

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Μαθηματικά
Προσανατολισμού

2019 - 2020

Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Χανιά

Δ

365

Ταξινομημένες ασκήσεις για λύση

Ανάλυση

Ολοκληρώματα
&
Γενικές Ασκήσεις



*Τάξη: Γ Γενικού Λυκείου
Μαθηματικά προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & οικονομίας και πληροφορικής
Μέρος Γ: Ολοκληρωτικός Λογισμός
Έκδοση 19.07*

*Η συλλογή αυτή διανέμεται δωρεάν σε ψηφιακή μορφή μέσω διαδικτύου
προορίζεται για σχολική χρήση και είναι ελεύθερη για αξιοποίηση
αρκεί να μην αλλάξει η μορφή της*

*Μίλτος Παπαρηγοράκης
Μαθηματικός M.Ed.
Χανιά 2019*

3

ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

3.01 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2+e) = 2$ έχει την ιδιότητα $f'(2x+e^x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$.

3.02 Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και F μια αρχική της f στο \mathbb{R} . Αν $f(1) = 1$ και $f(x) \cdot F(2-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε Να βρείτε τον τύπο της f

3.03 * Έστω F μια αρχική της συνεχούς συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με την ιδιότητα: $F^2(x) \leq F(x)F(\alpha-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha \neq 0$. Να αποδειχθεί ότι: A) $F(0) = F(\alpha)$,
B) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο \mathbb{R} .

3.04 Βρείτε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει $f'(x) - f(x) = e^{-2x} \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$

3.05 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και F μια παράγουσά της στο \mathbb{R} . Αν $F''(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ και $F(x) = F(2-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

3.06 Να βρείτε τις αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης $f(x) = 2|x| + 1$ με $x \in \mathbb{R}$

3.07 Να βρείτε μια αρχική της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \ln x + e, & x \geq 1 \\ e^x, & x < 1 \end{cases}$

3.08 Αν η συνάρτηση f με την ιδιότητα $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ έχει αρχική, τότε αυτή είναι της μορφής $f(x) = cx$ $x \in \mathbb{R}$

3.09 Στη δεκαετία του 1980 ο παγκόσμιος ρυθμός κατανάλωσης πετρελαίου σε εκατομμύρια βαρέλια ετησίως δινόταν από τον τύπο $R(t) = ke^{(\ln 2)t}$, όπου t είναι ο αριθμός των ετών μετά το 1980. Στις αρχές του 1980 ο ρυθμός ήταν 14 εκατ. βαρέλια τον χρόνο. Να βρείτε:

- A) την παγκόσμια κατανάλωση πετρελαίου t χρόνια μετά το 1980,
B) σε πόσα εκατομμύρια βαρέλια ανερχόταν η παγκόσμια κατανάλωση πετρελαίου κατά τη περίοδο 1980-1990. ($\ln 2 \approx 0,7$)

3.10 Μια εταιρεία έχει διαπιστώσει ότι το οριακό κόστος λειτουργίας της είναι $0,015x^2 - 2x + 80$ δολάρια την ημέρα, όπου x είναι ο αριθμός των μονάδων προϊόντος που παράγονται ημερησίως. Αν η εταιρεία έχει πάγια έξοδα 1000 δολάρια την ημέρα, να βρείτε:

- A) το ημερήσιο κόστος παραγωγής x μονάδων προϊόντος,
B) την αύξηση του κόστους, αν αντί 30 μονάδων παραχθούν 60 μονάδες προϊόντος σε μια ημέρα.

3.11 Νερό φεύγει από την βρύση έτσι ώστε t min μετά το άνοιγμα της βρύσης να χύνεται με ρυθμό $8t + 5$ dm³/min. Πόσο νερό έφυγε κατά την διάρκεια των τριών πρώτων λεπτών ;

3.12 Ένα κινητό κινείται πάνω σε άξονα και η ταχύτητά του σε cm/sec τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο $v(t) = t(t+2)$. Αν τη χρονική στιγμή $t=0$ το κινητό βρίσκεται σε απόσταση 2cm από την αρχή των αξόνων, να βρεθεί η θέση του τη στιγμή $t=3$

ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

3.13 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και ισχύει ότι $\int_0^{-3} f(x) dx = 2$, $\int_4^{-3} f(x) dx = -1$ και

$$\int_4^{10} f(x) dx = 5 \text{ να υπολογίσετε τα : } \int_{-3}^0 f(u) du, \int_0^4 f(x) dx, \int_0^{10} f(x) dx$$

3.14 Αν $\int_1^2 f(x) dx = 5$, $\int_1^2 g(x) dx = -3$, βρείτε τα: Α) $\int_1^2 [2f(x) + 3g(x)] dx$ Β) $\int_2^1 [g(x) - 3f(x) + 5] dx$

3.15 Αποδείξτε ότι $\int_2^4 \frac{2x^2 + 5}{x^2 + 4} dx - 3 \int_4^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx = 4$

3.16 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} . Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\gamma}^{\delta} f(x) dx \Rightarrow \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\beta}^{\delta} f(x) dx$$

3.17 Έστω ότι $\int_0^1 f(x) dx = 2$ και $\int_2^3 g(x) dx = 5$. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 \left(\int_2^3 f(x) g(t) dt \right) dx$

3.18 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} . Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx \int_{\beta}^{\delta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \int_{\delta}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\delta} f(x) dx \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx = 0$$

3.19 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} . Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\gamma}^{\delta} f(x) dx \Rightarrow \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\beta}^{\delta} f(x) dx$$

3.20 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} . Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\gamma}^{\delta} f(t) e^{x^2} dx \right) dt = \int_{\gamma}^{\delta} \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(t) e^{x^2} dt \right) dx$$

3.21 Έστω ότι $\int_0^1 f(x) dx = 2$ και $\int_2^3 g(x) dx = 5$. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 \left(\int_2^3 f(x) g(t) dt \right) dx$

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$ (ΟΙ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΙΝΑΙ ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ)

3.22 Βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο των συναρτήσεων:

$$G(x) = \int_1^x x \ln t dt \quad K(x) = \int_1^{x^2+3x} t^2 \ln t dt$$

$$F(x) = \int_1^{\sqrt{x-1}} \frac{t^2}{\ln t - t} dt \quad N(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$$

3.23 Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο των συναρτήσεων:

$$M(x) = \int_{|x|}^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \quad F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} |t-x| dt, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

$$H(x) = \int_{2x}^{x+1} \sqrt[5]{t^2 - 4t} dt, \quad G(x) = \int_{\sqrt{x}}^{4x} \frac{\ln(t+1)}{2t-1} dt$$

3.24 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , να βρείτε όπου υπάρχει την παράγωγο των συναρτήσεων

$$F(x) = \int_0^1 x f(x+t) dt \quad G(x) = \int_0^1 x^2 t f(xt) dt$$

$$H(x) = \int_1^2 f\left(\frac{x}{t}\right) dt \quad \text{με } x \in (0, +\infty)$$

3.25 Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της συνάρτησης

$$G(x) = \int_{\alpha}^{\beta} x e^{t^2} dt \quad G(x) = \int_0^{\frac{1}{x}} x^2 e^t du$$

$$G(\omega) = \int_{\alpha}^{\beta} x e^t dt \quad K(x) = x^2 \int_0^1 t \cdot \eta\mu^2(xt) dt$$

3.26 Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της

$$F(x) = \int_1^x \left(\int_2^y \left(\frac{1}{1+t^2 + \eta\mu^2 t} \right) dt \right) dy$$

3.27 Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{\sin(2\pi t)} dt = \int_{\alpha+1}^{\beta+1} e^{\sin(2\pi t)} dt, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

3.28 Να βρεθεί η $F'(x)$ αν

$$A) \quad F(x) = \left(\int_e^{\sqrt{x}} \ln t dt \right) \left(\int_1^{\ln x} e^t dt \right)$$

$$B) \quad F(x) = \int_{19}^x e^u du \sin^2 t dt + \int_{61}^x e^y dy \eta\mu^2 t dt$$

3.29 Αν f συνεχής στο \mathbb{R} , να δείξετε ότι:

$$A) \quad \int_0^x \left(t \int_0^t f(u) du \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^x (x^2 - u^2) f(u) du$$

$$B) \quad \int_0^x f(u) (\eta\mu x - \eta\mu u) du = \int_0^x \left(\sin u \int_0^u f(t) dt \right) du$$

$$3.30 \quad \text{Υπολογίστε το } \int_0^1 \left(\int_1^x \frac{e^t - 1}{t} dt \right) dx$$

3.31 Να αποδειχτεί ότι αντιστρέφονται οι συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt \quad \text{και} \quad G(x) = \int_0^x \eta\mu^4 t^2 dt$$

3.32 Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f , συνεχής

$$\text{στο } \mathbb{R} \text{ ώστε να ισχύει: } \int_x^y f(t) dt = \frac{f(x)}{f(y)}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

$$\mathbf{\Lambda \text{ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ}} \int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\beta F'(x)dx = F(\beta) - F(a)$$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\mathbf{3.33} \quad \text{A)} \int_0^1 (1-\sqrt{x})^2 dx \quad \text{B)} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x+2}} dx \quad \text{Γ)} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^2 x - 2}{\eta\mu^2 x} dx \quad \Delta) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{6-x}}$$

$$\mathbf{3.34} \quad \text{A)} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx \quad \text{B)} \int_1^2 \frac{x^2 \sqrt{x} - x + 1}{x^2} dx \quad \text{Γ)} \int_1^2 \frac{x^3 - 2x + 5}{x} dx \quad \Delta) \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\mathbf{3.35} \quad \text{A)} \int_1^2 \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 2x}} dx \quad \text{B)} \int_0^1 (2x-1)^2 dx \quad \text{Γ)} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu^3 x + 4}{\eta\mu^2 x} dx \quad \Delta) \int_2^3 \frac{x^3 - 1}{x-1} dx$$

$$\mathbf{3.36} \quad \text{A)} \int_1^e \frac{1 - \ln x}{x^2} dx \quad \text{B)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x\eta\mu x + x^2 \sigma\upsilon\nu x) dx \quad \text{Γ)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) dx \quad \Delta) \int_1^e \frac{1-x}{e^x} dx$$

$$\mathbf{3.37} \quad \text{A)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x - x \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} dx \quad \text{B)} \int_1^4 \left(\frac{2^{x-1}}{\sqrt{x}} + 2^x \sqrt{x} \ln 2 \right)$$

$$\mathbf{\Sigma\Upsilon\Nu\Theta\Xi\text{ΣΗ}} \int_a^\beta f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(\beta)} f(u)du - \mu\epsilon \text{ ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ: } u = g(x) \text{ ή}$$

$$\mathbf{3.38} \quad \text{A)} \int_0^1 x(x^2+1)^3 dx \quad \text{B)} \int_0^1 4x(2x^2+3)^{12} dx \quad \text{Γ)} \int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx \quad \Delta) \int_0^1 \sqrt[3]{3x+1} dx$$

$$\mathbf{3.39} \quad \text{A)} \int_1^{\pi^2} \frac{3}{\sqrt{x} \sigma\upsilon\nu^2 \sqrt{x}} dx \quad \text{B)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}} dx \quad \text{Γ)} \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+2} dx \quad \Delta) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt[3]{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} dx$$

$$\mathbf{3.40} \quad \text{A)} \int_0^1 \frac{1 + \epsilon\phi x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx \quad \text{B)} \int_0^1 \frac{e^{2x} + 7e^x + 6}{e^x + 3} dx \quad \text{Γ)} \int_{e^2}^{e^5} \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx \quad \Delta) \int_0^1 e^{2^x + x \ln^2} dx$$

$$\mathbf{3.41} \quad \text{A)} \int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}} dx \quad \text{B)} \int_0^1 \frac{1}{e^x \sqrt{1+e^{-x}}} dx \quad \text{Γ)} \int_0^1 \frac{\epsilon\phi x}{\ln(\sigma\upsilon\nu x)} dx \quad \Delta) \int_0^1 \sigma\phi x dx$$

$$\mathbf{3.42} \quad \text{A)} \int_0^1 \frac{4x-5}{(x+2)^4} dx \quad \text{B)} \int_0^1 \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad \text{Γ)} \int_1^e \frac{\sigma\upsilon\nu(\ln x)}{x} dx \quad \Delta) \int_0^1 e^{x+e^x} dx$$

$$\mathbf{3.43} \quad \text{A)} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\epsilon\phi x)}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} dx \quad \text{B)} \int_1^{\pi} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{x^2} dx \quad \text{Γ)} \int_0^1 x e^{3-x^2} dx \quad \Delta) \int_0^1 \frac{\epsilon\phi x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$$

$$3.44 \quad \text{A)} \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad \text{B)} \int_e^{2e} \frac{1}{x \ln x} dx \quad \text{Γ)} \int_1^e \frac{\ln x + 1}{x} dx \quad \Delta) \int_1^e \frac{(1 - \ln x)^2}{x} dx \quad \text{E)} \int_1^e \frac{\sqrt[3]{1 + \ln x}}{x} dx$$

$$3.45 \quad \text{A)} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta \mu x}{1 - \sigma \upsilon \nu^2 x} dx \quad \text{B)} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \eta \mu x \sqrt{1 - \sigma \upsilon \nu x} dx \quad \text{Γ)} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1 + \eta \mu x) \sigma \upsilon \nu x}{2 + \eta \mu x} dx \quad \Delta) \int_0^1 \sigma \upsilon \nu^3 x dx$$

$$3.46 \quad \text{A)} \int_0^1 x^2 (2x - 1)^{\frac{7}{3}} dx \quad \text{B)} \int_0^1 \frac{2x^2 + 3}{(3x + 1)^2} dx \quad \text{Γ)} \int_0^1 (x - 2) \sqrt{3x + 1} dx \quad \Delta) \int_0^1 (x - 2)^2 (2x + 1)^3 dx$$

ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

A Περίπτωση: βαθμός $P(x) <$ βαθμός $Q(x)$. Ελέγχο πρώτα μήπως ο αριθμητής είναι η παράγωγος του παρονομαστή δηλαδή αν

$$Q'(x) = P(x) \text{ τότε } \int_a^\beta \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int_a^\beta \frac{Q'(x)}{Q(x)} dx = [\ln(Q(x))]_a^\beta = \ln(Q(\beta)) - \ln(Q(\alpha)) = \int_a^\beta \frac{Q'(x)}{Q(x)} dx = \ln|Q(x)| + c$$

ΜΟΡΦΗ: $\int_a^b \frac{kx + \lambda}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx$, με $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$. Τότε εργαζόμαστε όπως στο παράδειγμα:

$$3.47 \quad \text{Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα } \int_1^2 \frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx.$$

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 6}$ έχει $A_f = \mathbb{R} - \{2, 3\}$ και είναι $f(x) = \frac{2x + 1}{(x - 2)(x - 3)}$. Αναζητούμε τους $A, B \in \mathbb{R}$, ώστε να

ισχύει $\frac{2x + 1}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3}$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{2, 3\}$, όπου έχουμε $(A + B - 2)x = 3A + 2B + 1$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{2, 3\}$.

