έκκεντρον

Μαθηματικό Ηλεκτρονικό Περιοδικό

Τεύχος 6ο – 01η Ιουνίου 2020 ***ISSN 2653-9969***

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

1 Η συμπεριφορά των τιμών μιας συνάρτησης ως προς τι διάταξη, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή διατρέχει το πεδίο ορισμού της ή ένα διάστημα, μας δίνουν σημαντικές πληροφορίες για την ίδια τη συνάρτηση. Στο άρθρο αυτό παρουσιάζονται λυμένα προχωρημένα θέματα στη μονοτονία και τα ακρότατα συναρτήσεων για μαθητές / μαθήτριες της Β Λυκείου. Με δεδομένο ότι στο σχολικό βιβλίο η εν λόγω θεωρία περιέχεται στην αρχή του βιβλίου, δεν συμπεριελήφθηκαν θέματα από την ύλη των εκθετικών ή λογαριθμικών συναρτήσεων. Μέρος του άρθρου αυτού έχει δημοσιευθεί στο 101 τεύχος του περιοδικού της Ε.Μ.Ε. «Ευκλείδης Β»

2 Θεωρία, μέθοδοι, σχόλια, και 42 υποδειγματικά λυμένα παραδείγματα στο Α μέρος που περιλαμβάνει πεδίο ορισμού-γραφική παράσταση συνάρτησης μετατοπίσεις-ισότητα πράξεις -σύνολο τιμών σύνθεση καθώς και ένα πλήθος από προτεινόμενες – ταξινομημένες - ασκήσεις για λύση. . Σταδιακά και στα επόμενα τεύχη του «έκκεντρον» θα παρουσιαστούν ανάλογες εργασίες σε όλη την ανάλυση της Γ τάξης μέχρι και τα ολοκληρώματα.

3 Άλγεβρα Α Λυκείου. Θεωρία, μέθοδοι, λυμένα παραδείγματα και ένα πλήθος προτεινόμενων ασκήσεων για λύση στο κεφάλαιο των πραγματικών αριθμών. Δυνάμεις, Ταυτότητες, Ανισότητες Απόλυτη τιμή, ρίζες

Στις σελίδες του περιοδικού «έκκεντρον» δημοσιεύονται ολοκληρωμένες θεματικές εργασίες με περιεχόμενο από τα μαθηματικά στο πλαίσιο της σχολικής ύλης και με έμφαση στην ύλη του Γενικού Λυκείου ή από την ιστορία των επιστημών.

--*-*-*-*

Ερωτήματα, προτάσεις, παρατηρήσεις, ή εργασίες για δημοσίευση σε word, μπορούν να αποστέλλονται στο mail επικοινωνίας

papagrigorakism@gmail.com

Επιμέλεια-Υπεύθυνος έκδοσης:

Μίλτος Παπαγρηγοράκης

Μαθηματικός M.Ed.

Χανιά

Ιστότοπος: http://users.sch.gr/mipapagt

Διανέμεται ηλεκτρονικά και δωρεάν.

ISSN 2653-9969

ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

Μονοτονία –Ακρότατα Συναρτήσεων

Μιλτιάδης Ι. Παπαγρηγοράκης
Μαθηματικός
Δ/ντής του 3ο ΓΕ.Λ. Χανίων

Η συμπεριφορά των τιμών μιας συνάρτησης ως προς τι διάταξη, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή διατρέχει το πεδίο ορισμού της ή ένα διάστημα, μας δίνουν σημαντικές πληροφορίες για την ίδια τη συνάρτηση

Η ***μονοτονία*** *μιας συνάρτησης αναφέρεται ποιοτικά στην κατεύθυνση της μεταβολής των τιμών της. Για παράδειγμα, έστω ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης αυξάνεται, η μονοτονία είναι η πληροφορία που αναφέρει αν η εξαρτημένη μεταβλητή αυξάνεται και αυτή ή μειώνεται ή μένει αμετάβλητη.*

Τα ***ακρότατα*** *μιας συνάρτησης αναφέρονται στις ακραίες τιμές της συνάρτησης εφόσον υπάρχουν. Είναι η μεγαλύτερη ή η μικρότερη τιμή που ενδέχεται να έχει μία συνάρτηση όταν το x διατρέχει το πεδίο ορισμού της.*

ΣΧΟΛΙΑ

- Η μονοτονία μιας συνάρτησης αναφέρεται σε διαστήματα του πεδίου ορισμού της. πχ η $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$
- Η μονοτονία μιας συνάρτησης μπορεί να προκύψει από το πρόσημο του λόγου μεταβολής:

  Αν για οποιαδήποτε $x_1,x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ είναι $\lambda=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ (αντ. λ<0) τότε η f είναι γνησίως αύξουσα (αντ. φθίνουσα) στο A
- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ και σε κάποιο εσωτερικό σημείο $x_o \in \Delta$ μηδενίζεται, τότε εκατέρωθεν του σημείου x_o θα αλλάζει πρόσημο. Μπορούμε να βρούμε το πρόσημό της χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μονοτονίας.
- Μια συνάρτηση ΔΕΝ είναι γνησίως αύξουσα (αντ. φθίνουσα) αν και μόνο αν ΥΠΑΡΧΟΥΝ $x_1,x_2 \in D_f$ ώστε να ισχύει $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$ (αντ. $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$)
- Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο (αντ. μέγιστο) το $\kappa \in R$ πρέπει και αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in D_f$ ώστε $f(x_0)=\kappa$ και ότι $f(x)\geq \kappa$ (αντ. $f(x)\leq\kappa$) για κάθε $x \in D_f$
- Μόνο από τη σχέση $m\leq f(x)\leq M$ για κάθε $x\in A_f$ ΔΕΝ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το m είναι ελάχιστο της f ή ότι το M είναι μέγιστό της.

-----***-----

Οι προτάσεις που ακολουθούν είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για την επίλυση ανισώσεων ή την απόδειξη ανισοτήτων

ΠΡΟΤΑΣΗ 1 **Έστω $f: A \to R$, γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in D_f$ ισχύει ότι:** $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$

Απόδειξη:

- Η συνεπαγωγή $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ προκύπτει από τον ορισμό της γν. αύξουσας συνάρτησης
- Θα αποδείξουμε τη συνεπαγωγή $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$ με την εις άτοπον απαγωγή:

Αν $x_1 > x_2$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα θα είχαμε $f(x_1) > f(x_2)$ που είναι άτοπο

Αν $x_1 = x_2$ τότε επειδή η f είναι συνάρτηση θα είχαμε $f(x_1) = f(x_2)$ που είναι άτοπο .

Επομένως είναι $x_1 < x_2$

Όμοια αποδεικνύεται η *ΠΡΟΤΑΣΗ:* Αν η $f: A \to R$ γνησίως φθίνουσα τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει ότι: $f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2 **Έστω $f: A \to R$, γνησίως μονότονη συνάρτηση. Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in D_f$ ισχύει ότι:** $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Απόδειξη

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$:

- Η συνεπαγωγή $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ είναι αληθής επειδή η f είναι συνάρτηση.
- Θα αποδείξουμε τη συνεπαγωγή $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ με την εις άτοπον Απαγωγή.

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει ότι $x_1 = x_2$ τότε έχουμε ότι:

- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ που είναι άτοπο.
- $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ που είναι άτοπο.

Επομένως για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η ισοδυναμία $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Άσκηση 1

Α) **Αποδείξτε τη μονοτονία της συνάρτησης.** $f(x) = \sqrt{1-x} + \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$

Β) **Να αποδειχτεί ότι** $f(2x) - x > f(x)$ **(1) για κάθε** $x \in (-\infty, 0)$

Λύση

Α) • Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε ότι $x_1 < x_2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} -x_1 > -x_2 \\ \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-x_1 > 1-x_2 \\ \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x_1} > \sqrt{1-x_2} \\ \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x_1}+\frac{1}{x_1} > \sqrt{1-x_2}+\frac{1}{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

- Για κάθε $x_1, x_2 \in (0,1)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε αντίστοιχα ότι:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} -x_1 > -x_2 \\ \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \end{cases} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \sqrt{1-x_1}+\frac{1}{x_1} > \sqrt{1-x_2}+\frac{1}{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,1)$

Β) Για κάθε $x<0$ είναι $2x<x \Rightarrow f(2x) > f(x) \Rightarrow f(2x)-f(x) > 0$ επομένως

$f(2x)-f(x) > x \Leftrightarrow f(2x)-x > f(x)$

Άσκηση 2

Έστω συνάρτηση $f: R \to (0,+\infty)$ τέτοια ώστε η συνάρτηση h με $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}-f^3(x)+2$ να είναι γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα

Λύση

Εδώ η απόδειξη θα γίνει με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής. Θα μπορούσε να γίνει με χρήση «βοηθητικής συνάρτησης» όπως κάνουμε σε επόμενη άσκηση.

Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο R. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) \le f(x_2)$ και θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f(x_1) \le f(x_2) &\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{f(x_1)} \ge \dfrac{1}{f(x_2)} \\ -f^3(x_1) \ge -f^3(x_2) \end{cases} \Rightarrow \\ &\frac{1}{f(x_1)} - f^3(x_1) + 2 \ge \frac{1}{f(x_2)} - f^3(x_2) + 2 \Rightarrow \\ &h(x_1) \ge h(x_2) \Rightarrow x_1 \ge x_2 \end{aligned}$$

Που είναι άτοπο. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Άσκηση 3

1.1 Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R και για κάθε $x \in R$ ισχύει ότι: $f(f(x))=x$ (1). Να αποδείξετε ότι $f(x)=x$, για κάθε $x \in R$

Απόδειξη:

Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση που να επαληθεύει την (1). Τότε είναι

$f(f(x))=x \Leftrightarrow f(f(x))+f(x)=f(x)+x$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+x \quad x \in R$ που είναι γνησίως αύξουσα (απόδειξη με τον ορισμό).

Τότε έχουμε: $(1) \Leftrightarrow h(f(x))=h(x) \Leftrightarrow f(x)=x$ που επαληθεύει την (1)

Άσκηση 4

Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R. Να αποδείξετε τη μονοτονία της συνάρτησης $h(x)=f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)$ στο $(-\infty,0)$

Λύση:

- Για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ με $x_1<x_2$ έχουμε

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}f(x_1)<f(x_2)\\ \frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x_1)<f(x_2)\\ f\left(\frac{1}{x_1}\right)>f\left(\frac{1}{x_2}\right)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}f(x_1)<f(x_2)\\ -f\left(\frac{1}{x_1}\right)<-f\left(\frac{1}{x_2}\right)\end{cases}\Rightarrow f(x_1)-f\left(\frac{1}{x_1}\right)<f(x_2)-f\left(\frac{1}{x_2}\right)\Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$$

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$

Άσκηση 5

1.2 Αν η συνάρτηση $f(x)=(1-|\alpha|)x+1$ $x\in R$ είναι γνησίως αύξουσα, να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in R$

Λύση

Με χρήση του προσήμου του λόγου μεταβολής έχουμε ότι: επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, για οποιαδήποτε $x_1\neq x_2\in R$ ισχύει

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0\Leftrightarrow\frac{(1-|\alpha|)x_1+1-(1-|\alpha|)x_2-1}{x_1-x_2}>0\Leftrightarrow$$

$$\frac{(1-|\alpha|)(x_1-x_2)}{x_1-x_2}>0\Leftrightarrow|\alpha|<1\Leftrightarrow-1<\alpha<1$$

Άσκηση 6

Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο R, ώστε για κάθε $x\neq y\in R$ να ισχύει $|f(x)-f(y)|<3|x-y|$.

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-3x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R και ότι η $h(x)=f(x)+3x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Λύση

Για κάθε $x\neq y\in R$ ισχύει ότι:

$$|f(x)-f(y)|<3|x-y|\Leftrightarrow\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|<3\Leftrightarrow-3<\frac{f(x)-f(y)}{x-y}<3 \qquad (1)$$

Για κάθε $x_1\neq x_2\in R$ ισχύει

$$\lambda=\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{f(x_1)-3x_1-f(x_2)+3x_2}{x_1-x_2}=$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}-3<0 \qquad \text{Λόγω της (1)}$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα.

Αντίστοιχα εργαζόμαστε για την h

Άσκηση 7

Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{2-x}$, $x\in[1,2]$ παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο.

Λύση

Για κάθε $x\in[1,2]$ έχουμε ότι

$$1\le x\le 2\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{1}\\ -2\le -x\le -1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}\le\frac{1}{x}\le 1\\ 0\le 2-x\le 1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\le\frac{1}{x}\le 1\\ 0\le\sqrt{2-x}\le 1\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}\le\frac{1}{x}+\sqrt{2-x}\le 2 \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι $f(2)=\frac{1}{2}$ και ότι $f(1)=2$

Οπότε η (1) γράφεται: $f(2)\le f(x)\le f(1)$

Συνεπώς η f παρουσιάζει ελάχιστο όταν $x=2$ το $f(2)=\frac{1}{2}$ και μέγιστο όταν $x=1$ το $f(1)=2$.

Άσκηση 8

Α) **Έστω η συνάρτηση $f(x)=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^3+\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^3$ με $x\in R$. Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι το 2**

Β) **Να λυθεί ως προς α και β η ανίσωση $f(\alpha+\beta-3)+f(\alpha-\beta-1)-4\le 0$**

Απόδειξη

Επειδή ισχύει ότι $\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^3=$

$$\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)^3=\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^3}$$

η συνάρτηση γίνεται: $f(x)=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^3+\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^3}$

- Γνωρίζουμε ότι για κάθε $\alpha>0$ ισχύει ότι: $(\alpha-1)^2\ge 0\Leftrightarrow \alpha^2+1\ge 2\alpha\Leftrightarrow \alpha+\frac{1}{\alpha}\ge 2$, με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $\alpha=1$

Οπότε για $\alpha=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^3$ παίρνουμε ότι $f(x)\ge 2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν

$$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^3=1\Rightarrow x+\sqrt{x^2+1}=1\Rightarrow$$
$$\sqrt{x^2+1}=1-x\Rightarrow x^2+1=1-2x+x^2\Rightarrow x=0$$

που επαληθεύει την $f(x)=2$

Αποδείξαμε ότι $f(x) \geq f(0)$.

Επομένως η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο μόνο όταν $x=0$ το $f(0)=2$

Β) Επειδή η f παρουσιάζει μοναδικό ελάχιστο στο 0 το 2, για κάθε $x \in R$ θα ισχύει ότι $f(x) \geq 2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x=0$. Συνεπώς :

Ισχύει ότι $f(\alpha+\beta-3) \geq 2$ με το ίσον να ισχύει μόνο όταν $\alpha+\beta-3=0$

Καθώς και $f(\alpha-\beta-1) \geq 2$ με το ίσον να ισχύει μόνο όταν $\alpha-\beta-1=0$.

Επομένως ισχύει ότι $f(\alpha+\beta-3)+f(\alpha-\beta-1) \geq 4$ με το ίσον να αληθεύει μόνο όταν

$$\begin{cases} \alpha+\beta=3 \\ \alpha-\beta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=1 \end{cases}$$

Επομένως η ανίσωση είναι αληθής μόνο όταν η ισότητα είναι αληθής και αυτό συμβαίνει μόνο όταν $\alpha=2$ και $\beta=1$

Άσκηση 9

Έστω η συνάρτηση $f:(-2,+\infty) \to (0,+\infty)$ και η συνάρτηση $g(x)=(x+2)f(x)-1$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-2,+\infty)$.

Α) **Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.**

Β) **Να λυθεί στο $(0,+\infty)$ η εξίσωση $f(x)+f(x^7)=f(x^5)+f(x^9)$**

Γ) **Να αποδειχτεί ότι για κάθε $x>1$ ισχύει ότι $f(x-2\sqrt{x})+f(x^2-x)<2f(-1)$**

Λύση:

Α) Για κάθε $x_1,\ x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2 \Rightarrow \begin{cases} g(x_1)>g(x_2) \\ x_1+2<x_2+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x_1)+1>g(x_2)+1 \\ \dfrac{1}{x_1+2}>\dfrac{1}{x_2+2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{g(x_1)+1}{x_1+2}>\frac{g(x_2)+1}{x_2+2} \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-2,+\infty)$.

Β) Για $x=1$ η ισότητα είναι αληθής.

Για κάθε $x \neq 1$ έχουμε ότι:

$$0<x<1 \Rightarrow \begin{cases} x>x^5 \\ x^7>x^9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)<f(x^5) \\ f(x^7)<f(x^9) \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x)+f(x^7)<f(x^5)+f(x^9)$$

και

$$x>1 \Rightarrow \begin{cases} x<x^5 \\ x^7<x^9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)>f(x^5) \\ f(x^7)>f(x^9) \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x)+f\left(x^7\right)>f\left(x^5\right)+f\left(x^9\right)$$

Άρα μοναδική ρίζα είναι το 1

Γ) Επειδή $x-2\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}-1\right)^2\geq 0$

Και

$$x^2-x+1=\frac{1}{2}\left(x^2+x^2+2x+1+1\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left(x^2+(x+1)^2+1\right)>0$$

Έχουμε ότι:

$$x-2\sqrt{x}\geq -1\Rightarrow f\left(x-2\sqrt{x}\right)\leq f(-1)\ \text{και}$$
$$x^2-x>-1\Leftrightarrow f\left(x^2-x\right)<f(-1)$$

με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε ότι $f\left(x-2\sqrt{x}\right)+f\left(x^2-x\right)<2f(-1)$

Άσκηση 10

Αν $f(x)=x^5+3x-4$ **,** $x\in R$**, τότε:**

Α) **Να αποδείξετε ότι η** f **είναι γνησίως αύξουσα**

Β) **Να βρείτε το πρόσημο της** f

Γ) **Να λύσετε την ανίσωση** $\left(x^5+x\right)^5-(4-2x)^5>-3x^5-9x+12$

Δ) **Να λυθεί η ανίσωση** $f\left(x^2+x\right)-f(2x)<x-x^2$ **(1)**

Λύση

Α) Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in R$ ισχύει ότι:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}x_1^5<x_2^5\\3x_1<3x_2\end{cases}\Rightarrow$$
$$x_1^5+3x_1-4<x_2^5+3x_2-4\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Β) Για το πρόσημο της f έχουμε ότι είναι:

- $f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=f(1)\Leftrightarrow x=1$
- $f(x)>0\Leftrightarrow f(x)>f(1)\Leftrightarrow x>1$
- $f(x)<0\Leftrightarrow f(x)<f(1)\Leftrightarrow x<1$

Γ) Για την ανίσωση έχουμε ότι:

$$\left(x^5+x\right)^5-(4-2x)^5>-3x^5-9x+12\Leftrightarrow$$
$$\left(x^5+x\right)^5+3\left(x^5+x\right)-4>(4-2x)^5+3(4-2x)-4\Leftrightarrow$$
$$f\left(x^5+x\right)>f(4-2x)\Leftrightarrow x^5+x>4-2x\Leftrightarrow$$
$$x^5+3x-4>0\Leftrightarrow f(x)>f(1)\Leftrightarrow x>1$$

Δ) Ισοδύναμα έχουμε:

$$f\left(x^2+x\right)-f(2x)<x-x^2 \Leftrightarrow$$
$$f\left(x^2+x\right)+(x^2+x)<f(2x)+2x \quad (2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+x,\ \ x\in R$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα αφού για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ ισχύει ότι:

$$x_1<x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1)<f(x_2) \\ -x_1<-x_2 \end{cases} \Rightarrow$$
$$f(x_1)+x_1<f(x_2)+x_2 \Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$$

Τότε η ανίσωση (2) γίνεται:

$$(2)\Leftrightarrow h\left(x^2+x\right)<h(2x)\Leftrightarrow x^2+x<2x\Leftrightarrow$$
$$x^2-x<0\Leftrightarrow x\in(0,1)$$

που είναι οι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης (1)

Άσκηση 11

Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f^5(x)+f(x)=2x^5$ (1), για κάθε $x\in R$. Να αποδειχτεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, να βρείτε το $f(0)$ το $f(1)$ και το πρόσημο της f.

Λύση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x^5+x,\ \ x\in R$ που είναι γνησίως αύξουσα (απόδειξη εύκολη με τον ορισμό)

Τότε για κάθε $x_1,x_2\in R$ έχουμε ότι:

$$x_1<x_2\Rightarrow 2x_1^5<2x_2^5\Rightarrow f^5(x_1)+f(x_1)<f^5(x_2)+f(x_2)\Rightarrow$$
$$h(f(x_1))<h(f(x_2))\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

(αφού η h είναι γνησίως αύξουσα), επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

Για την εύρεση του $f(1)$, θέτουμε στη σχέση (1) όπου $x=1$ και παίρνουμε:

$$f^5(1)+f(1)=2\Leftrightarrow h(f(1))=h(1)\Leftrightarrow f(1)=1$$

Για την εύρεση του $f(0)$, θέτουμε στην (1) $x=0$ και παίρνουμε:

$$f^5(0)+f(0)=0^5\Leftrightarrow f(0)\left(f^4(0)+1\right)=0\Leftrightarrow f(0)=0$$

Το πρόσημο της f μπορεί να προκύψει είτε αλγεβρικά:

- Η $(1)\Leftrightarrow f(x)\left(f^4(x)+1\right)=x^5$ οπότε: $x>0\Rightarrow f(x)>0$ και $x<0\Rightarrow f(x)<0$

Είτε με αξιοποίηση της μονοτονίας της συνάρτησης f:

- $x<0\Rightarrow f(x)<f(0)\Rightarrow f(x)<0$

και $x>0\Rightarrow f(x)>f(0)\Rightarrow f(x)>0$

Άσκηση 12

Έστω συνάρτηση $h(x)=x^3+x,\ x\in R$ **και η συνάρτηση** $f:R\to R$ **που είναι γνησίως μονότονη η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία** $A(2,0)$ **και** $B(3,9)$ **και έχει σύνολο τιμών το** R

Α **Να αποδείξετε ότι η** h **είναι γνησίως αύξουσα**

Β **Να αποδείξετε ότι η** f **είναι γνησίως αύξουσα.**

Γ **Να λυθεί η εξίσωση** $f(3+f(x^6+x^2))=9$

Δ **Να λυθεί η ανίσωση** $f(3+f(x^6+x^2))<9$

Ε **Να βρείτε το πρόσημο της** f

Λύση:

Α) Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ ισχύει ότι:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}x_1<x_2\\ x_1^3<x_2^3\end{cases}\Rightarrow x_1+x_1^3<x_2+x_2^3\Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο R

Β) Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Επειδή είναι γνησίως μονότονη θα είναι γνησίως φθίνουσα.

Τότε για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in R$ έχουμε ότι

$$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

και για $x_1=2,\ x_2=3$ θα έχουμε ότι:

$$2<3\Rightarrow f(2)>f(3)\Rightarrow 0>9$$

που είναι άτοπο. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

Γ) Ισοδύναμα παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned}&f(3+f(x^6+x^2))=9\Leftrightarrow f(3+f(x^6+x^2))=f(3)\Leftrightarrow\\ &3+f(x^6+x^2)=3\Leftrightarrow f(x^6+x^2)=f(2)\Leftrightarrow\\ &x^6+x^2=2\Leftrightarrow h(x^2)=h(1)\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1\end{aligned}$$

Δ) Ισοδύναμα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}&f(3+f(x^6+x^2))<9\Leftrightarrow f(3+f(x^6+x^2))<f(3)\Leftrightarrow\\ &3+f(x^6+x^2)<3\Leftrightarrow f(x^6+x^2)<f(2)\Leftrightarrow\\ &x^6+x^2<2\Leftrightarrow h(x^2)<h(1)\Leftrightarrow x^2<1\Leftrightarrow x\in(-1,1)\end{aligned}$$

Ε) Για το πρόσημο της f έχουμε:

$x>2\Rightarrow f(x)>f(2)\Rightarrow f(x)>0$ και $x<2\Rightarrow f(x)<f(2)\Rightarrow f(x)<0$

Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει ότι $f(x)+f^3(x)+x^3+x^9=0$ για κάθε $x\in R$. Βρείτε τη μονοτονία και τον τύπο της συνάρτησης f

Λύση

Ισοδύναμα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}&f(x)+f^3(x)+x^3+x^9=0\Leftrightarrow\\&f(x)+f^3(x)=-x^3-x^9\end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x+x^3$, $x\in R$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα (απόδειξη εύκολη με τον ορισμό)

Για τη μονοτονία της f έχουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}&x_1<x_2\Rightarrow -x_1^3>-x_2^9\Rightarrow h\left(-x_1^3\right)>h\left(-x_2^9\right)\Rightarrow\\&h(f(x_1))>h(f(x_2))\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)\end{aligned}$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα

Για την εύρεση του τύπου της f από την (1) παίρνουμε ότι για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$\begin{aligned}&f(x)+f^3(x)+x^3+x^9=0\Leftrightarrow\\&f(x)+f^3(x)=-x^3-x^9\Leftrightarrow\\&h(f(x))=h\left(-x^3\right)\Leftrightarrow f(x)=-x^3\end{aligned}$$

Άσκηση 14

Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ με την ιδιότητα: $f(x+y)=f(x)+f(y)$, για κάθε $x,y\in R$. Δίνεται ακόμα ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει η ισοδυναμία: «$x>0\Leftrightarrow f(x)>0$».

Α) να αποδείξετε ότι:

α) $f(0)=0$

β) **Ισχύει** $f(-x)+f(x)=0$ **για κάθε** $x\in R$

γ) **Η f είναι γνησίως αύξουσα**

δ) **Για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει ότι** $f\left(\sqrt{x}\right)+f\left(x^2\right)>f(x)+f\left(x^3\right)$

Β) **να λυθεί η εξίσωση** $f\left(2x^2+2016\right)+f\left(2x^2-2016\right)=2f\left(2|x|-1\right)$

Λύση

Αα) Από τη σχέση $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για $x=y=0$ βρίσκουμε ότι $f(0)=0$

β) Στην (1) θέτουμε $y=-x$ και παίρνουμε $\begin{aligned}&f(x-x)=f(x)+f(-x)\Rightarrow f(0)=f(x)+f(-x)\Rightarrow\\&f(-x)=-f(x)\end{aligned}$.

γ) Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ ισχύει:

$$\begin{aligned}&x_1<x_2\Rightarrow x_2-x_1>0\Rightarrow f(x_2-x_1)>0\Rightarrow\\&f(x_2+(-x_1))>0\Leftrightarrow f(x_2)+f(-x_1)>0\Leftrightarrow\\&f(x_2)-f(x_1)>0\Leftrightarrow f(x_2)>f(x_1)\end{aligned}$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

δ) Για κάθε $x \in (0,1)$ έχουμε ότι:

$$0 < x < 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} > x \\ x^2 > x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\sqrt{x}) > f(x) \\ f(x^2) > f(x^3) \end{cases} \Rightarrow$$
$$f(\sqrt{x}) + f(x^2) > f(x) + f(x^3)$$

Β) Ισοδύναμα έχουμε ότι

$$f(x^2+2016)+f(x^2-2016)=2f(2|x|-1) \Leftrightarrow$$
$$f(x^2+2016)+f(x^2-2016)=f(2|x|-1)+f(2|x|-1) \Leftrightarrow$$
$$f(2x^2)=f(4|x|-2) \Leftrightarrow 2x^2=4|x|-2 \Leftrightarrow$$
$$|x|^2-2|x|+1=0 \Leftrightarrow (|x|-1)^2=0 \Leftrightarrow |x|-1 \Leftrightarrow$$
$$x=-1 \text{ ή } x=1$$

Άσκηση 15

Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=x-2\sqrt{x}+1$

Α) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο

Β) Αποδείξτε την ανισότητα $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\gamma}+\frac{\gamma^2}{\alpha} \geq \alpha+\beta+\gamma$ για κάθε $\alpha,\beta,\gamma>0$

Λύση

Α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $[0,+\infty)$

Για κάθε $x \geq 0$ ισχύει ότι

$f(x)=x-2\sqrt{x}+1=\sqrt{x}^2-2\sqrt{x}+1=(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$ και επειδή $f(1)=0$ έχουμε ότι $f(x) \geq f(1)$

για κάθε $x \geq 0$, συνεπώς η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το $f(1)=0$

Β) Από το Α ερώτημα έχουμε ότι $x-2\sqrt{x}+1 \geq 0$, από όπου προκύπτει :

Για $x=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ ότι $\frac{\alpha^2}{\beta^2}-2\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2}}+1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2}-2\frac{\alpha}{\beta}+1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta}-2\alpha+\beta \geq 0$ (1).

