήτου δεν μπορεί να είναι μικρότερη από 2000 €. Πόσα αυτοκίνητα πρέπει να πουλήσει η εταιρεία, ώστε να έχει τα μέγιστα έσοδα;

2.308 Η συνάρτηση που μας δίνει το κέρδος μιας επιχείρησης είναι: $P(t)=\dfrac{\ell n(t+1)}{(t+1)^2}$, $t\geq 0$. Να βρείτε:

Α) την χρονική στιγμή, κατά την οποία η επιχείρηση θα παρουσιάσει μέγιστο κέρδος.

Β) το μέγιστο κέρδος της επιχείρησης.

2.309 Ένα τουριστικό γραφείο οργανώνει εκδρομές με λεωφορεία. Κάθε λεωφορείο έχει 70 θέσεις. Ορίζεται οτι για να γίνει η εκδρομή χρειάζονται τουλάχιστον 30 συμμετοχές και τότε η τιμή ορίζεται στα 30 € για κάθε άτομο. Για να αυξήσει τις συμμετοχές το γραφείο κάνει της εξής προσφορά. «Για κάθε επιβάτη επιπλέον των 30, θα μειώνει κατά 30 λεπτά την χρέωση κάθε επιβάτη».

Α) Ποιο το πλήθος των επιπλέον επιβατών κάθε λεωφορείου που μεγιστοποιεί τα έσοδα;

Β) Ποια το μέγιστα έσοδα του γραφείου απο κάθε λεωφορείο;

2.310 Ενα φορτηγό διανύει καθημερινά 100 km με σταθερή ταχύτητα x km/h . Τα καύσιμα κοστίζουν $0{,}8$ € το λίτρο και καταναλώνονται με ρυθμό $2+\dfrac{x^2}{400}$ lt/h. Τα υπόλοιπα έξοδα του φορτηγού είναι 9 €/ώρα

Α) να εκφράσετε το κόστος της διαδρομής αυτής ως συνάρτηση της ταχύτητας x,

Β) να βρείτε την ταχύτητα που πρέπει να έχει το φορτηγό , ώστε τα έξοδά του να είναι τα ελάχιστα,

Γ) πόσα είναι τα ελάχιστα αυτά έξοδα;

2.311 Δίνεται η ευθεία $y=-2x-3$. Να βρείτε το σημείο της ευθείας αυτής το οποίο απέχει από το σημείο $A(9,4)$ τη μικρότερη δυνατή απόσταση.

2.312 Το άθροισμα δύο αριθμών είναι 82. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το γινόμενό τους.

2.313 Να βρείτε δύο θετικούς αριθμούς με γινόμενο 16, των οποίων το άθροισμα να είναι ελάχιστο.

2.314 Απ' όλα τα ορθογώνια με εμβαδό $64m^2$ ποιο είναι εκείνο που έχει τη μικρότερη περίμετρο.

2.315 Από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 24 cm να βρείτε εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

2.316 Δίνεται η παραβολή $y=x^2$. Να βρεθεί το πλησιέστερο σημείο της παραβολής στην ευθεία $y=3x-5$

2.317 Μια εταιρεία κατασκευάζει κυλινδρικά μεταλλικά δοχεία με όγκο $100cm^3$.Να βρείτε το ύψος υ και την ακτίνα R του δοχείου έτσι ώστε το κόστος κατασκευής τους να είναι το μικρότερο δυνατό.

2.318 Θέλουμε να τυπώσουμε σελίδες εμβαδού $384cm^2$ έτσι ώστε τα περιθώρια του κειμένου να είναι $3cm$ πάνω και κάτω και $2cm$ δεξιά και αριστερά. Ποιες διαστάσεις πρέπει να έχει κάθε σελίδα, ώστε το κείμενο να καταλαμβάνει το μεγαλύτερο δυνατό χώρο της σελίδας;

2.319 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(3,4)$ και σχηματίζει με τους ημιάξονες Ox και Oy τρίγωνο ελαχίστου εμβαδού.