Η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{2, 3\}$, αν και μόνο αν $\begin{cases} A + B - 2 = 0 \\ 3A + 2B + 1 = 0 \end{cases}$ ή, $\begin{cases} A = -5 \\ B = 7 \end{cases}$.

$$\text{Επομένως, } \int_1^2 \frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx = \int_1^2 \frac{-5}{x - 2} dx + \int_1^2 \frac{7}{x - 3} dx = \dots = -5[\ln|x - 2|]_1^2 + 7[\ln|x - 3|]_1^2 = \dots$$

Αν ο παρονομαστής είναι της μορφής $Q(x) = (x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_\nu)$, τότε: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - \rho_1} + \frac{A_2}{x - \rho_2} + \dots + \frac{A_\nu}{x - \rho_\nu} + \dots$

$$3.48 \quad \text{A)} \int_0^1 \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 7} dx \quad \text{B)} \int_3^4 \frac{x + 1}{x^2 + x - 2} dx \quad \text{Γ)} \int_2^3 \frac{x + 2}{x^2 - 6x - 7} dx \quad \Delta) \int_2^3 \frac{x^2 - 2x - 1}{x^3 - x} dx$$

ΜΟΡΦΗ: $\int_k^\lambda \frac{P(x)}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx$ με $P(x)$ πολώνυμο βαθμού ≥ 2 και $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, τότε κάνουμε τη διαίρεση κλπ

$$3.49 \quad \text{A)} \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 - 4} dx \quad \text{B)} \int_0^1 \frac{x^2 - x + 2}{x + 3} dx \quad \text{Γ)} \int_0^1 \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 4x + 3} dx \quad \Delta) \int_2^3 \frac{x^3 + x^2 - 2x - 1}{x^2 - x} dx$$

ΡΙΖΕΣ

$$3.50 \quad \text{A)} \int_0^1 \frac{x + 1}{\sqrt[3]{3x + 2}} dx \quad \text{B)} \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{2x + 1}} dx \quad \text{Γ)} \int_0^1 x \sqrt{x + 4} dx \quad \Delta) \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} dx \quad \text{E)} \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$$

ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ

ΜΟΡΦΗ: $\int_k^\lambda f(e^{ax}, e^{bx}) dx$ Τότε: $u = e^x$, $x = \ln u$, $du = e^x dx$ (συνήθως καταλήγω σε ρητή)

3.51 A) $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 2} dx$ B) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx$ Γ) $\int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$ Δ) $\int_0^1 \frac{e^{2x} - 1}{e^x} dx$

3.52 A) $\int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^{2x} - 4} dx$ B) $\int_0^1 \frac{2}{1 + e^{-2x}} dx$ Γ) $\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x + 1)\ln(e^x + 1)} dx$ Δ) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x - e^{-x}} dx$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ $\int_a^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f'(x)g(x)dx$

3.53 A) $\int_0^1 x^2 e^{-2x} dx$ B) $\int_0^1 (x^2 + 3x)e^{-x} dx$

3.54 A) $\int_0^1 (3x^2 - x)\sin(-2x)dx$ B) $\int_0^1 2x\eta\mu(3x - 1)dx$ Γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x dx$

3.55 A) $\int_0^1 e^{-x} \sin(3x - 1)dx$ B) $\int_0^1 e^x \eta\mu x dx$ Γ) $\int_0^1 e^{-x} \sin 2x dx$ Δ) $\int_0^1 2^x \sin x dx$

3.56 A) $\int_1^e \ln x dx$ B) $\int_1^e \ln(2x + 3) dx$ Γ) $\int_1^e \ln^2(2x + 1) dx$ Δ) $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

3.57 A) $\int_1^e x \ln(3x + 4) dx$ B) $\int_1^e x \ln(x + 1) dx$ Γ) $\int_4^5 \ln(-x + \sqrt{x^2 - 9}) dx$

ΓΕΝΙΚΕΣ

3.58 A) $\int_0^1 \frac{(2x - 1)^2}{x} dx$ B) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x + 3} - \sqrt{x}}$ Γ) $\int_1^2 \frac{x\eta\mu x + \sigma\nu\nu x}{x^2} dx$ Δ) $\int \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 3x + 5}}$

3.59 A) $\int_0^1 x e^{x + \ln x} dx$ B) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sigma\phi x \cdot \ln(\eta\mu x) dx$ Γ) $\int_0^1 \left(\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\nu\nu^4 x} + \epsilon\phi^2 x \right) dx$ Δ) $\int_1^2 \frac{\ln(\epsilon\phi x)}{\eta\mu x \sigma\nu\nu x} dx$

3.60 A) $\int_0^1 \frac{2\eta\mu x \sigma\nu\nu x}{1 + \eta\mu^2 x} dx$ B) $\int_0^1 x^2 \eta\mu 2x dx$ Γ) $\int_1^2 \frac{x^3}{x^2 - 4x + 3} dx$ Δ) $\int_0^1 x \eta\mu^2 x dx$

3.61 A) $\int_1^2 \frac{4(x^4 - 1)}{x(x^4 + 1)} dx$ B) $\int_1^0 \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx$ Γ) $\int_1^0 \frac{1}{(x + 1)\sqrt{x + 2}} dx$ Δ) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^y + 1)}$

$$3.62 \quad \text{A) } \int_e^{2e} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx \quad \text{B) } \int_1^0 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx \quad \text{Γ) } \int_1^0 \frac{x+1}{\sqrt{x+2}} dx \quad \Delta) \int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$$

$$3.63 \quad \text{A) } \int_1^e x^2 \ln x^2 dx \quad \text{B) } \int_0^1 \frac{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{e^{\eta\mu^2 x}} dx \quad \text{Γ) } \int_1^0 \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx \quad \Delta) \int_1^e \frac{\eta\mu x}{e^x} dx$$

$$3.64 \quad \text{A) } \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \text{B) } \int_1^\pi \frac{1}{\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)^2} dx \quad \text{Γ) } \int_1^e \sigma\upsilon\nu(\ln x) dx \quad \Delta) \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx$$

$$3.65 \quad \text{A) } \int_0^1 \frac{x-1}{e^x} dx \quad \text{B) } \int_0^1 \frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x} dx \quad \text{Γ) } \int_1^0 \left(\varepsilon\phi 2x + \frac{2x}{\sigma\upsilon\nu^2 2x}\right) dx \quad \Delta) \int_1^2 \frac{x}{\eta\mu^2 x} dx$$

$$3.66 \quad \text{A) } \int_0^1 \frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu x} dx \quad \text{B) } \int_1^2 \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x} dx \quad \text{Γ) } \int_0^1 \frac{\varepsilon\phi^4 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx \quad \Delta) \int_0^1 x \sigma\upsilon\nu^2 x dx$$

$$3.67 \quad \text{A) } \int_0^1 \eta\mu^3 x \sigma\upsilon\nu^2 x dx \quad \text{B) } \int_0^1 x^2 \ln(3x) dx \quad \text{Γ) } \int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2+1}) dx \quad \Delta) \int_0^1 \eta\mu^5 x dx$$

$$3.68 \quad \text{A) } \int_1^0 \frac{\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} dx \quad \text{B) } \int_1^0 (\eta\mu 2x) e^{\eta\mu x} dx \quad \text{Γ) } \int_1^2 \frac{x}{2+\sqrt{x-1}} dx \quad \Delta) \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x\varepsilon\phi\sqrt{x}}} dx$$

$$3.69 \quad \text{A) } \int_0^1 (x^2-x)e^{-2x} dx \quad \text{B) } \int_0^{\ln 2} \frac{e^x+1}{e^x+x} dx \quad \text{Γ) } \int_3^4 \frac{x}{x^3+x^2-2x} dx \quad \Delta) \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$$

$$3.70 \quad \text{A) } \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx \quad \text{B) } \int_1^{e^\pi} \eta\mu(\ln x) dx \quad \text{Γ) } \int_0^\pi (x\eta\mu x)^2 dx \quad \Delta) \int_0^1 \frac{x+\eta\mu x}{e^x} dx$$

$$3.71 \quad \text{A) } \int_0^1 (x^2+2)e^{-x} dx \quad \text{B) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{4-\eta\mu^2 x} dx \quad \text{Γ) } \int_1^2 \frac{2-3x}{x^3} e^{-\frac{2}{x}} dx \quad \Delta) \int_1^e \ln^2 x dx$$

$$3.72 \quad \text{A) } \int_1^{\pi^2} \eta\mu\sqrt{x} dx \quad \text{B) } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2x+1}{\eta\mu^2 x} dx \quad \text{Γ) } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \eta\mu x \cdot \eta\mu^{12}(\sigma\upsilon\nu x) dx \quad \Delta) \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$$

$$3.73 \quad \text{A) } \int_e^{2e} \frac{1}{x \ln^3 x} dx \quad \text{B) } \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^3+3x+2} dx \quad \text{Γ) } \int_0^2 \left(x-1+\frac{1}{x+2}\right) dx \quad \Delta) \int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$3.74 \quad \text{A) } \int_1^e \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx \quad \text{B) } \int_0^1 x \cdot 2^{3x} dx \quad \text{Γ) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^2 x}{e^x} dx \quad \Delta) \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$$

3.75 A) $\int_0^1 \ln \frac{2+x}{2-x} dx$ B) $\int_0^1 x^2 \sigma\upsilon\nu(3x) dx$ Γ) $\int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2+1}) dx$ Δ) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} dx$

3.76 A) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ B) $\int_0^e \left(\int_1^x (1-t)e^{-t} dt \right) dx$ Γ) $\int_0^1 \ln^2(x + \sqrt{x^2+1}) dx$ Δ) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$

3.77 A) $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{|\ln x|}{x} dx$ B) $\int_{-2}^2 (|x| - |x^2 - 1|) dx$ Γ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$ Δ) $\int_1^e \ln \sqrt{x+1} dx$

3.78 A) $\int_0^1 \frac{x+2}{1+x^2} dx$ B) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} x e^{\sqrt{x^2+2x}} dx$ Γ) $\int_0^{\ln \frac{\sqrt{2}}{2}} e^x \sqrt{1-e^{2x}} dx$ Δ) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

3.79 Να υπολογίσετε τα I, J όταν $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+2\eta\mu x} dx$ $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{1+2\eta\mu x} dx$

3.80 A) $\int_1^e e^x \ln(e^x - 1) dx$ B) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ Γ) $\int_0^e \left(\int_1^x \frac{1-t}{e^t} dt \right) dx$

3.81 A) $\int_{-2}^2 (|x| - |x^2 - 1|) dx$ B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi^3 x + \varepsilon\varphi^5 x dx$ Γ) $\int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx$

3.82 A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$ B) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ Γ) $\int_0^1 \left(\int_1^x e^t dt \right) dx$

3.83 A) $I = \int_0^{\pi} \frac{x \eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$ B) $I = \int_{-1}^1 \frac{x^4}{2^{\eta\mu x} + 1} dx$

3.84 A) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^3 x}{\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^3 x} dx = \frac{\pi}{4}$ B) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\varepsilon\varphi x) dx = 0^{**}$

3.85 A) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (\varepsilon\varphi x)^{\sqrt{2}}} dx = \frac{\pi}{4}^{**}$ B) $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + (\varepsilon\varphi x)^5} dx = \frac{\pi}{12}$

3.86 A) $I = \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \eta\mu x} dx = \pi$ B) $I = \int_0^{\pi} x \ln(\eta\mu x) dx = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2$

3.87 Εστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -2x & , -1 \leq x < 0 \\ 4x^2 & , 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$. Να βρείτε το $\int_{-1}^1 f(x) dx$

3.88 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Δείξτε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x) dx$ και βρείτε τα

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\eta\mu x} - \sqrt{\sigma\upsilon\nu x} dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x} dx, \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sigma\upsilon\nu t}{\sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t} dt, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu t}{\sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t} dt$$

3.89 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x > 0 \\ \alpha - 1, & x = 0 \end{cases}$. Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ορίζεται το

ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 f(x) dx$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το I

3.90 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \geq 0 \\ \sigma\upsilon\nu 2x, & x < 0 \end{cases}$. Να βρείτε το $\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x) dx$

3.91 Βρείτε τις αρχικές συναρτήσεις των συναρτήσεων $f(x) = (x^2 + 1)e^x, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x\eta\mu x, x \in \mathbb{R}$

3.92 Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\eta\mu x}}{\sqrt{\eta\mu x} + \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}} dx$ και $\int_{-1}^1 \frac{3x^2}{e^x + 1} dx = 1$

3.93 Να αποδειχτεί ότι: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}}{(\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x} + (\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}} dx = \frac{\pi}{4}$

3.94 Αν η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ έχει συνεχή παράγωγο και $f(0) = 1, f(1) = 2$, να υπολογίσετε το

ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x) + f(x)} dx$

3.95 Να αποδειχτεί ότι $\int_{-1}^2 \frac{\ln(x+2)}{\ln(x+6-x^2)} dx = \frac{3}{2}$

3.96 Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} & \text{αν } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $\int_0^{\pi} f(x) dx$ και $\int_{-\pi}^{2\pi} f(x) dx$.