Για $x=\frac{\beta^2}{\gamma^2}$ παίρνουμε $\frac{\beta^2}{\gamma}-2\beta+\gamma \geq 0$ (2)

και για $x=\frac{\gamma^2}{\alpha^2}$ ότι $\frac{\gamma^2}{\alpha}-2\gamma+\alpha \geq 0$ (3).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) και (3) έχουμε ότι $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\gamma}+\frac{\gamma^2}{\alpha} \geq \alpha+\beta+\gamma$

ΜΙΛΤΟΣ ΠΑΠΑΓΡΗΓΟΡΑΚΗΣ
ΧΑΝΙΑ

Μαθηματικά

Γ Λυκείου

Συναρτήσεις

πεδίο ορισμού-γραφική παράσταση
μετατοπίσεις-ισότητα
πράξεις -σύνολο τιμών
Σύνθεση
Μονοτονία – Ακρότατα
1-1
Αντίστροφη

1.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $A \neq \varnothing$ ένα υποσύνολο του R. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Η τιμή y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$

Συμβολικά γράφουμε $f: A \to R$ και $x \to f(x)$

- Ανεξάρτητη μεταβλητή λέγεται η μεταβλητή x, ενώ εξαρτημένη, η μεταβλητή y
- Σύνολο τιμών $f(A)$: ονομάζεται το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$. Δηλαδή:

$$f(A) = \{y \,/\, y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$$

- Σε κάθε συνάρτηση $f: A \to B$ ισχύει ότι:

  Για κάθε $x_1, x_2 \in A$: $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ και $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$
- Μια συνάρτηση $f: A \to R$ θεωρείται ορισμένη αν και μόνο αν γνωρίζουμε το πεδίο ορισμού της A και μπορούμε να βρούμε την τιμή της για κάθε $x \in A$
- Ένας αριθμός $\beta \in R$ λέγεται τιμή μιας συνάρτησης $f: A \to R$ αν και μόνο αν υπάρχει $\alpha \in R$ ώστε $f(\alpha) = \beta$

12-1. Βρείτε το $\lambda \in R$, ώστε να είναι συνάρτηση η $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 5, & x \leq \lambda^2 - 3\lambda + 2 \\ x^2 + 4, & x \geq 2 - \lambda \end{cases}$

Λύση

Για να ορίζεται συνάρτηση πρέπει

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 \leq 2 - \lambda \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \lambda \leq 2$$

Τώρα για $\lambda = 0$ γίνεται $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 5, & x \leq 2 \\ x^2 + 4, & x \geq 2 \end{cases}$ που δεν είναι συνάρτηση αφού για $x = 2$ έχουμε μέσω του τύπου δύο τιμές διαφορετικές.

Για $\lambda = 2$ γίνεται $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 4, & x \leq 0 \\ x^2 + 4, & x \geq 0 \end{cases}$ που είναι συνάρτηση αφού για $x = 0$ έχουμε μέσω του τύπου την ίδια τιμή για την f

Τελικά για $0 \leq \lambda < 2$ η f είναι συνάρτηση.

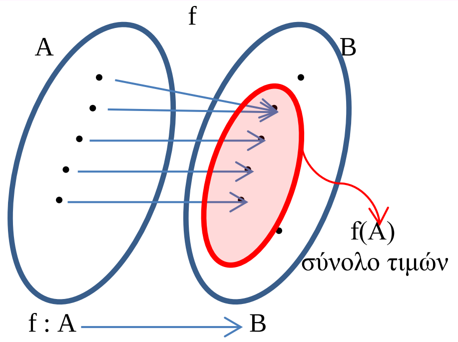
Πεδίο ορισμού συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ

Πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης είναι το ευρύτερο υποσύνολο του R που περιέχει όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή x ώστε οι αντίστοιχες εικόνες $f(x)$ να είναι πραγματικοί αριθμοί.

Δηλαδή είναι το μη κενό σύνολο: $A=\{x\in R/\ f(x)\in R\}$

Ο συμβολισμός $f: A\to B$ σημαίνει ότι η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το A και παίρνει τιμές στο σύνολο Β. Δηλαδή το Β ΔΕΝ είναι κατ΄ανάγκη, το σύνολο τιμών της f



ΠΕΔΙΑ ΟΡΙΣΜΟΥ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Η συνάρτηση $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_o$ έχει πεδίο ορισμού το R

Αν p, q είναι συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το R τότε:

Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ έχει πεδίο ορισμού: $D_f=\{x\in R/\ q(x)\neq 0\}$

Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{p(x)}$ έχει πεδίο ορισμού: $D_f=\{x\in R/\ p(x)\geq 0\}$

Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{p(x)}}$ έχει πεδίο ορισμού: $D_f=\{x\in R/\ p(x)>0\}$

Η συνάρτηση $f(x)=\ln(p(x))$ έχει πεδίο ορισμού: $D_f=\{x\in R/\ p(x)>0\}$

Η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi P(x)$ έχει πεδίο ορισμού: $D_f=\left\{x\in R/\ P(x)\neq \kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \kappa\in Z\right\}$

Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\varphi P(x)$ έχει πεδίο ορισμού: $D_f=\{x\in R/\ P(x)\neq \kappa\pi,\ \kappa\in Z\}$

Λυμένα παραδείγματα στο πεδίο ορισμού

12-2. *Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης* $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln x}}+\sqrt{e-e^x}$

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν $x\in R$ και :

$$\begin{cases}x>0\\1-\ln x>0\\e-e^x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\ln x<1\\e^x\leq e\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\ln x<\ln e\\e^x\leq e^1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x<e\\x\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\leq 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,1]$

12-3. *Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης* $f(x)=\sqrt{1-\ln\left(x+|x|\right)}$

Λύση

Η συνάρτηση ορίζεται όταν και μόνο όταν $x\in R$ και :

$$\begin{cases}x+|x|>0\\1-\ln\left(x+|x|\right)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\ln\left(x+|x|\right)\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x+|x|\leq e\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\2x\leq e\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x\leq\dfrac{e}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(0,\frac{e}{2}\right].$$

Άρα η f ορίζεται στο διάστημα $\left(0,\dfrac{e}{2}\right]$

12-4. *Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης* $f(x)=\dfrac{1}{|x-1|-1}+\sqrt{2-|x|}$

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν $x\in R$ και :

$$\begin{cases}|x-1|-1\neq 0\\2-|x|\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x-1|\neq 1\\|x|\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0 \text{ και } x\neq 2\\-2\leq x\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-2,0)\cup(0,2)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=[-2,0)\cup(0,2)$

12-5. *Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης* $f\left(x\right)=ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$

Λύση

Για κάθε $x\in R$, ισχύει ότι: $\sqrt{4x^2+2}>\sqrt{4x^2}=|2x|\geq -2x\Rightarrow 2x+\sqrt{4x^2+2}>0$.

Επομένως η συνάρτηση f ορίζεται αν και μόνο αν $\begin{cases}x^2+2\geq 0\\x+\sqrt{x^2+2}>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in R$

Άρα $D_f=R$.

12-6. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης : $f(x)=\sqrt{x^{\ln x}-e}$

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται μόνο όταν $x\in R$ και

$$\begin{cases}x>0\\ x^{\ln x}-e\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x^{\ln x}\geqslant e\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \ln x^{\ln x}\geqslant \ln e\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \ln^2 x\geqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x>0\\ \ln x\leqslant -1 \text{ ή } \ln x\geqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\leqslant \dfrac{1}{e} \text{ ή } x\geqslant e\end{cases}$$

Επομένως $D_f=\left(0,e^{-1}\right]\cup\left[e,\infty\right)$

12-7. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{\text{συν}x}{\sqrt{x-\sqrt{4-x^2}}\ \ln x}$

Λύση

Με $x\in R$ έχουμε $f(x)\in R\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}x>0\\ \ln x\neq 0\\ x-\sqrt{4-x^2}>0\\ 4-x^2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \ln x\neq 0\\ x>\sqrt{4-x^2}\\ |x|\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\neq 1\\ x^2>4-x^2\\ -2\leq x\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\neq 1\\ x<-\sqrt{2} \text{ ή } x>\sqrt{2}\\ -2\leq x\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(\sqrt{2},2\right]$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $D_f=\left(\sqrt{2},2\right]$

12-8. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{\ln(5-x)}{x-\sqrt{x}-2}$

Λύση

Η συνάρτηση ορίζεται για $x\in R$ μόνο αν

$$\begin{cases}5-x>0\\ x\geq 0\\ x-\sqrt{x}-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<5\\ x\geq 0\\ x-1-\sqrt{x}-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<5\\ x\geq 0\\ \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)-\left(\sqrt{x}+1\right)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x<5\\ x\geq 0\\ \left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<5\\ x\geq 0\\ \sqrt{x}-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<5\\ x\geq 0\\ x\neq 4\end{cases}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $[0,4)\cup(4,5)$

12-9. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}$

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται αν και μόνο αν $x\in R$ και

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+\sqrt{x} \geq 0 \\ x-\sqrt{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right) \geq 0 \\ \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1,+\infty).$$

Επομένως $D_f = [1,+\infty)$

*12-10. ** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης* $f(x) = (x-2)^x$

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} x-2>0 \\ x \in R \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2,+\infty) \text{ ή } \begin{cases} x-2=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } \begin{cases} x-2<0 \\ x \in Z \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1,0,-1,-2,...\}$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $D_f = [2,+\infty) \cup \{1,0,-1,-2,...\}$

*12-11. * Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού* λ *η συνάρτηση* $f(x) = \sqrt{\lambda x^2 - 3x + 1}$ *έχει πεδίο ορισμού το* R.

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται στο R αν και μόνο αν

$$\begin{cases} \lambda > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda > 0 \\ 9-\lambda^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda > 0 \\ -3 \leq \lambda \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < \lambda \leq 3:$$

*12-12. * Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού* λ *να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης* $f(x) = \sqrt{\lambda x^2 - 2x + 1}$. *(mathematica.gr)*

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται αν και μόνο αν $\lambda x^2 - 2x + 1 \geq 0$

Αν $\lambda = 0$ είναι $D_f = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

Αν $\lambda \neq 0$ έχουμε $\Delta = 4 - 4\lambda$

- για $\lambda \in (-\infty, 0)$ τότε είναι $\Delta > 0$ το τριώνυμο έχει ρίζες τις

$x = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{1-\lambda}}{2\lambda} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-\lambda}}{\lambda}$. Άρα $D_f = \left[\dfrac{1+\sqrt{1-\lambda}}{\lambda}, \dfrac{1-\sqrt{1-\lambda}}{\lambda}\right]$.

- για $\lambda \in (0,1)$:τότε είναι $\Delta > 0$ το τριώνυμο έχει ρίζες τις

$x_{1,2} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{1-\lambda}}{2\lambda} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-\lambda}}{\lambda}$.

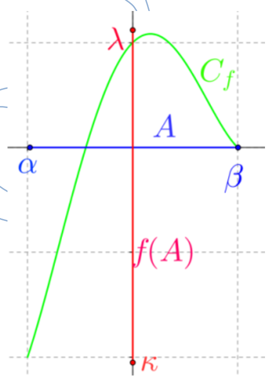
Άρα $D_f = \left(-\infty, \dfrac{1-\sqrt{1-\lambda}}{\lambda}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{1-\lambda}}{\lambda}, +\infty\right)$

- Για $\lambda \in (1,+\infty)$ έχουμε $\Delta < 0$ οπότε $D_f = R$

Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: A \to R$ είναι το σύνολο όλων των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει $y = f(x)$. Δηλαδή τα σημεία $(x, f(x))$ με $x \in A$. Συμβολίζεται με C_f

- Ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στην γραφική παράσταση C_f αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση $y = f(x)$ και αντιστρόφως.
- Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη. Οποιαδήποτε κάθετη ευθεία στον $x'x$ τέμνει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης το πολύ σε ένα σημείο
- Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης C_f Δηλαδή η προβολή της γραφικής παράστασης στον $x'x$



- Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της γραφικής παράστασης C_f Δηλαδή η προβολή της γραφικής παράστασης στον άξονα $y'y$ π.χ. Η συνάρτηση του σχήματος έχει πεδίο ορισμού $A = [\alpha, \beta]$ και σύνολο τιμών $f(A) = [\kappa, \lambda]$
- Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με τον $x'x$ προκύπτουν από την λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$
- Το κοινό σημείο της C_f με τον $y'y$ είναι το $(0, f(0))$, εφόσον $0 \in D_f$
- Στα διαστήματα που η C_f είναι πάνω (αντ. κάτω) από τον $x'x$ είναι $f(x) > 0$ (αντ. $f(x) < 0$)

<u>*Σχετική Θέση των Γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων:*</u>

- Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g προκύπτουν από την λύση της εξίσωσης $f(x) = g(x)$
- Στα διαστήματα που η C_f είναι «πάνω» από την C_g προκύπτουν από τη λύση της ανίσωσης $f(x) > g(x)$
- Στα διαστήματα που η C_f είναι «κάτω» από την C_g προκύπτουν από τη λύση της ανίσωσης $f(x) < g(x)$

Λυμένα παραδείγματα στη «γραφική παράσταση» συνάρτησης

12-13. *Για τις συναρτήσεις* f, g *ισχύει ότι* $f(x)+e=g(x)+e^x$ *(1) για κάθε* $x \in R$. *Να βρεθεί η σχετική θέση των γραφικών τους παραστάσεων.*

Λύση

Από την (1) έχουμε ότι $f(x)+e=g(x)+e^x \Leftrightarrow f(x)-g(x)=e^x-e$

Από τον παρακάτω πίνακα προσήμων παίρνουμε ότι:

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$f(x)-g(x)=e^x-e$	- 0 +

Επομένως:

Οι C_f, C_g έχουν κοινό σημείο το $(1,0)$

Η C_f είναι «πάνω» από τη C_g για κάθε $x \in (0,+\infty)$

Η C_f είναι «κάτω» από τη C_g για κάθε $x \in (-\infty,0)$

12-14. *Έστω η συνάρτηση* f *με* $f(x)=\ln x+1$, $x \in (0,+\infty)$. *Να βρεθούν τα σημεία τομής της* C_f *με τους άξονες καθώς και τα διαστήματα όπου η* C_f *είναι «πάνω» ή «κάτω» από τον άξονα* $x'x$

Λύση

Η C_f τέμνει τον $x'x$ μόνο όταν

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow \ln x=\ln e^{-1} \Leftrightarrow x=e^{-1},$$

επομένως στο σημείο $(e^{-1},0)$

Επειδή το $0 \notin D_f=(0,+\infty)$, η C_f δεν τέμνει τον άξονα $y'y$

Η C_f βρίσκεται «πάνω» από τον άξονα $x'x$ μόνο όταν

$$f(x)>0 \Leftrightarrow \ln x+1>0 \Leftrightarrow \ln x>-1 \Leftrightarrow \ln x>\ln e^{-1} \Leftrightarrow x>e^{-1},$$

επομένως στο διάστημα $(e^{-1},+\infty)$, ενώ βρίσκεται «κάτω» από τον άξονα $x'x$ στο διάστημα $(-\infty,e^{-1})$

Τα συμπεράσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$ e^{-1} $+\infty$
$f(x)=\ln x+1$	- 0 +

12-15. Για τη συνάρτηση f *ισχύει ότι* $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)f(\beta)$ *(1) για κάθε* $\alpha,\beta\in R$ *και η* f *δεν μηδενίζεται. Να αποδείξετε ότι:*

Α) $f(0)=1$

Β) $f(x)>0$ *για κάθε* $x\in R$

Λύση

Α) Από την (1) για $\alpha=\beta=0$ παίρνουμε ότι:

$$f(0+0)=f(0)f(0)\Leftrightarrow f(0)=f^2(0)\Leftrightarrow f(0)\left(1-f^2(0)\right)=0\Leftrightarrow f(0)=0 \text{ ή } f(0)=1$$

και επειδή η f δεν μηδενίζεται, θα είναι $f(0)=1$

Β) Στην (1) για κάθε $x\in R$ θέτουμε ότι $\alpha=\beta=\frac{x}{2}$ έχουμε ότι

$$f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow f(x)=f^2\left(\frac{x}{2}\right)>0$$

12-16. Για τη συνάρτηση f *ισχύει ότι* $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$ *(1) για κάθε* $\alpha,\beta\in R$.
Να αποδείξετε ότι:

Α) $f(0)=0$

Β) $f(x)=-f(-x)$ *για κάθε* $x\in R$

Λύση

Α) Από την (1) για $\alpha=\beta=0$ παίρνουμε ότι:

$$f(0+0)=f(0)+f(0)\Leftrightarrow f(0)=2f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$$

Β) Στην (1) για κάθε $x\in R$ θέτουμε ότι $\alpha=x$, $\beta=-x$ έχουμε ότι

$$f(x+(-x))=f(x)+f(-x)\Leftrightarrow f(0)=f(x)+f(-x)\Leftrightarrow 0=f(x)+f(-x)\Leftrightarrow f(x)=-f(-x)$$

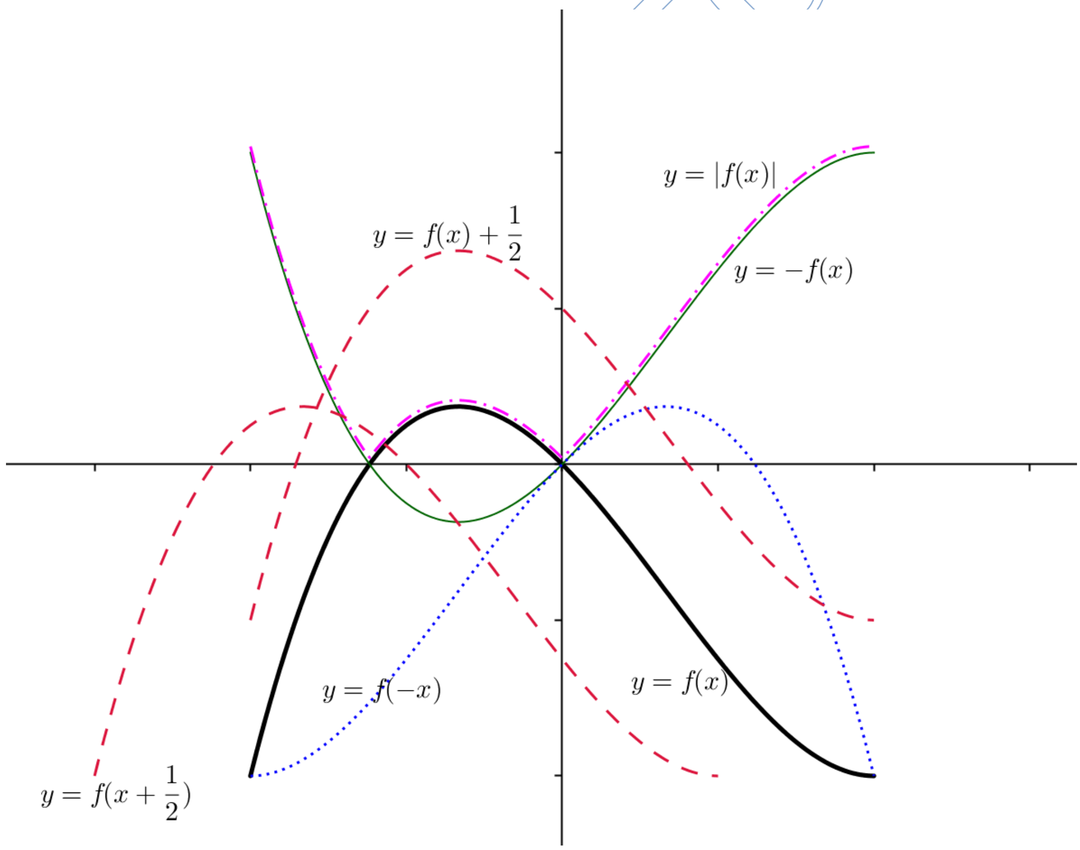
Μετατοπίσεις

Αν είναι γνωστό το διάγραμμα C_f μιας συνάρτησης f τότε ισχύει ότι η γραφική παράσταση:

- Της συνάρτησης $g(x)=f(x)+c$, με $c>0$ (αντ. $c<0$) προκύπτει από τη κατακόρυφη μετατόπιση της C_f κατά c μονάδες προς τα «πάνω» (αντ. «κάτω»)
- Της συνάρτησης $g(x)=f(x+c)$, με $c>0$ (αντ. $c<0$) προκύπτει με οριζόντια μετατόπιση της C_f κατά c μονάδες προς τα «αριστερά» (αντιστοίχως «δεξιά»)
- Της συνάρτησης $g(x)=-f(x)$ είναι συμμετρική της C_g ως προς τον άξονα $x'x$
- Της συνάρτησης $g(x)=|f(x)|$ αποτελείται

  $\mapsto$ από τα τμήματα της $y=f(x)$ που βρίσκονται πάνω από τον $x'x$

  $\mapsto$ από τα συμμετρικά ως προς τον $x'x$ των τμημάτων της $y=f(x)$ που βρίσκονται κάτω από τον $x'x$
- Της συνάρτησης $g(x)=f(-x)$ είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $y'y$



http://users.sch.gr/mipapagr

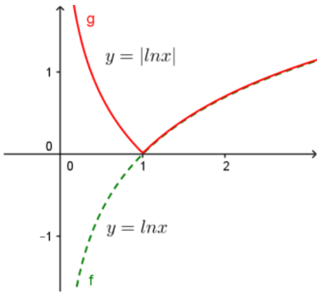
Λυμένα παραδείγματα στις μετατοπίσεις

12-17. *Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:*

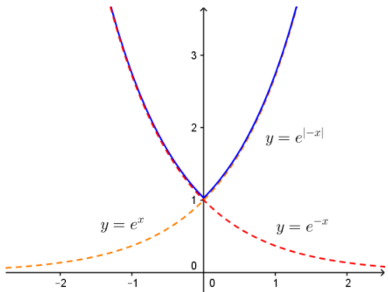
$f(x)=|\ln x|$, $f(x)=e^{|-x|}$, $g(x)=\ln|x|$ $f(x)=|x^2-1|$,

$f(x)=x^2-4x+3$ $f(x)=\sqrt{1-x}$,

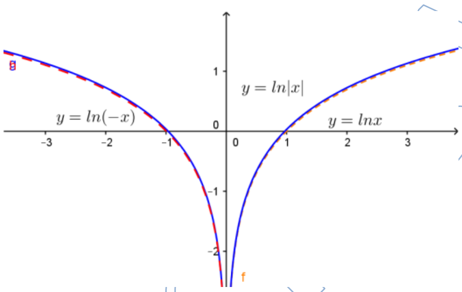
Λύση



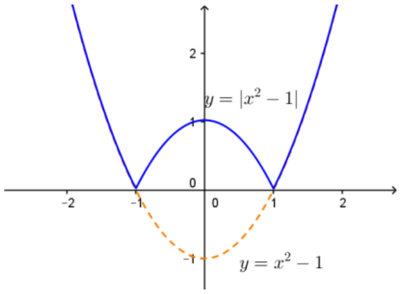
$f(x)=|\ln x|$



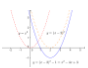
$f(x)=e^{|-x|}$



$g(x)=\ln|x|$



$f(x)=|x^2-1|$



$f(x)=x^2-4x+3$

$f(x)=\sqrt{1-x}$

Σύνολο τιμών συνάρτησης

Έστω f συνάρτηση ορισμένη σε ένα σύνολο A. Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμων της συνάρτησης f και συμβολίζεται με $f(A)$.

Ισχύει ότι: $y \in f(A)$ αν και μόνο αν υπάρχει $x \in A$ ώστε $f(x) = y$

ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Αλγεβρικός – Αναλυτικός τρόπος εύρεσης του συνόλου τιμών.:

- Η (αλγεβρική) εύρεση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης συνίσταται στην αναζήτηση των $y \in R$ για τα οποία υπάρχει $x \in D_f$ ώστε να ισχύει ότι $f(x) = y$. Η αλγεβρικός τρόπος μπορεί να μην εφαρμόζεται σε κάθε περίπτωση, αλλά πολλές φορές είναι απλούστερος, αφού δεν απαιτεί , συνέχεια, μονοτονία ή εύρεση ορίων του αναλυτικού τρόπου
- Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ τότε $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup \ldots$
- Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση «παίρνει» μια τιμή $\beta \in R$, αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\alpha \in D_f$ ώστε $f(\alpha) = \beta$

Λυμένα παραδείγματα στο σύνολο τιμών

12-18. *Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης* $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$ *όταν έχει πεδίο ορισμού το σύνολο* $A = [2, +\infty)$

Λύση

1ος Τρόπος:

Αναζητούμε τα $y \in R$ για τα οποία υπάρχει $x \in A$ ώστε $y = f(x)$.

Έτσι έχουμε: $y = f(x) \Leftrightarrow y = 2 + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow y - 2 = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow (y-2)^2 = x - 1$ και $y \geq 2$.

Άρα για $y \geq 2$ υπάρχει μοναδικό $x = 1 + (y-2)^2$ με $y = f(x)$ το οποίο ανήκει στο $A = [2, +\infty)$ όταν

$$x \geq 2 \Leftrightarrow 1 + (y-2)^2 \geq 2 \Leftrightarrow (y-2)^2 \geq 1 \Leftrightarrow |y-2| \geq 1 \overset{y \geq 2}{\Leftrightarrow} y - 2 \geq 1 \Leftrightarrow y \geq 3.$$

Άρα $f(A) = f([2, +\infty)) = [3, +\infty)$

2ος Τρόπος:

Για κάθε $x \geq 2$ είναι $x - 1 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{x-1} \geq 3 \Leftrightarrow f(x) \geq 3$

(Το $2^{ο}$ τρόπο καλό είναι να τον αποφεύγουμε επειδή για την εφαρμογή του υπάρχουν προϋποθέσεις που δεν «φαίνονται»)

12-19. *Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης* $f(x)=\begin{cases} x^2+1\,, & 0<x\le 6 \\ -1\,, & x=0 \\ 4-x\,, & -3<x<0 \end{cases}$

Λύση:

Για $0<x\le 6$ είναι: $y=x^2+1 \Leftrightarrow y-1=x^2 \underset{y-1\ge 0}{\overset{0<x\le 6}{\Leftrightarrow}} x=\sqrt{y-1}$.

Όμως είναι: $0<x\le 6 \Leftrightarrow 0<\sqrt{y-1}\le 6 \Leftrightarrow 0<y-1\le 36 \Leftrightarrow 1<y\le 37$

Για $-3<x<0$ είναι $y=4-x \Leftrightarrow x=4-y$.

Όμως

$$-3<x<0 \Leftrightarrow -3<4-y<0 \Leftrightarrow -7<-y<-4 \Leftrightarrow 4<y<7$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $(1,37]\cup(4,7)\cup\{-1\}=\{-1\}\cup(1,37]$

12-20. *Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης* $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1}$

Λύση :

Είναι $D_f=R-\{-1,1\}$ και $f(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$.

Στο σύνολο τιμών της f ανήκουν εκείνα τα $y\in R$ για τα οποία υπάρχει $x\in D_f$ ώστε

$$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1}=y \Leftrightarrow$$
$$y(x-1)=x-3 \Leftrightarrow xy-y=x-3 \Leftrightarrow xy-x=y-3 \Leftrightarrow x(y-1)=y-3 \qquad (1)$$

Αν $y=1$ τότε η (1) είναι αδύνατη οπότε το 1 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f

Αν $y\ne 1$ τότε $x=\dfrac{y-3}{y-1}$.

Για να ανήκει η τιμή αυτή στο πεδίο ορισμού της f θα πρέπει

$x\ne 1 \Leftrightarrow \dfrac{y-3}{y-1}\ne 1$ που είναι αληθής και

$x\ne 3 \Leftrightarrow \dfrac{y-3}{y-1}\ne 3 \Leftrightarrow y-3\ne 3y-1 \Leftrightarrow y\ne -1$.

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $R-\{-1,1\}$

12-21. *Έστω συνάρτηση* $f:R\to R$ *για την οποία ισχύει* $f(f(x))=x$ *για κάθε* $x\in R$. *Να αποδείξετε ότι η* f *έχει σύνολο τιμών το* R

Λύση

Για κάθε $\beta\in R$ από τη σχέση $f(f(x))=x$ για $x=\beta$ παίρνουμε ότι $f(f(\beta))=\beta$.

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\beta\in R$ υπάρχει το $\alpha=f(\beta)$ ώστε $f(\alpha)=\beta$

Επομένως η f έχει σύνολο τιμών το R

Άρτια – Περιττή Συνάρτηση:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται άρτια όταν για κάθε $x \in A_f$ ισχύει ότι: $-x \in A_f$ και $f(-x) = f(x)$

Μια συνάρτηση f λέγεται περιττή όταν για κάθε $x \in A_f$ ισχύει ότι: $-x \in A_f$ και $f(-x) = -f(x)$

ΣΧΟΛΙΑ:

Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$

Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$

Αν η f είναι περιττή και το $0 \in D_f$ τότε $f(0) = 0$ (Υποδ: Στη σχέση $f(-x) = -f(x)$ θέτουμε $x = 0$ και παίρνουμε $f(-0) = -f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$)

Λυμένα παραδείγματα στις άρτιες - περιττές

12-22. *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση* $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$ *είναι περιττή*

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται στο $(-1,1)$. Για κάθε $x \in (-1,1)$ ισχύει ότι $-x \in (-1,1)$ και

$$f(-x) = \ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)} = \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -\ln\frac{1-x}{1+x} = -f(x).$$

Άρα η f είναι περιττή.