2.320 Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{A}=90^o$, για το οποίο ισχύουν τα εξής. Η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες $(-4,0)$, η κορυφή A είναι στο διάστημα $[0,4]$ του άξονα $x'x$ και η κορυφή B είναι σημείο της παραβολής $y=4x-x^2$. Για ποια τιμή των συντεταγμένων του B το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ γίνεται μέγιστο ;

2.321 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με (ΑΒ)=(ΑΓ)=1 cm. Να βρεθεί το μήκος της τρίτης πλευράς έτσι ώστε το εμβαδό του τρίγωνου να γίνεται μέγιστο.

2.322 Να βρείτε δύο θετικούς αριθμούς με γινόμενο 16, των οποίων το άθροισμα να είναι ελάχιστο.

2.323 Απ' όλα τα ορθογώνια με εμβαδό $64m^2$ ποιο είναι εκείνο που έχει τη μικρότερη περίμετρο.

2.324 Από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 24 cm να βρείτε εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

2.325 Ένας πληθυσμός μικροβίων P μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες) σύμφωνα με τον τύπο $P(t)=10^3-5\cdot10^2(1+t)^{-1}$

Α) Να βρείτε τον αρχικό χρόνο αριθμό μικροβίων $(t=0)$

Β) Να βρείτε τον αριθμό των μικροβίων όταν $t=9$ ώρες

Δ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού των μικροβίων ως προς το χρόνο, όταν $t=9$ ώρες

2.326 Μια εταιρεία διαθέτει 20000 € για να περιφράξει ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου.Η πλευρά ΑΒ πρόκειται να κατασκευαστεί από υλικό που κοστίζει 6 €/m και οι πλευρές ΑΔ και ΒΓ από υλικό που κοστίζει 5 €/m. Στην πλευρά ΓΔ θα κατασκευαστεί ένας τοίχος του οποίου το κόστος θα ανέλθει σε 4000 €.Να βρείτε τις διαστάσεις του οικοπέδου ώστε να έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

2.327 Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x)=\frac{|1-\ln x|}{x}, x>0$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Αν η τετμημένη του σημείου $\mathrm{M}(x,f(x))$ μεταβάλλεται με ρυθμό 1 μ / sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε(t) του τριγώνου ΑΟΒ, όπου $A(x,0)$, $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{B}(0,f(x))$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία είναι $x(t_0)=4$

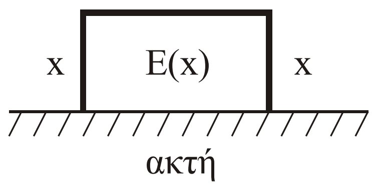
2.328 Σε ημικύκλιο διαμέτρου $2R$ να εγγραφεί τραπέζιο με βάση την διάμετρο και να έχει μέγιστο εμβαδόν.

2.329 Ένας ιχθυοκαλλιεργητής πήρε άδεια να χρησιμοποιήσει μία θαλάσσια περιοχή σχήματος ορθογωνίου την οποία θα περιφράξει με δίχτυ μήκους 600 μέτρων. Μόνο οι τρεις από τις τέσσερις πλευρές πρόκειται να περιφραχτούν με δίχτυ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ της θαλάσσιας περιοχής που θα χρησιμοποιηθεί δίνεται από τον τύπο $E(x)=-2x^2+600x$ (υποθέτουμε ότι $0<x<300$).

Β) Να υπολογίσετε την τιμή του x έτσι ώστε το εμβαδόν $E(x)$ της περιοχής να γίνει μέγιστο.

Γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού.



2.330 Δίνεται ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 10 m του οποίου τα άκρα A και B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντίστοιχα. Το σημείο B κινείται με ταχύτητα $u=2\frac{m}{sec}$ και η θέση του στον άξονα Ox δίνεται από την συνάρτηση $S(t)=ut,\ t\in[0,5]$ όπου t ο χρόνος σε sec.

Α) Να βρεθεί το εμβαδό $E(t)$ του τριγώνου OAB ως συνάρτηση του t

Β) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του $E(t)$ τη στιγμή κατά την οποία το μήκος OA είναι 6 m;

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.331 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+12x$, όπου $\alpha,\beta\in R$, η οποία παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_o=2$ και η εφαπτόμενη της στο σημείο $A(1,f(1))$ διέρχεται από το $(3,5)$.