3.97 Έστω $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$, g μια συνεχής συνάρτηση στο \mathbb{R} και $a > 0$, να υπολογίσετε το

ολοκλήρωμα $I = \int_{\frac{1}{a}}^a g(f(x)) \frac{\ln x}{x} dx$

3.98 Αν $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{f\left(\frac{1}{t}\right)} dt + \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{t^2 f(t)} dt = 1$

ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ – ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.99 Έστω η $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{αν } -1 \leq x < 0 \\ 4x^2 & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

A) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0

B) Να βρείτε το $\int_{-1}^1 f(x) dx$

3.100 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x > 0 \\ \alpha - 1, & x = 0 \end{cases}$

A) Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ορίζεται

το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 f(x) dx$ και στη συνέχεια να το υπολογίσετε.

3.101 Να βρείτε τις αρχικές των συναρτήσεων

$$f(x) = x^2 e^x \quad g(x) = 2x \ln(x^2 + 1) \quad k(x) = \eta \mu x \cdot e^x$$

$$\lambda(x) = \begin{cases} \ln x + e, & x \geq 1 \\ e^x, & x < 1 \end{cases} \quad g(x) = x \eta \mu x$$

3.102 Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση

$f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$, $f'(x) = f^2(x)$ και

$$f(\beta) = 3f(\alpha). \text{ Να βρείτε το } I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

3.103 Έστω μια συνάρτηση f με f'' συνεχή και για

την οποία ισχύει $\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \eta \mu x dx = 2$. Αν

$f(\pi) = 1$, να υπολογίσετε το $f(0)$.

3.104 Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο να αποδείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} x f''(x) dx = (\beta f'(\beta) - f(\beta)) - (\alpha f'(\alpha) - f(\alpha))$$

3.105 Έστω f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f(1) = e$,

και $f'(x) = e^{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Υπολογίστε το $\int_0^1 f(x) dx$

3.106 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x) + f(x - 1002) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

A) $f(x + 2004) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B) $\int_1^{2005} f(x + 2005) dx = \int_2^{2006} f(x) dx$.

3.107 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με

$f(x) = f(\alpha + \beta - x)$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$. Αποδείξτε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx = \frac{\alpha + \beta}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = (\alpha + \beta) \int_{\alpha}^{\frac{\alpha + \beta}{2}} f(x) dx$$

3.108 Αποδείξτε ότι $\int_0^{\alpha} \frac{f(x)}{f(x) + f(\alpha - x)} dx = \frac{\alpha}{2}$

3.109 * Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, να αποδείξετε

ότι η f είναι συνεχής και ότι $\int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{1}{e}$

3.110 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$

να αποδείξετε ότι $\int_0^{\pi} x f(\eta \mu x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\eta \mu x) dx$

και να υπολογίσετε το $I = \int_0^{\pi} x \eta \mu^2 x dx$

3.111 ***Υπολογίστε το $\int_0^1 \left(\int_1^x \frac{e^t - 1}{t} dt \right) dx$

3.112 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \geq 0 \\ \sin 2x, & x < 0 \end{cases}$

A) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο \mathbb{R}

B) Να βρείτε το $\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x) dx$

3.113 Έστω συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $[1000, 1002]$ και για την οποία ισχύει ότι:

$$\int_0^2 f'(x)dx = 4 - 2f(0) \text{ και } f(x) = c - f(2-x)$$

A. Να υπολογίσετε την τιμή του c .

B. Να δείξετε ότι $\int_0^2 f(2-x)dx = \int_0^2 f(x)dx$

Γ. Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x)dx$

3.114 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$,

$$\alpha > 0 \text{ δείξτε ότι } \int_0^\alpha x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha^2} xf(x)dx$$

3.115 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και

$$\text{ισχύει } \int_0^{1-f(t)} e^t dt = f(1) - 1. \text{ Δείξτε ότι } f(1) = 1$$

$$\text{3.116} \quad \text{Δείξτε ότι } \int_{-\alpha}^\alpha \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_{-\alpha}^\alpha \frac{1}{e^{-x} + 1} dx = \alpha,$$

$$\alpha \in R$$

ΑΡΤΙΑ ΠΕΡΙΤΤΗ

3.121 Δείξτε ότι αν η συνάρτηση $f: [-\alpha, \alpha] \rightarrow R$

είναι συνεχής και περιττή τότε $\int_{-\alpha}^\alpha f(x)dx = 0$ ενώ αν

είναι συνεχής και άρτια τότε $\int_{-\alpha}^\alpha f(x)dx = 2 \int_0^\alpha f(x)dx$

3.122 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ με την ιδιότητα $f(1-x) + f(1+x) = f(x)$ για κάθε $x \in R$. Να αποδειχθούν τα εξής:

A) Η συνάρτηση f , είναι άρτια,

$$\text{B) } \int_{1995}^{1996} f(x)dx = \int_0^{1997} f(x)dx.$$

3.117 * Αν f, g παραγωγίσιμες στο R , και

$$\text{υπάρχουν } \alpha, \beta \in R \text{ ώστε } \beta f(\beta \cdot x) - \alpha f(\alpha \cdot x) = g'(x)$$

για κάθε $x \in R$, δείξτε ότι: $\int_\alpha^\beta f(t)dt = g(1) - g(0)$

3.118 Αν $f(x) = \sqrt{1+x^2} + \lambda x$, $\lambda \in R$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \text{ βρείτε το } \lambda \text{ και υπολογίστε το}$$

$$I = \int_0^1 \frac{x}{f^2(x)} dx$$

3.119 Αν f συνεχής στο R και ισχύει ότι

$$e^{\int_0^1 f(t)dt} = \int_0^1 f(t) + 3t^2 dt \text{ να βρεθεί το } \int_0^1 f(t)dt$$

3.120 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$f: R \rightarrow R$ με σύνολο τιμών το R η οποία ικανοποιεί

τη σχέση $f^3(x) + f(x) = 2x$, για κάθε $x \in R$. Να

$$\text{αποδείξετε ότι } \int_0^1 \frac{2}{1+3f^2(t)} dt = 1$$

3.123 Η συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ είναι συνεχής, άρτια και έχει περίοδο T . Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^T xf(x)dx = \frac{T}{2} \int_0^T f(x)dx$$

3.124 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και άρτια. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{A) } \int_0^{2\pi} xf(\eta\mu x)dx = 2\pi \int_0^\pi f(\eta\mu x)dx$$

$$\text{B) } \int_0^\pi xf(\sigma\upsilon\nu x)dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma\upsilon\nu x)dx$$

$$\text{3.125} \quad \text{Να αποδείξετε ότι } \int_{-1}^1 \frac{x}{4 + \sigma\upsilon\nu 4x} dx = 0$$

ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

3.126 Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης f , που είναι ορισμένη και συνεχής στο $[0, 1]$ και ισχύει ότι:

$$12 \int_0^1 f(x)(x - f(x))dx \leq 1$$

3.127 Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f που είναι συνεχής στο \mathbb{R} και ισχύει ότι

$$\int_0^1 2e^x f(x)dx \geq \int_0^1 f^2(x)dx + \int_0^1 e^{2x}dx$$

3.128 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(0) = 1$ και

$$f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)dt \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

3.129 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και

ισχύει ότι $\int_{-2}^2 t\sqrt{t^2+4} \cdot f(t)dt = f(x) - \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ για

κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

3.130 Βρείτε συνεχή συνάρτηση $g: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$

ώστε να ισχύει ότι $\int_1^3 e^{4g(x)} dx + 2 = 2 \cdot \int_1^3 e^{2g(x)} dx$

3.131 Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[0, 1]$ και για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει

$$f(x) > 0 \quad \text{και} \quad \int_0^1 \ln^2 f(x)dx + \frac{1}{5} = 2 \int_0^1 t^2 \ln f(t)dt$$

A) Να δείξετε ότι $f(x) = e^{x^2}$, $x \in [0, 1]$

B) Να βρείτε το $\int_0^1 \frac{f(x)}{f(1-x) + f(x)} dx$

3.132 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x) \geq \frac{f^2(1) + f^2(0) + 2f(0) + 5}{2} \quad \text{για κάθε } x \in [0, 1]. \text{ Να}$$

αποδείξετε ότι $f(x) = 3x - 2$

3.133 Αν F είναι μια αρχική της συνάρτησης

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$(f(x) - e^x)(F(x) - F(1) - e^x) = 0, \text{ να βρείτε τον τύπο}$$

της συνάρτησης f

3.134 Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

αν ισχύει ότι $f(x) = (1 + e^x)(1 + F(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$ όπου

F είναι αρχική της $y = \frac{f(x)}{1 + e^x}$ με $F(0) = 0$.

3.135 Δίνεται η συνάρτηση f , συνεχής στο $[0, 1]$

για την οποία ισχύουν: $\int_0^1 f(x)dx = 1$ και

$\int_0^1 f^2(x)dx = 1$. Να δείξετε ότι: $f(x) = 1$, $x \in [0, 1]$

3.136 * Έστω F μια αρχική της συνεχούς

συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με την ιδιότητα:

$$F^2(x) \leq F(x)F(a-x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ όπου } a \neq 0.$$

Να αποδειχθεί ότι: A) $F(0) = F(a)$,

B) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια

τουλάχιστον ρίζα στο \mathbb{R} .

3.137 * Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και

F μια αρχική της με την ιδιότητα $f(x)F(1-x) = 1$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, να αποδείξετε ότι

$$f(x) = e^{x - \frac{1}{2}}$$

ΥΠΑΡΧΕΙ

3.138 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}

και ισχύει $f(0) = 0$ και $\int_0^1 f(x) dx = f(1)$. Να

αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f'(\xi) = f(\xi)$

3.139 **Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ ώστε

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3} f(x_0)$$

3.140 Έστω f συνάρτη συνεχής στο \mathbb{R} . Δείξτε

ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ ώστε $\int_0^2 f(t) dt = 2f(\xi)$

3.141 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$

και ισχύει $\int_a^\beta f(x) dx = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει

$x_0 \in (a, \beta)$ ώστε $f(x_0) = 0$

3.142 Αν f συνεχής και γνήσια αύξουσα και g

συνεχής και γνήσια φθίνουσα στο $[a, \beta]$ με

$f(\beta) > g(\beta)$ και $\int_a^\beta f(t) dt < \int_a^\beta g(t) dt$ να δείξετε

ότι υπάρχει $\gamma \in [a, \beta]$ ώστε $f(\gamma) = g(\gamma)$

3.143 Έστω συνάρτηση f , με συνεχή παράγωγο

στο \mathbb{R} και $\int_0^1 f(x) dx = f(0)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει

$\xi \in (0, 1)$ ώστε $\int_0^1 xf'(x) dx = f'(\xi)$

3.144 Έστω $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο

$[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) με $\int_a^\beta f(x) dx = 0$

και $f(a) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$: $f'(\xi) = 0$

3.145 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $0 < a < \beta$. Να αποδείξετε ότι η

εξίσωση: $f(x) = \frac{2x}{\beta^2 - a^2} \int_a^\beta f(t) dt$ έχει μια

τουλάχιστον λύση στο (a, β)

3.146 *** Έστω συνάρτηση f συνεχής και γνήσια

αύξουσα στο \mathbb{R} . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{xf(x) > \int_0^x f(t) dt}{x-1} + \frac{\int_x^{x+2} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt}{x-2} = 0$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$

ΑΝΑΓΩΓΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

3.147 Αν $I_v = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^v x dx$, $v \in \mathbb{N}^*$, δείξτε ότι

$$I_v = \frac{1}{v-1} - I_{v-2}, \quad v > 2 \quad \text{και να υπολογίσετε το } I_5.$$