12-23. *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση* $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{αν } x<0 \\ 0 & \text{αν } x=0 \\ 2x+1 & \text{αν } x>0 \end{cases}$ *είναι περιττή.*

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το R.

Για κάθε $x \in R$ έχουμε ότι $-x \in R$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Αν $x < 0$ τότε $f(x) = 2x-1$ και $-x > 0$ οπότε

$$f(-x) = 2(-x)+1 = -2x+1 = -(2x-1) = -f(x)$$

Αν $x > 0$ τότε $f(x) = 2x+1$ και $-x < 0$ οπότε

$$f(-x) = 2(-x)-1 = -2x-1 = -(2x+1) = -f(x)$$

Αν $x = 0$ είναι $f(0) = 0$.

Επομένως η συνάρτηση f είναι περιττή

12-24. Δίνεται περιττή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *για την οποία ισχύει*

$x^2 f(x)\ge x^3+x^5\sigma\upsilon\nu x$, *(1) για κάθε* $x\in\mathbb{R}$. *Να προσδιορισθεί ο τύπος της* f .

ΛΥΣΗ

Επειδή η f είναι περιττή στο R ισχύει ότι $f(0)=0$.

Στην (1) για $x\neq 0$, έχω $f(x)\ge \dfrac{x^3+x^5\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \Leftrightarrow f(x)\ge x+x^3\sigma\upsilon\nu x$ (2)

Θέτω στην (2) όπου x το $-x$

$$f(-x)\ge -x+(-x)^3\sigma\upsilon\nu(-x) \Leftrightarrow -f(x)\ge -x-x^3\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f(x)\le x+x^3\sigma\upsilon\nu x \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι

$f(x)=x+x^3\sigma\upsilon\nu x$, που επαληθεύει την (1)

12-25. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *για την οποία ισχύει*

$f(x+y)\ge f(x)+f(y)\ge x+y$ *(1) για κάθε* $x,y\in\mathbb{R}$.*Να δείξετε ότι:*

α. Η γραφική παράσταση της f *διέρχεται από την αρχή των αξόνων.*

β. Η συνάρτηση f *είναι περιττή.*

γ. Ισχύει $f(x)=x$, *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

α. Στη σχέση που έχει δοθεί, θέτω $x=y=0$. Οπότε

$$f(0)\ge f(0)+f(0)\ge 0 \Rightarrow \begin{cases} f(0)\ge 0 \\ f(0)\ge f(0)+f(0)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0)\ge 0 \\ f(0)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow f(0)=0$$

Συνεπώς, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχήτων αξόνων.

β. Στην (1) θέτω $y=-x$ και έχω

$$f(x-x)\ge f(x)+f(-x)\ge x-x \Leftrightarrow f(0)\ge f(x)+f(-x)\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$0\ge f(x)+f(-x)\ge 0 \Leftrightarrow f(x)+f(-x)=0. \Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$$

Δηλαδή η συνάρτηση είναι περιττή.

γ. Στην (1) θέτω $y=0$, οπότε

$$f(x)\ge f(x)+f(0)\ge x \Leftrightarrow f(x)\ge f(x)\ge x \Leftrightarrow$$

$$f(x)\ge x \qquad (1)$$

Στην τελευταία θέτω όπου x το $-x$ και έχω:

$$f(-x)\ge -x \Leftrightarrow \Leftrightarrow -f(x)\ge -x \Leftrightarrow$$

$$f(x)\le x \qquad (2)$$

Από τις ανισότητες (1),(2) προκύπτει ότι

$f(x)=x$ για κάθε $x\in R$, που επαληθεύει την (1)

Ίσες Συναρτήσεις

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $f(x) = g(x)$

Έστω δύο συναρτήσεις $f : A \to R$ και $g : B \to R$ και Γ υποσύνολο των A και B. Αν για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει ότι $f(x) = g(x)$ τότε οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ

Δύο συναρτήσεις f, g **ΔΕΝ** είναι ίσες αν και μόνο αν:

$$D_f \neq D_g \text{ ή } D_f = D_g \text{ και υπάρχει } \alpha \in A \text{ ώστε } f(\alpha) \neq g(\alpha)$$

ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Δύο συναρτήσεις είναι ίσες μόνο όταν επαληθεύεται ο ορισμός:

Για αυτό πρώτα ελέγχω αν τα πεδία ορισμού τους D_f, D_g είναι ίσα.

Εφόσον είναι $D_f = D_g$, εξετάζουμε αν για κάθε $x \in D_f = D_g$ είναι και $f(x) = g(x)$.

Μόνο τότε είναι $f = g$, διαφορετικά είναι $f \neq g$

Αν ισχύει $D_f \neq D_g$ όμως είναι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in D_f \cap D_g \neq \varnothing$ τότε, το σύνολο αυτό είναι το ευρύτερο υποσύνολο των πραγματικών στο οποίο υπάρχει ισότητα των συναρτήσεων

Λυμένα παραδείγματα στην ισότητα συναρτήσεων

12-26. Να αποδείξετε ότι είναι ίσες οι συναρτήσεις

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) \quad \textit{και} \quad g(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right)$$

Λύση

Έχουμε ότι $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$ οπότε $\sqrt{x^2+1} > -x \Rightarrow \sqrt{x^2+1}+x > 0$ άρα $D_f = R$

Για κάθε $x \in R$ έχουμε ότι $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$

Συνεπώς $\sqrt{x^2+1} > x \Rightarrow \sqrt{x^2+1}-x > 0$ οπότε $D_g = R$.

Είναι λοιπόν $D_f = D_g = R$

Για κάθε $x \in R$ είναι

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \ln\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}\right) = \ln\left(\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}\right) = g(x)$$

Άρα οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες

12-27. Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις $f(x)=2\ln x$ και $g(x)=\ln x^2$. Αν δεν είναι, βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του R στο οποίο είναι ίσες

Λύση

- Η f ορίζεται στο $D_f=(0,+\infty)$,

  η g ορίζεται στο $D_g=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Συνεπώς οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες αφού έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού.

- Το σύνολο $D=D_f\cap D_g=(0,+\infty)$ είναι το ευρύτερο σύνολο στο οποίο αυτές είναι ίσες

αφού για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει ότι

$f(x)=2\ln x=\ln x^2=g(x)$

12-28. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με

$$f(x)=\frac{(2\lambda+1)x+3\lambda-4}{x+2\lambda-1}$$ **και**

$$g(x)=\frac{(\lambda^2+1)x-\lambda^2+4\lambda-2}{x-2\lambda+7}.$$

Να προσδιορισθεί ο πραγματικός αριθμός λ, ώστε οι συναρτήσεις f,g να είναι ίσες

Λύση

Για τα πεδία ορισμού έχω ότι:

$A_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\lambda-1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-2\lambda+1\}$

και

$A_g=\{x\in\mathbb{R}/x-2\lambda+7\neq 0\}=\mathbb{R}-\{2\lambda-7\}$

Προϋπόθεση για την ισότητα των δύο συναρτήσεων είναι η ισότητα των πεδίων ορισμού τους. Συνεπώς θα πρέπει να είναι:

$-2\lambda+1=2\lambda-7\Leftrightarrow\lambda=2$

Για $\lambda=2$ έχουν κοινό πεδίο ορισμού $A_f=A_g=\mathbb{R}-\{-3\}$ και επιπλέον είναι

$f(x)=\dfrac{5x+2}{x+3}$ και $g(x)=\dfrac{5x+2}{x+3}$

Άρα ισχύει η ισότητα των δύο συναρτήσεων μόνο για $\lambda=2$.

12-29. Για τις συναρτήσεις $f,g:R\to R$ ισχύει ότι $f^2(x)+g^2(x)=2(f(x)+g(x)-1)$ για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι $f=g$

Λύση: Για κάθε $x\in R$ έχουμε ότι

$f^2(x)+g^2(x)=2(f(x)+g(x)-1)\Leftrightarrow f^2(x)+g^2(x)-2f(x)-2g(x)+2=0\Leftrightarrow$

$(f(x)-1)^2+(g(x)-1)^2=0\Leftrightarrow$

$f(x)=1$ για κάθε $x\in R$ και $g(x)=1$ για κάθε $x\in R$, Άρα $f=g$

Πράξεις συναρτήσεων

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού τα D_f, Dg αντίστοιχα τότε:

Η συνάρτηση $f+g$ έχει πεδίο ορισμού το $D_f \cap D_g \neq \varnothing$ και τύπο $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

Η συνάρτηση $f-g$ έχει πεδίο ορισμού το $D_f \cap D_g \neq \varnothing$ και τύπο $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

Η συνάρτηση $f \cdot g$ έχει πεδίο ορισμού το $D_f \cap D_g \neq \varnothing$ και τύπο $(f \cdot g)(x)=f(x) \cdot g(x)$

Η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πεδίο ορισμού το $D_f \cap D_g \neq \varnothing$ με $g(x) \neq 0$ και τύπο $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Ισχύει ότι: Αν $f^2(x)+g^2(x)=0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε ($f(x)=0$ για κάθε $x \in \Delta$ και $g(x)=0$ για κάθε $x \in \Delta$)
- Προσοχή!!! Αν $f(x) \cdot g(x)=0$, για κάθε $x \in \Delta$ τότε δεν είναι απαραίτητα $f(x)=0$, για κάθε $x \in \Delta$ ή $g(x)=0$, για κάθε $x \in \Delta$.

Παράδειγμα για τις συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} -x, & x \geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$ ισχύει

$f(x) \cdot g(x)=0$, για κάθε $x \in R$ όμως ούτε η f ούτε η g είναι η μηδενική συνάρτηση

Αντίστοιχα για τις συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow R$ με: $f(x)=\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} -x, & x>1 \\ x, & x \leq 1 \end{cases}$

ισχύει ότι $f^2(x)=g^2(x)$ για κάθε $x \in R$ όμως οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες ούτε αντίθετες.

Λυμένα παραδείγματα στις πράξεις συναρτήσεων

12-30. *Αν* $f(x)=\ln x$ *και* $g(x)=\sqrt{4-x}$ *, ορίσετε τις συναρτήσεις* $f \cdot g$ *και* $\frac{g}{f}$

Λύση.

Είναι $D_f=(0,+\infty)$, $D_g=(-\infty, 4]$.

Για κάθε $x \in D_f \cap D_g=(0,4]$ έχουμε

$(f \cdot g)(x)=f(x) \cdot g(x)=\sqrt{4-x} \ln x$

Η συνάρτηση $\frac{g}{f}$ όταν και μόνο όταν:

$$\begin{cases} 0<x \leq 4 \\ f(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x \leq 4 \\ \ln x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x \leq 4 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in(0,1) \cup(1,4]$$

Για κάθε $x \in(0,1) \cup(1,4]$ είναι $\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\sqrt{4-x}}{\ln x}$

12-31. *Αν* $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & -2<x\le 0 \\ 4-x\ , & 0<x<3 \end{cases}$ *και* $g(x)=\begin{cases} x-1\ , & x\le 1 \\ 4-x^2, & 1<x<4 \end{cases}$ *Να οριστεί η* $f+g$

Απάντηση:

Είναι $(f+g)(x)=\begin{cases} x^2+x & -2<x\le 0 \\ 3 & 0<x\le 1 \\ 8-x-x^2 & 1<x<3 \end{cases}$

12-32. *Αν οι συναρτήσεις* f *και* g *έχουν πεδίο ορισμού το* R *και για κάθε* $x\in R$ *ισχύει ότι* $\left[(f+g)(x)\right]^2-2(f\cdot g)(x)-2\left(f(x)\eta\mu x-g(x)\sigma\upsilon\nu x\right)+1=0$, *να αποδείξετε ότι* $f(x)=\eta\mu x$, $\forall x\in R$ *και* $g(x)=-\sigma\upsilon\nu x$, $\forall x\in R$

Λύση:

Για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$f^2(x)+g^2(x)+2f(x)\cdot g(x)-2f(x)\cdot g(x)-2f(x)\eta\mu x+2g(x)\sigma\upsilon\nu x+1=0 \Leftrightarrow$$

$$f^2(x)+g^2(x)-2f(x)\eta\mu x+2g(x)\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)-\eta\mu x\right)^2+\left(g(x)+\sigma\upsilon\nu x\right)^2=0$$

Επομένως $f(x)-\eta\mu x=0$, $\forall x\in R$ και $g(x)+\sigma\upsilon\nu x=0$, $\forall x\in R$

Άρα $f(x)=\eta\mu x$, $\forall x\in R$ και $g(x)=-\sigma\upsilon\nu x$, $\forall x\in R$

12-33. *Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης* $f:R\to R$, *αν* $\left|f(x)-x\right|=x^2$, $\forall x\in R$

Λύση

Υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις που ικανοποιούν τη δοσμένη σχέση , όπως π.χ. οι

$f(x)=x+x^2$, $x\in R$ ή $f(x)=x-x^2$, $x\in R$ ή $f(x)=\begin{cases} x+x^2 & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ x-x^2 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$ κλπ

12-34. *Να βρείτε τη συνάρτηση* $f:(-\infty,0)\to R$, *αν* $f(x)>0$ *για κάθε* $x\in(-\infty,0)$ *και ισχύει ότι* $f^2(x)-4xf(x)-5x^2=0$, $\forall x\in(-\infty,0)$

Λύση

Είναι:

$$f^2(x)-4xf(x)-5x^2=0 \Leftrightarrow f^2(x)-4xf(x)+4x^2=9x^2 \Leftrightarrow \left(f(x)-2x\right)^2=9x^2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\left(f(x)-2x\right)^2}=\sqrt{9x^2} \Leftrightarrow \left|f(x)-2x\right|=3|x| \quad (1)$$

Επειδή στο $(-\infty,0)$ είναι $f(x)>0$ και $2x<0$ τότε $f(x)-2x>0$ και η (1) δίνει:

$$f(x)-2x=-3x \Leftrightarrow f(x)=-x \quad \text{για κάθε } x\in(-\infty,0)$$

Σύνθεση Συναρτήσεων

Αν f και g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού τα $D_{f,}$ D_g αντίστοιχα, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$ τη συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού: $D_{g\circ f} = \{x \in R / x \in D_f$ και $f(x) \in D_g\} \neq \varnothing$ και τύπο: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι gof και fog, τότε αυτές δ ε ν ε ί ν α ι υ π ο χ ρ ε ω τ ι κ ά ίσες. Δηλαδή η σύνθεση συναρτήσεων δεν είναι πράξη αντιμεταθετική.
- Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $h \circ g \circ f$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.
- Ισχύει ότι: $(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$

  Υπόδειξη: $((f+g) \circ h(x) = (f+g)(h(x)) = f(h(x)) + g(h(x)) = f \circ h + g \circ h$
- Δεν είναι πάντα αληθής η $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$ (πχ $f(x) = x^2$, $g(x) = 1$, $h(x) = 1$)
- Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ δεν μπορεί να βρεθεί από τον τελικό της τύπο $g(f(x))$, αλλά πρέπει να βρεθεί ως $D_{g\circ f} = \{x \in R / x \in D_f$ και $f(x) \in D_g\} \neq \varnothing$. Το σύνολο αυτό δεν είναι πάντοτε ίσο με αυτό που θα προέκυπτε από τον τύπο της $g \circ f$.

ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- Για να βρούμε τη σύνθεση της συνάρτησης f με τη συνάρτηση g:

  - Βρίσκουμε το σύνολο $D_{g\circ f} = \{x \in R / x \in D_f$ και $f(x) \in D_g\}$. Εφόσον αυτό δεν είναι το κενό τότε βρίσκουμε τον τύπο της συνάρτησης $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ που έχει πεδίο ορισμού το $D_{g\circ f}$

- Για την εύρεση μιας συνάρτησης από σύνθεση:

  - Αν μας δίνεται ο τύπος $f(g(x)) = ...$ και γνωρίζουμε την $g(x)$ τότε κάνουμε αντικατάσταση $g(x) = y \Leftrightarrow x = ...$ και βρίσκουμε τον τύπο της f (: $f(y) = ...$), Ενώ:

  - Αν μας δίνεται ο τύπος $f(g(x)) = ...$ και γνωρίζουμε την $f(x)$ τότε στην $f(x)$ βάζουμε όπου x το $g(x)$ και εξισώνουμε τις δύο ισότητες $f(g(x)) = ...$ οι οποίες προκύπτουν και βρίσκουμε τη $g(x)$.

Λυμένα παραδείγματα στη σύνθεση

12-35. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ και $g(x)=\sqrt{x-1}$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις $g\circ f$ και $f\circ g$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f ορίζεται στο σύνολο $D_f=[-2,2]$ και η g στο $D_g=[1,+\infty)$

Η $g\circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $A_1=\{x\in D_f \,/\, f(x)\in D_g\}$.

Με $x\in R$ έχουμε

$$\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[-2,2] \\ \sqrt{4-x^2}\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\leq x\leq 2 \\ 4-x^2\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\leq x\leq 2 \\ -\sqrt{3}\leq x\leq\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{3}\leq x\leq\sqrt{3}.$$

Άρα $A_1=\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$ και

$$(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)-1}=\sqrt{\sqrt{4-x^2}-1} \text{ με } x\in A_1=\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$$

Η $f\circ g$ έχει πεδίο ορισμού το $A_2=\{x\in D_g \,/\, \mathrm{g}(x)\in D_f\}$

Με $x\in R$ έχουμε

$$\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[1,+\infty) \\ \sqrt{x-1}\in[-2,2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ -2\leq\sqrt{x-1}\leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x\leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 1\leq x\leq 5$$

Άρα $A_2=[1,5]$ και

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{4-g^2(x)}=\sqrt{4-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}=\sqrt{5-x} \text{ με } x\in A_2=[1,5].$$

12-36. Αν $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ με $x\in[-1,1]$, να βρεθεί συνάρτηση f ώστε, για κάθε $x\in R$ να ισχύει $g(f(x))=|\eta\mu x|$

Λύση:

Για κάθε $x\in R$ θε έχουμε

$$g(f(x))=|\eta\mu x| \Leftrightarrow \sqrt{1-f^2(x)}=|\eta\mu x| \Leftrightarrow 1-f^2(x)=|\eta\mu x|^2 \Leftrightarrow$$

$$f^2(x)=1-\eta\mu^2 x \Leftrightarrow f^2(x)=\sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow |f(x)|=|\sigma\upsilon\nu x|.$$

Επομενως θα είναι

$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $\forall x\in R$, ή $f(x)=-\sigma\upsilon\nu x$ $\forall x\in R$, ή

$f(x)=|\sigma\upsilon\nu x|$, $\forall x\in R$, ή $f(x)=-|\sigma\upsilon\nu x|$ $\forall x\in R$ κλπ

Γενικά υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις της μορφής $f(x)=\begin{cases} \sigma\upsilon\nu x & x\in A\subseteq R \\ -\sigma\upsilon\nu x & x\notin A \end{cases}$

12-37. Έστω συνάρτηση $f: R^* \to R$ για την οποία ισχύει ότι $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=e^x$ (1) για κάθε $x \in R^*$. Να βρείτε τον τύπο της.

Λύση:

Στην (1) αν θέσουμε όπου x το $\frac{1}{x}$ παίρνουμε

$$f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=e^{\frac{1}{x}} \quad ή \quad -2f\left(\frac{1}{x}\right)-4f(x)=-2e^{\frac{1}{x}} \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε ότι

$$-3f(x)=e^x-2e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{3}e^x-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{x}},\ x \in R^*$$

Που είναι δεκτή αφού επαληθεύει την (1)

12-38. Η συνάρτηση $f: R \to R$ είναι τέτοια ώστε $f(f(x))=x^2-x+1$ (1) για κάθε $x \in R$. Να βρείτε το $f(0)$.

Λύση

Στην (1) που είναι αληθής για κάθε $x \in R$, θέτω όπου x το $f(x)$ και έχουμε

$$f(f(f(x)))=f^2(x)-f(x)+1 \Leftrightarrow f(x^2-x+1)=f^2(x)-f(x)+1$$

Στην τελευταία για $x=1$ δίνει

$$f(1)=f^2(1)-f(1)+1 \Leftrightarrow f(1)=1$$

Ενώ για $x=0$ δίνει $f(1)=f^2(0)-f(0)+1 \Leftrightarrow f(0)=0 \text{ ή } f(0)=1$

Από αυτές τις τιμές δεκτή γίνεται μόνο η $f(0)=1$ που επαληθεύει την (1)

*12-39. ** Για μία συνάρτηση $f: R \to R$, ισχύει: $f(f(x))=x^2-3x+4$ για κάθε $x \in R$. Να λυθεί η εξίσωση: $f(x)=x$*

Λύση

Αν υπάρχει $\alpha \in R$ ώστε $f(\alpha)=\alpha$ τότε $f(f(\alpha))=f(\alpha)=\alpha$ οπότε $\alpha^2-3\alpha+4=\alpha \Leftrightarrow \alpha=2$

Αντίστροφα: θα αποδείξουμε ότι $f(2)=2$

Πράγματι στην αρχική για $x=2$ έχουμε

$$f(f(2))=2 \Rightarrow f(f(f(2)))=f(2) \quad (1)$$

ενώ για $x=f(2)$ παίρνουμε

$$f(f(f(2)))=f^2(2)-3f(2)+4 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε $f^2(2)-4f(2)+4=0 \Rightarrow f(2)=2$

12-40. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $[-3,7]$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g με $g(x)=f(1-2|x|)$

Λύση:

Η συνάρτηση $g(x)=f(1-2|x|)$ είναι σύνθεση των συναρτήσεων $y=f(x)$ με $D_f=[-3,7]$ και $y=1-2|x|$ με πεδίο ορισμού το R.

Επομένως η g έχει πεδίο ορισμού: $D_g=\{x\in R / 1\text{-}2|x|\in[-3,7]\}$ από όπου έχουμε ότι $D_g=[-2,2]$

12-41. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $f(2-x)+f(x-1)=x$ (1) για κάθε $x\in R$

Λύση

Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση f που για κάθε $x\in R$ ικανοποιεί την (1)

Για $x=1$ στην (1) παίρνουμε $f(1)+f(0)=1$ (2), ενώ

για $x=2$ έχουμε $f(0)+f(1)=2$ (3)

Από (2) και (3) έπεται ότι $1=2$ που είναι άτοπο.

Επομένως δεν υπάρχει συνάρτηση f που να ικανοποιεί τη δοθείσα σχέση.

12-42. (**) Να βρεθεί συνάρτηση f ώστε να ισχύει $f(g(x))=\sqrt{1+x^2}$ για κάθε $x\in R$ και $g(x)=-x^2$ για κάθε $x\in R$

Λύση:

Επειδή $D_{fog}=D_g=R$, θα ισχύει $g(R)\subseteq D_f$.

Όμως $g(R)=(-\infty,0]$, άρα $g(R)=(-\infty,0]\subseteq D_f$

Αν $y\in g(R)=(-\infty,0]$, τότε θα είναι $y=g(x)=-x^2$ για κάποιο $x\in D_g=R$.

Επομένως θα ισχύει $f(y)=f(g(x))=\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1-y}$.

Άρα στο $g(R)=(-\infty,0]$, η f ορίζεται από τον τύπο $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\sqrt{1-\mathrm{x}}$.

Στο $\mathrm{D_f}-\mathrm{g}(\mathrm{R})$ μπορεί να οριστεί με οποιοδήποτε τρόπο.

Επομένως υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις f που ικανοποιούν τις υποθέσεις αυτές. Οι συναρτήσεις αυτές περιγράφονται από τον τύπο $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\begin{cases}\sqrt{1-\mathrm{x}} & \mathrm{x}\in(-\infty,0]\\ \mathrm{h}(\mathrm{x}) & \mathrm{x}\in\mathrm{A}-(-\infty,0]\end{cases}$ όπου

A είναι οποιοδήποτε υπερσύνολο του $(-\infty,0]$ και h οποιαδήποτε συνάρτηση στο $\mathrm{A}-(-\infty,0]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

3 ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

3.1 Οι Πράξεις και οι Ιδιότητές τους

3.2 Βασικές Γνώσεις Θεωρίας

Σύνολα Αριθμών

Φυσικοί:

$$\mathrm{IN} = \{0,1,2,3...\}$$

Ακέραιοι:

$$Z = \{...-3,-2,-1,0,1,2,3...\}$$

Ρητοί:

$$Q = \left\{\frac{\alpha}{\beta} /\ \alpha \in Z,\ \beta \in Z^*\right\}$$

Άρρητοι:

$$Q'$$

Πραγματικοί:

$$R = Q \cup Q' = (-\infty, +\infty) \quad \text{ενώ} \quad \overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Ισχύει: $N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$,

Ενώ με N^*, Z^*, Q^*, R^* συμβολίζουμε τα αντίστοιχα σύνολα χωρίς το μηδέν.

Βασικές ιδιότητες των πράξεων:

	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	α + β = β + α	αβ = βα
Προσεταιριστική	α + (β + γ) = (α + β) + γ	α(βγ) = (αβ)γ
Ουδέτερο Στοιχείο	α + 0 = α	α ·1 = α
Αντίθετος/Αντίστροφος Αριθμού	α + (-α) = 0	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$, $\alpha \neq 0$
Επιμεριστική	α(β + γ) = αβ + αγ	

Ο αριθμός 0 λέγεται και **ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης**, διότι προστιθέμενος σε οποιονδήποτε αριθμό δεν τον μεταβάλλει.
Ο αριθμός 1 λέγεται και **ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού**, διότι οποιοσδήποτε αριθμός πολλαπλασιαζόμενος με αυτόν δεν μεταβάλλεται.
Η αφαίρεση και η διαίρεση ορίζονται με τη βοήθεια της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντιστοίχως ως εξής:

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$$

και

$$\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta} \text{ με } \beta\neq 0$$

Για τις τέσσερις πράξεις και την ισότητα ισχύουν και οι ιδιότητες

Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$, ισχύει ότι:

$$\left.\begin{array}{r}\alpha=\beta\\ \gamma=\delta\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha+\gamma=\beta+\delta$$

δηλαδή, δυο ισότητες μπορούμε να τις προσθέσουμε κατά μέλη.

Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$, ισχύει ότι:

$$\left.\begin{array}{r}\alpha=\beta\\ \gamma=\delta\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha\gamma=\beta\delta$$

δηλαδή, δυο ισότητες μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη.

Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in R$, ισχύει ότι:

$$\alpha=\beta\Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma$$

δηλαδή, μπορούμε και στα δυο μέλη μιας ισότητας να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό.

Αν $\gamma\neq 0$, τότε:

$$\alpha=\beta\Leftrightarrow \alpha\gamma=\beta\gamma$$

δηλαδή, μπορούμε και τα δυο μέλη μιας ισότητας να τα πολλαπλασιάσουμε ή να τα διαιρέσουμε με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό.

$$\alpha\cdot\beta=0\Leftrightarrow \alpha=0 \text{ ή } \beta=0$$

δηλαδή, το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς είναι ίσος με το μηδέν.

Άμεση συνέπεια της ιδιότητας αυτής είναι η:

$$\alpha\cdot\beta\neq 0\Leftrightarrow \alpha\neq 0 \text{ και } \beta\neq 0$$

Δυνάμεις

Αν ο α είναι πραγματικός αριθμός και ο ν φυσικός, ορίζουμε ότι:

$$\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdots\alpha}_{\nu\,\text{παράγοντες}} \quad \text{για } \nu>1 \text{ και}$$

$$\alpha^{1}=\alpha \quad \alpha^{0}=1 \text{ αν } \alpha\neq 0$$

$$\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^{\nu}} \text{ αν } \alpha\neq 0 \quad \text{και} \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu} \text{ αν } \alpha\beta\neq 0$$

Αν οι κ,λ είναι φυσικοί αριθμοί τότε ισχύουν οι ιδιότητες:

$$\alpha^{\kappa}\alpha^{\lambda}=\alpha^{\kappa+\lambda} \quad ,\alpha\in R$$

$$\frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}=\alpha^{\kappa-\lambda} \quad \text{αν } \alpha\in R-\{0\}$$

$$\alpha^{\kappa}\beta^{\kappa}=(\alpha\beta)^{\kappa}, \quad \alpha,\beta\in R$$

$$\frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa} \text{ αν } \alpha\in R,\ \beta\in R-\{0\}$$

$$\left(\alpha^{\mu}\right)^{\nu}=\alpha^{\mu\nu}, \quad \alpha\in R$$

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$

$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

$$(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma$$

$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$$

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$\alpha^{\nu}-\beta^{\nu}=(\alpha-\beta)\left(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2+\ldots+\beta^{\nu-1}\right)$$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\alpha\gamma=\frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$$

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma=0 \text{ ή } \alpha=\beta=\gamma) \quad \text{Euler}$$

$$\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\gamma^2+\delta^2\right)=(\alpha\gamma+\beta\delta)^2+(\alpha\delta-\beta\gamma)^2 \quad \text{Lagrange}$$

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ:

Ευθεία Απόδειξη

Είναι η διαδικασία με την οποία ξεκινούμε από την υπόθεση και με διαδοχικά βήματα καταλήγουμε στο συμπέρασμα

32.1

Αν ν φυσικός αριθμός, να δείξετε ότι ο αριθμός $3^{\nu+2}-3^{\nu+1}-3^{\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του 5.