Α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in R$ και το σύνολο τιμών της f.

Β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

Γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2004$ έχει μόνο μία λύση.

Δ) Να βρεθούν τα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\kappa}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^\kappa}$, $\kappa\in Z$

2.332 Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύουν :

- $f(-1)=0$
- $f(x)=3f'(x)-2x+1$ για κάθε πραγματικό αριθμό x

Α Δείξτε ότι $f(x)=3e^{\frac{x+1}{3}}-2x-5$, $x\in R$

Β. Δείξτε ότι η f' αντιστρέφεται και να ορίσετε την $(f')^{-1}$.

Γ. Να λυθεί η εξίσωση : $f\left(e^{x^2}+1\right)=f\left(x^2+2\right)$ στο R

Δ. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α η εξίσωση $(f')^{-1}(x)+1=\ell n(\alpha x)$ έχει ακριβώς μια ρίζα;

2.333 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{\alpha}{x}+\alpha$ με $x>0$. Αν για κάθε $x>0$ είναι $f(x)\geq 0$ τότε

Α) να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$,

Β) να λύσετε την εξίσωση $x^x=e^{x-1}$, $x>0$

Γ) να λύσετε την ανίσωση $\ln\left(2x^2+2\right)-\frac{1}{x^2+3}>\ln\left(x^2+3\right)-\frac{1}{2x^2+2}$

2.334 Θεωρούμε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)=e^{x-f(x)}+e^{2\ln x-f(x)}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $f(0)=0$. Να αποδείξετε ότι:

Α) Η f δεν παρουσιάζει ακρότατο σε κανένα σημείο του διαστήματος $(0,+\infty)$.

Β) Το θεώρημα του Rolle δεν εφαρμόζεται σε κανένα διάστημα της μορφής $[0,x_o]$.

Γ) Ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x)=\ln\frac{3e^x+x^3}{3}$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

Δ) Η f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

Ε) Η ευθεία (ε) : $y=-\frac{3e+1}{3e+3}x+1$ είναι κάθετη στην εφαπτομένη της C_f στο $x_o=1$

2.335 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\lambda-\ln x$, $\lambda\in R$

Α) Να βρείτε τα ακρότατα της f

Β) Να αποδείξετε ότι $\ln x\le \frac{x}{e}$ για κάθε $x>0$

Γ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Δ) Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in R$ το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $xe^{\lambda}=e^{x}$

2.336 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{x}{\alpha}\right)-\frac{x}{\alpha}+1$ με $\alpha>0$

Α) Να βρείτε το πρόσημο της f.

Β) Να λύσετε την εξίσωση $e\frac{x}{\alpha}=e^{\frac{x}{\alpha}}$ για κάθε $\alpha>0$

Γ) Αν ισχύει ότι $\ln\left(\frac{x}{\alpha}\right)\le\frac{\beta x}{\alpha}-\beta$ για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι $\beta=1$.

2.337 *Εστω συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R, που ικανοποιεί τις σχέσεις $f(x)-e^{-f(x)}=x-1$, $x\in R$ και $f(0)=0$

Α. Να εκφράσετε την f' συναρτήσει της f και να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R

Β. Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{2}<f(x)<xf'(x)<x$, για κάθε $x>0$.

Γ. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

2.338 * Έστω συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με, $g(1)=-2-\lambda$, $g'(1)=-8$, $g(x)+\lambda x+4\le\frac{2}{x}$ και $g(x)\ge -4-6x+\frac{1}{4x}$ για κάθε $x>0$

Α) Να βρείτε τον αριθμό λ

Β) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$ και να υπολογίσετε το $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)+\eta\mu x+4}{xg(x)+6x^2+\ln x}$

2.339 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:IR\to IR$ για την οποία ισχύει : $e^{f(x)}+f(x)=x+1$ για κάθε $x\in IR$ και έχει σύνολο τιμών το R .