3.148 Αν $I_v = \int_0^1 \frac{e^{vx}}{1+e^x} dx$, $v \in \mathbb{N}$ να αποδείξετε

$$\text{ότι } I_{v+1} = \frac{e^v - 1}{v} - I_v, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

3.149 Αν $I_v = \int_1^e \frac{(\ln x)^v}{x(1+\ln x)} dx$, $v \in \mathbb{N}^*$ να

δείξετε ότι $I_{v+1} = \frac{1}{v+1} - I_v$, $v \in \mathbb{N}^*$

3.150 Αν $I_v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^v x dx$ με $v \in \mathbb{N}^*$ να

αποδείξετε ότι: $I_v = \frac{v-1}{v} I_{v-2}$ με $v > 2$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

3.151 Να αποδείξετε τις ανισότητες:

$$A) \quad \sqrt{3} + \frac{3}{2} \leq \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2+x}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq \sqrt{15}$$

$$B) \quad \ln \frac{\alpha}{\beta} \leq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\eta \mu x}{x} \leq \ln \frac{\beta}{\alpha} \text{ για κάθε } 0 < \alpha \leq \beta$$

$$Γ) \quad 1 \leq \int_0^1 \frac{e^x}{1+x^2} dx \leq \frac{e}{2}$$

3.152 Δείξτε ότι $\int_1^5 \frac{e^x}{e^x + x^2} dx \cdot \int_1^5 \frac{x^2}{e^x + x^2} dx \leq 4$

3.153 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και

$$f(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ τότε } \int_3^1 \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{x}{f(x)} \right) dx \geq 4$$

3.154 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ με

$f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι

$$x^2 \int_0^x f(t) dt > \int_0^x t^2 f(t) dt \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

3.155 Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνήσια

αύξουσα στο \mathbb{R} , δείξτε ότι $\int_{\alpha}^{\alpha+3} f(t) dt < \int_{\alpha+3}^{\alpha+6} f(t) dt$

3.156 Αν $f(x) = (x+1) \ln \frac{x+1}{x}, x > 0$, τότε :

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τις ασύμπτωτες της C_f και να βρείτε το σύνολο τιμών της f

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x+1 = x e^{\frac{2020}{x+1}}, \quad x > 0 \text{ έχει μία ακριβώς θετική ρίζα}$$

iii) Δείξτε ότι $f(x) + 2 \ln 2 \geq 2f\left(\frac{x+1}{2}\right), x > 0$

iv) Δείξτε ότι $\int_{2010}^{2020} t f(t) dt > 2010 \int_{2010}^{2020} f(t) dt$

3.157 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ με

$f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\int_0^1 x f^2(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx} < \frac{\int_0^1 f^2(x) dx}{\int_0^1 x f(x) dx}$$

3.158 Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνήσια

αύξουσα στο \mathbb{R} . Δείξτε ότι $\int_1^2 f(t) dt < \frac{1}{3} \int_1^4 f(t) dt$

3.159 Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $[0, \alpha]$ με

$\alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\alpha} f(t) dt > \alpha f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

3.160 Έστω η συνάρτηση f , συνεχής στο $[0, 1]$.

Δείξτε ότι $\int_0^1 x f(x) dx \leq \frac{1}{12} + \int_0^1 f^2(x) dx$

3.161 Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} . Να δείξετε ότι

$$\int_1^{2020} x f(x) dx > \int_1^{2020} f(x) dx$$

3.162 Η συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο

$[0, +\infty)$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ η g είναι

γνησίως αύξουσα $[0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι

$$g(x) \int_0^x f(t) dt > \int_0^x g(t) f(t) dt, \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

3.163 Αν $f(x) = e^x \left(\ln x - \frac{1}{x} \right)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο

$(0, +\infty)$ και στη συνέχεια δείξτε ότι

$$\frac{e^2 \ln 2 - f(2)}{2} < \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx < \frac{e^2 \ln 2 - f(1)}{2}$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ

3.164 Α) Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$, 1-1, με συνεχή πρώτη παράγωγο στο $[\alpha, \beta]$. Δείξτε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$$

B) Αν $f(x) = e^x + x^5$ βρείτε το $\int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx$.

Γ) Να δείξετε ότι $\int_1^e \sqrt{\ln x} dx + \int_0^1 e^{x^2} dx = e$

3.165 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2x + \eta \mu x}$, $x \geq 0$

Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{2\sqrt{\pi}} x f^{-1}(x) dx$

3.166 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^3(x) + f(x) + 2x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα

B) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον

$x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0 4^{x_0} - 3$.

Γ) Να υπολογίσετε το $\int_{-1}^0 f(x) dx$

3.167 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f(x) > 0$ και $\ln(f(x)) + e^{f(x)} = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. A) Αποδείξτε ότι η f αντιστρέφεται.

Δ) Υπολογίστε το $I = \int_1^e f^{-1}(x) dx + \int_e^{e+1} f(x) dx$.

3.168 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει ότι $f(x) > 0$ και $\ln(f(x)) + e^{f(x)} = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

A) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

B) Λύστε τις εξισώσεις $f(x) = 1$, $f(x) = e$

Γ) Υπολογίστε το $\int_1^e f^{-1}(x) dx + \int_e^{e+1} f(x) dx$

3.169 Έστω συνάρτηση $f(x) = \ln x - \ln^2 x - x + 1$ με $x > 0$. Δείξτε ότι

A) $e + \ln \alpha > \alpha + \ln^2 \alpha$ για $1 < \alpha < e$

B) η f αντιστρέφεται στο $[1, +\infty)$

Γ) Αν η αντίστροφη της f είναι συνεχής, τότε

$$\int_{1-e}^0 f^{-1}(x) dx - \int_1^e f(x) dx = e^2 - e$$

3.170 A) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} . Να δείξετε ότι οι εξισώσεις $f(x) = x$ και $f(x) = f^{-1}(x)$ είναι ισοδύναμες στο $D_f \cap D_{f^{-1}}$

B) Αν $f(x) = x + \int_{2004}^x e^{-t^2} dt$, $x \in \mathbb{R}$, να λύσετε

την εξίσωση: $f(x) = f^{-1}(x)$.

3.171 Αν $f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$, $x \in (0, +\infty)$, να υπολογίσετε

$$\int_e^{e^2} f^{-1}(x) \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right) dx$$

ΟΡΙΑ ΜΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ* (ΟΙ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΙΝΑΙ ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ)**

3.172 Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$

3.173 Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x-1}^{x+1} \frac{1}{\sqrt{3+2t^2}} dt$

ΕΜΒΑΔΑ

3.174 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = 2x - 1$ και

$$h(x) = \frac{2}{x^2}$$

3.175 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την πλάγια ασύμπτωτη της C_f τις ευθείες $x=0$, $x=3$ και τον άξονα $x'x$

3.176 Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \ln x$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f στα σημεία με τετμημένες $x=1$ και $x=e$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από τη C_f και τις δύο εφαπτόμενες.

3.177 Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \frac{1}{x^2}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=\lambda$ ($\lambda > 0$). Να προσδιορίσετε την ευθεία $x=\alpha$ που χωρίζει το παραπάνω χωρίο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

3.178 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$
 Α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(t)$ του μέρους του επιπέδου, τα σημεία $M(x, y)$ του οποίου, ικανοποιούν τις σχέσεις: $t \leq x \leq 0$ με $t < 0$ και $0 \leq y \leq f(x)$
 Β) Να υπολογίσετε το $\lim_{t \rightarrow -\infty} E(t)$

3.179 Αν $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ και F αρχική της f με $F(1) = 0$ να βρείτε το εμβαδο του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της F και τους άξονες $x'x$, $y'y$

3.180 Έστω η συνεχής συνάρτηση f με $D_f = \mathbb{R}$ ώστε $f(x) > 0$ και $f(2-x) + f(x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$

3.181 Έστω οι συναρτήσεις f, g με $A_f = A_g = \mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) - g'(x) = (x^2 + 2x - 1)e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν γνωρίζουμε ότι η C_h της συνάρτησης $h(x) = f(x) - g(x)$ διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$ Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g

3.182 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} xe^x & x \leq 0 \\ x \ln x & x > 0 \end{cases}$

Να υπολογίσετε τα εμβαδά E των χωρίων που περικλείονται από τη C_f τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=-1$

3.183 Αν $f(x) = \ln(1 + \epsilon \phi x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

α) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) + f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln 2 \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y=0$, $x=0$ και $x = \frac{\pi}{4}$

3.184 Έστω η συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 0$ με τιμή μηδέν και $f(1) + f(-1) = 3$ να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f' , του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x=-1$ και $x=1$

3.185 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f(x) = \int_0^2 f(x) dx - f'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 2$$

- A) Να βρείτε τον τύπο της f
 B) Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$
 Γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f την παραπάνω ασύμπτωτη και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$.

3.186 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x}$, $x \in (0, \pi)$

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ και } x = \frac{\pi}{2} \text{ είναι } E = \frac{1}{2} \ln 3.$$

3.187 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} e^x - e, & x < 1 \\ \frac{\sqrt{\ln x}}{x}, & x \geq 1 \end{cases}. \text{ Να αποδείξετε ότι η } f \text{ είναι}$$

συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=e$.

3.191 Αν $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$, τότε :

- i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha > 0$.
 ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη (ϵ) και τον άξονα $x'x$.
 iii) Αν ένα σημείο M κινείται στη γραφική παράσταση της f έτσι, ώστε να απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E του χωρίου Ω τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τετμημένη του είναι ίση με 4 μονάδες.
 iv) Να βρείτε $\lambda \in (-\alpha, \alpha)$ τέτοιο, ώστε η ευθεία με εξίσωση $x=\lambda$ να χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισοεμβαδικά χωρία.

3.188 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περιέχει τα σημεία $M(x, y)$ με $\sqrt{e} \leq x \leq e$ και

$$\frac{1}{2}x^2 \ln \frac{x^2}{e} \leq y \leq \frac{1}{2}x^2$$

3.189 Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περιέχεται ανάμεσα στην καμπύλη $y = |x^2 - 1|$ και την ευθεία $x + y = 1$ ισούται με $\frac{13}{6}$.

3.190 Έστω $E(\alpha)$, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x) = x^3$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $y = \alpha$, $\alpha > 0$. Αν η ευθεία αυτή κινείται κάθετα στον $y'y$ κατά τη θετική φορά αυτού (δηλ. το $\alpha \rightarrow +\infty$), και με ταχύτητα $4m/sec$ να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E(\alpha)$, όταν $\alpha = 27$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΟΛΗ ΤΗΝ ΥΛΗ

3.192 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$ με $f'(1) = 1$.

- A) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x \ln x$, $x \in (0, +\infty)$
 B) Να λύσετε την εξίσωση $2f(x) = x^2 - 1$
 Γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $h(x) = 2f(x)$, $g(x) = x^2 - 1$ και την ευθεία $x = e$.

3.193 A) Ανισότητα **Bunyakovsky-Cauchy-Schwarz**: Αν f, g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$, να

δείξετε ότι
$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_{\alpha}^{\beta} (f(x))^2 dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} (g(x))^2 dx.$$

B) Να αποδείξετε ότι α) $\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \right)^2 \leq (\beta - \alpha) \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)dx$ β) $\left(\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx \right)^2 \leq (\beta^2 - \alpha^2) \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)dx$

3.194 Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[-2, 2]$, παραγωγίσιμη δύο φορές στο διάστημα $(-2, 2)$ για την οποία επίσης γνωρίζουμε ότι $f(0) = 3$ και $f(x)f'(x) = f'(x) - x$ για κάθε $x \in (-2, 2)$

- Αποδείξτε ότι: A) Η f δεν έχει σημεία καμπής B) $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$
 Γ) Η f είναι κοίλη Δ) $f(x) = 1 + \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2, 2]$ E) $\int_0^2 (f(x) - 1)dx = \pi$

3.195 Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει: $e^{f(x)} + f(x) - x - 1 = 0$

- A) α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
 β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονotonία.
 γ) Να λύσετε τις εξισώσεις: $f^{-1}(x) = 0$ και $f^{-1}(x) = e$
 δ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^e f(x)dx = \frac{3}{2}$

3.196 * Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και F μια αρχική της με την ιδιότητα $f(x)F(1-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ να αποδείξετε ότι: $f(x) = e^{x - \frac{1}{2}}$

Τα επόμενα ΘΕΜΑΤΑ είναι από ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΕΝΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ ΣΤΟ ΔΙΑΔΙΚΤΥΟ (Οι πηγές αναφέρονται όπου υπάρχουν)

3.197 Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f(3)=1$ για την οποία ισχύουν :

• $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1) • $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^3}{x - 1} = -4$ (2)

A. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$

B. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1, 3)$ στο οποίο η f παρουσιάζει ελάχιστο .

Γ. Να λυθεί στο $[0, +\infty)$ η εξίσωση $f'(e^x) = f' \left[\left(\eta\mu \left(\frac{x}{2} \right) + \sigma\upsilon\nu \left(\frac{x}{2} \right) \right)^2 \right]$.

Δ. Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , την $y = -x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ δείξτε ότι $E > 2$.