Λύση

Διαδοχικά έχουμε:

$$3^{\nu+2}-3^{\nu+1}-3^{\nu}=3^{\nu}\cdot 3^2-3^{\nu}\cdot 3-3^{\nu}=3^{\nu}\cdot(9-3-1)=3^{\nu}\cdot 5$$

Που είναι πολλαπλάσιο του 5

32.2

Να δείξετε ότι $\left(\frac{\alpha^2}{\alpha-\beta}-\beta\right):\left(\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}\right)=1$

Λύση

$$\left(\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}\right):\left(\frac{\alpha^2}{\alpha-\beta}-\beta\right)=\left(\frac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta}\right):\left(\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}\right)=$$

$$\frac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha-\beta}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}=1$$

32.3

Αν $(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2=4(\alpha x+\beta y)$ τότε να αποδείξετε ότι $x=\alpha$ και $y=\beta$

Λύση

$$(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2=4(\alpha x+\beta y)\Leftrightarrow$$

$$x^2+2\alpha x+\alpha^2+y^2+2\beta y+\beta^2=4\alpha x+4\beta y$$

$$x^2-2\alpha x+\alpha^2+y^2-2\beta y+\beta^2=0\Leftrightarrow$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=0\Leftrightarrow$$

$$(x-\alpha)^2=0 \text{ και } (y-\beta)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$x=\alpha \text{ και } y=\beta$$

Η μέθοδος του «αρκεί»

Για την απόδειξη ενός ισχυρισμού με διαδοχικούς μετασχηματισμούς (αρκεί $\Leftarrow$) καταλήγουμε σε έναν λογικά ισχυρισμό που είναι αληθής. Έτσι συμπεραίνουμε ότι και ο αρχικός ισχυρισμός είναι αληθής.

32.4

Να αποδειχτεί η ταυτότητα $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)=(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2$ (Lagrange)

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2) = (\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2+\beta^2y^2=\alpha^2x^2+2\alpha\beta xy+\beta^2y^2+\alpha^2y^2-2\alpha\beta xy+\beta^2x^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2+\beta^2y^2=\alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2+\beta^2y^2 \Leftrightarrow$$

$$0=0,$$

που ισχύει, άρα ισχύει και η αποδεικτέα.

Μέθοδος της Απαγωγής σε Άτοπο

Για να αποδείξουμε ένα ισχυρισμό:

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε και χρησιμοποιώντας αληθείς προτάσεις φθάνουμε σε ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση με αυτό που γνωρίζουμε ότι ισχύει. (**άτοπο**).

Να δείξετε ότι :

i) Αν α ρητός και β άρρητος, τότε ο αριθμός α - β είναι άρρητος

ii) Αν α ρητός με $\alpha\neq 0$ και β άρρητος, τότε ο $\alpha\cdot\beta$ είναι άρρητος

Λύση

i) Έστω ότι ο αριθμός α - β είναι ρητός που τον συμβολίζουμε με ρ.

Τότε ισχύει $\alpha-\beta=\rho \Leftrightarrow \beta=\alpha-\rho$ που είναι άτοπου αφού ο β είναι άρρητος και ο α-ρ είναι ρητός ως διαφορά ρητών αριθμών

Επομένως ο α+β είναι άρρητος

ii) Έστω ότι ο αριθμός $\alpha\cdot\beta$ είναι ρητός που τον συμβολίζουμε με ρ.

Τότε $\alpha\cdot\beta=\rho \Leftrightarrow \beta=\dfrac{\rho}{\alpha}$ που είναι άτοπο, αφού ο β είναι άρρητος και ο $\dfrac{\rho}{\alpha}$ ρητός, ως πηλίκο ρητών

Επομένως ο $\alpha\cdot\beta$ είναι άρρητος σχολιο

Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός **δεν είναι πάντα αληθής**, αρκεί να βρούμε ένα παράδειγμα για το οποίο ο συγκεκριμένος ισχυρισμός δεν ισχύει ή, όπως λέμε, αρκεί να βρούμε ένα **αντιπαράδειγμα**.

32.6

Να αποδείξετε ότι ο ισχυρισμός «το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι θετικός αριθμός» δεν είναι αληθής

Λύση

Ο ισχυρισμός δεν είναι αληθής αφού $0^2=0$ που δεν είναι θετικός αριθμός

Ιδιότητες των αναλογιών:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma \quad (\text{εφόσον } \beta\delta\neq 0)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta} \quad (\text{εφόσον } \beta\gamma\delta\neq 0)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta} \quad (\text{εφόσον } \beta\delta\neq 0)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} \quad (\text{εφόσον } \beta\delta(\beta+\delta)\neq 0)$$

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

32.7

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=\left[\left(xy^{-1}\right)^2:\left(x^3y^7\right)^{-1}\right]^{-4}$, για $x=0{,}4$ και $y=-2{,}5$.

Λύση

$$A=\left[\left(xy^{-1}\right):\left(x^3y^7\right)^{-1}\right]^{-4} = \left[\left(xy^{-1}\right)^2\left(x^3y^7\right)\right]^{-4}$$

$$=\left[x^2y^{-2}x^3y^7\right]^{-4}$$

$$=\left[x^5y^5\right]^{-4}$$

$$=(xy)^{-20} = (0,4.(-2,5))^{-20}$$

$$= (-1)^{-20} = 1$$

32.8

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\dfrac{2x+2y}{x-4y}=-3$.

α) Να αποδείξετε ότι: $x=2y$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=\dfrac{x^2-3y^2+2xy}{xy}$

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον $x-4y\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 4y$ έχουμε:

$$\frac{2x+2y}{x-4y}=-3 \Leftrightarrow 2x+2y=-3(x-4y) \Leftrightarrow 2x+2y=-3x+12y$$

$$\Leftrightarrow 3x+2x=12y-2y \Leftrightarrow 5x=10y \Leftrightarrow x=2y$$

β) Λόγω του α ερωτήματος βρίσκουμε:

$$A=\frac{2x^2+5y^2+xy}{xy}=\frac{2(2y)^2+5y^2+2yy}{2y\cdot y}=$$

$$\frac{8y^2+5y^2+2y^2}{2y^2}=\frac{15y^2}{2y^2}=\frac{15}{2}$$

32.9

Δίνονται οι θετικοί αριθμοί α, β με $\alpha\neq\beta$ για τους οποίους ισχύει $\dfrac{\beta^2}{\beta^4+1}=\dfrac{\alpha^2}{\alpha^4+1}$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K=\dfrac{\alpha^{18}\cdot(\beta^{-3})^{-5}}{\alpha^3\cdot(\alpha\beta)^{-5}}$

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $\dfrac{\beta^2}{\beta^4+1}=\dfrac{\alpha^2}{\alpha^4+1} \Leftrightarrow \beta^2(\alpha+1)=\alpha^2(\beta^4+1) \Leftrightarrow$

$$\beta^2\alpha^4+\beta^2=\alpha^2\beta^4+\alpha^2 \Leftrightarrow \beta^2\alpha^4+\beta^2-\alpha^2\beta^4-\alpha^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\beta^2\alpha^4+\beta^2-\alpha^2\beta^4-\alpha^2=0 \Leftrightarrow \alpha^2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha^2-\beta^2)-1=0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha\beta+1)(\alpha\beta-1)(\alpha^2-\beta^2)=0$$

Επειδή α, β είναι θετικοί αριθμοί και $\alpha\neq\beta$ προκύπτει ότι $\alpha\beta-1=0 \Leftrightarrow \alpha\beta=1$ άρα οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

β) Είναι: $K=\dfrac{\alpha^{18}\cdot(\beta^{-3})^{-5}}{\alpha^3\cdot(\alpha\beta)^{-5}}=\dfrac{\alpha^{18}\cdot\beta^{15}}{\alpha^3\cdot\alpha^{-5}\cdot\beta^{-5}}=\alpha^{20}\beta^{20}=(\alpha\beta)^{20}=1^{20}=1$

επειδή από το (α) ερώτημα βρήκαμε ότι $\alpha\beta=1$. Επομένως $K=1$.

32.10

Αν $\dfrac{4x-9y}{8x}=\dfrac{x-y}{2(x+y)}$ με $xy(x+y)\neq 0$, βρείτε την τιμή της παράστασης $\dfrac{x^2-y^2}{5xy+5y^2}$

Λύση

$$\frac{4x-9y}{8x}=\frac{x-y}{2(x+y)}\Leftrightarrow 2(x+y)(4x-9y)=8x(x-y)\Leftrightarrow$$

$$8x^2-18xy+8xy-18y^2=8x^2-8xy\Leftrightarrow$$

$$-2xy=18y^2\Leftrightarrow\frac{x}{y}=-9$$

Τοτε

$$\frac{x^2-y^2}{5xy+5y^2}=\frac{y^2\left(\dfrac{x^2}{y^2}-1\right)}{y^2\left(5\dfrac{x}{y}-5\right)}=\frac{(-9)^2+1}{5(-9)+5}=\frac{80}{-40}=-2$$

32.11

Αν $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=3$ να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$, $\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}$, $\alpha^4+\dfrac{1}{\alpha^4}$

Λύση

Από την ταυτότητα $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ παίρνουμε ότι:

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

Οπότε είναι:

$$\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2\alpha\frac{1}{\alpha}=3^2-2=7$$

$$\alpha^2+\frac{1}{\alpha^3}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha^2+\alpha\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right)=3(7+1)=24$$

$$\alpha^4+\frac{1}{\alpha^4}=\left(\alpha^2\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^2=\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)^2-2\alpha^2\frac{1}{\alpha^2}=7^2-2=47$$

32.12

Να αποδείξετε ότι αν $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ τότε $\alpha=\beta=\gamma$

Λύση

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\Leftrightarrow$$
$$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2=2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha\Leftrightarrow$$
$$\alpha^2+\alpha^2+\beta^2+\beta^2+\gamma^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha=0\Leftrightarrow$$
$$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0\Leftrightarrow$$
$$(\alpha-\beta)^2=0\ \text{και}\ (\beta-\gamma)^2=0\ \text{και}\ (\gamma-\alpha)^2=0\Leftrightarrow$$
$$\alpha=\beta=\gamma$$

32.13

Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\delta}$ με $\beta,\gamma,\delta,\beta+\delta\neq 0$ να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2}{\beta^2\delta+\beta\delta^2}=\left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)^3$

Λύση

Υποθέτουμε ότι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\delta}=\kappa$

τότε $\alpha=\kappa\beta\,,\quad \beta=\kappa\gamma\,,\quad \gamma=\kappa\delta$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2}{\beta^2\delta+\beta\delta^2}=\left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{\alpha\gamma(\alpha+\gamma)}{\beta\delta(\beta+\delta)}=\left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\kappa\beta\delta(\kappa\beta+\kappa\delta)}{\beta\delta(\beta+\delta)}=\left(\frac{\kappa\beta+\kappa\delta}{\beta+\delta}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{\kappa\kappa(\beta+\delta)}{(\beta+\delta)}=\left(\frac{\kappa(\beta+\delta)}{\beta+\delta}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\kappa^3=\kappa^3$$

Που είναι αληθής

32.14

Να βρεθούν οι αριθμοί x,y για τους οποίους ισχύει ότι:

$5x^2+5y^2+8xy+2y=2x-2$

Λύση

$$5x^2+5y^2+8xy+2y=2x-2 \Leftrightarrow$$

$$4x^2+4y^2+8xy+y^2+2y+1+x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow$$

$$(2x+2y)^2+(y+1)^2+(x-1)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$x+y=0 \quad \text{και} \quad y+1=0 \quad \text{και} \quad x-1=0 \Leftrightarrow$$

$$x=-y \quad \text{και} \quad y=-1 \quad \text{και} \quad x=1$$

Άρα $y=-1$ και $x=1$

32.15

Αν $\alpha x(\alpha+x)\neq 0$, να αποδείξετε ότι η παράσταση $A=\frac{x}{\alpha}+\frac{x(\alpha+x)^2}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha+x}-\frac{1}{x}\right)$ είναι ανεξάρτητη των α,x

Λύση

$$A=\frac{x}{\alpha}+\frac{x(\alpha+x)^2}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha+x}-\frac{1}{x}\right)=\frac{\alpha x}{\alpha^2}+\frac{x(\alpha+x)^2}{\alpha^2}\left(\frac{x}{x(\alpha+x)}-\frac{\alpha+x}{x(\alpha+x)}\right)=$$

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{x(\alpha+x)^2}{\alpha^2}\frac{-\alpha}{x(\alpha+x)}=\frac{x}{\alpha}-\frac{\alpha+x}{\alpha}=-1$$

Που είναι σταθερή τιμή, ανεξάρτητη των α,x

32.16

Αν $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$, να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

Α) $(2\alpha+1)(2\beta+1)$, **Β)** $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$, **Γ)** $\alpha^3+\beta^3$

Λύση

Α) $(2\alpha+1)(2\beta+1)=4\alpha\beta+2\alpha+2\beta+1=4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1=4\cdot 2+2\cdot 4=16$

Β) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{4}{2}=2$

Γ) $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}=\frac{4^2-2\cdot 2}{2^2}=3$

Δ) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=4^3-3\cdot 2\cdot 4=40$

32.17

Αν $\alpha\beta\gamma\neq 0$ και $\alpha+\beta+\gamma=0$, αποδείξτε ότι

$$\frac{\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2-\gamma^2-2\alpha\gamma}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2-\alpha^2-2\alpha\beta}{\alpha+\gamma}=0$$

Λύση

Επειδή

$$\frac{\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha+\beta}=\frac{\alpha^2-\beta^2-2\beta(-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}=\frac{\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta+2\beta^2}{\alpha+\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha+\beta}=\alpha+\beta$$

Θα έχουμε ότι

$$\frac{\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2-\gamma^2-2\alpha\gamma}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2-\alpha^2-2\alpha\beta}{\alpha+\gamma}=$$
$$\alpha+\beta+\beta+\gamma+\gamma+\alpha=2(\alpha+\beta+\gamma)=0$$

32.18

Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ να αποδειχτεί ότι $\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta(\gamma+2)}{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}=-3$

Λύση

Επειδή $\alpha+\beta+\gamma=0$:

Από την ταυτότητα Euler έχουμε ότι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$

και $\alpha+\beta+\gamma=0\Leftrightarrow\alpha+\beta=-\gamma\Rightarrow(\alpha+\beta)^2=\gamma^2\Rightarrow\alpha^2+\beta^2-\gamma^2=2\alpha\beta$

Τότε:

$$\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta(\gamma+2)}{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}=\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma-6\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}=\frac{-6\alpha\beta}{2\alpha\beta}=-3$$

32.19

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

Α) $\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2-1$ **Β)** $x^2-y^2-z^2-2yz$

Γ) x^4+1 **Δ)** $x^3+2\sqrt{x}-3$

Ε) $\alpha^4-3\alpha^2+2$ **Στ)** $\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{9}+\frac{1}{3}\alpha\beta$

Ζ) $\alpha^3-3\alpha-2$ **Η)** $x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8$

Θ) $\alpha^2-2\alpha-1$

Λύση

Α) $$\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2-1=(\alpha+2\beta)^2-1=(\alpha+2\beta)^2-1^2=$$
$$(\alpha+2\beta-1)(\alpha+2\beta+1)$$

Β) $$x^2-y^2-z^2-2yz=x^2-\left(y^2+z^2+2yz\right)=x^2-(y+z)^2=$$
$$(x-y-z)(x+y+z)$$

Γ) $$x^4+1=x^4+1+2x^2-2x^2=\left(x^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2=$$
$$\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)$$

Δ) $$x+2\sqrt{x}-3=\sqrt{x}^2+2\sqrt{x}+1-4=\left(\sqrt{x}+1\right)^2-2^2=$$
$$\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)$$

Ε) 1η λύση: $$\alpha^4-3\alpha^2+2=\alpha^4-\alpha^2-2\alpha^2+2=\alpha^2\left(\alpha^2-1\right)-2\left(\alpha^2-1\right)=$$
$$\left(\alpha^2-2\right)\left(\alpha^2-1\right)=\left(\alpha-\sqrt{2}\right)\left(\alpha+\sqrt{2}\right)(\alpha-1)(\alpha+1)$$

2η λύση: $$\alpha^4-3\alpha^2+2=\left(\alpha^2\right)^2-2\frac{3}{2}\alpha^2+2=\left(\alpha^2\right)^2-2\frac{3}{2}\alpha^2+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+2=$$
$$\left(\alpha^2-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\alpha^2-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\alpha^2-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)=\left(\alpha^2-2\right)\left(\alpha^2-1\right)=$$
$$\left(\alpha-\sqrt{2}\right)\left(\alpha+\sqrt{2}\right)(\alpha-1)(\alpha+1)$$

Στ) $$\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{9}+\frac{1}{3}\alpha\beta=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{3}\right)^2+2\frac{\alpha}{2}\frac{\beta}{3}=\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{3}\right)^2$$

Η) $$x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8=x\left(\sqrt{x}-2\right)-4\left(\sqrt{x}-2\right)=(x-4)\left(\sqrt{x}-2\right)=$$
$$\left(\sqrt{x}^2-2^2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)=\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)=\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)^2$$

Θ) $$\alpha^2-2\alpha-1=\alpha^2-2\alpha+\alpha-2=(\alpha-1)^2-\sqrt{2}^2=\left(\alpha-1-\sqrt{2}\right)\left(\alpha-1+\sqrt{2}\right)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ιδιότητες των Πράξεων

32.20 Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

A) $\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{2}}$ B) $\dfrac{2}{1-\dfrac{2}{3-\dfrac{4}{5}}}$

32.21 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

$\mathrm{A}=2-\{3[3(x-y)+4x]-1+2x-5\ \}$.

$\mathrm{B}=2x-y-\{-5-[-(2x+3y)-9x]-(1+3x)-1\}$

32.22 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

A) $3[2(1-4x)+3(1-5x)]-2[3(1-2x)-x]$

B) $-3[-2\beta+\alpha(1-2\beta)]-[3\alpha-(4\beta-5)]$

32.23 Αν οι αριθμοί $\mathrm{A}=2x-5y+\lambda$ και $\mathrm{B}=\lambda^2+5y-2x$ είναι αντίθετοι, να αποδείξετε ότι $\lambda=0$ ή $\lambda=-1$

32.24 Αν οι αριθμοί $\mathrm{A}=2x+1$ και $\mathrm{B}=4-2x$ είναι αντίθετοι, να βρείτε την τιμή του x

32.25 ** Αν οι αριθμοί: $\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}$ και $\beta+\sqrt{\beta^2+1}$ είναι αντίστροφοι, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι

32.26 Αν $\alpha-3\beta=1$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=\alpha(\alpha-1)-4\beta(2+\alpha)+\beta(\alpha+8)$

32.27 Αν $xy(2y-x)\neq 0$ δείξτε ότι η παράσταση $\mathrm{A}=\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2y}}+\dfrac{1}{1-\dfrac{2y}{x}}$ είναι ανεξάρτητη των x,y.

32.28 Αν $\dfrac{x}{y}=\dfrac{4}{3}$ και $x-y=1$ να βρεθούν οι x,y

32.29 Αν $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{1}{2}$ να βρεθούν οι τιμές των λόγων: $\dfrac{\beta}{2}$, $\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}$, $\dfrac{\alpha}{\beta+\alpha}$, $\dfrac{\alpha+1}{\beta+2}$

32.30 Αν $\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}$, να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων: $\dfrac{x}{2}$, $\dfrac{x+y}{y}$, $\dfrac{x+2}{y+3}$, $\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{y+x}{x}$

32.31 Αν ισχύει ότι $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{4}{5}$ να υπολογίσετε τα

A) $\dfrac{\alpha-\beta}{\beta}$ B) $\dfrac{\alpha+3\beta}{\beta-2\alpha}$ Γ) $\dfrac{\alpha-\beta}{\beta+\alpha}$.

32.32 Αν ισχύει ότι $\dfrac{\alpha}{\beta}=2$ να υπολογίσετε τα

A) $\dfrac{\alpha+2\beta}{\beta}$ B) $\dfrac{\alpha-3\beta}{\beta+2\alpha}$ Γ)

$\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2+\alpha^2}$

32.33 Αν $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή κάθε μιας από τις παραστάσεις

$A=\dfrac{3x-y}{x-3y}$, $B=\dfrac{5x^2-xy+y^2}{x^2+2xy-y^2}$, Γ $\dfrac{x^3-2y^3}{3x^2y}$

32.34 Αν $\dfrac{4x^2+xy-y^2}{3x^2-xy+y^2}=\dfrac{4}{3}$, $\mathrm{A}=\dfrac{x-y}{x+y}$ και $y\neq 0$ να βρεθεί ο λόγος $\dfrac{x}{y}$ και η τιμή του Α

32.35 Αν $\frac{x}{\alpha-\beta}=\frac{y}{\beta-\gamma}=\frac{z}{\gamma-\alpha}$ με $\alpha\neq\beta\neq\gamma$ να αποδείξετε ότι $x+y+z=0$

32.36 Αν $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}=\frac{\gamma+\alpha}{\beta}$ με $\alpha\beta\gamma\neq 0$ τότε

Α) Να βρείτε την τιμή του κάθε λόγου.

Β) Να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=\gamma$

32.37 Να για τους μη μηδενικούς αριθμούς x,y,α,β ισχύει ότι $\alpha y=\beta x$, να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$

32.38 Για κάθε $\alpha\beta\gamma\neq 0$ και $\alpha+\beta+\gamma=\alpha\beta\gamma$ δείξτε ότι $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+3=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

32.39 Αν $x+2y-3\omega=4$ και οι αριθμοί x,y,ω είναι ανάλογοι των αριθμών $1,2,3$ αντίστοιχα, να βρεθούν οι x,y,ω.

32.40 Αν $\frac{2x^2+xy+2y^2}{x^2+3xy-y^2}=2$ με $xy\neq 0$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης : $\frac{x^3+y^3}{x^3-2y^3}$

32.41 Αν $x,\ y,\ z\in R^*$ διαφορετικοί ανά δύο και ισχύει ότι $2\alpha-3y=\frac{(z-x)^2}{y}$ και $2\alpha-3z=\frac{(x-y)^2}{z}$, αποδείξετε ότι

Α) $x+y+z=\alpha$

Β) $2\alpha-3x=\frac{(y-z)^2}{x}$

32.42 Βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται κάθε μια από τις παραστάσεις;

Α) $\frac{2x-5}{1-x}$ Β) $\frac{-x+2}{(3-x)(2x-1)}$ Γ) $\frac{3x}{1-\frac{1}{x+2}}$

32.43 Αν $\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}=\frac{\gamma}{\omega}$ να αποδείξετε ότι:

Α) $\left(\frac{\alpha^6+\beta^6+\gamma^6}{x^6+y^6+\omega^6}\right)=\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{x^2+y^2+\omega^2}\right)^3$

Β) $\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{x^2+y^2+\omega^2}\right)^\nu=\left(\frac{\alpha^\nu+\beta^\nu+\gamma^\nu}{x^\nu+y^\nu+\omega^\nu}\right)^2$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

32.44 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $3x^3y\cdot\left(-5x^2y^3\right)$

β) $-\alpha^2\beta\cdot(-2\alpha\gamma^3)\cdot 5\alpha^3\beta^2$

γ) $3x^2\cdot\left(-2x^3\right)\cdot 5x$

δ) $\frac{3}{4}x^2 : \left(-\frac{1}{4}x^2\right)$

ε) $6x^3y^4 : \left(-2x^2y\right)$

32.45 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $6x^3 :$ ...... $=3x$

β) $-3\alpha^2\beta\cdot$........ $= 15\alpha^3\beta^4$

γ) $\frac{2x^5y^2}{........} = \frac{x^3}{5y}$

32.46 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

A) $\frac{3x^{-2}y^{-1} - 4x^{-2}y}{x^{-2}y}$ B) $\frac{\left(\alpha^2\beta^{-3}\right)^2\left(\alpha^{-2}\beta\right)}{\left(\alpha^3\beta^2\right)^{-1}\left(\alpha^2\beta^{-4}\right)}$

32.47 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

A) $\left(\frac{x^2y}{xy^3}\right)^{-2}\cdot(xy)^2$ B) $\left(\frac{\alpha^2}{\beta^3}\right)\left(\frac{2\beta^2}{5\alpha^3}\right)^{-1}2\alpha\beta^{-4}$

Γ) $\left(\frac{7x^2}{-3y^4}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{9y^2}{49x^4}\right)^{-2}$

32.48 Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων:

A) $3x^2 - y^2 + 2xy^3$ αν $x=-2$ και $y=3$

B) $\left(x^{-3}y^4\right)^{-3} : \left(x^2 : y^3\right)^4$ αν $x=0,3$, $y=0,4$

Γ) $\left[\left(x^{-3}y^5\right)^{-2} : \frac{x^6}{y^{11}}\right]$ αν $x=0,03$, $y=0,4$

32.49 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$99999^2 - 9\cdot 44444^2 + 64\cdot 11111^2$ και

$2^{2004} : [(25^{50} : 5^{99} - 3^{51} : 9^{25})^{1999} + \left(2^{111}\right)^{18} + 2\cdot 2^{1997}]$

32.50 Για ποιά τιμή του λ η παράσταση $\alpha^{\lambda+3}\cdot\beta^{2\lambda+4}$ γράφεται με μορφή δύναμης με βάση $(\alpha\beta)$

32.51 Να αποδείξετε ότι $\frac{6^{\upsilon+2}}{2^{\upsilon-1}\cdot 3^{\upsilon+1}} = 24$, όπου ν φυσικός αριθμός με $\upsilon>1$.