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να ορίσετε την f^{-1} Μονάδες 4

Β. Να δείξετε ότι $f(0)=0$ και να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(0,f(0))$

Γ. Να μελετήσετε την f ως προς τη κυρτότητα και να δείξετε ότι $2f(x)\le x$, για κάθε $x\in IR$

Δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\xi\in(0,2)$, ώστε $f(\xi)=\frac{(\xi-1)\sqrt{e^{\xi}}}{2}$

Ε) Να βρείτε τα κοινά σημεία των f και f^{-1} και να αποδείξετε ότι το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων στις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} στα σημεία τους με τετμημένες x και $f(x)$ αντίστοιχα , ισούται με ένα

Νικολόπουλος

2.340 Έστω συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty,4)$ για την οποία ισχύουν:

$e^{f(x)}=3f'(x)f''(x)$ για κάθε $x<4$, $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x<4$ και $f(1)=0$, $f'(1)=1$

A) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,4)$, να βρείτε το πρόσημο της f και να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ σε ένα μόνο σημείο.

B) Να δείξετε ότι $3f''(x)=(f'(x))^2$ και ότι η C_f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(-\infty,4)$

Γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_o\in(0,1)$ ώστε $f(x_0)=-x_0f'(x_0)$ (3)

Δ) Να βρείτε τον τύπο της f για $x<4$

Ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μοναδική λύση στο $(-\infty,4)$ για κάθε $\kappa\in R$

Στ) Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

Ζ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

2.341 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$.

A) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x)=|f(x)|$

B) Αν επιπλέον είναι $0<f(x)\neq 1$ για κάθε $x\in R$ και $f(1)=e$, $f'(1)=1$ τότε:

α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x)=|\ln(f(x))|$

Β) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=|\ln(f(x))|$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$

2.342 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ η οποία είναι έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο IR.

Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2f(x-3h)-5f(x)+3f(x+2h)}{h^2}=\dfrac{60}{x^3}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\sqrt{4x^2+9}\right)=2004$, να δείξετε ότι

A) $f''(x)=\dfrac{4}{x^3}$

B) η ευθεία $y=2x+2004$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Γ) $f(x)=\dfrac{2}{x}+2x+2004$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

2.343 ** Δίνεται συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία γνωρίζουμε ότι: $f(0)=0$ και $f'(x)=\dfrac{1}{3f^2(x)+1}$ για κάθε $x\in R$.

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=f^3(x)+f(x)-x$, $x\in IR$ είναι σταθερή.

B) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$

Γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_o=0$

Δ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=0$

2.344 **Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει ότι $f(f'(x))+f(x)=0$ για κάθε $x>0$. Να αποδείξετε ότι:

Α) η f είναι $1-1$ Β) $f'(f'(x))=x$ για κάθε $x>0$ Γ) αν $f(1)=1$ τότε $f(x)=\ln x$.

2.345 Έστω f συνεχής στο , παραγωγίσιμη στο (α,β)) με $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$

Α) Να δείξετε ότι υπάρχει τέτοιο ώστε $f'(\xi)=1$

Β) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοια ώστε $2f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=3$

Γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=\dfrac{2\alpha+\beta}{3}$.

Δ) Αν $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ τότε υπάρχουν $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1\neq x_2$ τέτοια ώστε $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{2}{f'(x_2)}=3$

2.346 * Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμη στο (α,β) και κυρτή στο $[\alpha,\beta]$. Αν $f(\alpha)<f(\beta)$ να αποδείξετε ότι:

Α) υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

Β) υπάρχουν $x_1\in(\alpha,\beta)$ και $x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1\neq x_2$ τέτοια ώστε: $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2\cdot\dfrac{\beta-\alpha}{f(\beta)-f(\alpha)}$

Γ) το x_o του (Α) ερωτήματος βρίσκεται πλησιέστερα στο β απ' ότι στο α.