3.198 Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν :

• F είναι μια παράγουσα της f στο $(0, +\infty)$

• $f(2017) - F(2017) > f(2016) - F(2016)$

• $|f'(x) - f(x)| = e^x \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

• $f(1) = -x_0 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$ όπου x_0 είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $2^x = x + 1$

A. Δείξτε ότι $f(1) = -e$ (μονάδες 5) και στη συνέχεια ότι $f(x) = e^x \left(\ln x - \frac{1}{x} \right)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

B. Μελετήστε την f ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής (μονάδες 5) και στη συνέχεια δείξτε ότι υπάρχει

$\xi \in \left(\frac{1}{2}, e \right) : 2f \left(\frac{3}{2\xi} \right) = f \left(\frac{1}{2\xi} \right) + f \left(\frac{5}{2\xi} \right)$

Γ. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και στη συνέχεια δείξτε ότι

$$\frac{e^2 \ln 2 - f(2)}{2} < \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx < \frac{e^2 \ln 2 - f(1)}{2}$$

3.199 Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ με $f(1) = 2$, $f(e) = e + 1$ και σύνολο τιμών το

$[-1, 4]$. Να αποδείξετε ότι:

A. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο τιμές $x_1, x_2 \in (1, e)$ με $x_1 \neq x_2$, τέτοια ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

B Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$

Γ. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) [f'(x_0) - 4f^4(x_0)] = x_0$.

Δ Η ευθεία $y = -x + e + 2$ τέμνει την C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(1, e)$.

E Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, e)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$ Μαντουλίδης

3.200 Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και έστω ότι η γραφική παράσταση της τέμνει τον $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη 1. Ισχύει ακόμα η σχέση $(x+1)[f(x)+f'(x)] = xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A) Να βρεθεί ο τύπος της f . B) Αν $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{e^x}$

i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι η γραφική της παράσταση έχει με τον άξονα συμμετρίας αυτής και της f^{-1} ένα μόνο κοινό σημείο με θετική τετμημένη x_0 .

ii) Υλικό σημείο M κινείται κατά μήκος της C_f ξεκινώντας από το σημείο που η C_f τέμνει τον $y'y$ και η προβολή του M στον Ox απομακρύνεται με ταχύτητα 2cm/s . Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας $\hat{M}Ox$ την χρονική στιγμή που $x = x_0$ ισούται με $\frac{f'(x_0)-1}{x_0}$ rad/s.

iii) Αν $g(x) = f^2(x)$ να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_g τον $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=\alpha$, $\alpha < 0$ καθώς και το $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} E(\alpha)$.

3.201 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2}{8} + \alpha$, $x > 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$, $g(x) = \ln x$, $x > 0$

A) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία – ακρότατα την συνάρτηση $\Delta(x) = f(x) - g(x)$, $x > 0$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

B) Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν: δύο – ένα – κανένα κοινό σημείο.

Γ) Στην περίπτωση όπου οι C_f , C_g δεν έχουν κοινά σημεία δείξτε ότι στο σημείο όπου η κατακόρυφη απόσταση των C_f , C_g παρουσιάζει ακρότατο, οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των f, g είναι παράλληλες.

Δ) Να μελετήσετε ως προς τα κοίλα την $y=\Delta(x)$ και να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε x_1, x_2 με $0 < x_1 < x_2$ ισχύει ότι: $2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + g(x_1) + g(x_2) < 2g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f(x_1) + f(x_2)$

ii) $\int_2^3 \Delta(x) dx < \frac{1}{3} \cdot \int_2^5 \Delta(x) dx$ Δούκας

3.202 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $1 < f(0) < 2$, ώστε να ισχύει:

$$f'(x) = f^2(x) - 4f(x) + 5 \text{ για κάθε } x \in [0,1].$$

A. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και το πρόσημο.

B. Να δείξετε ότι: $f(1) > 2$.

Γ. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμψής.

Δ. Αν δίνεται ότι: $\frac{f(1)}{f(0)} = \alpha$ και $\int_0^1 f(x) dx = \beta$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx$

3.203 Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη, συνεχής και τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 4}{x - 3} = 5$ και

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 2$. Να αποδείξετε ότι

- A Η f είναι γνησίως αύξουσα B $f(x) > 0, \forall x \in [1, 3]$ Γ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2f(x-2)}{x-3} = 1$
- Δ Υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \frac{f(2) + f(e)}{2}$
- E Υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιος ώστε $\sqrt{2}f(\xi) = \sqrt{f(2)f(e) + f^2(e)}$ Μαντουλίδης

3.204 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \frac{x-1}{e^x - x}$

- A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- B. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο σημεία $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ με $x_1 < 1 < x_2$ στα οποία οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f είναι παράλληλες στον οριζόντιο άξονα
- Γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f' είναι παράλληλη στον οριζόντιο άξονα.
- Δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει διάστημα της μορφής $[\alpha, \beta]$ με $\beta - \alpha > 2$ στο οποίο η f είναι γνήσια αύξουσα.
- E. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τους άξονες συντεταγμένων.

ΣΤ. Να βρείτε τα όρια : i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f^3(x)}$ και ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\eta\mu x - \eta\mu x}{e^x - e^{\ln x}}$

3.205 Για την 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν:

- $f(0) = f'(0) = 1$
- $f(x) \cdot (f'(x) - f(x)) = f'(x) \cdot (f'(x) - f''(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

- A. $(f(x))^2 + (f'(x))^2 = 2e^{2x}, x \in \mathbb{R}$.
- B. $|f(x)| \leq \sqrt{2} \cdot e^x$ και στη συνέχεια ότι η εξίσωση $f(x) = xe^x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$.
- Γ. Η f είναι γνήσια αύξουσα.
- Δ. i) $\int_0^1 (f(x) - f'(x))^2 dx = e^2 - f^2(1)$
- ii) $f(1) \leq e$
- iii) Αν $f(1) = e$, τότε $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$

3.206 Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$f^3(x) + f(x) = e^{-3x^2} + e^{-x^2}.$$

A. Να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση για τη συνάρτηση $g(x) = x^3 + x$.

B. Να δείξετε ότι $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{1}{f(x)} - ef(x)$, $x \in \mathbb{R}$ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx + e \int_1^0 f(x) dx < e - 1$.

E. Έστω $F(x)$ μια παράγουσα της f στο \mathbb{R} , με $F(1) = 0$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 F(x) dx$.

ΣΤ. Έστω $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ στο $[0, 1]$.

i. Να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε την h^{-1}

ii. Αν E_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_h , τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = 1$

και E_2 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{h^{-1}}$, τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες στα άκρα

του διαστήματος που ορίζεται η h^{-1} , να δείξετε ότι $E_2 + E_1 = e$.

Μαντουλίδης

3.207 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο \mathbb{R} και τέτοια ώστε ;

- $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$
- $(x^2 + 1)f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$

A. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

B.α) Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2, f(2))$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f' στο x_0 να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

Γα) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$, την εφαπτομένη της στο $x_1 = 2$ και τις ευθείες $x=2$ και $x = \alpha > 2$

β) Αν το α μεταβάλλεται με ρυθμό 25 cm/sec , να βρείτε το ρυθμό του $E(\alpha)$ τη χρονική στιγμή που είναι $\alpha = 10 \text{ cm}$

Δ. α) Αν η g είναι κυρτή στο \mathbb{R} και $g'(1) = 1$, να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται το πολύ σε ένα σημείο στο $(1, +\infty)$

β) Αν F αρχική της f στο \mathbb{R} και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι ισχύει :

$$|F(\beta) - F(\alpha)| \leq |\beta - \alpha| \quad \text{για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Αρσάκειο

3.208 Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν

$$f'(x) = \frac{xe^x + 1}{x} \text{ για } x > 0 \text{ και } f(1) = e - 3$$

- A. Να δείξετε ότι $f(x) = e^x + \ln x - 3, x > 0$
- B. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση στο $(0, +\infty)$
- Γ. Αν $g(x) = \ln x, x > 0$

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(g(x) - 1) < 3$

- Δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = e - 3, x = e^{e^2} - 1$

Αρσάκειο

3.209 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \cdot \ln(f(x)) + 2x \cdot f'(x) = 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (1)
- $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$
- $f(1) = e$

A. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}, x \in (0, +\infty)$

B. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

Γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι

$$2 \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1} \geq 3 - x, x > 0$$

Δ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_e^{e^2} f^{-1}(x) \cdot \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right) dx$

E. Να αποδείξετε ότι $e + \sqrt[7]{e} > 2 \cdot \sqrt[5]{e}$.

Αρσάκειο

3.210 Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $f(x) = x \ln \alpha - \alpha \ln x, \alpha > 0, x \in (0, +\infty)$ με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$ και
- $g(x) = x^2 - 2x \ln x, x > 0$

A Να δείξετε ότι $\alpha = e$

B α) Να δείξετε ότι $e^x \geq x^e$, για κάθε $x > 0$

β) Να δείξετε ότι $e^4 - e^2 > 3^{e+1} - 2^{e+1}$

Γ Να δείξετε ότι $g(x) \neq 0$, για κάθε $x > 0$

Δ α) Να δείξετε ότι η $\frac{1}{g(x)}$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη

β) Αν $|h(x)| \cdot g(x) \leq f(x)$ για $x > 0$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

Αρσάκειο

3.211 Έστω η παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ συνάρτηση f με $f(\beta) = 2f(\alpha)$ και

$$f'(x) = 2f^2(x) - 4f(x) + 4 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta]$$

Να δείξετε ότι :

A. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και ότι $f(\alpha) > 0$.

B. $f(x) > 0$ και $f'(x) \geq f^2(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Γ.
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \ln 2$$

Δ. Αν $f(\alpha) > 1$, τότε :

i) Η f είναι κυρτή.

ii) Να βρείτε $\xi \in [\alpha, \beta]$ ώστε το εμβαδόν που ορίζεται από την C_f τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να γίνεται ελάχιστο

Αρσάκειο

3.212 Έστω συνάρτηση f με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων . Αν για τη συνάρτηση f ισχύει : $f'(x) + f^2(x) = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε

A. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_x^y \frac{du}{4-u^2}$ με $x, y \in (-2, 2)$

B. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{2(e^{4x} - 1)}{e^{4x} + 1}$

Γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα , να βρείτε το σημείο καμπής της και να δείξετε ότι $|f(x)| \leq 4|x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία με εξίσωση $y = 4x$ και την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

3.213 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$f'(x) + 1 = 2x(f(x) + x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε επίσης συνάρτηση $g(x) = F(x) - F(2-x)$, $x \in \mathbb{R}$ όπου F είναι αρχική της f .

A. Να αποδείξετε ότι : $f(x) = e^{x^2} - x$, $x \in \mathbb{R}$

B. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή και ότι η $(e+1)f(e^3) < f(e^4) + ef(e^2)$

Γ. Να λύσετε στο διάστημα $(0, +\infty)$ την εξίσωση $e^{x^4-x^2} = \frac{x}{x^2}$

Δ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

E. Να αποδείξετε ότι $4 \cdot \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(2t) dt < \int_0^2 f(t) dt$

Λεόντιος

3.214 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} συνάρτηση f για την οποία ισχύουν :

- Δεν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που να είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : y = x$, και

- $(f'(x) - 1)^2 + e^x f''(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O(0,0)$ έχει κλίση $\frac{1}{2}$ και η ευθεία $y = x + \ln 2$

είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$, τότε:

A Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη

B Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

Γ Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot f(x))$

Δ Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=1$, να δείξετε ότι : $4E < 1$

E Αποδείξτε ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{e^{-x} + 1} dx = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ Δούκας

3.215 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το \mathbb{R} η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f^3(x) + f(x) = 2x \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

A. Να βρείτε τις ρίζες της f και το πρόσημο της.

B. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι $f^{-1}(x) = \frac{x^3 + x}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και της ευθείας $\varepsilon : y = x$.

Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $\varepsilon : y = x$.

E. Να δείξετε ότι $\int_0^1 \frac{2}{1 + 3f^2(t)} dt = 1$. Αρσάκειο

3.216 Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ και

$$(f'(x))^2 + 2f'(x) + \frac{1}{x^2 + 1} = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

A. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

B. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της

Γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της

Δ. Αν $f^{-1}(x) = \frac{1 - x^2}{2x}$, $x \in (0, +\infty)$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική

παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f^{-1}(x) \cdot \ln x$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$

3.217 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν

$$f(x) = xe^x + \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \text{ και } g(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x - \frac{3}{2}.$$

Αν οι γραφικές παραστάσεις των f, g δέχονται σε κοινό τους σημείο, κοινή εφαπτομένη (ε) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε :

A. Να δείξετε ότι $\alpha = 0$ και η κοινή εφαπτομένη είναι η $\varepsilon : y = x$.

B. Αν E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την ευθεία (ε) και την ευθεία με εξίσωση $x = t, t > 0$, να δείξετε ότι : $E_1(t) = t \cdot e^t - e^t - \frac{1}{2}t^2 + 1, t > 0$ και να υπολογίσετε το $\lim_{t \rightarrow +\infty} E_1(t)$.