32.52 Αν ο ν είναι φυσικός με $\upsilon>1$, δείξτε ότι: $(-1)^{\upsilon} + (-1)^{\upsilon+1} + (-1)^{\upsilon+2} + (-1)^{\upsilon+3} = 0$

32.53 Δείξτε ότι

$$\left(\frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}}\right)^{\alpha+\beta}\cdot\left(\frac{x^{\beta}}{x^{\gamma}}\right)^{\beta+\gamma}\cdot\left(\frac{x^{\gamma}}{x^{\alpha}}\right)^{\gamma+\alpha} = 1$$

32.54 Να βρεθεί ο $\upsilon\in Z$ αν ισχύει:

$3\cdot 3^{3\nu-7} = \frac{1}{27}$

32.55 Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A=\frac{\left(x^2-\frac{1}{y^2}\right)^m\cdot\left(y+\frac{1}{x}\right)^{n-m}\cdot y^{m+n}}{\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)^n\cdot\left(x-\frac{1}{y}\right)^{m-n}\cdot x^{m+n}}$$ όπου m,n

είναι ακέραιοι και x,y πραγματικοί αριθμοί με $xy\neq 0,\ xy\neq 1,\ xy\neq -1$

32.56 Να συγκρίνετε τους αριθμούς

Α) 31^{11} και 17^{14}

Β) $A=2^{65}$ και $B=5^{22}-125^7$

32.57 Να λύσετε τις εξισώσεις

Α) $2^{x^2-4x+4}=1$

Β) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=27$

Γ) $3^{x+2}=\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{x}}$

Δ) $e^x+3=0$

32.58 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x=2$

Β) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{8}{27}$

Γ) $(2)^{3x}=\left(\frac{1}{2}\right)^6$

Δ) $\sqrt{3}^x=9$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

32.59 Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να είναι τέλεια τετράγωνα οι παραστάσεις:

Α) $16+8x+\ldots$

Β) $9\alpha^2+\ldots-12\alpha\beta$

Γ) $x^4y^2-6x^2y+\ldots$

Δ) $4x^2+1+\ldots$

Ε)** $9+4\sqrt{2}=(\ldots+\ldots)^2$

32.60 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

Α) $(x\ \cdots\ \ldots)^2=\ldots+\ldots+25$

Β) $(\ldots\cdots 3)^2=\omega^2-\ldots\cdots\ldots$

Γ) $(\ldots+\ldots)^2=9x^2\cdots 12xy\cdots\ldots$

Δ) $(\ldots\cdots 3\alpha)^2=\ldots-30x^2\alpha\ \cdots\ \ldots$

32.61 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

Α) $x^2-\ldots+1=(\ldots-\ldots)^2$

Β) $4\alpha^2+\ldots+9=(\ldots+\ldots)^2$

Γ) $25y^2-\ldots+16x^2=(\ldots-\ldots)^2$

Δ) $(2x-1)(4x^2+2x+1)=\ldots-\ldots$

Ε) $(2x+3)(4x^2-6x+9)=\ldots+\ldots$

Στ) $8x^3-\ldots+\ldots-27=(\ldots-\ldots)^3$

Ζ) $1+\ldots+\ldots+x^3y^3=(\ldots+\ldots)^3$

32.62 Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

Α) $(\alpha+\beta)^3-(\alpha-\beta)^3-6\alpha^2\beta=2\beta^3$

Β) $2\alpha(2\alpha-1)^2-(2\alpha-1)^3-4\alpha^2=1-4\alpha$

32.63 Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

Α) $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta$

Β) $4\alpha(\alpha-1)-(2\alpha-1)^2=-1$

Γ)

$(\alpha^2-3)^2-(\alpha-1)\cdot(\alpha^3-6\alpha)=\alpha(\alpha^2-6)+9$

Δ) $(\alpha^2+1)\cdot(x^2+4)-(2\alpha-x)^2=(\alpha x+2)^2$

32.64 Να γράψετε ως δύναμη με βάση και εκθέτη φυσικό τον αριθμό:

$2005^3-3\cdot 2005^2+3\cdot 2005-1$

32.65 Να αποδειχτεί ότι

A) $\left(\frac{m^2-1}{m^2+1}\right)^2+\left(\frac{2m}{m^2+1}\right)^2=1$

B) $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=xy$

32.66 Να αποδείξετε ότι

$$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)=\alpha^6-\beta^6$$

32.67 Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ είναι $\alpha\neq\beta\neq\gamma$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{1}{\beta-\gamma}+\frac{1}{\gamma-\alpha}\right)^2=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}+\frac{1}{(\beta-\gamma)^2}+\frac{1}{(\gamma-\alpha)^2}$$

32.68 Αν $\alpha^2+\beta^2=1$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}{\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}=\alpha^2-\beta^2$$

32.69 Αν $\alpha+\frac{1}{\alpha}=2$ να αποδείξετε ότι

$$\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}=\alpha^4+\frac{1}{\alpha^4}$$

32.70 Να δείξετε ότι η παράσταση:

$$\left(x^3+y^3\right)^2-\left(x^3-y^3\right)^2-4x^2\left(xy^3+1\right)+4x^2+3$$

είναι ανεξάρτητη των x, y .

32.71 Αν $\alpha-\beta=\frac{9}{\alpha\cdot\beta}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=(\alpha-\beta)^3-\alpha^3+\beta^3$.

32.72 Αν $\alpha-\beta=2$ να αποδείξετε ότι

$$\alpha^2+\beta^2-4\alpha-2\alpha\beta+4\beta+3=-1$$

32.73 Αν $\alpha+\beta=2$ να αποδείξετε ότι

$$\left(\alpha^2+\beta^2-2\right)^2-(2\alpha\beta-2)^2=0$$

32.74 Αν $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-2$, να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$(2\alpha+1)(2\beta+1)$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$, $\alpha^3+\beta^3$

32.75 Αν $\alpha+\beta=5$ και $\alpha\beta=3$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$2\alpha+2\beta$, $\alpha^2+\beta^2$, $(\alpha+1)(\beta+1)$, $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$, $\alpha^4+\beta^4$

32.76 Αν $\alpha+\beta=\frac{1}{\alpha\beta}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A=(\alpha+\beta)^3-\alpha^3-\beta^3$

32.77 Να δείξετε ότι

$$2\left(\alpha^2+\beta^2\right)=(\alpha+\beta)^2\Rightarrow\alpha=\beta$$

32.78 Αν $\alpha+\beta+\gamma\neq0$ και ισχύει $\alpha(\alpha+\gamma)-\beta(\beta+\gamma)=0$ να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta$

32.79 Αν $\alpha\beta\gamma\neq0$ και $\alpha+\beta+\gamma=0$, δείξτε ότι

$$\frac{\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2-\gamma^2-2\alpha\gamma}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2-\alpha^2-2\alpha\beta}{\alpha+\gamma}=0$$

32.80 Αν $(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2=4(\alpha x+\beta y)$ τότε να αποδείξετε ότι $x=\alpha$ και $y=\beta$

32.81 Να αποδείξετε ότι αν $(x+y+\omega)^2=3\left(x^2+y^2+\omega^2\right)$ τότε $x=y=\omega$

32.82 Να αποδείξετε ότι αν $(\alpha+\beta+\gamma)^2=3\alpha\beta+3\beta\gamma+3\alpha\gamma$ τότε $\alpha=\beta=\gamma$

32.83 Αν $(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-2)=2(\alpha\beta-1)$ να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=1$

32.84 Να αποδείξετε ότι αν $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0$ τότε $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ για κάθε $\alpha\beta\gamma\neq 0$

32.85 Αν $\beta=\alpha-1$ να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^4+\beta^4)(\alpha^8+\beta^8)=(\alpha^{16}-\beta^{16})$$

32.86 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $x^3+(x-1)^3+(1-2x)^3=0$

Β) $(2x+3)^3+(1-5x)^3=(4-3x)^3$

Γ) $(x-2)^3-(5-2x)^3+(7-3x)^3=0$

Δ) $x^3-9x+28=0$

32.87 Αν $\alpha+\beta+\gamma=3$ και $\alpha\gamma=-2$, υπολογίστε την τιμή της παράστασης: $\alpha^3+(\beta-3)^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$

32.88 Αν $x=\alpha(\kappa-\lambda)$, $y=\beta(\lambda-\mu)$, $z=\gamma(\mu-\kappa)$ και $\alpha\beta\gamma\neq 0$ να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^3+\left(\frac{y}{\beta}\right)^3+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^3=3(\kappa-\lambda)(\lambda-\mu)(\mu-\kappa)=\frac{3xyz}{\alpha\beta\gamma}$$

32.89 Αν για τους θετικούς ακέραιους x, y, ω ισχύει ότι: $3^{x^3+y^3}=\left(\frac{27^{xy}}{3^{\omega^2}}\right)^{\omega}$ τότε $x=y=\omega$

32.90 Να αποδείξετε ότι αν $\alpha\beta\neq 0$ και $\alpha^3+9\beta^3=6\alpha\beta^2$ τότε οι α και β είναι ετερόσημοι.

32.91 Αν α,β,γ είναι πλευρές τριγώνου και ισχύει ότι $\frac{\alpha^2-\beta\gamma}{\beta+\gamma}=\frac{2\alpha-\beta-\gamma}{2}$, δείξτε ότι είναι ισόπλευρο

32.92 Αν $\alpha\cdot\beta=1$ δείξτε ότι

$$\frac{\alpha^3}{1+\alpha^2}-\frac{\beta^3}{1+\beta^2}=\alpha-\beta$$

32.93 Να βρεθούν οι αριθμοί $\alpha,\beta\in R$ για τους οποίους ισχύει ότι: $\alpha^2+\beta^2=6\beta-2\alpha-10$

32.94 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β αν ισχύει ότι $\alpha^2+\beta^2-2\alpha=2\beta+\alpha\beta-4$

32.95 Αν $(\alpha+\beta+\gamma)^2=3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=\gamma$

32.96 Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ να αποδείξετε ότι

$$\frac{4\beta\gamma-\alpha^2}{\beta\gamma+2\alpha^2}+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{\alpha\gamma+2\beta^2}+\frac{4\alpha\beta-\gamma^2}{\alpha\beta+2\gamma^2}=3.$$

32.97 Αν $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$, $\alpha+\beta+\gamma=1$ και $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ $(\alpha,\beta,\gamma\neq 0)$, να αποδείξετε ότι $xy+yz+zx=0$

32.98 Να βρείτε την τιμή του γινομένου

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{99^2}\right)\left(1-\frac{1}{100^2}\right)$$

32.99 Αν για κάθε $x\in R-\{-1,1\}$ ισχύει ότι $\frac{2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}-\frac{B}{x+1}$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς Α και Β

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

32.100 Παραγοντοποιήστε τις παραστάσεις:

Α) $2\alpha\beta+3\alpha^2$

Β) $4\alpha^3-8\alpha$

Γ) $10\kappa^2-1000\lambda^2$

Δ) $5\mu^2+10\mu\lambda$

Ε) $x(x-3)+2(3-x)$

Στ) $\alpha^3-4\alpha^2+4\alpha$

Ζ) $2x^4-18x^2$

32.101 Παραγοντοποιήστε τις παραστάσεις:

Α) $x^2-x-\psi x+\psi+\omega-\omega x$

Β) $\alpha\beta+\beta x+\alpha+\gamma\alpha+\gamma x+x$

Γ) $25\beta^2-4$

Δ) $(x+\psi)^2-1$

Ε) $\alpha^2-(\alpha+2\beta)^2$

Στ) $\alpha^5-\alpha$

Ζ) $\alpha^2+2\alpha+1-16\beta^2$

Η) $4x^2-\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2$

32.102 Παραγοντοποιήστε τις παραστάσεις:

Α) $x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8$

Β) $2x\sqrt{x}-6x+3\sqrt{x}-9$

Γ) x^3-3x+2

Δ) $x^3+2\sqrt{x}-3$

32.103 Να παραγοντοποίσετε τα τριώνυμα

Α) $6\chi^2-5\chi-1$

Β) $2\chi^2-\chi-1$

Γ) x^4-10x^2+9

Δ) x^6-7x^3-8

Ε) $5x^2-11x+6$

Στ) $3x^2-x-2$

32.104 Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

Α) $(x-y)-(\alpha+\beta)^2\cdot(x-y)$

Β) $x^2y^2-9y^2-x^2+9$

Γ) $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-x^2+4x-4$

Δ) y^2+2x-x^2-1

Ε) $4(x+2y)^2-9(3x-y)^2$

32.105 Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

Α) $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2$

Β) $(4x+2y)^2-(2x-3y)^2$

Γ) $3\alpha^3\beta-27\alpha\beta^3$

Δ) $\left(\alpha^2+1\right)^2-4\alpha^2$

Ε) $5x^5-20xy^3$

32.106 Παραγοντοποιήστε τις παραστάσεις:

Α) $\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2-1$

Β) $x^2-y^2+\omega^2+2x\omega$

Γ) x^2-y^2-2x+1

Δ) $m^2-n^2+2np-p^2$

Ε) $x^2-y^2-z^2-2yz$

32.107 Παραγοντοποιήστε τις παραστάσεις:

Α) $x^4+y^4-11x^2y^2$

Β) x^4+1

Γ) 2^x+2^{2x}

32.108 Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

Α) $x^2-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2$

Β) $x^2-6\alpha x+9\alpha^2-25y^2$

Γ) $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-\alpha+\beta$

Δ) $\alpha^2-\beta^2+4\beta-4$

Ε) $x^2+4xy+4y^2-9$

Στ) $x^2+6x+9-y^2+2y-1$

32.109 Να αποδείξετε ότι

Α) $\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}\right):\left(2-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right):\left(\frac{y}{x}+1\right)=\frac{x}{x-y}$

Β) $\frac{1-x}{1-\frac{1}{x}}:(-x)=1$ Γ) $\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=0$

32.110 Να αποδείξετε ότι:

Α) $\left[\left(\frac{1}{x}-1\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right]:\left(\frac{1}{x^3}-1\right)=1$

Β) $\left(\frac{\frac{1}{\beta}}{1-\frac{\beta}{\alpha}}-\frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\beta}-1}\right):\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\right)=1$

32.111 Να κάνετε τις πράξεις:

Α) $\alpha(\alpha+1)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha+1}\right)$

Β) $(\alpha-\beta):\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)$

Γ) $\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}}-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)$

32.112 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $x\cdot\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right):\frac{(x+1)^2}{x}$

Β) $\left[\left(2+\frac{2\alpha}{\beta}\right)\cdot\left(\frac{\alpha}{2\beta}-\frac{1}{2}\right)\right]:\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-1\right)$

32.113 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $\frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}\cdot\frac{\alpha^3-\beta^3}{\left(\alpha\beta-\beta^2\right)^2}:\frac{\alpha\beta+\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}$

Β) $\frac{x\alpha-x\beta}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}\cdot\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2x-x\beta^2}\cdot\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$

Γ) $\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(1-\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right):\left(\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}-3\alpha\beta\right)$

32.114 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$

Β) $\frac{\alpha+\beta}{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}+\frac{\beta+\gamma}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}+\frac{\gamma+\alpha}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}$

32.115 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $\left(\frac{3}{9-\mu^2}+\frac{2\mu-1}{\mu-3}-\frac{\mu^2-4}{\mu^2+6\mu+9}\cdot\frac{\mu+3}{\mu-2}\right):\frac{\mu}{\mu-3}$

Β) $\left(\frac{3x+2}{2x+3}-\frac{4x-1}{2x+3}-\frac{2x^2+3x}{4x^2+12x+9}\right):\frac{3-2x}{2x+3}$

Γ) $\left[\left(\frac{x^2+y^2}{y}+x\right)\cdot\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}\right]:\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

32.116 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

Α) $\left[\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right):\frac{x+y}{2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right]\frac{xy}{(x+y)^2}$ αν

$x=-0,5$, y=-2

Β) $\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}-\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{4\alpha}\right)$ για $\alpha=-3\frac{3}{4}$

Γ) $\left(\frac{2}{2\alpha-1}+\frac{6}{1-4\alpha^2}-\frac{4}{2\alpha+1}\right):\left(1-\frac{4\alpha^2+1}{4\alpha^2-1}\right)$ αν

$\alpha=-0,1$

32.117 Απλοποιήστε τις παραστάσεις, αφού βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται:

A) $\frac{x^2+x+1}{x+1}\cdot\frac{x^2-1}{x^3-1}$

B) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}\cdot\frac{x^2+2x}{x^2+x-2}$

32.118 Για τους ρητούς $x,y>1$ να απλοποιήσετε την έκφραση

$$A=\frac{\left(x^2-\frac{1}{y^2}\right)^x\cdot\left(x-\frac{1}{y}\right)^{y-x}}{\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)^y\cdot\left(y+\frac{1}{x}\right)^{x-y}}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^{x+y}$$

3.3 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

ΟΡΙΣΜΟΣ

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι: $\boldsymbol{\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

...ΜΙΑ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

...ε $\alpha, \beta, \lambda \in R$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- Για κάθε $\lambda \in R$ ισχύει: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + \lambda < \beta + \lambda$,
- Για κάθε $\lambda > 0$ ισχύει: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \lambda\alpha < \lambda\beta$ και
$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\lambda} < \frac{\beta}{\lambda}$$
- Για κάθε $\lambda < 0$ ισχύει: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \lambda\alpha > \lambda\beta$ και
$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\lambda} > \frac{\beta}{\lambda}$$
- $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^{2\kappa+1} < \beta^{2\kappa+1}, \quad \kappa \in Z_+$
- $0 < \alpha < \beta \Rightarrow \alpha^{2\kappa} < \beta^{2\kappa}, \quad \kappa \in Z_+$
- $\alpha < \beta < 0 \Rightarrow \beta^{2\kappa} < \alpha^{2\kappa}, \quad \kappa \in Z_+$
- $0 < \alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} < \sqrt{\beta}$
- $0 < \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} < \beta^{\frac{\mu}{\nu}}$ με $\mu, \nu \in N^*$

...ε $\boldsymbol{\alpha, \beta \in R}$ **με** $\boldsymbol{\alpha \cdot \beta > 0}$ ισχύει ότι

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha}$$

ΣΕ ΔΥΟ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

...ε $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$ ισχύει

- $\left.\begin{matrix} \alpha < \beta \\ \gamma < \delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \delta$
- $\left.\begin{matrix} 0 < \alpha < \beta \\ 0 < \gamma < \delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 < \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$

...ιαδήποτε $\alpha, \beta, \gamma \in R$ ισχύει η μεταβατική ιδιότητα:

$$\left.\begin{matrix} \alpha < \beta \\ \beta < \gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha < \gamma$$

ΠΡΟΣΟΧΗ! ΔΕΝ ΑΦΑΙΡΟΥΜΕ, ΔΕΝ ΔΙΑΙΡΟΥΜΕ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΚΑΤΑ ΜΕΛΗ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ:

$$(\alpha-\beta)^2\geq 0,\quad \alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta,$$
$$(\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta,\quad 2(\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha+\beta)^2$$
$$x+\frac{1}{x}\geq 2 \text{ αν } x>0,\quad x+\frac{1}{x}\leq -2 \text{ αν } x<0$$

Ενώ ισχύει ότι:

$$\alpha^2+\beta^2\leq 0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ και } \beta=0$$

ΣΧΟΛΙΟ!

Ισχύει ότι:

$$\alpha\neq\beta \Leftrightarrow \alpha<\beta \text{ ή } \alpha>\beta$$

Για το σύμβολο «$\neq$» ισχύουν ιδιότητες όπως οι παρακάτω:

$$\alpha\neq\beta \Leftrightarrow \sqrt{\alpha}\neq\sqrt{\beta}\ ,\quad \alpha,\beta\geq 0$$
$$\alpha\neq\beta \Leftrightarrow \alpha^3\neq\beta^3$$
$$\alpha\neq\beta \Leftrightarrow \lambda\alpha\neq\lambda\beta,\ \lambda\neq 0$$
$$\alpha\neq\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}\neq\frac{1}{\beta},\quad \alpha,\beta\neq 0$$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

33.1

Αν $2\leq x\leq 3$ και $-2\leq y<-1$, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία βρίσκονται οι τιμές κάθε μιας από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x+y$ **β)** $2x-4y$ **γ)** $\frac{y}{x}$

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\left.\begin{matrix}2\leq x\leq 3\\ -2\leq y<-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow 0\leq x+y<25$

β) Επειδή $2x-4y=2x+(-4y)$ έχουμε ότι:

$$\left.\begin{matrix}2\leq x\leq 3\\ -2\leq y<-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}4\leq 2x\leq 6\\ 4<-4y\leq 8\end{matrix}\right\}\Rightarrow 8<2x-4y\leq 14$$

γ) Είναι:

$$\left.\begin{matrix}-2\leq y<-1\\ 2\leq x\leq 3\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}-2\leq y<-1\\ \frac{1}{3}\leq\frac{1}{x}\leq\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}1<-y\leq 2\\ \frac{1}{3}\leq\frac{1}{x}\leq\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \frac{1}{3}<\frac{-y}{x}\leq 1\Rightarrow -1\leq\frac{y}{x}<-\frac{1}{3}$$

33.2

Αν $0<\alpha<1$, τότε να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: 0, α^2, 1, α, $\frac{1}{\alpha}$, $-\alpha$

ΛΥΣΗ

- Αρχικά θα αποδείξουμε ότι:

$$\alpha^2<\alpha$$

Για αυτό αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\alpha^2<\alpha \Leftrightarrow \alpha^2-\alpha<0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha-1)<0$$

Που είναι αληθές αφού

$$\alpha>0 \text{ και } \alpha<1 \Leftrightarrow \alpha-1<0.$$

- Ακόμη είναι $0<\alpha$ άρα

$$0<\alpha^2$$

- Από την υπόθεση ισχύει

$$\alpha<1$$

- Ακόμη επειδή $0<\alpha<1$ θα είναι

$$\frac{1}{\alpha}>1$$

Συνεπώς:

$$-\alpha<0<\alpha^2<\alpha<1<\frac{1}{\alpha}.$$

33.3

Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε $2x^2+2y^2+20=4x-12y$

ΛΥΣΗ

Ισχύει ότι:

$$2x^2+2y^2+20=4x-12y \Leftrightarrow 2\left(x^2+y^2-2x+6y+10\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$x^2+y^2-2x+6y+10=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2=0 \text{ και } (y+3)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$x-1=0 \text{ και } y+3=0 \Leftrightarrow$$
$$x=1 \text{ και } y=-3$$

33.4

Δίνονται θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, x. Να αποδείξετε ότι:

α) $x+\frac{2}{x}\geq 2\sqrt{2}$

β) $\left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{2}{\beta}\right)\geq 8$

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $x>0$ αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$x+\frac{2}{x}\geq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2+2\geq 2\sqrt{2}x \Leftrightarrow x^2-2\sqrt{2}x+\sqrt{2}^2\geq 0 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{2}\right)^2\geq 0,$$

το οποίο ισχύει

β) Με εφαρμογή του α) ερωτήματος έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\frac{2}{\alpha}\geq 2\sqrt{2}\\ \beta+\frac{2}{\beta}\geq 2\sqrt{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{2}{\beta}\right)\geq 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\Rightarrow \left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{2}{\beta}\right)\geq 8.$$

33.5

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $3\leq x\leq 5$ και $1\leq y\leq 2$, τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y διπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

ΛΥΣΗ

α) Η περίμετρος του παραλληλογράμμου είναι $\Pi=2x+2y=2(x+y)$ και από τα δεδομένα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}3\leq x\leq 5\\ 1\leq y\leq 2\end{array}\right\}\Rightarrow 4\leq x+y\leq 7\Rightarrow 8\leq 2(x+y)\leq 14$$

Άρα η περίμετρος του παραλληλογράμμου παίρνει τιμές στο διάστημα $[12,20]$.

β) Το νέο παραλληλόγραμμο θα έχει διαστάσεις $x-1$ και $2y$ και περίμετρο:

$$2(x-1)+2\cdot 2y=2x+4y-2.$$

Οπότε: $\left.\begin{array}{l}3\leq x\leq 5\\ 1\leq y\leq 2\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}6\leq 2x\leq 10\\ 4\leq 4y\leq 8\end{array}\right\}\Rightarrow 10\leq 2x+4y\leq 18\Rightarrow 8\leq 2x+4y-2\leq 16$

Άρα η περίμετρος του νέου παραλληλογράμμου παίρνει τιμές στο διάστημα $[8,16]$

33.6

Για τους πραγματικούς αριθμούς x,y ισχύουν: $5 \le x \le 7$ και $-3 < y \le 1$

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $x-3y$ β) x^2-3xy

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει $\left.\begin{array}{l} 5 \le x \le 7 \\ -3 \le -3y < 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5 \le x \le 7 \\ -3 \le -3y < 9 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \le x-3y < 16$

Άρα η παράσταση $x-3y$ παίρνει τιμές στο διάστημα $[2,16)$

β) Ισχύει $x^2-3xy = x(x-3y)$

Τότε λόγω του α) ερωτήματος: $\left.\begin{array}{l} 2 \le x-3y < 16 \\ 5 \le x \le 7 \end{array}\right\} \Rightarrow 10 \le x(x-3y) < 112$

Άρα η παράσταση x^2-3xy παίρνει τιμές στο διάστημα $[10,112)$

33.7

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3 \le x \le 5$ και $-2 \le y < 1$, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $y-x$. β) x^2+y^2 γ) $\frac{1}{x}+y^2$

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\left.\begin{array}{l} -2 \le y \le -1 \\ 3 \le x \le 5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -2 \le y \le -1 \\ -5 \le -x \le -3 \end{array}\right\} -7 \le y-x \le -4$.

Άρα $y-x \in [-7,-4]$.

β) Είναι: $-2 \le y < 1 \Leftrightarrow$

$$-2 \le y \le 0 \text{ ή } 0 < y < 1 \Leftrightarrow 0 \le y^2 \le 4 \text{ ή } 0 < y^2 < 1 \Leftrightarrow$$

Άρα $0 \le y^2 \le 4 \Leftrightarrow$

Ακόμη ισχύει ότι : $3 \le x \le 5 \Rightarrow 9 \le x^2 \le 25$

Επομένως

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le y^2 \le 4 \\ 9 \le x^2 \le 25 \end{array}\right\} \Rightarrow 9 \le x^2+y^2 \le 29$$

Άρα $x^2+y^2 \in [9,29]$.

γ) $\left.\begin{array}{l} 3 \le x \le 5 \\ 0 \le y^2 \le 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{1}{3} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{5} \\ 0 \le y^2 \le 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{3} \le \frac{1}{x}+y^2 \le \frac{21}{5}$

33.8

Για θετικούς πραγματικούς αριθμούς, να αποδείξετε ότι ισχύει:

Α) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\geq\frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}$ **Β)** $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}\geq\frac{\alpha+\beta}{2}$ **Γ)** $\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}$

Δ) $\frac{\alpha+\beta}{2}\geq\sqrt{\alpha\beta}\geq\frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}$ **Ε)** $\alpha<\frac{2\alpha+3\beta}{5}<\beta,$ **αν** $\alpha<\beta$

Λύση

Α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\geq\frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)^2-2\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{\sqrt{\beta}}\geq 0\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)^2\geq 0$$

Που είναι αληθές

Β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}\geq\frac{\alpha+\beta}{2}\Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2\geq(\alpha+\beta)^2\Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2-\alpha^2-\beta^2-2\alpha\beta\geq 0\Leftrightarrow$$

$$(\alpha-\beta)^2\geq 0$$

Που ισχύει

Γ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}\Leftrightarrow\sqrt{\alpha}^2+\sqrt{\beta}^2-2\sqrt{\alpha\beta}\geq 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2\geq 0$$

που ισχύει

Δ) Το $\frac{\alpha+\beta}{2}\geq\sqrt{\alpha\beta}$ προκύπτει από το προηγούμενο ερώτημα

Για το $\sqrt{\alpha\beta}\geq\frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}$ αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\sqrt{\alpha\beta}\geq\frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}\Leftrightarrow\sqrt{\alpha\beta}\geq\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\Leftrightarrow\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}$$

που ισχύει από το προηγούμενο ερώτημα

Ε) Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\alpha<\frac{2\alpha+3\beta}{5}<\beta\Leftrightarrow\ 5\alpha<2\alpha+3\beta<5\beta\Leftrightarrow$$

$$5\alpha<2\alpha+3\beta\ \text{ή}\ 2\alpha+3\beta<5\beta\Leftrightarrow$$

$$\alpha<\beta\ \text{ή}\ \alpha<\beta$$

Που ισχύει.

33.9

Να αποδείξετε ότι $2\alpha^2+4\beta^2+25\geq 2\alpha(5-2\beta)$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Για ποιες τιμές των α,β ισχύει η ισότητα;

Λύση

Έχουμε:

$$2\alpha^2+4\beta^2+25\geq 2\alpha(5-2\beta)\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+\alpha^2+(2\beta)^2+25-10\alpha+4\alpha\beta\geq 0\Leftrightarrow$$

$$=\left(\alpha^2+4\alpha\beta+(2\beta)^2\right)+\left(\alpha^2-10\alpha+25\right)\geq 0\Leftrightarrow$$

$$(\alpha+2\beta)^2+(\alpha-5)^2\geq 0,$$

Που Ισχύει αφού $(\alpha+2\beta)^2\geq 0$ και $(\alpha-5)^2\geq 0$.

Επειδή $(\alpha+2\beta)^2\geq 0$ και $(\alpha-5)^2\geq 0$, η (1) ισχύει μόνο όταν:

$$\begin{cases}\alpha+2\beta=0\\ \alpha-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=5\\ \beta=-\frac{1}{2}\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=5\\ \beta=-\frac{5}{2}\end{cases}$$

33.10

Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\geq 0$ να αποδείξετε ότι

$$\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)\left(\beta^2-\beta\gamma+\gamma^2\right)\left(\gamma^2-\gamma\alpha+\alpha^2\right)\geq\alpha^2\cdot\beta^2\cdot\gamma^2$$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι

$$(x-y)^2\geq 0\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\geq 0\Leftrightarrow x^2-xy+y^2\geq xy$$

Οπότε:

$$\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)\left(\beta^2-\beta\gamma+\gamma^2\right)\left(\gamma^2-\gamma\alpha+\alpha^2\right)\geq\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha=\alpha^2\cdot\beta^2\cdot\gamma^2$$

33.11

Αν $\alpha,\beta>0$ και $\alpha\cdot\beta=1$, να αποδείξετε ότι $(1+\alpha)(1+\beta)\geq 4$

Λύση

Ισχύει ότι:

$$\left(\sqrt{x}-1\right)^2\geq 0\Leftrightarrow x-2\sqrt{x}+1\geq 0\Leftrightarrow 1+x\geq 2\sqrt{x}$$

Οπότε

$$(1+\alpha)(1+\beta)\geq 2\sqrt{\alpha}\cdot 2\sqrt{\beta}=4\sqrt{\alpha\beta}=4$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ ΣΤΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

Α ομαδα

33.12 Αν $2<x<y$, να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους τους αριθμούς

x^2, $(x-1)^2$, y^2, $(y+1)^2$

33.13 Αν $0<\alpha<1$ να διατάξετε κατά αύξουσα σειρά τους αριθμούς $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{\alpha+1}{2}$, 0, $\alpha-1$, 1, α

33.14 Αν $\alpha,\beta>1$ και $\alpha<\beta$ να διατάξετε κατά φθίνουσα σειρά τους β, $\alpha^2\beta$, α, $\alpha\beta^2$

33.15 Αν $\alpha>1$ να διατάξετε από την μεγαλύτερη προς την μικρότερη τις τιμές

$\frac{1}{\alpha}$, α^2, 1, α^3, α.