2.347 Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,e]$ με $f(1)=2$, $f(e)=e+1$ και σύνολο τιμών το $[-1,4]$. Να αποδείξετε ότι :

Αα) Υπάρχουν $x_1,x_2\in(1,e)$ με $x_1\neq x_2$ ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

β) Υπάρχει $\xi\in(1,e)$ ώστε $f''(\xi)=0$

γ) Υπάρχει $x_o\in(1,e)$ ώστε $f(x_o)\left(f'(x_o)-4f^4(x_o)\right)=x_o$

Βα) Η ευθεία $y=-x+e+2$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο $(1,e)$

β) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,e)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ ώστε να ισχύει ότι $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$

2.348 Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x\in R$ ισχύει: $f^2(3x+1)+4\leq 4\cdot f(2x^2+x+1)$. Να αποδείξετε τα εξής:

Α Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,4)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=0$

Β Η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται

Γ $f'(1)=f'(4)$

Δ Η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο R

2.349 Ένα σώμα κινείται στον άξονα $x'x$ και η θέση του δίνεται από τη συνάρτηση $x(t)=t^3-6t^2+9t-4$ όπου t είναι ο χρόνος σε sec. Να βρείτε:

Α) που βρίσκεται και προς ποια κατεύθυνση κινείται το σώμα τη χρονική στιγμή $t_o=0$

Γ) ποιες χρονικές στιγμές το σώμα αλλάζει κατεύθυνση,

Δ) πόσες φορές αλλάζει η κατεύθυνση της κίνησης

Ε) ποια χρονική στιγμή δεν επιταχύνεται το σώμα.

2.350 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} x^2\ln x, & x>0 \\ \kappa \quad , & x=0 \end{cases}$

Α. Να αποδείξετε ότι $\kappa=0$

Β. i) Να βρείτε την παράγωγο της f.

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να εξετάσετε αν παρουσιάζει καμπή.

Δ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\ge 1$ ισχύει : $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x}>1+\ln x^2$.

Ε. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{f(x+1)}{(x+1)^2}-\dfrac{f(x)}{x^2}\right)\cdot \eta\mu x\right]$

Στ. Να αποδείξετε ότι $2f(1+h)<f(1+2h)$, όπου $h>0$. Νικολόπουλος

2.351 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$f^2(x)=x^6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(-2)<0<f(2)$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3, x\in\mathbb{R}$

Β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}

Γ. Να αποδείξετε ότι:

α) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\alpha,f(\alpha))$ με $\alpha\ne 0$ έχει με τη C_f και άλλο κοινό σημείο, το Ν.

β) η κλίση της C_f στο σημείο Ν είναι τετραπλάσια της κλίσης της C_f στο Μ

Δ. Ένα σημείο $\Sigma(x,y)$ με $x>0$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3$ και έστω Α η προβολή του Σ στον άξονα x'x. Το σημείο Α απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων Ο(0,0) με ρυθμό $1\,\mathrm{cm}/\mathrm{s}$. Τη χρονική στιγμή t_0 που η τετμημένη του Σ είναι 2 να βρείτε το ρυθμό μεταβολής.

α) της απόστασης ΑΣ

β) της γωνίας ΣΟΑ Λεόντιος

2.352 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} x^2\ln x &, x>0 \\ \alpha &, x=0 \end{cases}$

Α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$

Β. Να βρείτε την παράγωγο της f

Γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

Δ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\geq 1$ ισχύει : $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x}>1+\ln x^2$

Ε. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{f(x+1)}{(x+1)^2}-\dfrac{f(x)}{x^2}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu 3x\right]$ Κολλέγιο Αθηνών

2.353 Θεωρούμε επίσης της συνάρτηση $G:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$ που είναι μία παράγουσα της συνάρτησης

$g(x)=\dfrac{f(x)-2}{x-2}$, x>2 Να αποδείξετε ότι :

Α. $f'(2)=0$ καθώς επίσης ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=2$

Β. Η συνάρτηση G είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $G(3^x+2)+G(2^x+2)=G(e^x+2)+G(2016^x+2)$

Δ. Η συνάρτηση G είναι κυρτή

Ε. Υπάρχει $\xi\in(3,4)$ τέτοιο ώστε $(2\xi^2-11\xi+14)G(\xi)=(\xi^2-7\xi+12)(2-f(\xi))$

Κολλέγιο Αθηνών

2.354 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x\cdot f(x)+3\eta\mu x=x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Α. Να δείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} x-\dfrac{3\eta\mu x}{x} &, \alpha\nu\ x\neq 0 \\ -3 &, \alpha\nu\ x=0 \end{cases}$.