Γ. Αν E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , την ευθεία (ε) και την ευθεία με εξίσωση $x = t, t > 0$, να δείξετε ότι :

$$E_2(t) = \frac{1}{4}e^{2t} - 2e^t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{7}{4}, t > 0$$

Δ. Να δείξετε ότι $E_1(t) < E_2(t) + t \cdot e^t$, για κάθε $t > 0$

Αρσάκειο

3.218 Θεωρούμε συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν • $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$

• g ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $e^{g(x)} + g(x) - x - \ln x = e^{x+\ln x}, x > 0$

A. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να δειχθεί ότι $g(x) = x + \ln x, x > 0$

Έστω F αρχική της f με $F(0) = 0$ τότε

B.α) Να λυθεί η ανίσωση $F(2^x) \leq F(2 - \ln x)$ στο $(0, +\infty)$ όπου F αρχική της f

β) Να υπολογισθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x F(x)}{1 - \sin x}$

Γ. Η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0, 1)$

Δ. Δείξτε ότι F κυρτή στο $(-\infty, 0)$

3.219 Έστω συνάρτηση $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $g(1) = 0$ και

$$(x^3 + x)g'(x) + 2x^2g(x) = x - 1, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Έστω επίσης η κυρτή συνάρτηση $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε :

$$\int_{|f(-1)|}^{|f(-1)+2|} g(x) dx = 0. \text{ και } (x^2 + 1)g(x) \geq (1 - x) \ln(f(1)) \text{ για κάθε } x > 0$$

A. Να αποδείξετε ότι $g(x) = \frac{x - 1 - \ln x}{x^2 + 1}$ και ότι $g(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$

B. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$ και ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) + f'(\xi) = \xi + 1$

Γ. α. Να αποδείξετε ότι: $f(x) \leq 1 + (x - 1)f'(x)$ για κάθε $x \in [-1, 1]$

β. Έστω $f(0) = -1$ και E το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = -1$. Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε

$$x \in [-1, 0] \text{ και ότι: } \int_{-1}^0 f^2(x) dx > \frac{1 - 2E}{3} \quad \text{Αρσάκειο}$$

3.220 Θεωρούμε συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με συνεχή δεύτερη παράγωγο

$$f'(x)f''(x) \neq 0 \quad f''(x) > f'(x), x \in \mathbb{R}$$

A. Να αποδειχθεί $f'(0) - f(0) < f'(1) - f(1)$

B. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1) : f'(\xi_1) < f''(\xi_2)$

Επιπλέον αν ισχύει $f'(1) = \int_0^1 f''(x) dx$ και $f''(\xi_2) = -2$

Γ.α) Δείξτε ότι f είναι κοίλη

β) Δείξτε ότι $\int_0^1 xf''(x) dx > 0$

γ) Δείξτε ότι υπάρχει $\xi_3 \in (0, 1) : f''(\xi_3) < 0$

Δ. Αν η εξίσωση $(f \circ f^{-1})(e^x - 2) = f''(x) + \ln x - x$ έχει ρίζα την $\xi_3 \in (0, 1)$ τότε να αποδειχθεί ότι $0 < \xi_3 < \ln 2$

3.221 Έστω μια μη σταθερή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f^3(x) + f(x) = x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και F μια παράγουσα της f στο \mathbb{R} τέτοια ώστε $\int_{F(1)}^0 (f^2(x) - 2f(x) + 1) dx = 0$

A. i) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 1 ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη της f .

ii) Να βρείτε το $\int_1^3 f(x) dx$

B. Αν δίνεται ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(1) = 1$ να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 1} [(f(x) - 1) \ln(x - 1)] \qquad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{F(x)}$$

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τη $C_{f^{-1}}$ και την ευθεία $x=0$.

3.222 Έστω $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει: $\frac{f^2(0) + f^2(1) + 2}{2} \leq f'(x)$

και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$g''(x) = g(x), \qquad g'(0) = 2 \quad \text{και} \quad g(0) = -1$$

A. Να βρείτε τα $f(0)$ και $f(1)$ καθώς και τον τύπο της f

B. Να βρείτε τον τύπο της g , να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πεδίο τιμών της.

Γ. Αν $f(x) = 2x - 1$ και $g(x) = \frac{e^{2x} + 3}{2e^x}$ να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ (Μονάδες 2) και να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τη C_g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$

Δ. Να υπολογίσετε τα ολοκλήρωματα: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx$ $\int_{-1}^1 \frac{1}{e^x + 1} + xe^x dx$ $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln x}{x + 1} dx$

3.223 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

- $f(x) = 2f'(x) - f''(x) - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $e^{f(0)} = f(0) + 1$
- $f'(0) = 1$

Έστω h παράγουσα της f στο \mathbb{R} τέτοια ώστε $h(0) = 1$.

A. i) Να βρείτε τον τύπο της f

ii) Για $f(x) = e^x - 1$ να βρείτε την κυρτότητά της f (Μονάδες 1) και το πρόσημο της h

B. Να αποδείξετε ότι $\int_2^4 f(x) dx > 6$.

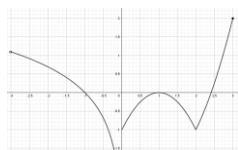
Γ. Αν $f(1 - g(x)e^{-g(x)}) = f(e^{-g(x)}e^{x^2} - x^2e^{-g(x)})$ να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ ($0 \leq \xi$) ώστε $g'(\xi) = 0$

Δ. Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(e^{h(x)}) = f(e^\alpha)$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$

3.224 Δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$ η οποία έχει ασύμπτωτη τον άξονα $y'y'$. Με τη βοήθεια της γραφικής της, να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

B2.i. Να βρείτε – αν υπάρχουν – τα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησης,



καθώς και τα σημεία στα οποία δεν είναι παραγωγίσιμη, δικαιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

ii. Να ελέγξετε αν η συνάρτηση f έχει σημεία καμπής και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

B3. Να βρείτε – αν υπάρχουν – τα παρακάτω όρια:

a. $\lim_{x \rightarrow 1} f(f(x))$ β. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)+1}{x-2}$ γ. $\lim_{x \rightarrow -1} \left(f(x) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{f(x)} \right) \right)$

B4. Αν επιπλέον ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{f(x)} - 1}{x+1} = -1$ και η f' είναι συνεχής στο -1 , να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της συνάρτησης f στο $x_0 = -1$.

B5. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g(x)$ με τύπο $g(x) = e^{\frac{x}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. Αν γνωρίζετε ότι $(g \circ f)(x) = \sqrt{-x}$, $x < 0$, τότε:

- i. Να βρείτε τον τύπο της f , για $x < 0$.
- ii. Να βρείτε το εμβαδόν μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = -e^{-1}$, $x = -1$. (Μπακούρος)

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ από το «ΕΚΚΕΝΤΡΟΝ»**ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ //ΕΚΚΕΝΤΡΟΝ**

3.225 Να λυθεί η εξίσωση $2\ln(1+e^x) = x + \ln 4$ στο R .

3.226 Αν $f(x) = \ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)$, $x \in R$ τότε να

λύσετε την εξίσωση $\ln\left(\frac{e^{f(x)}+1}{e^{f(x)}}\right) = f(x)$

3.227 Να λυθεί η εξίσωση $\frac{e^{\sqrt{1+x^3}}}{\sqrt{e^{x^3}}} = e$, $x \geq -1$.

3.228 Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow R$ με $f(x) = e^x - e \ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και F μια αρχική της f στο $(0, +\infty)$. Να αποδείξετε τη μονοτονία F και να λύσετε τις εξισώσεις:

$F(x^2+3) - F(x^2+1) = F(4) - F(2)$ και $f(x+2) = e^e - e$ στο $(-1, +\infty)$

3.229 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$, $x > 0$

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(\eta\mu x + 1)^{\sin x} = (\sin x + 1)^{\eta\mu x} \text{ αν } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

και $(\sqrt{x}+1)^e = (\sqrt{e}+1)^x$ αν $x \in [0, +\infty)$

3.230 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$, $x \in R$.

A) Αποδείξτε ότι η f είναι περιττή και 1-1

B) Λύστε την εξίσωση $\frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{3x}} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^3}$

Γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(\ln x) + f(1-x) = 0$

Δ) Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in R$ για τους οποίους ισχύει ότι $f(\alpha^2 + \beta^2) + f(2\alpha - 4\beta + 5) = 0$

3.231 A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2+1} \text{ είναι 1-1 στο } R, \text{ και στη συνέχεια να}$$

λύσετε τις εξισώσεις:

A) $e^x - x - 1 = \ln \frac{e^{2x} + 1}{(x+1)^2 + 1}$

B) $f\left(\frac{x}{e(\ln^2 x + 1)}\right) = \frac{2e^{\sqrt{x}}}{5}$

Γ) $e^{(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x} = \frac{(1+x)^{2\alpha} + 1}{(1+\alpha x)^2 + 1}$, $x > -1$ και $\alpha > 1$

Δ) $2e^{f(x)-1} = f^2(x) + 1$

3.232 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$, $x \in R$. Να λύσετε την εξίσωση

$$f\left(\sqrt{(x^2+1)((1-x)^2+1)}\right) = f\left((1-x)\sqrt{x^2+2}\right)$$

3.233 Αν $f(x) = x^5 + 2x - 1$, $x \in R$, να λυθεί η εξίσωση $f^5(x) + 2f(x) = 36$

3.234 Δίνεται μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow R$ με

την ιδιότητα $f(\alpha) - f(\beta) = f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ για κάθε $\alpha, \beta > 0$.

Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τότε:

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

B) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) + f(x^2+3) = f(x^2+1) + f(x+1) \text{ στο } (0, +\infty)$$

3.235 A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}, \quad x \in (0, +\infty) \text{ είναι κυρτή.}$$

B) Να λύσετε την εξίσωση

$$\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{3}\right)e^{\frac{2+2}{3}} = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{3}} \text{ στο } (0, +\infty)$$

Γ) Να λυθεί η εξίσωση $e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{e} + \frac{\sqrt{e}}{x}$ στο $(0, +\infty)$

3.236 Έστω ότι η συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R ισχύει ότι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, $f(R) = R$ και τα σημεία $A(2,3)$ και

$B(6,5)$ βρίσκονται στη γραφική παράσταση της

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

B. α) Να λυθεί η εξίσωση $5^x - 1 = 2^{x+1}$ και η ανίσωση $5^x - 1 > 2^{x+1}$

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$f^{-1}\left(3 + f^{-1}\left(f\left(5^x - 1\right) + \ln x - f\left(2^{x+1}\right) + 3\right)\right) = 6$$

3.237 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα τη συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$, $x > 0$

A) Να λυθεί η εξίσωση $\ln \frac{2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ στο $(0, +\infty)$

B) Να λύσετε την εξίσωση

$$f'\left(\left(x^3 + 2x\right)e^{x^3+x-2}\right) = f'(x+2) \text{ στο } (-2, +\infty)$$

3.238 A. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = 2e^x - e^{1-x} + 1$, $x \in R$

B. Να λύσετε την ανίσωση:

$$4e^{x^2-2x} < 4e^{x-2} + 3e^{-x^2+2x+1} - 3e^{-x+3}$$

3.239 Έστω η συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ με

$$f(x) = e^x - e^{-x} \text{ για κάθε } x \in R$$

A) Αποδείξετε τη μονοτονία και τα κοίλα της f

B) Αποδείξτε ότι η f' είναι άρτια συνάρτηση.

Γ) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x^2+1) - f(x^2) = f(2) - f(1)$$

Δ) Να λύσετε την εξίσωση $f'(x+2) = e + \frac{1}{e}$

3.240 Έστω η συνάρτηση $f : R \rightarrow R$, συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R και έστω F μια παράγουσα της f στο R . Λύστε στο R την εξίσωση $F(e^x + x + 3) + F(2x + 2) = F(2x + 4) + F(e^x + x + 1)$

3.241 Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο R . Αν F είναι μια αρχική της f , να λύσετε στο R την εξίσωση

$$F\left(e^{x^2} + x^2 + 3\right) + F\left(2x^2 + 2\right) = F\left(2x^2 + 4\right) + F\left(e^{x^2} + x^2 + 1\right)$$

3.242 A) Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα

$$\text{ακρότατα της συνάρτησης } f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x}$$

B) Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{x}{e^x - x} + \frac{\ln x + x}{xe^x - \ln x - x} = \frac{2}{e - 1}$$

3.243 Να μελετήσετε τη συνάρτηση

$$f(x) = (x^2 - 6x + 11)e^{x-2}, \quad x \in R \text{ ως προς τα κοίλα}$$

και να λύσετε την εξίσωση $e^{x-2} = \frac{x+1}{x^2 - 6x + 11}$

3.244 Να λύσετε την εξίσωση $x^5 = x^4 + \ln x$, $x > 0$

3.245 Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x$, $x \in R$. Να

λυθεί η εξίσωση $f(e^x) = f(e^{2x}) + x$ για $x \in R$

3.246 Έστω η συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R . Να λύσετε την εξίσωση $f(1 + \sqrt{x} - x) = f(1) - f(\sqrt{x}) + f(x)$ στο $[0, +\infty)$

3.247 Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow R$ με την

$$\text{ιδιότητα: } f(\sqrt{\alpha \cdot \beta}) > f\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right), \text{ για κάθε}$$

$$\alpha \in (0, +\infty), \beta \in (1, +\infty).$$

A) Να αποδείξετε ότι f είναι 1-1

B) Να λυθεί η εξίσωση

$$f(\sqrt{x}) + f(x^2) = f(x) + f(x^3) \text{ στο } (0, +\infty)$$

Γ) Να λυθεί η εξίσωση

$$f(x+1) + f(\eta\mu x + 2) = f(x+2) + f(e^x) \text{ στο } (-1, +\infty)$$

3.248 Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt[3]{3x+2} = \frac{x^3-2}{3}$

στο $(0, +\infty)$

3.249 Να λύσετε την εξίσωση $e^{x-1} = \ln x + 1$ στο

$(0, +\infty)$

3.250 Να λυθεί η εξίσωση $\left(x + \frac{1}{x}\right)(x - \ln x) = 2$

στο $(0, +\infty)$

3.251 Η συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R . Να λυθεί η εξίσωση

$$f\left(\frac{x^2+e^2}{2}\right) + f(e^{x-e} + 1) = f(xe) + f\left(2e^{\frac{x-e}{2}}\right)$$

3.252 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$, $x > 1$.