Β ομαδα

33.16 Αν είναι $2<x<8$ να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών βρίσκονται οι παραστάσεις

Α) $2x-3$ Β) $\frac{1}{x}+2$ Γ) $1-\frac{1}{1-x}$ Δ) $\frac{2x-3}{x}$

33.17 Αν $0<x<1$ και $-2<y<2$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων

$x+y$, $-y$, $2x+3y$, $x-y$, y^2, $\frac{y^2+1}{x^2+1}$

33.18 Αν $-2<x<4$ και $3<y<7$ να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρουν οι παραστάσεις

$x-y$, $\frac{1}{y}$, $x-\frac{1}{y}$, $2x+3y$, x^2, y^2, x^2+y^2

33.19 Αν $-2<x<-1$ και $2<y<4$ να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρουν οι παραστάσεις: $x-y$, $\frac{1}{y}$

, $x-\frac{1}{y}$, $2x+3y$, x^2, y^2, x^2+y^2

33.20 Αν $-1<\alpha<0$ και $-3<\beta<-1$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχονται οι παραστάσεις:

$\beta-\alpha$, $\alpha\cdot\beta^{-1}$, $\alpha^2-\beta^2$, $3\alpha-4\beta$.

33.21 Αν $-2<x<1$ και $-3<y<-1$ να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρουν οι παραστάσεις:

$2x+y$, $x-y$, $\frac{-1}{y}$, $x-\frac{1}{y}$, $2x+3y$, x^2, y^2, x^2-y^2

33.22 Αν $1\le x\le 2$ και $3\le y\le 5$ να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{3}{x^2+y^2+1}$$

Γ ομαδα

33.23 Να αποδείξετε τις ανισώσεις:

Α) $\alpha^2+10>6\alpha$

Β) $\alpha^2+\beta^2+8\ge 4(\alpha+\beta)$

Γ) $(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta\ge -3\beta^2$

33.24 Να αποδείξετε ότι:

Α) $\beta^2+6\beta+11>0$

Β) $2y^2-8y+16>0$

Γ) $2\alpha^2+2\alpha+1>0$

33.25 Για κάθε $x,y\in R$, $\alpha,\beta,\gamma\in R$ δείξτε ότι:

Α) $x^2+y^2+13\ge 4x-6y$

Β) $x^2+y^2+z^2+14\ge 2x-4y+6z$

Γ) $\alpha^2+\gamma^2\ge 2\beta(\alpha-\beta+\gamma)$

Δ) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+90\ge 18\gamma-6\beta$

33.26 Για κάθε $\alpha,\beta\in R$, να αποδείξετε ότι:

Α) $\alpha^2+\beta^2+8\ge 4\cdot(\alpha+\beta)$

Β) $2\cdot(\alpha^2+\beta^2)\ge(\alpha-\beta)^2$

33.27 Να αποδείξετε ότι:

Α) Αν $3\alpha<\beta$ τότε $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{4}<\frac{\beta}{3}$

Β) Αν $\alpha>1$ τότε $\alpha^3>\alpha^2-\alpha+1$

Γ) Αν $x>y$ τότε $x+7>y+5$

Δ) $x<1<y\Rightarrow xy-x-y+1<0$

Ε) Αν $x<1$ και $y<1$, τότε $x+y<1+xy$

33.28 Να αποδείξετε ότι:

Α) Αν $\alpha>\beta>1$ τότε: $\alpha^3-\beta^3>3(\alpha-\beta)$.

Β) Αν $\alpha>\beta>0$ τότε $\alpha^3-\beta^3>(\alpha-\beta)^3$

Γ) Αν $\alpha\ge -2$ τότε $\alpha^3+8\ge 2\alpha^2+4\alpha$

Δ) Αν $x<z$ και $0<y<\omega$ τότε $x-\frac{1}{y}<z-\frac{1}{\omega}$

Ε) Αν $x>2$ τότε $x^3>2x^2-x+2$

33.29 Αν $\alpha\le\beta\le\gamma$ να αποδείξετε ότι

Α) $\alpha\le\frac{\alpha+\beta}{2}\le\beta$

Β) $\alpha\le\frac{2\alpha+3\beta}{5}\le\beta$

Γ) $\alpha\le\frac{2\alpha+3\beta+4\gamma}{9}\le\gamma$

33.30 Α) Αν $\alpha<\beta$, να συγκρίνετε τις παραστάσεις: $A=\alpha^3-\beta^3$ και $B=\alpha\beta^2-\alpha^2\beta$

Β) Να συγκρίνετε τους $A=2^{63}$ και $B=5^{27}$

Γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς 2^{51} και 3^{34}

33.31 Αν α,β,γ είναι πλευρές τριγώνου και ισχύει

$\alpha\beta\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma\right)+\beta\gamma\left(\frac{\beta+\gamma}{2}-\alpha\right)+\gamma\alpha\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}-\beta\right)\le 0$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

33.32 Αν α,β,γ είναι πλευρές τριγώνου και ισχύει ότι $\alpha^2+\beta^2\le 2\gamma(\alpha+\beta-\gamma)$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

33.33 Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει $\alpha\ge\beta$ κα $\alpha\cdot\beta\ne 0$ να αποδειχτεί ότι:

$\frac{\alpha}{\beta^2}-\frac{\beta}{\alpha^2}\ge\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}$

33.34 Να αποδείξετε ότι αν

$\alpha^2+\beta^2-2\gamma(\alpha+2\beta)+5\gamma^2\le 0$ τότε $\alpha=\frac{\beta}{2}=\gamma$

33.35 Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $x^4+6x^2+4y^2+8y+2005$ για κάθε $x,y\in R$

33.36 Αν οι θετικοί αριθμοί α,β,γ ικανοποιουν τις συνθήκες $\alpha\beta\gamma>1$ και $\alpha+\beta+\gamma<\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$, να αποδείξετε ότι οι α,β,γ είναι διαφορετικοί από το 1

33.37 Δίνονται οι θετικοί αριθμοί α,β,γ με $\alpha\beta\gamma=1$. Να αποδείξετε ότι:

Α $\alpha\beta+\gamma\ge 2$

Β $\frac{1}{\alpha\beta+\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma+\alpha}+\frac{1}{\gamma\alpha+\beta}\le\frac{3}{2}$

Γ $\frac{\alpha}{\alpha\beta+\alpha+1}+\frac{\beta}{\beta\gamma+\beta+1}+\frac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1}=1$

33.38 Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in R$ ισχύει: $(2\alpha+1)(\alpha+1)>5\alpha$

33.39 Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma>0$, να αποδείξετε ότι:

Α) $\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}<\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{\beta}{1+\beta}$

Β) $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{1+\alpha+\beta+\gamma}<\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{\beta}{1+\beta}+\frac{\gamma}{1+\gamma}$

33.40 Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in R^*$, να αποδείξετε ότι:

$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2\ge 3\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)$

33.41 Αν $\alpha>0$, $\beta<0$, να αποδείξετε ότι

$(\alpha-\beta)\cdot\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)\ge 4$

33.42 Αν α,β>0 να δείξετε ότι η παράσταση $\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha^2+\beta^2}$ παίρνει τιμές στο διάστημα $(1,\ 2]$

33.43 Αν α,β,γ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, φυσικοί αριθμοί όχι μικρότεροι του 2, να αποδείξετε ότι $\left(1-\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(1-\frac{1}{\beta^2}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)>\frac{1}{2}$

Δ ομαδα

33.44 Για κάθε $\alpha,\beta\in R$ να αποδείξετε ότι:

Α) $\alpha^2+\beta^2\ge 2\alpha\beta$

Β) $(\alpha+\beta)^2\ge 4\alpha\beta$

Γ) $2(\alpha^2+\beta^2)\ge(\alpha+\beta)^2$

Δ) $\alpha^2+1\ge 2\alpha$

33.45 Αν α, β θετικοί, να αποδείξετε ότι

A) $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \le \frac{\alpha+\beta}{4}$ B) $\alpha+\beta \ge 2\sqrt{\alpha\beta}$

33.46 Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma>0$ να αποδείξετε ότι

A) $(\alpha^2+\beta^2)(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2) \ge 8\alpha^2\beta^2\gamma^2$

B) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \ge 8\alpha\beta\gamma$

Γ) $(\alpha^2+1)(\beta^2+1)(\gamma^2+1) \ge 8\alpha\beta\gamma$

33.47 Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$ με $\alpha\beta\gamma\delta=1$ να αποδείξετε ότι $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)(\delta+1) \ge 16$

33.48 Αν $\alpha+\beta=1$ να αποδείξετε ότι:

A) $\alpha\beta \le \frac{1}{4}$ B) $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \ge 9$

33.49 Αν $\alpha,\beta>0$ και $\alpha\cdot\beta=1$, να αποδείξετε ότι $(1+\alpha)(1+\beta) \ge 4$

33.50 Αν $\alpha-\beta=4$, να αποδείξετε ότι $\alpha\cdot\beta \ge -4$ και $\alpha^2+\beta^2 \ge 8$

33.51 Αν $\alpha\cdot\beta \ge 5$ να δείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2 \ge 10$

33.52 Αν $\alpha,\beta,x,y>0$ να αποδείξετε ότι

A) $\frac{1}{2} \le \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2} < 1$

B) $1 \le \frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha+\beta)^2} + \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2} < 2$

33.53 Αν α,β,γ θετικοί και ισχύει ότι $\alpha\beta\gamma=1$ να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \ge 3$

33.54 Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta,\gamma>0$ ισχύει ότι $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} \ge 2\left(\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}\right)$

33.55 Αν $\alpha_1\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_\nu = 2^{2\nu}$ και $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \in R^+$ να αποδείξετε ότι $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_\nu) \ge 2^{2\nu}$

Ε ομαδα

33.56 Αν α,β,γ πραγματικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \ge \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

33.57 Να αποδείξετε ότι

$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2 \ge \alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

33.58 Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in R$ με $\alpha\beta\gamma=1$, να αποδείξετε ότι $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4 \ge \alpha+\beta+\gamma$

Στ ομαδα

33.59 Αν $\alpha>0$ να αποδείξετε ότι

A) $\alpha+\frac{1}{\alpha} \ge 2$ B) $\frac{2\alpha}{\alpha^2+1} \le 1$

33.60 Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει ότι $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \ge 2$ Αν α,β,γ θετικοί να αποδείξετε ότι

$\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\gamma+\alpha) \ge 6\alpha\beta\gamma$

33.61 Να αποδείξετε ότι:

A) Αν α, β ομόσημοι αριθμοί τότε $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} \ge 2$

B) Αν α, β ετερόσημοι τότε $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} \le -2$

33.62 Δίνονται οι θετικοί αριθμοί α,β και γ με $\alpha+\beta+\gamma=1$. Να δείξετε ότι $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} \ge 9$

33.63 Αν α,β,γ θετικοί να αποδείξετε ότι

$\left(\alpha+1+\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\beta+1+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\gamma+1+\frac{1}{\gamma}\right) \ge 27$

33.64 Αν α,β,γ θετικοί να αποδείξετε ότι

A) $\left(2+\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(2+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \ge 18$

B) $(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right) \ge 9$

Ζ ομάδα

33.65 Για θετικούς πραγματικούς αριθμούς, να αποδείξετε ότι ισχύει:

Α) $\alpha+\beta\ge 2\sqrt{\alpha\beta}$

Β) $\dfrac{\alpha+\beta}{2}\ge\sqrt{\alpha\beta}\ge\dfrac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}$

Γ) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\ge 3\alpha\beta\gamma$

Δ) $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\ge\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\ge\dfrac{3}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}$

33.66 Να αποδείξετε ότι για κάθε α,β,γ με $\alpha,\beta,\gamma>0$ ισχύει ότι $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\ge 8\alpha\beta\gamma$

33.67 Να αποδείξετε ότι για κάθε α,β,γ με $\alpha+\beta+\gamma>0$ ισχύει ότι $\dfrac{\beta\gamma}{\alpha^2}+\dfrac{\gamma\alpha}{\beta^2}+\dfrac{\alpha\beta}{\gamma^2}\ge 3$

33.68 Να αποδείξετε ότι για κάθε α,β,γ με $\alpha,\beta,\gamma>0$ ισχύει ότι

$$\left(\alpha+\frac{\beta}{\gamma\alpha}\right)\left(\beta+\frac{\gamma}{\alpha\beta}\right)\left(\gamma+\frac{\alpha}{\beta\gamma}\right)\ge 8$$

33.69 Να αποδείξετε ότι για κάθε α,β,γ με $\alpha,\beta,\gamma>0$ ισχύει ότι

Α) $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\ge 9\alpha\beta\gamma$

Β) $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\ge 9\alpha\beta\gamma$

Η ομάδα

33.70 Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma,x,y,\omega$, να αποδείξετε τις ανισότητες BCW (Buniakovski-Cauhy-Schwarz):

Α) $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)\ge(\alpha x+\beta y)^2$

Β) $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+\omega^2)\ge(\alpha x+\beta y+\gamma\omega)^2$

33.71 Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ είναι θετικοί αριθμοί, δείξτε ότι $(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\left(\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\gamma}+\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)\ge(\alpha+\beta+\gamma)^2$

33.72 Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι

$$(1+\alpha^4)(1+\beta^4)(1+\gamma^4)(1+\delta^4)\ge(1+\alpha\beta\gamma\delta)^4$$

33.73 Αν $\alpha^2+\beta^2=x^2+y^2=1$ να αποδείξετε ότι $\alpha x+\beta y\le 1$

33.74 Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$ και $\alpha\beta\gamma=1$, αποδείξτε ότι $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha^3+\beta^3+1}+\dfrac{\beta\gamma}{\beta^3+\gamma^3+1}+\dfrac{\gamma\alpha}{\gamma^3+\alpha^3+1}\le 1$

Θ ομάδα

33.75 Για κάθε $\alpha,\beta>0$ να αποδείξετε ότι:

Α) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\ge\dfrac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}$

Β) $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}\ge\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

Γ) $\dfrac{\alpha+\beta}{4}\ge\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

33.76 Για κάθε $\alpha,\beta>0$ να αποδείξετε ότι:

Α) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\ge 2\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2}$

Β) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\ge\dfrac{4}{\alpha+\beta}$

Γ) $\sqrt{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}\ge\sqrt{\alpha\gamma}+\sqrt{\beta\delta}$

33.77 Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\ge 0$ να αποδείξετε ότι:

Α) $\alpha^3+\beta^3\ge\alpha\beta(\alpha+\beta)$

Β) $\alpha^4+\beta^4\ge\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$

Γ) $\alpha^5+\beta^5\ge\alpha\beta(\alpha^3+\beta^3)\ge\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$

33.78 Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma>0$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(\alpha^3+\beta^3)(\beta^3+\gamma^3)(\gamma^3+\alpha^3)}{\alpha^3\beta^3\gamma^3}\ge\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$$

33.79 Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma>0$ με $\alpha\beta\gamma=1$ δείξτε ότι

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha^5+\beta^5+\alpha\beta}+\frac{\beta\gamma}{\beta^5+\gamma^5+\beta\gamma}+\frac{\gamma\alpha}{\gamma^5+\alpha^5+\gamma\alpha}\le 1$$

Ι ομάδα

33.80 Για τους θετικούς αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, να αποδείξετε ότι : $\dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}<\dfrac{\alpha}{1+\alpha}+\dfrac{\beta}{1+\beta}$.

33.81 Αν $0<\delta<\gamma<\beta<\alpha<1$ να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{1}{\beta-\gamma}+\frac{1}{\gamma-\delta}>\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2}+\frac{\beta+\gamma}{\gamma^2}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma^2}$$

Ια ομαδα

33.82 Έστω ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές x, y. Να εκφράσετε με μαθηματικές σχέσεις τις προτάσεις

Α) "Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι μικρότερο από $10\,m^2$"

Β) " Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι τουλάχιστον $45\,m$"

33.83 Τρεις διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί έχουν άθροισμα μεγαλύτερο του 12 και μικρότερο του 17. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί .

33.84 Αν $(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)+(4\beta^2-12\beta+9)=0$, να βρείτε τα α,β

33.85 Να αποδείξετε ότι για κάθε α,β,γ ισχύει:

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+29\ge 6\alpha+4\beta+8\gamma$. Πότε ισχύει το ίσον;

HMS

33.86 Να προσδιοριστεί το είδος του τριγώνου ΑΒΓ για τις πλευρές του οποίου ισχύουν οι σχέσεις

$1+\alpha^2\le 2\alpha+\beta-\gamma$, $1+\beta^2\le 2\beta+\gamma-\alpha$,

$1+\gamma^2\le 2\gamma+\alpha-\beta$

33.87 Για κάθε $\alpha,\beta\in R$ να αποδείξετε ότι

Α) $(\alpha+\beta)^2\le 2(\alpha^2+\beta^2)$

Β) $(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)^2\le 4(1+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6)$

33.88 Αν α,β,γ είναι πλευρές τριγώνου, τότε να αποδείξετε ότι Α) $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\alpha+\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}<2$

Β) $1\le\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}<2$

33.89 Δείξτε ότι $\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2\ge 3\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)$

33.90 Αν $\alpha,\beta,\gamma\ge 0$ να αποδείξετε ότι ισχύει

$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\cdot(\alpha+\beta+\gamma)\ge 9\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$

33.91 Αν μ,ν είναι θετικοί ακέραιοι και $\mu<\nu$, ποιος από τους $\frac{\mu}{\nu}$ και $\frac{\nu}{\mu}$ είναι ποιο κοντά στο ένα

33.92 Δείξτε ότι $\frac{1}{2}<\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\ldots+\frac{1}{2000}<1$

33.93 Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{2}<\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\ldots\frac{1}{40}<1$

33.94 Αν μ,ν είναι θετικοί ακέραιοι και $\mu>\nu$, τότε να αποδείξετε ότι:

Α) $\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu+1}<\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}$

Β) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2002}-\frac{1}{2003}<\frac{2}{5}$

33.95 Αν είναι $x,y>0$ και $x^3+y^2\le 64$ να αποδείξετε ότι $x^4+y^3<512$

33.96 Αν $x=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2002}-\frac{1}{2003}$

και $y=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}++\ldots+\frac{1}{2001}-\frac{1}{2002}$

Α) Βρείτε τον αριθμητικό μέσο των x,y

Β) Να αποδείξετε ότι $x<\frac{1001}{2003}<y$

33.97 Θεωρούμε τους αριθμούς

$A=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{595}{598}\cdot\frac{597}{600}$, $B=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{596}{599}\cdot\frac{598}{601}$

Να αποδείξετε ότι Α) $A<B$ Β) $A<\frac{1}{5990}$

33.98 Αν α,β ακέραιοι θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $3\alpha+4\beta=120$. Να αποδειχτεί ότι

$30<\alpha+\beta<40$

33.99 Α) Να δείξετε ότι

$\alpha\cdot\beta=\frac{(\alpha+\beta)^2}{2}-\frac{(\alpha-\beta)^2}{2}$

Β) Αν $\alpha,\beta>0$ με $\alpha+\beta=2$ τότε

α) να αποδείξετε ότι το γινόμενο $\alpha\cdot\beta$ γίνεται μέγιστο όταν $\alpha=\beta=1$

β) να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)$

ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ (2013-2014)

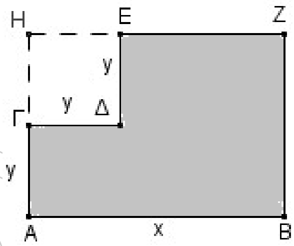
33.100

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$

Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$.

33.101

Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.



α. Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

33.102

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα.

Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \le x \le 7$ και $2 \le y \le 3$, τότε:

α. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β. Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

33.103

Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν: $2 \le \alpha \le 4$ και $-4 \le \beta \le -3$. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις: α) $\alpha - 2\beta$ β. $\alpha^2 - 2\alpha\beta$

33.104

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι $K \ge \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β.

β. Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

33.105

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\alpha + \frac{4}{\alpha} \ge 4$ β. $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \ge 16$

3.4 Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού

Ορισμός της απόλυτης τιμής:

Αν ο αριθμός α παριστάνεται με το σημείο Α πάνω σε ένα άξονα τότε η απόλυτη τιμή του α είναι η απόσταση του σημείου Α από την αρχή Ο. Συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται από τη σχέση:

$$|\alpha| = \begin{cases} -\alpha & \text{αν} \quad \alpha < 0 \\ 0 & \text{αν} \quad \alpha = 0 \\ \alpha & \text{αν} \quad \alpha > 0 \end{cases}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Για κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$ ισχύουν:

$$|\alpha| \geq 0$$

$$|\alpha|^2 = \alpha^2 = |\alpha^2| \qquad |-\alpha| = |\alpha|$$

$$|\alpha| \geq \alpha \text{ και } |\alpha| \geq -\alpha$$

$$-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$$

Για κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$ και $\theta > 0$ ισχύει

$$|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = -\alpha \text{ ή } x = \alpha$$

$$|x| = \theta \Leftrightarrow x = -\theta \text{ ή } x = \theta$$

Για κάθε $\theta > 0$ ισχύει

$$|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$$

$$|x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta \text{ ή } x > \theta$$

Ισχύουν ότι

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta| \qquad \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$$

Τριγωνική ανισότητα

$$\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Η απόσταση δύο αριθμών α , β συμβολίζεται με : $d(\alpha,\beta)$ και είναι ίση με

$$d(\alpha,\beta) = |\alpha - \beta|$$

Ακόμη ισχύει:

$$d(\alpha,-\beta) = |\alpha - (-\beta)| = |\alpha + \beta|$$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

34.1

Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές.

i) $|\pi-2|$ **ii)** $|\pi-5|$ **iii)** $|2-\sqrt{7}|+|3-\sqrt{7}|$ **iv)** $|x^2+2x+3|$

Λύση

i) Επειδή $\pi-2>0$ είναι $|\pi-2|=\pi-2$

ii) Επειδή $\pi-5<0$ είναι $|\pi-5|=-(\pi-5)=5-\pi$

iii) $|2-\sqrt{7}|+|3-\sqrt{7}|=-(2-\sqrt{7})+3-\sqrt{7}=-2+\sqrt{7}+3-\sqrt{7}=1$ =

iv) $|x^2+2x+3|=|x^2+2x+1+2|=|(x+1)^2+2|=(x+1)^2+2=x^2+2x+3$

34.2

Δίνεται η παράσταση: $A=|x-4|+|y-3|+|x-y|$**, με** x,y **πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει:** $1\le x\le 4$ **και** $4<y<6$**.**

Να αποδείξετε ότι: α) $A=1-2x+2y$**. β)** $1\le A\le 11$

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\begin{cases}1\le x\le 4\\ 4<y<6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\le x-4\le 0\\ 1<y-3<3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x-4|=4-x\\ |y-3|=y-3\end{cases}$

Ακόμη είναι:

$$1\le x\le 4<y<6\Rightarrow x<y\Rightarrow x-y<0\Rightarrow |x-y|=y-x$$

Επομένως

$$A=|x-4|+|y-3|+|x-y|=4-x+y-3+y-x+2x=1-2x+2y$$

β) Έχουμε ότι

$$\left.\begin{matrix}1\le x\le 4\\ 4<y<6\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}-8\le -2x\le -2\\ 8<2y<12\end{matrix}\right\}\Rightarrow 0\le -2y+2x\le 10\Rightarrow 1\le 1-2y+2x\le 11$$

34.3

Αν για τον *x* **ισχύει ότι** $x\ge 2$ **να αποδείξετε ότι:** $\dfrac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=3x+4$.

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x\ge 2$ έχουμε: $x\ge 2\Leftrightarrow 3x\ge 6\Leftrightarrow 3x-6\ge 0\Leftrightarrow |3x-6|=3x-6$.

Επομένως: $\dfrac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=\dfrac{(3x)^2-4^2}{|3x-6|+2}=\dfrac{(3x-4)(3x+4)}{3x-4}=3x+4$

34.4

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $6<x<9$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\frac{|x-4|}{x-4}+\frac{|x-11|}{x-11}$

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $6<x<9$ θα είναι:

$$6<x<9 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2<x-4<5 \\ -5<x-11<-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-4>0 \\ x-11<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |x-4|=x-4 \\ |x-11|=x-11 \end{array}\right\}$$

Οπότε: $A=\frac{|x-4|}{x-4}+\frac{|x-11|}{x-11}=\frac{x-4}{x-4}+\frac{-x+11}{x-11}=\frac{x-4}{x-4}+\frac{-(x-11)}{x-11}=1-1=0$.

34.5

Δίνονται οι παραστάσεις $A=|x-2|$ και $B=|2x-6|$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2\le x<3$ να αποδείξετε ότι $2A+\frac{1}{2}B=x-1$.

β) Υπάρχει $x\in[2,3)$ ώστε να ισχύει $A+B=2$;

ΛΥΣΗ

α) Αφού $2\le x<3$ ισχύει

$$2\le x<3 \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x-2<1 \\ 4\le 2x<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x-2<1 \\ -2\le 2x-6<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2|=x-2 \\ |2x-6|=6-2x \end{cases}$$

Επομένως: $2A+\frac{1}{2}B=2|x-2|+\frac{1}{2}|2x-6|=2(x-2)+\frac{1}{2}(6-2x)=2x-4+3-x=x-1$

β) Έστω ότι υπάρχει $x\in[2,3)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$A+B=2 \Leftrightarrow x-1=2 \Leftrightarrow x=3$$

που είναι άτοπο. Άρα δεν υπάρχει $x\in[2,3)$ ώστε να ισχύει $A+B=2$

34.6

Να γράψετε χωρίς το σύμβολο του απολύτου την παράσταση $A=x+|8-2x|$

Λύση

Επειδή $8-2x>0 \Leftrightarrow x<4$ Έχουμε ότι:

Αν $x<4$ τότε $A=x+|8-2x|=x+2x-8=3x-8$

Αν $x>4$ τότε $A=x+|8-2x|=x+8-2x=8-x$

$$A=x+|8-2x|=\begin{cases} 3x-8 & \text{αν } x<4 \\ 4 & \text{αν } x=4 \\ 8-x & \text{αν } x>4 \end{cases}$$

ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΕΣ

34.7

Αν $x \neq y$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $\left|\dfrac{x-y}{y-x}\right|$

Λύση

$$\left|\frac{x-y}{y-x}\right| = \frac{|x-y|}{|y-x|} = \frac{|x-y|}{|x-y|} = 1$$

34.8

Αν $x \neq 0$ και $y \neq 0$, βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η παράσταση $A = \dfrac{|x|}{x} + \dfrac{|y|}{y}$

Λύση

- Όταν οι x, y είναι θετικοί τότε: $A = \dfrac{x}{x} + \dfrac{y}{y} = 1 + 1 = 2$
- Όταν οι x, y είναι αρνητικοί τότε: $A = \dfrac{-x}{x} + \dfrac{-y}{y} = -1 - 1 = -2$
- Όταν ο x είναι θετικός, ο y αρνητικός τότε: $A = \dfrac{x}{x} + \dfrac{-y}{y} = 1 - 1 = 0$
- Όταν ο x είναι αρνητικός και ο y θετικός τότε: $A = \dfrac{-x}{x} + \dfrac{y}{y} = -1 + 1 = 0$

34.9

Να αποδείξετε ότι:

Α) $|\alpha+\beta|^2 + |\alpha-\beta|^2 = 2\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)$, **για κάθε $\alpha, \beta \in R$**

Β) $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| = |x| + \left|\dfrac{1}{x}\right|$ **για κάθε $x \neq 0$**

Λύση

Α) $|\alpha+\beta|^2 + |\alpha-\beta|^2 = (\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 =$

$$2\alpha^2 + 2\beta^2 = 2\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)$$

Β) $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| = \left|\dfrac{x^2+1}{x}\right| = \dfrac{|x^2+1|}{|x|} = \dfrac{x^2+1}{|x|} = \dfrac{x^2}{|x|} + \dfrac{1}{|x|} = \dfrac{|x|^2}{|x|} + \dfrac{1}{|x|} = |x| + \dfrac{1}{|x|}$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

34.10

Να αποδείξετε ότι $|\alpha-\beta| \le |\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta|$

Λύση

Ισχύει ότι:

$$|\alpha-\beta| = |\alpha-\beta+\gamma-\gamma| = |(\alpha-\gamma)+(\gamma-\beta)| \le |\alpha-\gamma| + |\gamma-\beta|$$

(με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας)

34.11

Να αποδείξετε ότι

Α) **Αν** $|x|=1$, $|y|=2$, $|z|=4$ **τότε** $|x+y-z|<7$

Β) **Αν** $x,\ y\in\mathbb{R}^*$ **με** $|x|+|y|<1$**, τότε** $0<|x|<1$ **και** $0<|y|<1$

Λύση

Α) Είναι:

$$|x+y-z| = |x+y+(-z)| \le |x|+|y|+|-z| = 1+2+4 = 7$$

Β)

Επειδή $x, y\in R^*$ θα είναι $x\neq 0$ και $y\neq 0$ συνεπώς

$$|x|>0 \text{ και } |y|>0$$

Ακόμη είναι

$$|x| \le |x|+|y| < 1$$

Και

$$|y| \le |x|+|y| < 1$$

Επομένως

$$0<|x|<1 \text{ και } 0<|y|<1$$

34.12

Για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}-\{0\}$ **να αποδειχτεί ότι:** $|\alpha|+\left|\frac{1}{\alpha}\right|\ge 2$.

ΛΥΣΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$|\alpha|+\left|\frac{1}{\alpha}\right|\ge 2 \Leftrightarrow |\alpha|+\frac{1}{|\alpha|}\ge 2 \Leftrightarrow |\alpha|^2+1\ge 2|\alpha| \Leftrightarrow |\alpha|^2-2|\alpha|+1\ge 0 \Leftrightarrow (|\alpha|-1)^2\ge 0$$

που ισχύει.

34.13

Αν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}-\{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \le \left|\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right|$. Πότε ισχύει η ισότητα;

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $\alpha,\beta \in R-\{0\}$ αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \le \left|\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \le \left|\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\right| \Leftrightarrow \frac{|\alpha|}{|\beta|} \le \frac{|\alpha^2+\beta^2|}{|\alpha||\beta|} \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 \le \alpha^2+\beta^2 \Leftrightarrow \beta^2 \ge 0$$

που είναι αληθής

Η ισότητα ισχύει όταν $\beta^2=0 \Leftrightarrow \beta=0$ που είναι αδύνατο.

Άρα η ισότητα δεν ισχύει ποτέ.

34.14

Για κάθε $\alpha,\beta \in R$ με $\alpha\cdot\beta\cdot(3\alpha+2\beta)\ne 0$ αποδείξτε ότι $\frac{|2\alpha+3\beta|}{|3\alpha+2\beta|}\le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\le 1$

ΛΥΣΗ

Ισοδύναμα έχουμε ότι

$$\frac{|2\alpha+3\beta|}{|3\alpha+2\beta|}\le 1 \Leftrightarrow |2\alpha+3\beta| \le |3\alpha+2\beta| \Leftrightarrow$$

$$|2\alpha+3\beta|^2 \le |3\alpha+2\beta|^2 \Leftrightarrow (2\alpha+3\beta)^2 \le (3\alpha+2\beta)^2 \Leftrightarrow$$

$$4\alpha^2+12\alpha\beta+3\beta^2 \le 9\alpha^2+12\alpha\beta+4\beta^2 \Leftrightarrow$$

$$5\beta^2 \le 5\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 \le \beta^2 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2} \le \sqrt{\beta^2} \Leftrightarrow$$

$$|\beta| \le |\alpha| \Leftrightarrow \frac{|\beta|}{|\alpha|} \le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \le 1$$

34.15

Αν α,β,γ πραγματικοί αριθμοί με $xyz\ne 0$, να αποδείξετε ότι: $\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}\le 3$

Λύση

Για κάθε $\alpha\ne 0$, από τη γνωστή ανισότητα $\alpha \le |\alpha|$ παίρνουμε ότι:

$$\alpha \le |\alpha| \Leftrightarrow \frac{\alpha}{|\alpha|} \le \frac{|\alpha|}{|\alpha|} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{|\alpha|} \le 1$$

Συνεπώς:

$$\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|} \le 1+1+1=3$$

ΑΠΟΣΤΑΣΗ

34.16

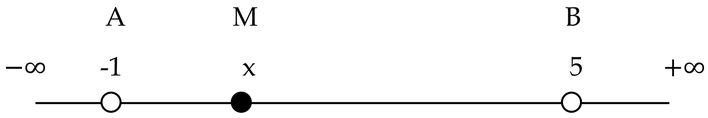
Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -1 , 5 και x αντίστοιχα, με $-1<x<5$.

α) Να βρείτε γεωμετρικά την τιμή της παράστασης $A=|x+1|+|x-5|$

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

ΛΥΣΗ

α) Αφού $-1<x<5$, τότε στον άξονα των πραγματικών αριθμών έχουμε :



Το $|x+1|=|x-(-1)|$ παριστάνει την απόσταση του M από το A

Το $|x-5|$ παριστάνει την απόσταση του M από το B.

Το $|x+1|+|x-5|=(AM)+(BM)$ παριστάνει το άθροισμα των αποστάσεων του σημείου M από τα σταθερά σημεία A, B. Επειδή το σημείο Μ είναι εσωτερικό του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ θα ισχύει:

$$A=|x+1|+|x-5|=(AM)+(BM)=(AB)=6$$

δ) Είναι:

$$-1<x<5 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0<x+1<6 \\ -6<x-5<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |x+1|=x+1 \\ |x-5|=-x+5 \end{array}\right\}$$

Επομένως:

$$A=|x+1|+|x-5|=x+1-x+5=6$$

34.17

Η πλευρά ενός τετραγώνου μετρήθηκε και βρέθηκε 21,7cm. Το λάθος της μέτρησης είναι το πολύ 0,03cm. Αν R είναι η πραγματική πλευρά του τετραγώνου, τότε Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η τιμή R.

Λύση

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $d(R,\ 21{,}7)\le 0{,}03$

$$d(R,\ 21{,}7)\le 0{,}03 \Leftrightarrow |R-21{,}7|\le 0{,}03$$

$$-\ 0{,}03 \le R - 217 \le 0{,}03$$

$$-\ 0{,}03 + 21{,}7 \le R \le 0{,}03 + 21{,}7$$

$$21{,}67 \le R \le 21{,}73$$

34.18

Να λύσετε τις εξισώσεις: $d(2x,4)=6$ $\quad d(2x,4)=2x-4$ $\quad d(2x,4)=-4$

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι $d(2x,4)=|2x-4|$

συνεπώς

$$d(2x,4)=6 \Leftrightarrow |2x-4|=6 \Leftrightarrow$$
$$2x-4=6 \text{ ή } 2x-4=-6 \Leftrightarrow$$
$$x=5 \text{ ή } x=-1$$

και

$$d(2x,4)=2x-4 \Leftrightarrow$$
$$|2x-4|=2x-4 \Leftrightarrow$$
$$2x-4 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$x \geq 2$$

Η εξίσωση

$$d(2x,4)=-4 \Leftrightarrow |2x-4|=-4$$

είναι προφανώς αδύνατη

34.19

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Λύση

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$\|x-4\|>2$	d(x, 4) > 2	$(-\infty,\ 2)\cup(6,\ +\infty)$
$\|x+3\|\geq 4$	d(x, –3) ≥ 4	$(-\infty,\ -7]\cup[1,\ +\infty)$
$\|x-5\|<1$	d(x, 5) < 1	$(4,\ 6)$
$\|x+1\|\leq 2$	d(x, –1) ≤ 2	$[-3,\ 1]$
$\|x\|<2$	d(x, 0) < 2	$(-2,\ 2)$
$\|x\|\geq 2$	d(x, 0) ≥ 2	$(-\infty,\ -2]\cup[2,\ +\infty)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ

34.20 Να γράψετε τις παραστάσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής

$|\sqrt{5}-2|+|\sqrt{5}-3|$ $\quad |\sqrt{2}-1|=$ $\quad |3-\pi|=$

$|x^2+2|$ $\quad |\eta\mu 38^0-1|=...$ $\quad |-\alpha^2-1|=...$

$|\sqrt{3}-2|+|2-\pi|$ $\quad |x^2+x+1|=...$ $\quad |(-2)^{25}|=...$

$|x^2+5|+|x^4+2|-|x^4+x^2+6|=...$

34.21 Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές τις παραστάσεις $A=|x+|x||-||x|-x+1|+|-x^2-1|$

$B=|x^4-4x^2+4|$ $\quad \Gamma=|x^2-6x+10|$

34.22 Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές τις παραστάσεις

$A=|-x^2-|x||$ $\quad B=|x^2-8x+20|$ $\quad \Gamma=|x^4-2x^2+2|$

$\Delta = ||x|+3|-||x|-x+1|+|-x^2-5|$

34.23 Αν $-3<x<2$ γράψτε χωρίς τις απόλυτες τιμές τις παραστάσεις:

$A=2|x+3|-6|x-2|+x-1$ $\quad B=x+|8-4x|$,

$\Gamma=|-2x-6|$, $\quad \Delta=|2-x|-|x-4|$

34.24 Αν $\kappa<\lambda<\mu<\nu$ και $\lambda<x<\mu$ δείξτε ότι η παράσταση $|\kappa-x|+|\lambda-x|+|\mu-x|+|\nu-x|$ είναι ανεξάρτητη του x

34.25 Αν $x>2$ να αποδείξετε ότι $\dfrac{4x-8}{|x-2|}=4$

34.26 Αν $-1<\alpha<\beta<2$ να απλοποιήσετε την παράσταση: $A=|\alpha-\beta|+|2\alpha+3|-|3\beta-7|$

34.27 Αν $\alpha<\beta<\gamma$ να γράψετε χωρίς απόλυτα την παράσταση:

$A=|\alpha-\beta|-3|\gamma-\alpha|+|2\alpha-\beta-\gamma|$

34.28 Αν $-1<x<2$ να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: $A=|x+1|+|x-2|+|x+2|+|x-3|$

$B=6\cdot|2x+3|+3\cdot|4x-9|$

34.29 Αν $1<x<2<y$, να αποδείξετε ότι:

$|1-x|+|2-y|+|x-y|-|2y-1|=-2$

34.30 Αν $\alpha<\beta<\gamma$ να απλοποιηθεί η παρακάτω παράσταση $\dfrac{5|\beta-\gamma|-5|\alpha-\gamma|}{-3|\alpha-\beta|}$

34.31 Αν $-1\le x\le 1$ να βρεθεί η μορφή της παράστασης $2|x+3|-3|x-4|-2x+1$ χωρίς τις απόλυτες τιμές

34.32 Αν $\alpha\in(-3,0)\cup(0,3)$ απλοποιήστε την παράσταση $E=\dfrac{|2\alpha-6|+|-\alpha-3|}{|-\alpha+3|-|\alpha+3|}$

34.33 Αν $\alpha\in(-2,0)\cup(0,2)$, απλοποιήσετε την παράσταση $E=\dfrac{|4-2\alpha|+|-2\alpha-4|}{|\alpha-2|-|\alpha+2|}$

34.34 Αν $-2<x<2$ και $y\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$E=|x^2-4|+|y^2-9|-|y^2-x^2|+13$

34.35 Αν $-1<x<1$ και $y\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης

$E=|x^2-1|+|y^2-1|-|x^2-y^2|$

34.36 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $|x-y|-|y-2|+|x-2|-2|x-3|$ αν $x<2<y$

Β) $||x|-x|+||x|+x|-|1+2|x||,\quad x\in R$

34.37 Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$A=\frac{|x-1|}{x-1}+\frac{|y+1|}{y+1}$ για κάθε $x,y\in R$

34.38 Να γράψτε χωρίς τις απόλυτες τιμές τις παραστάσεις: $A=x+|8-2x|$,

$B=|-2x-6|$ $\quad\Gamma=x-|4-3x|$

$\Delta=|x-3|+1$ $\quad E=2-|2x-1|$

34.39 Να γράψετε χωρίς απόλυτα την παράσταση $A=\frac{|x+1|-|x-1|}{|x+1|+|x-1|}$ με $x\in R$

34.40 Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις παραστάσεις:

$A=|x-3|+|3x-1|+6$ $\quad B=|2-x|+|x^2+4|$

$\Gamma=2|2-x|-3|x-1|$ $\quad \Delta=-|-2x+4|+|2x-4|$

$E=2|x+3|-|2-x|+1$ $\quad Z=|x+1|+|x+3|$

34.41 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $\frac{x^2}{|x|}$ Β) $\frac{x^2-1}{|x|+1}$ Γ) $\frac{9-x^2}{15+5|x|}$

Δ) $\frac{x^2-2|x|}{x^2-4}$ Ε) $\frac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}$

Στ) $\frac{|x-1|-2(x^2-2x+1)}{|1-x|}$

Ζ) $\frac{x^2+2|x|}{x^2-4}+\frac{2-|x|}{x^2-4|x|+4}$

34.42 Να βρεθεί οι τιμές των $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2011}$ αν $|x-2011|+|x-\alpha_1|+|x-\alpha_2|+\ldots+|x-\alpha_{2011}|=0$

ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΕΣ - ΙΣΟΤΗΤΕΣ

34.43 Να αποδείξετε τις ισότητες:

Α) $|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=2\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)$.

Β) $|\alpha^2-2\beta-3|=|2\beta-\alpha^2+3|$

Γ) $\frac{\alpha}{|\alpha|}=\frac{|\alpha|}{\alpha}$, $(\alpha\neq 0)$

34.44 Αποδείξτε ότι

$x|x|+y|y|=x|y|+y|x| \Rightarrow |x|=|y|$.

34.45 Να αποδείξετε ότι:

Α) $|x+y|^2-|x-y|^2=4xy$

Β) $(x+|x|)(x-|x|)=0$

Γ) $(|x|+|y|)(|x|-|y|)=x^2-y^2$

34.46 Να αποδείξετε ότι:

Α) $\left|\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right|=\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$

Β) $\left|x+\frac{1}{x}\right|=|x|+\left|\frac{1}{x}\right|$ για κάθε $x\neq 0$

34.47 Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί x, y. Να αποδείξετε ότι:

$\left|\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\right|+\left|\frac{x+y}{2}+\sqrt{xy}\right|=|x|+|y|$

34.48 Αποδείξτε ότι: $\left|\frac{4-x}{1-x}\right|=2 \Rightarrow |x|=2$

34.49 Αν $||x|-|y||=|x+y|$ να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x και y ειναι ομόσημοι

34.50 Αν $x, y \in R^*$ και $\frac{\left|x|y|+y|x|\right|}{|xy|}=2$ τότε να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x και y είναι ομόσημοι.

34.51 Α) Αν $x|y|+y|x|=0$ με $xy \neq 0$ να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x, y είναι ετερόσημοι.

Β) Αν $\alpha\beta \neq 0$ και $\alpha|\beta|=\beta|\alpha|$ να αποδείξετε ότι οι α, β είναι ομόσημοι

34.52 Να αποδείξετε ότι :

Α) $\left|\alpha x+\beta|x|\right|=\left|\alpha|x|+\beta x\right|$

Β) $\frac{36-\alpha^2}{2|\alpha|+12}=3-\frac{|\alpha|}{2}$

34.53 Αν $\alpha, \beta, x, y \in R^*$ με $x=\alpha(|\alpha|+|\beta|)$, $y=\beta(|\alpha|+|\beta|)$ να αποδείξετε ότι

$\alpha=\frac{x}{\sqrt{|x|+|y|}}$ και $\beta=\frac{y}{\sqrt{|x|+|y|}}$.

34.54 Δίνεται $\frac{x}{|x|+1}=\frac{y}{|y|+1}$. Αποδείξτε ότι:

Α) $x \cdot y \geq 0$ Β) $|x|=|y|$

Αποδεικτικές - Ανισότητες

34.55 Να αποδείξετε ότι

Α) $\left|x^2+xy\right| \leq x^2+|xy|$

Β) $xy+|xy| \geq |x|y+x|y|$

34.56 Να αποδείξετε ότι:

Α) $|\alpha|+|\beta| \leq \sqrt{2(\alpha^2+\beta^2)}$

Β) $|xy|+xy+x|y|+y|x| \geq 0$

34.57 Να αποδείξετε ότι

Α) $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|<\left|\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right|$ για κάθε $\alpha,\beta \in R^*$

Β) $\left|\frac{x}{y}\right|+\left|\frac{y}{x}\right| \geq 2$ για κάθε $x, y \neq 0$

34.58 Να αποδείξετε ότι

Α) $|xy|+xy \geq |x|y+x|y|$

Β) $|\alpha|+|\beta| \leq |\alpha+\beta|+|\alpha-\beta|$

34.59 Να αποδείξετε ότι:

Α) $|x+3y|<|y+3x| \Leftrightarrow |x|>|y|$

Β) $\left||x|-|y|\right|=|x+y| \Leftrightarrow xy \leq 0$

34.60 Αν $\alpha|\beta|-\beta|\alpha|=0$, να αποδείξετε ότι $|\alpha+\beta| \geq |\alpha-\beta|$ και αντιστρόφως.

34.61 Αποδείξτε ότι: $|\alpha\beta|+\alpha\beta \geq |\alpha| \cdot \beta+\alpha \cdot |\beta|$

34.62 Να αποδείξετε ότι:

Α) αν $|2\alpha+3\beta|<|3\alpha+2\beta|$ τότε $|\alpha|>|\beta|$

Β) αν $|3\alpha+2|<|2\alpha+3|$ τότε $|\alpha|<1$

34.63 Να αποδείξετε ότι

$x^2 \leq 16y^2 \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right|-\left|\frac{y}{x}\right| \leq \frac{15}{4}$ με $x \cdot y \neq 0$

34.64 Να αποδείξετε ότι για κάθε x,y με $x \cdot y \cdot (5x+2y) \neq 0$ ισχύει $\left|\frac{2x+5y}{5x+2y}\right|<1 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{y}\right|>1$

34.65 Να αποδείξετε ότι

Α) $\left|x+\frac{1}{x}\right| \geq 2$ για κάθε $x \neq 0$ Β) $\left|\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}\right| \leq 1$

34.66 Να αποδείξετε ότι

A) $\left|\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right| \le 1$ για κάθε $\alpha \cdot \beta \ne 0$

B) $\alpha|\beta| - \beta|\alpha| > \alpha\beta - |\alpha\beta|$

34.67 Να αποδειχτεί η ισοδυναμία

$|x+3y| < |y+3x| \Leftrightarrow |x| > |y|$

34.68 Δίνονται οι πραγματικοι αριθμοί x,y τέτοιοι ώστε: $-5 < 2x-3 < -1 < 2-3y < 5$.

Να αποδείξετε ότι:

A $|x| < 1$ και $|y| < 1$

B $|xy| + 2 > 2|x| + |y|$

34.69 Αποδείξτε ότι

$|\alpha+2\beta| < |2\alpha+\beta| \Leftrightarrow |\beta| < |\alpha|$

34.70 Να αποδείξετε ότι $|\alpha|^3 + 1 \ge \alpha^2 + |\alpha|$ για κάθε $\alpha \in R$ (πότε ισχύει το ίσον;)

34.71 Να δείξετε ότι $\dfrac{x}{|x|} + \dfrac{y}{|y|} + \dfrac{z}{|z|} \le 3$,

$x, y, z \ne 0$

34.72 Έστω α,β πραγματικοί αριθμοί με $|\alpha| < |\beta|$ και $|\alpha + \beta x| < |\alpha x + \beta|$. Να αποδείξετε ότι:

A) $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) < 0$

B) $\alpha^2 + \beta^2 x^2 < \beta^2 + \alpha^2 x^2$

Γ) $|x| < 1$

T.A.

34.73 Να αποδείξετε ότι:

A) Αν $|x| \le 2$ τότε $|x^2 - 2x + 6| \le 14$

B) Αν $|x| \le 1$ και $|y| \le \dfrac{1}{2}$ τότε $|3x - 2y + 2| \le 7$

34.74 Να αποδείξετε ότι:

A) Αν $|x| \le 1$ και $|y| \le 2$ τότε $|2x - 3y + 1| \le 9$

B) Αν $1 < x < 5$ τότε $|x-3| < 2$.

34.75 Να αποδείξετε ότι:

A) Αν $|x| \le 1$ και $|y| \le 2$ τότε $|3x - y| \le 15$

B) Αν $|x| < 3$ και $|y| \le 8$ τότε $|3x - 5y| < 49$

34.76 Αν x, y, z θετικοί αριθμοί και ισχύουν $|7\alpha - 6\beta| < x$, $|7\beta - 6\gamma| < y$, $|7\gamma - 6\alpha| < z$ να αποδείξετε ότι $|\alpha + \beta + \gamma| < x + y + z$

34.77 Αν $|x - y| < \alpha$ και $|y - \omega| < \alpha$ να αποδείξετε ότι $|x - \omega| < 2\alpha$

34.78 Αν $|\alpha| \le 2$ και $|\beta| \le 3$, αποδείξετε ότι:

A) $|\alpha - 3\beta| \le 11$ B) $|3\alpha - 3\beta + 3| \le 16$

34.79 Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha| \le 2$ τότε $|\alpha^2 - 2\alpha + 6| \le 14$

ΜΕΓΙΣΤΑ ΕΛΑΧΙΣΤΑ

34.80 Αν $|x|\le 2$ και $|y|\le 3$ να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παράστασης $K=-2x+3y+1$

34.81 Αν $|\alpha-1|<5$ και $|\beta-2|<3$ να βρείτε που μεταβάλλεται η παράσταση $\alpha+\beta$

34.82 Αν $|\alpha+1|\le 2$ και $|\beta-1|\le 4$ να βρείτε που μεταβάλλεται η παράσταση $\alpha+\beta$.

34.83 Αν $|x-3|<4$ και $|y-9|<2$, να εκτιμήσετε την τιμή της παράστασης: $A=|x+y-12|$.

34.84 Αν α,β,γ πραγματικοί αριθμοί με $\alpha\beta\gamma\neq 0$, να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha}{|\alpha|}+\frac{\beta}{|\beta|}+\frac{\gamma}{|\gamma|}\le 3$

34.85 Αν $\alpha<x<\beta$ να αποδειχτεί ότι $\left||x-\alpha|+|x-\beta|\right|>\frac{\beta-\alpha}{2}$

34.86 Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς $|x|$, x, $2+|x|$ και $-|x|$

34.87 Δίνονται τα x,y τέτοια ώστε:

$-9\le 2x-3\le 3$ και $3\ge\frac{1-y}{2}\ge -2$

Α) Να αποδείξετε ότι: $|x|\le 3$, $|y|\le 5$

Β) Βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης $K=2x-3y-21$

34.88 Αν $A=|\alpha|+|\alpha-5|$ και $B=|\beta|+|\beta-5|$ να αποδείξετε ότι

Α) $A\ge 5$

Β) Αν $\alpha+\beta=5$ τότε $A=B$.

34.89 Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\neq 0$, 2 ισχύει ότι : $\frac{2x}{|x|}+3\frac{x-2}{|x-2|}\le 5$

34.90 Αν $|x|\le 2$, $|y|\le 2$, $|z|\le 2$ να αποδείξετε ότι $-10\le x+y+z\le 10$

34.91 Εάν $|x|\le 2$, $|y|\le 3$ να δείξετε ότι:

Α) $|x+y|\le 5$ Β) $|2x-y|\le 7$

34.92 Έστω α,β πραγματικοί αριθμοί με: $|\alpha|<|\beta|$ και $|\alpha+\beta x|<|\alpha x+\beta|$. Να αποδείξετε ότι:

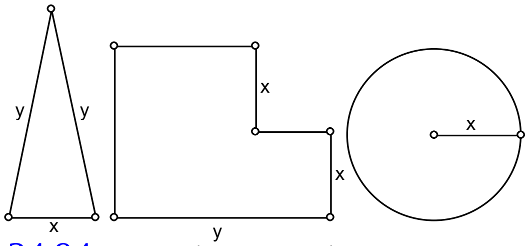
Α) $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)<0$

Β) $\alpha^2+\beta^2x^2<\beta^2+\alpha^2x^2$

Γ) $|x|<1$

ΓΕΝΙΚΕΣ

34.93 Αν $|x-3|<0,3$ και $|y-5|<0,2$ να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου των παρακάτω σχημάτων:



34.94 Χαράξτε έναν άξονα και πάρτε πάνω σ' αυτόν τα σημεία A, B και M με συντεταγμένες 1, 2 και x αντιστοίχως, για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $x<1$, β) $x=1$, γ) $1<x<2$, δ) $x=2$, ε) $2<x$

Α1) Τι παριστάνουν γεωμετρικά οι παραστάσεις $|x-1|$, $|x-2|$ και $|x-1|+|x-2|$.

2) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της παράστασης $|x-1|+|x-2|$ και πότε αυτή παρουσιάζεται;

3) Παίρνει η παράσταση αυτή μέγιστη τιμή;

Β)1) Τι παριστάνει γεωμετρικά η παράσταση $\left||x-1|-|x-2|\right|$;

2) Ποια είναι η ελάχιστη και ποια η μέγιστη τιμή της παράστασης. $\left||x-1|-|x-2|\right|$ και πότε αυτές Παρουσιάζονται;

(Οι απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα να δοθούν με την βοήθεια των γεωμετρικών ερμηνειών)

ΑΠΟΣΤΑΣΗ

34.95 Να βρεθεί το x όταν:

Α) $d(x,3)=2$ Β) $d(x,-1)=3$

1.01.1.1.1.1 Γ) $d(x,3)\le 7$ Δ) $d(x,-3)=2$

Ε) $d(x,-2)\le 3$ Στ) $d(x,3)>8$

Ζ) $d(x,-1)\le 4$

34.96 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

$d(x,2)<3$		
	$\|x+1\|<2$	
		$-3<x<5$
$d(x,-2)<3$		
	$\|x+1\|\ge 5$	
		$-10<2x<14$

34.97 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$\|x+2\|\ge 3$		
	$d(x,3)\le 2$	
		$x\in(-3,5)$
		$x\in(-\infty,-3)\cup(7,+\infty)$

34.98 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$\|x-3\|\ge 2$		
	$d(x,-2)\le 3$	
		$x\in(-1,7)$
		$x\in(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$

ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ (2013 -2014)

34.99

Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| + |y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$. Να αποδείξετε ότι: $A = x - y + 2$ και ότι $0 < A < 4$.

34.100

Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| - |x-2|$.

α. Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$

β. Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

34.101

Δίνονται οι παραστάσεις $A = |2x-4|$ και $B = |x-3|$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Για κάθε $2 \le x < 3$ να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$.

β. Υπάρχει $x \in [2,3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

34.102

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x,3) = 3 - 2x$. Να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x-3| - 2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x.

34.103

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y, για τα οποία ισχύουν: $|x-3| \le 2$ και $|y-6| \le 4$.

α. Να δείξετε ότι $1 \le x \le 5$ και $2 \le y \le 10$

β. Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y.

34.104

Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2 , 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α. Δώστε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων. $|x+2|$, $|x-7|$ και $|x+2| + |x-7|$

β. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: .

γ. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x+2| + |x-7|$ γεωμετρικά και αλγεβρικά.

3.5 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

Ορισμός της τετραγωνικής ρίζας

Η **τετραγωνική ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α.

Αν $\alpha \geq 0$ η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης $x^2 = \alpha$

Από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας προκύπτει ότι:

$$\sqrt{\alpha^2} = |\alpha| \text{ με } \alpha \in R \qquad \left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha \text{ με } \alpha \geq 0$$

Ιδιότητες της τετραγωνικής ρίζας

$$\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} \ \ \textit{με} \ \ \alpha \geq 0, \ \beta \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \ \ \textit{με} \ \ \alpha \geq 0, \ \beta > 0$$

Ορισμός της νιοστής ρίζας

Για κάθε θετικό ακέραιο **ν** ορίζουμε:

Η **νιοστή ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στη ν δίνει τον α .