Β. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

Γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=e^{-x}$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα . Αρσάκειο

2.355 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$

Α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$

Β. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση g για την οποία ισχύει : $|g(x)+3x-2|\leq|f(x)|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α. Αποδείξτε ότι η ευθεία $y=-3x+2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g στο $+\infty$

β. Να υπολογίσετε τα όρια : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^{g(x)}+5^{g(x)}}{4^{g(x)}-3^{g(x)+1}}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2g(x)-x}{xg(x)+x^2\left(3+\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)}$ Αρσάκειο

2.356 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x-1}{e^x-x}$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

Β. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία $A\left(x_1,f(x_1)\right)$, $B\left(x_2,f(x_2)\right)$ με $x_1<1<x_2$, στα οποία οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f είναι παράλληλες στον $x'x$.

Γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\Gamma\left(\xi,f(\xi)\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f΄ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Δ. Να βρείτε τα όρια : $L_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f^3(x)}$, $L_2=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\eta\mu x-\eta\mu x}{e^x-e^{\ln x}}$ Νικολόπουλος

2.357 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}x^2+\alpha x+\beta, & x>2\\ 4\sqrt{x+2}-2, & -2\le x\le 2\end{cases}$ και $g(x)=\ln x+\kappa$, όπου η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ και κ πραγματικός αριθμός

Α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-3$ και $\beta=8$

Β. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού κ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A\left(2,f(2)\right)$ να εφάπτεται της γραφικής παράστασης της g

Γ Να βρείτε –εφόσον υπάρχει - την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από το σημείο $\Sigma(0,7)$ και έχει αρνητική κλίση.

2.358 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{t\to0}\left[f\left(1+t^2\right)\right]=1 \quad \text{και} \quad \lim_{t\to0}\frac{f(1+2t)-f(1)}{t}=4$$

Α. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\left(1,f(1)\right)$ έχει εξίσωση $(\varepsilon_A): y=2x-1$

Β. Έστω $d=M\Sigma$ όπου Μ σημείο που κινείται στην εφαπτομένη (ε_A) και Σ(0,1).

Να αποδείξετε ότι καθώς το Μ διέρχεται από το σημείο Α, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του Μ ως προς t είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της απόστασης d.

Γ. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:R\to R$ για την οποία ισχύει

$$g\left(f(x)+x\right)+g(2x)=5x^2\ln x+6 \text{ για κάθε } x>0$$

Γα) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $B\left(2,g(2)\right)$ σχηματίζει με τους άξονες x΄x και y΄y ισοσκελές τρίγωνο

Γβ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x-1)+xg(x)-7}{x-2}$

2.359 Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : [0,+\infty) \to R$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις έχουν κοινή εφαπτομένη την ευθεία $y = x+1$ στο κοινό τους σημείο με τετμημένο $x_0 = 0$. Δίνεται επιπλέον ότι:

Για κάθε $x \in [0,+\infty)$ είναι $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ και $f'(x) - g(x) = e^x - x - 1$

Η g' είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$

Α Να αποδείξετε ότι $f(0) = g(0) = f'(0) = g'(0) = 1$

Β Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0,+\infty)$ ισχύει ότι $g'(x) > 0$ και $g(x) \geq 1$

Γ Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0,+\infty)$ ισχύει ότι $e^x \geq x+1$ και $f'(x) \geq 1$

Δ Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ και ισχύει $f(x) \geq x+1$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$

Ε Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - e^x}{x^2}$

2.360 Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $A = [0,1) \cup (1,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f(x) = \dfrac{x}{\ln^2 x}$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

Α) Αν η f είναι συνεχής στο Α, να υπολογίσετε το $f(0)$

Β) Να γίνει η γραφική παράσταση της f

Γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x = \alpha \cdot \ln^2 x$, $\alpha \in R$ είναι ισοδύναμη με την $f(x) = \alpha$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ και να βρείτε την τιμή του α για την οποία η εξίσωση έχει δύο ακριβώς λύσεις.

Δ) Να αποδείξετε ότι $37f(125) + 61f(27) < 98f(64)$