Να λυθεί η εξίσωση $(5^x + 1)^{(2^x+3x)} = (2^x + 3x + 1)^{(5^x)}$ στο

$[0, +\infty)$

3.253 Έστω η συνάρτηση $f : R \rightarrow R$, $x \in R$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει ότι

$$f(f(x)) = 2x - 1$$

A) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = x$

B) Να λυθεί η εξίσωση

$$f(e^x - 2) = f(x - 1) + 2(x + 1 - e^x)$$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ //ΕΚΚΕΝΤΡΟΝ

3.254 Αποδείξτε ότι $\frac{e^{\sqrt{1+x}}}{\sqrt{e^x}} \leq e$ για κάθε $x \geq -1$.

3.255 Αποδείξτε ότι $\frac{\ln x}{x} \leq \ln x$ για κάθε $x > 0$

3.256 Να αποδειχτεί ότι $2\ln(1+e^x) \geq x + \ln 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

3.257 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x, x > 0$

Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι

$$f(3x) + f(4x) > f(7x) + f(x)$$

3.258 Αν $f(x) = x^3 + x - 1, x \in \mathbb{R}$ να δείχτεί ότι

$$|f^{-1}(\alpha) - f^{-1}(\beta)| \leq |\alpha - \beta| \leq |f(\alpha) - f(\beta)|, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

3.259 Αν $f(x) = 1 - 2e^{-x}, x > 0$ με να δείξετε ότι

$$f(e^x) + f(e^{2x}) < f(e^{3x}) + f(e^{4x}), (1) \text{ για κάθε } x > 0$$

3.260 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι

γνήσια φθίνουσα και κοίλη στο \mathbb{R} .

Να δειχθεί ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$f(\ln x) + f'(x+1) \leq f(x-1) + f'(\eta\mu x + 1)$$

3.261 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι

γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} . Να αποδείξετε ότι

$$f(x)f(4x) + f(2x)f(3x) > f(x)f(3x) + f(2x)f(4x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

3.262 Έστω η συνάρτηση f με

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$$

A) Αποδείξτε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο

B) Αποδείξτε την ανισότητα

$$\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\gamma} + \frac{\gamma^2}{\alpha} \geq \alpha + \beta + \gamma \text{ για κάθε } \alpha, \beta, \gamma > 0$$

3.263 Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να

αποδείξετε την ανισότητα $e^{\int_a^e \frac{1}{\ln x} dx} > \left(\frac{e}{a}\right)^e$ για κάθε

$a \in (1, e)$

3.264 Να δειχθεί ότι για κάθε $x > 0$, ισχύει

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e$$

3.265 Να δειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι

$$(2 + \ln(x^2 + 1))^2 \leq 2(x^2 + 1)$$

3.266 Να αποδειχτεί η ανισότητα

$$e^{\frac{x}{x+1}} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e \text{ για κάθε } x > 0$$

3.267 A) Δείξτε ότι $x^2 - x \geq \ln x$ (1) για κάθε

$x > 0$

B) Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ με $\alpha\beta\gamma = 1$ να αποδείξετε ότι

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha + \beta + \gamma$$

3.268 Να αποδειχτεί η ανισότητα

$$\frac{\ln(x+1)}{x+1} < \frac{\ln^2(x+1) - \ln^2 x}{2} < \frac{\ln x}{x}, x > e \quad (1)$$

3.269 Να αποδειχτεί η ανισότητα

$$\frac{1}{\ln(x+1)^{x+1}} < \ln\left[\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right] < \frac{1}{\ln x^x} \text{ στο } (1, +\infty)$$

3.270 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}

με $-1 < f'(x) < 1$ και $f(3) = 2$. Να αποδείξετε ότι:

$$-1 < f(0) < 5$$

3.271 Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο

\mathbb{R} . Να αποδείξετε ότι $(e+1)f(e^4) < f(e^5) + ef(e^3)$

3.272 Έστω ότι η συνάρτηση $f : R \rightarrow (0, +\infty)$ είναι δύο φορές παραγωγίσμη, κυρτή και γνήσια αύξουσα στο R . Αν η συνάρτηση $\frac{f'}{f}$ είναι γνήσια αύξουσα στο R να αποδειχτεί ότι

$$f^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq f(\alpha)f(\beta) \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in R$$

3.273 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln \frac{\eta\mu x}{x}$, $x \in (0, \pi)$. Να αποδειχτεί ότι:

A) η f' είναι γνήσια φθίνουσα στο $(0, \pi)$

B)
$$\eta\mu \frac{\alpha+\beta}{2} \geq \frac{\alpha+\beta}{2} \sqrt{\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha} \frac{\eta\mu\beta}{\beta}} \text{ με } \alpha, \beta \in (0, \pi)$$

3.274 Αν η συνάρτηση F είναι κοίλη στο \mathbb{R} , να αποδείξετε ότι

$$F(x+1) - F(x) < F'(x) < F(x) - F(x-1) \text{ για } x \geq 1$$

3.275 Έστω η συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ με f' συνεχή και γνήσια αύξουσα και $f(1) = 0$. Να δείξετε ότι $(x+1)f(x) < f(x^2)$ για κάθε $x \in (0, 1)$

3.276 Έστω η συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσμη, γνησίως αύξουσα και κοίλη στο R με $f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\alpha} f(\alpha) + f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < 1 + \frac{1}{\alpha}$ για κάθε $\alpha > 1$

3.277 Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = \ln(\ln t)$, $t \in (1, +\infty)$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο με τετμημένη e^2 και να αποδείξετε την ανισότητα $2e^2 \ln(\ln x) \leq x + e^2 \ln \frac{4}{e}$

3.278 Να αποδειχτεί ότι $\alpha^{a(1-\beta)} > \beta^{\beta(1-\alpha)}$ (1) για κάθε $0 < \alpha < \beta < 1$

3.279 Να αποδείξετε ότι $\sin x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ για κάθε $x > 0$

3.280 Να αποδειχτεί ότι $1 + x^2 - e^{-x} > 0$ για κάθε $x > 0$

3.281 Αν $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in R$, αποδείξτε ότι $\ln f(x) > \frac{f(x) - x - 1}{x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

3.282 Αν ισχύει ότι $e^x \geq \alpha x + \beta$ (1) για κάθε $x \in R$, με $\alpha > 0$, $\beta \in R$, να αποδείξετε ότι $\alpha^a \leq e^{-\beta}$

3.283 Έστω $\mu \in R$. Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $e^x - 2 + (\mu - 1)e^{-x} \geq -5e^{-x}$, δείξτε ότι $\mu \geq -3$

3.284 Έστω η συνάρτηση f , παραγωγίσμη στο $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f(0) = -1$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Αν ισχύει ότι $f'(x) < 2xf^2(x)$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ να αποδειχτεί ότι $f(x) \leq \frac{-1}{1+x^2}$, $x \in [0, +\infty)$

3.285 Έστω μια συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow R$ με $f(\pi) = 0$. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι $xf'(x) < f(x) + x^2 \sin x$, να αποδείξετε ότι $f(x) < x \eta\mu x$ για κάθε $x > \pi$

3.286 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ με $f(R) = R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{2f(x)} + e^{f(x)+1} + f(x) = x + 2e^2, \text{ για κάθε } x \in R$$

A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα και να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}

B) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq x$ και να αποδείξετε ότι $f(x) - 1 \geq 0$ για κάθε $x \geq 1$

3.287 Έστω η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[-2, 4]$, σύνολο τιμών το $[-1, 8]$ και την

ιδιότητα $\int_{-2}^4 f(x)dx = 0$. Να δείξετε ότι :

A) $-f^2(x) + 7f(x) + 8 \geq 0$, για κάθε $x \in [-2, 4]$.

B) $\int_{-2}^4 f^2(x)dx \leq 48$

3.288 Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής

στο $[0, 1]$. Δείξτε ότι $\int_0^1 xf(x)dx \leq \frac{1}{12} + \int_0^1 f^2(x)dx$

3.289 Να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\ln(t^2+1)} dt > \frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}$,

$0 < \alpha < \beta$

3.290 Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής

στο $[0, 1]$ και ισχύει ότι $f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 6 \int_0^1 xf(x)dx \geq \frac{27}{10}$$

3.291 Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής

στο $[0, 1]$ και ισχύει ότι $f(0) - ef(1) = 0$. Να

αποδείξετε ότι

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 4 \int_0^1 e^x f(x)dx \geq 2(1 - e^2)$$

3.292 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και

ισχύει ότι $f(4-x) + f(x) \geq 2f(2)$, για κάθε $x > 0$.

Να αποδείξετε ότι $\int_1^3 f(x)dx > 2f(2)$

3.293 Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{4x} - 8x^2$, $x \in R$,

να αποδείξετε ότι

$$(e^2 - 2)\ln 2 < \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt < (e^4 - 8)\ln 2$$

3.294 Έστω η συνεχής συνάρτηση

$f : R \rightarrow (0, +\infty)$. Αν ο α είναι πραγματικός

αριθμός μεγαλύτερος του ένα, να αποδείξετε ότι

$$2 \int_1^{\sqrt{\alpha}} xf(\alpha x^2)dx \leq \int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{xf(x)}{\alpha^2} dx \leq \int_{\alpha^2}^{\alpha^4} \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx$$

3.295 Να αποδειχτεί ότι $\frac{1}{e} \leq \frac{2}{3\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} e^{\eta \mu x} dx \leq e$

3.296 Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{x + \ln x + 1}{e^x} dx < \frac{4}{3}$

3.297 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνήσια

αύξουσα και $\alpha \in R$ να αποδειχτεί ότι

$$\int_{3\alpha}^{5\alpha} f(t)dt < 2af(5\alpha) \text{ για κάθε } \alpha > 0$$

3.298 Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής

γνήσια αύξουσα στο R . Για κάθε $\alpha, \beta \in R$, να

αποδείξετε ότι $\int_0^{\alpha} f(t)dt + \int_0^{\beta} f(t)dt \leq 2 \int_0^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(t)dt$

3.299 Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής

γνήσια αύξουσα στο R και παίρνει μόνο θετικές τιμές.

Δείξτε ότι $\int_{\alpha}^{3\alpha} f(t)dt < \int_{4\alpha}^{6\alpha} f(t)dt$ για κάθε

$\alpha \in (0, +\infty)$

3.300 Αν f συνεχής και γνήσια αύξουσα στο R

και $\alpha > 1$ να δειχτεί ότι $(\alpha - 1) \int_0^1 f(t)dt < \int_1^{\alpha} f(t)dt$

3.301 Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και

κοίλη στο R . Να αποδείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\alpha+1} f(t)dt - \int_{\beta}^{\beta+1} f(t)dt < f(\alpha) - f(\beta) \text{ με } \alpha < \beta$$

3.302 Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = e^{x^2} - x, \quad x \in [0, +\infty) \text{ και}$$

$G(x) = F(x) - F(4-x), \quad x \in [0, 4]$ όπου F είναι αρχική της f στο $[0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι η G

$$\text{είναι κυρτή και ότι } 4 \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(2t) dt < \int_0^4 f(t) dt$$

3.303 Έστω η συνάρτηση $f(x) = xe^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$. Να

$$\text{αποδείξετε ότι } e^2 \cdot f(e+1) < f(e+1) \int_1^{e+1} \frac{1}{f(t)} dt < e,$$

για κάθε $x \in (0, +\infty)$

3.304 Έστω η κυρτή συνάρτηση $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

τέτοια ώστε $f(1) = 1, f(-1) = -1, f(0) = -1$

α. Να αποδείξετε ότι: $f(x) \leq 1 + (x-1)f'(x)$

για κάθε $x \in [-1, 1]$

β. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = -1$. Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για

$$\text{κάθε } x \in [-1, 0] \text{ και ότι: } 3 \int_{-1}^0 f^2(x) dx > 1 - 2E$$

3.305 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),$

$x \in \mathbb{R}$ Να βρείτε την εφαπτομένη στο σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και να αποδείξετε ότι

$$3 \int_0^2 f^2(t) dt < 8 \text{ και } 3 \int_0^1 f(t^2) dt < 1$$

3.306 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f , με $f(0) = 0$ και $0 < f'(x) < 1$. Να αποδείξετε ότι για

$$\text{κάθε } x \geq 0 \text{ ισχύει } \int_0^x f^3(t) dt \leq \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2$$

3.307 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$

συνεχείς και γνησίως αύξουσες στο $[\alpha, \beta]$. Να δειχθεί

$$\text{ότι } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx < (\beta - \alpha) \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x) dx$$