Αν $\alpha \geq 0$ η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ είναι η μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$

Ορίζουμε ακόμα ότι: $\sqrt[1]{\alpha} = \alpha$ και $\sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}$

Συνέπειες του ορισμού:

Αν $\alpha \geq 0$ τότε

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha \ \ \textit{και} \ \ \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha$$

Αν $\alpha < 0$ και **ν** άρτιος τότε

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = -\alpha$$

Ιδιότητες της νιοστής ρίζας

Αν $\alpha, \beta \geq 0$ τότε

$$\sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}$$

Αν $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_\kappa \geq 0$ τότε

$$\sqrt[\nu]{\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_\kappa \geq 0} = \sqrt[\nu]{\alpha_1}\sqrt[\nu]{\alpha_2} ... \sqrt[\nu]{\alpha_\kappa}$$

αν $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ τότε

$$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}$$

Αν α ≥ 0 τότε :

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha} \ldots \qquad \sqrt[\mu\nu]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

Αν $\alpha, \beta \geq 0$ τότε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}\beta} = \alpha\sqrt[\nu]{\beta}$$

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Αν **α > 0**, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε: $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

Επιπλέον, αν μ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

35.1

Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς ριζικά

i) $\sqrt{\left(2\sqrt{2}-4\right)^2}$ **ii)** $\sqrt{x^2-2x+1}$ iii) $\sqrt{x^2y^4}$ **iv)** $\sqrt{\frac{x^2}{4}}$

Λύση

i) $\sqrt{\left(2\sqrt{2}-4\right)^2} = \left|2\sqrt{2}-4\right| = 4-2\sqrt{2}$

ii) $\sqrt{x^2-2x+1^2} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$ για κάθε $x \in R$

iii) $\sqrt{x^2y^4} = \sqrt{\left(|x|y^2\right)^2} = |x|y^2$ για κάθε $x \in R$

iv) $\sqrt{\frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{x^2}{2^2}} = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \left|\frac{x}{2}\right| = \frac{|x|}{2}$ για κάθε $x \in R$

35.2

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{3\sqrt{18}+\sqrt{48}}{\sqrt{27}-\sqrt{3}}$

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι

$$\frac{3\sqrt{18}+\sqrt{48}}{\sqrt{27}-\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{4\cdot 3}+\sqrt{16\cdot 3}}{\sqrt{9\cdot 3}-\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{4}\sqrt{3}+\sqrt{16}\sqrt{3}}{\sqrt{9\cdot 3}-\sqrt{3}}=$$

$$\frac{6\sqrt{3}+4\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}=\frac{10\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{10}{2}=5$$

35.3

Να αποδείξετε ότι : $\left(\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{20}\right)\cdot\left(\sqrt{50}-\sqrt{45}+\sqrt{125}\right)=30$

Λύση

Είναιι:

$$\left(\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{20}\right)\cdot\left(\sqrt{50}-\sqrt{45}+\sqrt{125}\right)=$$

$$\left(\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{4\cdot 2}-\sqrt{4\cdot 5}\right)\left(\sqrt{25\cdot 2}-\sqrt{9\cdot 5}+\sqrt{25\cdot 5}\right)=$$

$$\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}\right)\left(5\sqrt{2}-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}\right)=$$

$$\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{5}\right)\left(5\sqrt{2}+2\sqrt{5}\right)=$$

$$\left(5\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2=50-20=30$$

35.4

i) **Να βρείτε τα αναπτύγματα των** $\left(3+2\sqrt{5}\right)^2$, $\left(3-2\sqrt{5}\right)^2$

ii) **Να αποδείξετε ότι** $\sqrt{29+12\sqrt{5}}+\sqrt{29-12\sqrt{5}}=4\sqrt{5}$

Λύση

i) $\left(3+2\sqrt{5}\right)^2 = 9+12\sqrt{5}+20 = 29+12\sqrt{5}$

$$\left(3-2\sqrt{5}\right)^2 = 9-12\sqrt{5}+20 = 29-12\sqrt{5}$$

ii) $\sqrt{29+12\sqrt{5}}+\sqrt{29-12\sqrt{5}}=\sqrt{\left(3+2\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(3-2\sqrt{5}\right)^2}=$

$$\left|3+2\sqrt{5}\right|+\left|3-2\sqrt{5}\right|=3+2\sqrt{5}-3+2\sqrt{5}=4\sqrt{5}.$$

∗ είναι $3+2\sqrt{5}>0$ και $3-2\sqrt{5}<0$

35.5

Αν x,y>0 και $x \neq y$ να αποδείξετε ότι $\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=x+y+\sqrt{xy}$

Λύση

$$\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\left(x\sqrt{x}-y\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=$$

$$\frac{x\cdot x+x\sqrt{xy}-y\sqrt{xy}-y\cdot y}{x-y}=\frac{x^2-y^2+x\sqrt{xy}-y\sqrt{yx}}{x-y}=$$

$$\frac{(x-y)(x+y)+\sqrt{xy}(x-y)}{x-y}=\frac{(x-y)\left(x+y+\sqrt{xy}\right)}{x-y}=x+y+\sqrt{xy}$$

35.6

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}+\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)^2$ **είναι ρητός.**

Λύση

Έχουμε ότι: $\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}+\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)^2=\dfrac{3}{5}+2\sqrt{\dfrac{3}{5}}\sqrt{\dfrac{5}{3}}+\dfrac{5}{3}=\dfrac{34}{15}+2=\dfrac{64}{15}$ που είναι ρητός

35.7

Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=6$

Λύση

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)+\sqrt{7}\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}=$$

$$\frac{\sqrt{35}+5+7-\sqrt{35}}{7-5}=\frac{12}{2}=6$$

35.8

Να αποδείξετε ότι : $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{34}-3}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{34}+3}=5$

Λύση

$$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{34}-3}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{34}+3}=\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{\left(\sqrt{34}-3\right)\left(\sqrt{34}+3\right)}=$$

$$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{34}^2-3^2}=\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{5^3}=5$$

35.9

Δίνεται η παράσταση: $A=\left(\sqrt{2x-4}+\sqrt{6-2x}\right)\left(\sqrt{2x-4}-\sqrt{6-2x}\right)$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή.

ΛΥΣΗ

α) Η παράσταση A ορίζεται αν και μόνο αν

$$\begin{cases}2x-4\ge 0\\ 6-2x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow 2\le x\le 3\Leftrightarrow x\in[2,3]$$

β) Για $x\in[2,3]$ έχουμε:

$$A=\left(\sqrt{2x-4}+\sqrt{6-2x}\right)\left(\sqrt{2x-4}-\sqrt{6-2x}\right)=$$

$$\left(\sqrt{2x-4}\right)^2-\left(\sqrt{6-2x}\right)^2=2x-4-(6-2x)=-10$$

35.10

Δίνεται η παράσταση $K=\dfrac{\sqrt{x^2+6x+9}}{x+3}-\dfrac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του x, για τις οποίες η η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β) Αν $-3<x<5$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή

ΛΥΣΗ

α) Η παράσταση K έχει νόημα πραγματικού αν και μόνο αν:

$$\left.\begin{matrix}x+3\ne 0\\ x-5\ne 0\\ x^2+6x+9\ge 0\\ x^2-10x+25\ge 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x\ne -3\\ x\ne 5\\ (x+3)^2\ge 0\\ (x-5)^2\ge 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow x\in(-\infty,-3)\cup(-3,5)\cup(5,+\infty)$$

Άρα το x μπορεί να πάρει όλες τις πραγματικές τιμές εκτός του -3 και του 5.

β) Η παράσταση K γράφεται ως εξής:

$$K=\frac{\sqrt{x^2+6x+9}}{x+3}-\frac{\sqrt{x^2-5x+25}}{x-5}=\frac{\sqrt{(x+3)^2}}{x+3}-\frac{\sqrt{(x-5)^2}}{x-5}=\frac{|x+3|}{x+3}-\frac{|x-5|}{x-5}$$

Όμως: $$-3<x<5\Rightarrow\left.\begin{matrix}0<x+3<8\\ -8<x-5<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}|x+3|=x+3\\ |x-5|=-(x-5)\end{matrix}\right\}$$

Οπότε η παράσταση K γίνεται:

$$K=\frac{|x+3|}{x+3}-\frac{|x-5|}{x-5}=\frac{x+3}{x+3}-\frac{-(x-5)}{x-5}=1-(-1)=2$$

35.11

Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{9}}-\sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{9}}=\dfrac{2}{3}$

Λύση

$$\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{9}}-\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{9}}=\sqrt{\frac{1+2\sqrt{3}+3}{9}}-\sqrt{\frac{1-2\sqrt{3}+3}{9}}=$$

$$\sqrt{\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{9}}-\sqrt{\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{9}}=\frac{\left|1+\sqrt{3}\right|}{3}-\frac{\left|1-\sqrt{3}\right|}{3}=\frac{1+\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}-1}{3}=\frac{2}{3}$$

35.12

Να αποδείξετε ότι : $\sqrt[5]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{2}$

Λύση

$$\sqrt[5]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[5]{2\sqrt{\sqrt[3]{2^3\cdot 2}}}=\sqrt[5]{2\sqrt[6]{2^4}}=\sqrt[5]{\sqrt[6]{2^6\cdot 2^4}}=\sqrt[30]{2^{10}}=\sqrt[3]{2}$$

35.13

Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητούς παρανομαστές :

i) $\dfrac{4}{5-\sqrt{2}}$ **ii)** $\dfrac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ iii) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$ iv) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}-1}$

Λύση

i)

$$\frac{4}{5-\sqrt{2}}=\frac{4(5+\sqrt{2})}{(5-\sqrt{2})(5+\sqrt{2})}=\frac{4(5+\sqrt{2})}{5^2-2}=\frac{4(5+\sqrt{2})}{23}$$

ii)

$$\frac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\frac{8(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}=\frac{8(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3}=4(\sqrt{7}+\sqrt{3})$$

iii)

$$\frac{2}{\sqrt[3]{3}}=\frac{2\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3^2}}=\frac{2\sqrt[3]{3^2}}{3}$$

iv)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}=\frac{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1}{\left(\sqrt[3]{3}-1\right)\left(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1\right)}=\frac{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3-1^3}=\frac{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1}{2}$$

35.14

α) Να δείξετε ότι: $3<\sqrt[3]{51}<4$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{51}$ και $6-\sqrt[3]{51}$.

ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$3<\sqrt[3]{30}<4 \Leftrightarrow 3^3<\sqrt[3]{30}^3<4^3 \Leftrightarrow 27<30<64$$

το οποίο ισχύει.

β) Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε:

$$3<\sqrt[3]{51}<4 \Leftrightarrow -4<-\sqrt[3]{51}<-3 \Leftrightarrow 6-4<6-\sqrt[3]{51}<6-3 \Leftrightarrow 2<6-\sqrt[3]{51}<3$$

άρα

$$2<6-\sqrt[3]{51}<3<\sqrt[3]{51}<4$$

Επομένως

$$6-\sqrt[3]{51}<\sqrt[3]{51}$$

35.15

Να αποδείξετε ότι : $\sqrt{5^3}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{5^4}=25\sqrt{5}$

Λύση

$$\sqrt{5^3}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{5^4}=\sqrt[6]{5^9}\cdot\sqrt[6]{5^2}\cdot\sqrt[6]{5^4}=$$

$$\sqrt[6]{5^9\cdot5^2\cdot5^4}=\sqrt[6]{5^{15}}=$$

$$\sqrt{5^5}=\sqrt{5^4\cdot5}=5^2\sqrt{5}=25\sqrt{5}$$

35.16

Για μη αρνητικούς αριθμούς α και β, να αποδείξετε ότι $\sqrt{\alpha+\beta}\le\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\sqrt{\alpha+\beta}\le\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2\le\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha+\beta\le\alpha+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\beta \Leftrightarrow 0\le2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$$

που ισχύει

Η ισότητα ισχύει όταν $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ ή $\beta=0$

35.17

Να αποδείξετε ότι:

α) $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$. **β)** $1+\sqrt{2} > \sqrt{10}-1$. **γ)** $\sqrt[5]{5} < \sqrt[3]{3}$. **δ)** $\alpha^2 \geq 2\alpha\beta-\beta^2$

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ότι

$$2\sqrt{3}<3\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(2\sqrt{3}\right)^2<\left(3\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow 12<18$$

Που ισχύει

β) Έχουμε ότι

$$1+\sqrt{2}>\sqrt{10}-1 \Leftrightarrow \left(1+\sqrt{2}\right)^2>\left(\sqrt{10}-1\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$1+2\sqrt{2}+2>10-2\sqrt{10}+1 \Leftrightarrow \sqrt{2}+\sqrt{10}>4$$

Που είναι αληθής αφού είναι $\sqrt{2}>1$ και $\sqrt{10}>3$

γ) Έχουμε ότι

$$\sqrt[5]{5}<\sqrt[3]{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt[5]{5}\right)^{15}<\left(\sqrt[3]{3}\right)^{15} \Leftrightarrow \left(\sqrt[5]{5}\right)^{5\cdot 3}<\left(\sqrt[3]{3}\right)^{3\cdot 5} \Leftrightarrow 5^3<3^5 \Leftrightarrow 125<243$$

Που είναι αληθής

δ) Ισχύει: $(\alpha-\beta)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 \geq 2\alpha\beta-\beta^2$

35.18

Αν $\alpha,\beta,\gamma \geq 0$ με $\alpha\beta\gamma=1$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha+\beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$

β) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \geq 8$

Λύση

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\alpha+\beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha}^2+\sqrt{\beta}^2-2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2 \geq 0$$

Που ισχύει

β) Από το λόγω του α ερωτήματος έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta} \\ \beta+\gamma \geq 2\sqrt{\beta\gamma} \\ \gamma+\alpha \geq 2\sqrt{\gamma\alpha}\end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \geq 2\sqrt{\alpha\beta}\cdot 2\sqrt{\beta\gamma}\cdot 2\sqrt{\gamma\alpha} \Rightarrow$$

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \geq 8\alpha\beta\gamma \Rightarrow (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \geq 8$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

35.19

Αν είναι $\mathbf{A = 2 - \sqrt{3}}$, $\mathbf{B = 2 + \sqrt{3}}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{A \cdot B = 1}$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\mathbf{\Pi = A^2 + B^2}$.

35.20

Δίνεται η παράσταση: $\mathbf{A = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x - 4}}$.

α) Για ποιες τιμές του $\mathbf{x}$ ορίζεται η παράσταση $\mathbf{A}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του $\mathbf{x}$ σε μορφή διαστήματος.

β) Αν $\mathbf{x = 4}$, να αποδείξετε ότι: $\mathbf{A^2 - A = 2\left(10 - \sqrt{5}\right)}$

35.21

Δίνεται η παράσταση: $\mathbf{B = \sqrt[5]{(x - 2)^5}}$

α) Για ποιες τιμές του $\mathbf{x}$ ορίζεται η παράσταση $\mathbf{B}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του $\mathbf{x}$ υπό μορφή διαστήματος.

β) Για $\mathbf{x = 4}$, να αποδείξετε ότι $\mathbf{B^2 + 6B = B^4}$

35.22

Δίνονται οι αριθμοί: $\mathbf{A = \left(\sqrt{2}\right)^6}$ και $\mathbf{B = \left(\sqrt[3]{2}\right)^6}$.

α) Να δείξετε ότι: $\mathbf{A - B = 4}$.

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\mathbf{\sqrt{2}}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{\sqrt[3]{2}}$.

35.23

Αν είναι $\mathbf{A = \sqrt[3]{5}}$, $\mathbf{B = \sqrt{3}}$, $\mathbf{\Gamma = \sqrt[6]{5}}$, τότε:

α) Να αποδείξετε $\mathbf{A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}}$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\mathbf{A, B}$.

35.24 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

A) $\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ B) $\sqrt{(2x)^2}$ Γ) $\sqrt{x^3}$

Δ) $\sqrt{(-20)^2}$ Ε) $\sqrt{\frac{x^4}{9}}$ Στ) $\sqrt{(2x)^4}$

Ζ) $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}$ Η) $\sqrt{108x^5y^6}$

35.25 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

A) $\sqrt{2\alpha^2}-\sqrt{8\alpha^2}+\sqrt{18\alpha^2}$.

B) $2\sqrt{x^2y}-x\sqrt{4y}+3\sqrt{64x^2y}$, με $x\cdot y\le 0$

35.26 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

A) $\frac{\sqrt{x^2+6x+9}}{x+3}-\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+9}}$ αν $-3<x<3$

B) $\frac{\sqrt{x^2+4\cdot x+4}}{x+2}-\frac{\sqrt{x^2-4\cdot x+4}}{x-2}$ αν $|x|<2$

Γ) $\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}-\frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x+1}$ αν $|x|<1$

Δ) $\sqrt{8-12x+6x^2-x^3}$

35.27 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

A) $\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{(x+1)^2}$, αν $|x|<1$

B) $(\alpha-2)\sqrt{\frac{1}{\alpha^2-4\alpha+4}}$, αν $\alpha<2$

35.28 Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της ρίζας την παράσταση

$A=\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{x^2+6x+9}$

35.29 Αν $2<x<3$ να υπολογίσετε την παράστασης $A=\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{9-6x+x^2}$

35.30 Αν $|x-1|<2$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$A=\sqrt{x^2-6x+9}-|x+1|+|x+3|$

35.31 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $8\sqrt{20}+3\sqrt{80}-2\sqrt{500}$

Β) $\left(\sqrt{12}-\sqrt{27}\right)\cdot\left(\sqrt{75}+\sqrt{48}-\sqrt{108}\right)$

Γ) $\left(\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{20}\right)\cdot\left(\sqrt{50}-\sqrt{45}+\sqrt{125}\right)$

Δ) $12\left(\sqrt{50}-8\sqrt{200}+7\sqrt{450}\right):\sqrt{10}$

35.32 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης x^2+xy+y^2 όταν $x=\sqrt{3}+1$ και $y=\sqrt{3}-1$

35.33 Αν $x=1-3\sqrt{2}$ να υπολογίσετε την παράσταση $A=\frac{\sqrt{2}}{x}-\frac{3}{x^2}$

35.34 Να βρείτε την τιμή της παράστασης $B=3x^2+5xy+3y^2$ όταν $x=\frac{3}{6-\sqrt{3}}$, $y=\frac{3}{6+\sqrt{3}}$

35.35 Να αποδείξετε ότι

Α) $\sqrt{\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{9}}+\sqrt{\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{9}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Β) $\sqrt{\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{4}}+\sqrt{\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}{4}}=\sqrt{5}$

35.36 Αν $x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ να υπολογιστεί το x, το $\frac{1}{x}$ και το $x+\frac{1}{x}$, χωρίς ρίζα στον παρανομαστή.

35.37 Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

Α. $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=4$

Β. $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

Γ. $\sqrt{12-\sqrt{44}}=\sqrt{11}-1$

35.38 Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\sqrt{\dfrac{\alpha+x}{\alpha-x}}-\sqrt{\dfrac{\alpha-x}{\alpha+x}}}{\sqrt{\dfrac{\alpha+x}{\alpha-x}}+\sqrt{\dfrac{\alpha-x}{\alpha+x}}}=\dfrac{x}{\alpha}$ με $0<x<\alpha$

35.39 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

A) $\left(1-\sqrt{2}\right)^{-3}+\left(1+\sqrt{2}\right)^{-3}$

B) $\left(2-\sqrt{3}\right)^{-3}+\left(2+\sqrt{3}\right)^{-3}$

35.40 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

A) $\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}+\dfrac{\sqrt{(x+1)^2}}{x+1}$

B) $\sqrt{37+12\sqrt{7}}+\sqrt{37-12\sqrt{7}}$

35.41 Για κάθε $x\in R$ απλοποιήστε τις παραστάσεις

A) $\sqrt[4]{x^6}$ B) $\sqrt[6]{x^{18}}$ Γ) $\sqrt[3]{x^6}$

Δ) $\sqrt[3]{54x^4y^5}$ Ε) $\sqrt[20]{x^{60}y^{40}}$ Στ) $\sqrt[6]{x^3}$

35.42 Να γίνουν οι πράξεις :

A) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{81}\cdot\sqrt[4]{27}$

B) $\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$

Γ) $\left(2\sqrt{18}-4\sqrt[3]{9}+6\sqrt[4]{243}\right):2\sqrt[4]{3}$

35.43 Να γίνουν οι πράξεις :

A) $-\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{54}$

B) $\left(\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[3]{x^4}-x\sqrt{x^3}\right):\left(-3x^3\sqrt{x^2}\right)$

35.44 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

A) $\sqrt[5]{3\cdot\sqrt[8]{3\cdot\sqrt{3}}}$

B) $\sqrt{3\sqrt[4]{3\sqrt{3^2}}}$

Γ) $\sqrt[3]{5\cdot\sqrt[5]{25\cdot\sqrt{25\cdot\sqrt{5}}}}$

35.45 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $\sqrt{\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha}}}}$

Β) $\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2}}}$

35.46 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $\left(2-\sqrt{2}\right)^3$, $\left(2+\sqrt{2}\right)^3$ και να απλοποιήσετε την παράσταση $\sqrt[3]{20-14\cdot\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20+14\cdot\sqrt{2}}$

35.47 Αν είναι $A=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$ και $B=\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{28-10\sqrt{3}}$ να δείξετε ότι $A=B$

35.48 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$

Β) $\sqrt{41-\sqrt{29-\sqrt{19-\sqrt{9}}}}$

Γ) $\sqrt{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}$

35.49 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{3-\sqrt{5}}+\sqrt[4]{4\sqrt{2}-4}\cdot\sqrt[4]{4\sqrt{2}+4}$

Β) $\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{3+\sqrt{3+3\sqrt{3}}}\cdot\sqrt[4]{3-\sqrt{3+3\sqrt{3}}}$

35.50 Να αποδείξετε ότι:

Α) $1-\sqrt{2}<\sqrt{5}-2$

Β) $\sqrt[3]{4}<\sqrt{3}$

Γ) $\sqrt{10+2\sqrt{15}}>\sqrt{5}+\sqrt{3}$

35.51 Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

Α) $\sqrt{5}$ και $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

Β) $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt{2}$

Γ) $\sqrt{3}$ και $\sqrt{2}+1$

35.52 Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

Α) $\sqrt{2+3\sqrt{2}}$ και $3-\sqrt{2}$

Β) $\sqrt{2}$ και $2-\sqrt{10}$

Γ) $1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$ και $\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$

35.53 Να δείξετε ότι $\sqrt{1969}+\sqrt{1971}<2\sqrt{1970}$

35.54 Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται κάθε μια από τις παρακάτω παραστάσεις:

Α) $\sqrt{x-4}$

Β) $\sqrt{-3-6x}$

Γ) $\sqrt[5]{3-\dfrac{1-2x}{3}}$

35.55 Να μετατραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή.

Α) $\dfrac{\alpha-1}{\sqrt{\alpha}-1}$ Β) $\dfrac{\alpha-\beta}{\sqrt{\alpha-\beta}}$ όπου $\alpha>\beta$

35.56 Να μετατραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή.

Α) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}$

Β) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

35.57 Να μετατραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή.

Α) $\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}$ Β) $\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

35.58 Να μετατραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή.

Α) $\dfrac{3}{\sqrt{3-\sqrt{2}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

Β) $\dfrac{8}{\sqrt[5]{16}}$ Γ) $\dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[10]{x^7}}$

35.59 Να μετατραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή.

Α) $\dfrac{(x-4)^2}{x-4\sqrt{x}+4}$

Β) $\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1-2\sqrt{\alpha}}$, $\alpha>0$

Γ) $\dfrac{x+y}{x+y-2\sqrt{xy}}$, $x,y>0$

35.60 Να μετατραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή.

Α) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ Β) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}-1}$

35.61 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$\sqrt{4+2\sqrt{3}}$, $\sqrt{9-\sqrt{32}}$, $\sqrt{8+\sqrt{60}}$

35.62 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $\sqrt{x^2+y+\sqrt{4x^2y}}$, $x>0$ και $y>0$

Β) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, αν $x\geq 2$

35.63 Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{2006+2005\cdot 2006}$ είναι φυσικός.

35.64 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

Α) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

Β) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}-\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$

35.65 Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{63}-7\sqrt{3}+\sqrt{147}-2\sqrt{7}-\dfrac{7}{\sqrt{7}}$ είναι ακέραιος.

35.66 Να υπολογίσετε την τιμή του αριθμού: $\sqrt{4444444444-88888}$

35.67 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

Β) $\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}-\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$

Γ) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

35.68 Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A=\left[\left(7+4\sqrt{3}\right)^8+\frac{1}{\left(7-4\sqrt{3}\right)^8}\right]\cdot\frac{\left(14-8\sqrt{3}\right)^8}{2^9}$$ και

$$B=\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2005}+\frac{1}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2005}}\right]\cdot\frac{\left(2\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)^{2005}}{2^{2006}}$$ Να αποδείξετε ότι $A=B$

35.69 Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$, $\beta=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ και $\gamma=1$, αποτελούν μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

35.70 Αν $\alpha>\beta\geq 0$ να αποδείξετε ότι $\sqrt{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}}+\sqrt{\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}}=2\sqrt{\alpha}$.

35.71 Αν $\alpha=2+\sqrt{2}$, $\beta=2+\sqrt{2+\sqrt{2}}$ και $\gamma=2-\sqrt{2+\sqrt{2}}$ να αποδείξετε ότι $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=2$

35.72 Αν $x=0,125$ και $y=\left(0,\overline{6}\right)^{-6}$, να υπολογίσετε την παράσταση

$$\left[x^{\frac{2}{3}}\cdot y^{-1}\cdot\left(x^{-1}\cdot y^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

35.73 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α) $\dfrac{\sqrt[3]{\alpha}+3\sqrt{\alpha}-4}{\alpha-1}$ όταν $0<\alpha\neq 1$

Β) $\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[4]{x+1}}$

35.74 Αν $\alpha,\beta>0$ να απλοποιήσετε την παράσταση $\left(\alpha^{\frac{1}{3}}-\beta^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\alpha^{\frac{1}{3}}\cdot\beta^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)$

35.75 Α) Να απλοποιηθεί η παράσταση: $K=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}}$, $(\alpha\neq\beta$ και $\alpha,\beta>0)$

Β) Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$ να δείξετε ότι: $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta\gamma}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha\gamma}}+\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha\beta}}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}$

35.76 Α. Να βρείτε τα αναπτύγματα $\left(2+3\sqrt{5}\right)^2$ και $\left(2-3\sqrt{5}\right)^2$

Β. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $A=\sqrt{49-12\sqrt{5}}+\sqrt{49+12\sqrt{5}}$

35.77 Να εξετάσετε πότε ισχύει η ισότητα $\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$, όταν $\alpha,\beta\geq 0$

35.78 Να βρείτε τις γωνίες ενός τριγώνου $ΑΒΓ$, αν για τις πλευρές του α,β,γ ισχύει η σχέση $\sqrt{\alpha^2-28\alpha+200}+\sqrt{\beta^2-14\beta+58}+\sqrt{\gamma^2-14\sqrt{3}\gamma+163}\leq 9$

35.79 Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός : $A=\frac{\sqrt{1001+\sqrt{2001}}-\sqrt{1001-\sqrt{2001}}}{\sqrt{2}}$ είναι φυσικός

35.80 Να υπολογισθούν οι παραστάσεις:

Α) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3}}$

Β) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}$

35.81 Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=2x$

35.82 Αν $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ $y=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ και $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ τότε να δείξετε ότι: $xyz=1$

35.83 Α. Για τις διάφορες τιμές του $x\in R$ να απλοποιηθεί η παράσταση:
$A=\sqrt{x^2-2x+1}+5\sqrt{x^2-4x+4}$

Β. Να λυθεί η εξίσωση: $A=20$

35.84 Δείξτε ότι: $\frac{\alpha^2+3}{\sqrt{\alpha^2+2}}>2$

35.85 Υπολογίστε τις παραστάσεις :

Α) $\sqrt[3]{2^5}\cdot\sqrt[3]{2^4}$

Β) $\sqrt[3]{\sqrt[7]{16}}\cdot\sqrt[21]{2^{17}}$

Γ) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{34}-3}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{34}+3}$

35.86 Αν $x>1$ να διατάξετε από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις παραστάσεις:

$\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x\sqrt{x}}$, $\frac{\sqrt{x}}{x}$.

35.87 Αποδεικτικές Ανισότητες

35.88 Αν $\alpha>0$ να αποδείξετε ότι

Α) $\alpha>1\Leftrightarrow\sqrt{\alpha}<\alpha$

Β) $\alpha<1\Leftrightarrow\sqrt{\alpha}>\alpha$

35.89 Αν $0<\alpha<\beta<\gamma$, να αποδείξετε ότι:

Α) $\alpha<\sqrt{\alpha\beta}<\beta$ Β) $\alpha<\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}<\gamma$

35.90 Αν $\alpha>0$ και $\beta>0$ να αποδείξετε ότι: $\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\le\sqrt{\alpha\beta}\le\frac{\alpha+\beta}{2}$

35.91 Αν $\alpha,\beta\in R$ πραγματικοί αριθμοί να δείξετε ότι $|\alpha|+|\beta|\le\sqrt{2(\alpha^2+\beta^2)}$

35.92 Αν $\alpha,\beta,\gamma\ge0$ με $\alpha\beta\gamma=1$, να αποδείξετε ότι:

Α) $\alpha+\beta\ge2\sqrt{\alpha\beta}$

Β) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\ge8$

hms

35.93 Να διατάξετε κατά αύξουσα σειρά τους αριθμούς $3\sqrt{11}$, $4\sqrt{7}$, $5\sqrt{5}$, $6\sqrt{3}$, $7\sqrt{2}$

35.94 Να υπολογίσετε τον αριθμό $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

35.95 Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=1$

35.96 Να απλοποιηθεί η παράσταση $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$

35.97 Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A=\sqrt{1+1999\sqrt{1+2000\sqrt{4+2000\sqrt{1+2003\cdot 2005}}}}$$

35.98 Αν $\alpha>0, \beta>0$ να αποδείξετε ότι $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\le\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha}}$