3.308 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι $f(2) < f'(x) < f(3)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(2) > 0, f(1) < 0$ να βρείτε τη μονοτονία της f και να αποδείξετε ότι

$$2 \int_2^3 f(x) dx < \int_2^3 xf(x) dx < 3 \int_2^3 f(x) dx$$

3.309 Να δειχτεί ότι $\int_0^1 (x^2 + 1)^{x^2+1} dx \geq \int_0^1 e^{x^2} dx$

3.310 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα στο \mathbb{R} και $a \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι

$$af(a) > \int_0^a f(t) dt \text{ για κάθε } x > 0$$

3.311 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$f(x) = e^{1-x^2}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{A) } \int_1^e f(t) dt < \int_1^e tf(t) dt$$

$$\text{B) } 2e \int_1^a e^{-t^2} dt < 1, \text{ για κάθε } a > 1$$

3.312 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ με

$f(x) > 0, \forall x \in [0, 1]$.

$$\text{Να αποδείξετε ότι } \frac{\int_0^1 xf^2(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx} < \frac{\int_0^1 f^2(x) dx}{\int_0^1 xf(x) dx}$$

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ // ΕΚΚΕΝΤΡΟΝ**3.313** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4 + x^2 + x - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να λυθεί η ανίσωση

$$\frac{f(x\sqrt{x}) + 2}{x\sqrt{x}} \leq \frac{f(x) + 2}{x} \text{ στο } (0, +\infty)$$

3.314 Αν $f(x) = \ln\left(\frac{2e^x}{e^x + 1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$ τότε ναλύσετε την ανίσωση $\ln\left(\frac{e^{f(x)} + 1}{e^{f(x)}}\right) < f(x)$ **3.315** Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \ln x$, $x > 0$. Να λύσετε την ανίσωση

$$f(3x) + f(4x) < f(6x) + f(2)$$

3.316 Να λυθεί η ανίσωση $\operatorname{erf} x > 1$ όταν

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

3.317 Να λυθεί η ανίσωση

$$(\sqrt{2} + 1)^{\ln x} + (\sqrt{2} - 1)^{\ln x} < 2\sqrt{2} \text{ στο } (0, +\infty).$$

3.318 Να βρείτε τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της $f(x) = 7^x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι «κάτω» από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = -x^2 + 7x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

3.319 Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύει ότι $f(1) < f'(x) < f(2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχτεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να λυθεί η ανίσωση $f(x) \geq f(1)(x-1)$ **3.320** Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κοίλη στο $(0, +\infty)$. Να λυθεί η ανίσωση $(\sqrt{x} + 1)f(x) \geq f(x\sqrt{x}) + xf(\sqrt{x})$ (1)**3.321** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$, $x > 1$.Να λυθεί η εξίσωση $(5^x + 1)^{(2^x + 3x)} > (2^x + 3x + 1)^{(5^x)}$ στο $[0, +\infty)$ **3.322** Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$, για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε τη μονοτονία της f , και να λύσετε τις ανισώσεις:

Α) $f((2x^2 + 1)e^{2x^2 - x - 1}) < f(x + 2)$

Β) $f(x)e^{f(x)} < (e + 1)e^{e+1}$ για $x > 1$

Γ) $e^{\frac{x}{2}} < \sqrt{\frac{2 \ln 2}{x}}$ στο $(0, +\infty)$

3.323 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^5}{x^4 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.Να αποδειχτεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} . Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση: $f(17(x^2 + 1)^5 - 32) \leq f(32(x^2 + 1)^4)$ **3.324** Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R} με σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως μονότονη και η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 5)$ και $B(3, -1)$, τότεΑ Να αποδείξετε τη μονοτονία της f

Β Να λύσετε την ανίσωση:

$$f^{-1}(-2 + f^{-1}(5^x + 4 - 2^{x+1})) > 3$$

Γ Να λύσετε την ανίσωση $f^2(x) \leq 5 + 4f(x)$ Δ) Λύστε την ανίσωση $f^{-1}\left(x - \ln \frac{2}{x} + 1\right) = -1$ **3.325** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x - e^{-x}$ με $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να λυθεί η ανίσωση $f(e^{f(x)}(f(x) + 1 + e)) > f(1)$

3.326 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(e^x + 1)$,

$x \in \mathbb{R}$

A) Να αποδείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f^{-1}

B) Να λυθεί η ανίσωση

$$f^{-1}(x^2 - x - 2) > f^{-1}\left(\ln \frac{e^{x^2+1} + 1}{e^{x^2} + 1}\right)$$

Γ) Να λυθεί η ανίσωση $e^{f\left(\frac{2}{3}f'(x)\right)} > e^2 + e$

3.327 Αν $f(x) = x^5 + 5x - 4$, $x \in \mathbb{R}$, να λυθεί η ανίσωση $f^5(x) + 5f(x) > 42$

3.328 Αν $f(x) = e^{-x} + x - 1$, να λυθεί η ανίσωση $f(x) < f(x^2) + \ln x$ για $x > 0$

3.329 Να λύσετε την ανίσωση $1 + 3^{2-x} < \frac{3^{x^2+1}}{4^{x^2+x-2}}$

3.330 Να λύσετε την ανίσωση

$$\ln(\sin x) + \eta \mu x < \ln(\eta \mu x) + \sin x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

3.331 Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^3} + 2 \ln x < e^x$

3.332 Να λύσετε την ανίσωση $e^{x-x^2} > 1 + x^2 - x$

3.333 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = e^x + \ln(e^x + 1), \quad x \in \mathbb{R}. \text{ Αν } F \text{ είναι μια}$$

παράγουσα της f , να λύσετε στο \mathbb{R} την ανίσωση

$$\frac{F(\eta \mu x + 1) - F(\eta \mu x)}{e^x} \geq \frac{F(x+1) - F(x)}{e^{\eta \mu x}}$$

3.334 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η συνάρτηση h με $h(x) = e^{-f(x)} - f^3(x) + 2$ να είναι γνησίως αύξουσα. Να βρείτε την μονοτονία της f και να λύσετε την ανίσωση:

$$2^{f(x^2-x)-f(4-x)} > e^{f(x^2-x)-f(4-x)}$$

3.335 Έστω η συνεχής συνάρτηση

$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι

$$f(x) = \frac{e^x}{3^{f(x)}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

A) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

B) Να λυθεί η ανίσωση

$$f(e^{x^2-x}) > f(3^{f(x^2)-f(x)}) \text{ στο } \mathbb{R}$$

Γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(\sqrt{x}) > f(x) + \ln x$

Δ) Να λυθεί η ανίσωση

$$(x^2 + 3) \int_0^{4x} f(t) dt \geq 4x \int_0^{x^2+3} f(t) dt \text{ στο } (0, +\infty)$$

3.336 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} . Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2 + x) - f(2x) < x^2 - x$ (1)

3.337 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$, $x \in (0, +\infty)$. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < f(x^2) + \ln x$

3.338 Να λυθεί η ανίσωση:

$$e^{3x^2-1} - e^{3-x} > -3x^2 - x + 4 \text{ στο } \mathbb{R}$$

3.339 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = e^x - 2. \text{ Να αποδείξετε ότι τη μονοτονία της}$$

συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ στο $(0, +\infty)$ και να

λύσετε την ανίσωση $x^2 f(x) > f(x^2)$ στο $(0, +\infty)$

3.340 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) + f(y) = f(xy) \text{ για κάθε } x, y \in (0, +\infty). \text{ Αν είναι}$$

γνωστό ότι ισχύει η ισοδυναμία $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$,

να αποδείξετε τη μονοτονία της f και να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $f(e^x) > f(3e^{2x} + 1) - f(e^{2x} + 3)$, $x \in \mathbb{R}$.

B) $3f(x) < f(7x - 6)$

3.341 Να λύσετε την ανίσωση

$$(x - \sqrt{x^2 + 1})(x + x\sqrt{1 + x^2}) < -x^2 \text{ στο } (0, +\infty)$$

3.342 Να μελετήσετε τη συνάρτηση

$f(x) = x + \ln x$, $x > 0$ ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα

A) Να λυθεί η ανίσωση $\ln \frac{2x}{x^2 + 1} > \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$ στο $(0, +\infty)$

B) Να λύσετε την ανίσωση

$$f'((x^3 + 2x)e^{x^3 + x - 2}) < f'(x + 2) \text{ στο } (-2, +\infty)$$

3.343 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

. Να λύσετε την ανίσωση

$$f((2 - 2x + x^2)(\sqrt{x^2 + 1})^3) > f((x^2 + 2)(1 - x)^3)$$

3.344 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$,

$x \in \mathbb{R}$. Να λύσετε την ανίσωση

$$f(\sqrt{(x^2 + 1)((1 - x)^2 + 1)}) > f((1 - x)\sqrt{x^2 + 2})$$

3.345 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την

οποία ισχύει ότι $f(x) + e^{f(x)} = 1 - e^x$ (1) για κάθε

$x \in \mathbb{R}$. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$

3.346 Έστω η συνάρτηση

$f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ με $f(1) = 1$ και η συνάρτηση

$g(x) = xf(x) - 1$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα.

A) Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

B) Να λυθεί η ανίσωση

$$f(x) + f(x^7) < f(x^5) + f(x^9)$$

3.347 Να λύσετε την ανίσωση $\alpha^{\beta\gamma} \beta^{\alpha\gamma} \gamma^{\alpha\beta} \geq e^{\frac{3\alpha\beta\gamma}{e}}$

με αγνώστους τα $\alpha, \beta, \gamma \in (0, +\infty)$

3.348 A) Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα

ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x}$

B) Να λυθεί η ανίσωση

$$\frac{x}{e^x - x} + \frac{\ln x + x}{xe^x - \ln x - x} = \frac{2}{e - 1}$$

Γ) Να λυθεί η ανίσωση

$$(1 - e)f(x) + 1 = (1 - e)(x - e)^4$$

3.349 A) Να βρείτε τα πρόσημα των συναρτήσεων

$$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1 \text{ και } g(x) = \frac{x - 2}{5^x}, x \in \mathbb{R}$$

Να λύσετε την ανίσωση $3^x + 4^x \leq 5^x + x - 2$

3.350 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x - \ln x$, $x > 0$

A) Να λύσετε την ανίσωση $x^6 > x^5 + \ln x$, $x > 0$ (1)

3.351 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{με } f(x) = 1 + \frac{e^x}{e^x + 1}$$

A) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B) Να λυθεί η ανίσωση

$$f(x) + f(e^x - 1) + f(\sqrt{x}) \leq \frac{9}{2}$$

3.352 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία

ισχύει ότι $f^3(x) + f(x) + 2x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως

φθίνουσα στο \mathbb{R} και περιττή, να βρείτε τις τιμές

$f(-1), f(0), f(1)$ καθώς και το πρόσημο της f

B) Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τους οποίους

ισχύει ότι $f(\alpha^2 + \beta^2) + f(2\alpha - 4\beta + 5) \leq 0$

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^3(x) + 3x > 0$

Δ) Να λυθεί η ανίσωση

$$2x \cdot f^3(x) + f^2(x) + 1 > 0$$

3.353 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} . Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x) + f(\ln x + 1) < f(1-x) + f(2-x)$

3.354 Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

A) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(2^x) + f(4^x) > f(3^x) + f(5^x)$$

B) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(e^x) + f(e^{4x}) < f(e^{3x}) + f(e^{6x})$$

3.355 Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία

ισχύει $e^{f(x)} + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

A) Να αποδείξετε τη μονοτονία της f

B) Να λύσετε στο \mathbb{R} τις ανισώσεις: $f(x) > 0$

και $f(x) > 1$

Γ) Να λύσετε στο \mathbb{R} την ανίσωση

$$f(x)f(4x) + f(2x)f(3x) > f(x)f(3x) + f(2x)f(4x)$$

3.356 Η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $g(x) + g(-x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να λύσετε την ανίσωση $g(3^x + 4^x) + g(-5^x) > x$

3.357 Να λυθεί η ανίσωση

$$3^{\log x} + 4^{\log x} + 5^{\log x} > 6^{\log x}$$

3.358 Να λυθεί η ανίσωση $2x^2 \ln x < e$ στο

$(0, +\infty)$

3.359 Να λυθεί στο \mathbb{R} η ανίσωση $4^x - 3^x > 1$

3.360 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1) + x$, $x \in (1, +\infty)$

A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f

αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

B) Να λύσετε την ανίσωση

$$f^{-1}(x+1) - 1 > f^{-1}(e^2 + 3)$$

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x$

3.361 Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt[3]{3x+2} > \frac{x^3-2}{3}$

στο $(0, +\infty)$

3.362 Έστω συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

και ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

B) Να λύσετε την ανίσωση

$$f^{-1}(e^x - x - 1) + f(e^x - x - 1) \leq 0$$

3.363 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(1 + xe^x) - \frac{x}{2}, \quad x \in [0, 1].$$

Να λύσετε την ανίσωση $\int_0^1 xf(x) dx \geq \frac{1}{12} + \int_0^1 f^2(x) dx$

3.364 Έστω η συνάρτηση f με

$$f(x) = x + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}$$

Να λυθεί η ανίσωση $f(e^x) + f(x-1) \geq f(x+1) + f(\ln x)$,

$x \in (0, +\infty)$

3.365 Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R}

με $f(0) = 1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$f'(x) < f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να λύσετε την

ανίσωση $f(x) > e^x$.