6η Μαθηματική Εβδομάδα

Θεσσαλονίκη 27-3-2014

«Μια Εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού»

Πρόδρομος Ελευθερίου
Προϊστάμενος Επιστημονικής και Παιδαγωγικής Καθοδήγησης
Δ/θμιας Εκπ/σης Β. Αιγαίου
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Ν. Λέσβου
Email: makisel@sch.gr

Ορφέας-Θεόδωρος Ελευθερίου
Φοιτητής
Τμήματος Εφαρμοσμένης Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Μακεδονίας
Email: eleftheriou.orfeas@gmail.com

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αναφέρεται στη διδασκαλία μιας εφαρμογής του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στην τάξη. Το ενδιαφέρον στη συγκεκριμένη διδακτική πρακτική είναι ότι ένας εσφαλμένος αλλά φαινομενικά ορθός συλλογισμός ενός μαθητή δίνει την ευκαιρία στον εκπαιδευτικό να προκαλέσει τους μαθητές σε ένα ενδιαφέρον παιχνίδι αναζήτησης της ορθής λύσης και προσέγγισης της βαθύτερης μαθηματικής σκέψης. Με την κατάλληλη καθοδήγηση οι μαθητές αναρωτιούνται, αυτενεργούν, διερευνούν με τη χρήση του λογισμικού geogebra, ανασύρουν με τη βοήθεια αντιπαραδειγμάτων παλαιότερες γνώσεις τους και οδηγούνται τελικά στην κατανόηση και εμβάθυνση «λεπτών» μαθηματικών εννοιών.

Λέξεις Κλειδιά

- Θεώρημα Μέσης Τιμής
- Διαφορικός Λογισμός
- Αξίωμα Επιλογής
- Τ.Π.Ε.
- Geogebra
- Αντιπαράδειγμα
- Αξιοποίηση λαθών

Abstract

This study deals with the teaching practice of an application of the Intermediate Value Theorem of Differential Calculus in the classroom. The main interest in this particular teaching practice is that a seemingly correct but mistaken reasoning by a student gives the teacher the opportunity to invite the students to an interesting search of the correct solution and to approach a deeper mathematical thinking. Under the proper guidance, the students wonder, implement, explore through the use of Geogebra software, recall through the aid of counterexamples of past knowledge and are finally driven to the deep understanding of fine mathematical concepts.

Keywords

- Intermediate Value Theorem
- Differential Calculus
- Axiom of Choice
- Information and Communication Technology
- Counterexample
- Geogebra
- Teaching by mistakes

Εισαγωγή

Στο πλαίσιο της διδασκαλίας μιας εφαρμογής του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, ένας εκπαιδευτικός δίνει σε ένα τμήμα Θετικής Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου μία άσκηση προς επίλυση. Κάποιος μαθητής στην προσπάθεια επίλυσης αυτής οδηγείται σ' ένα λανθασμένο αλλά φαινομενικά ορθό συλλογισμό, από τον οποίο ο εμπνευσμένος, όπως αποδεικνύεται στη συνέχεια εκπαιδευτικός, αφορμάται και καταφέρνει, αξιοποιώντας τις κατάλληλες για την περίπτωση μεθόδους, τεχνικές και πρακτικές, να κεντρίσει το ενδιαφέρον των μαθητών του και να τους οδηγήσει σταδιακά στην κατάκτηση της βαθύτερης μαθηματικής σκέψης.

<u>Κύριο μέρος</u>

Στους μαθητές ενός τμήματος της θετικής κατεύθυνσης δόθηκε η παρακάτω άσκηση.

«Αν μια συνάρτηση f: $[0, +\infty) \to \Re$ είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις ιδιότητες:

- $f'(x) \geq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \geq 0$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 1$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) > \frac{1}{2}x + f(0)$ για κάθε $x>0$.

ii) Να εξετάσετε αν η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

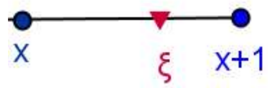
iii) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.»

Αρκετοί μαθητές στηριζόμενοι στο ερώτημα i) απέδειξαν ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και, επομένως, σωστά συμπέραναν ότι η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Κάποιος άλλος μαθητής, ο Οδυσσέας, είπε ότι έφτασε στο ίδιο συμπέρασμα με άλλον τρόπο. Σας παραθέτω την απάντησή του:

«Αν υποθέσουμε ότι η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=\ell$, τότε θα ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής [x, x+1], x>0 σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ., υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$, τέτοιο ώστε:



$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f(x+1) - f(x) \quad (1)$$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, *οπότε* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1) \underset{u\to+\infty}{\overset{u=x+1}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty} f(u) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

Επομένως, από την (1) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(\xi) = 0$.

Είναι $x<\xi<x+1$ και, επειδή $x \to +\infty$, *το* $\xi \to +\infty$.

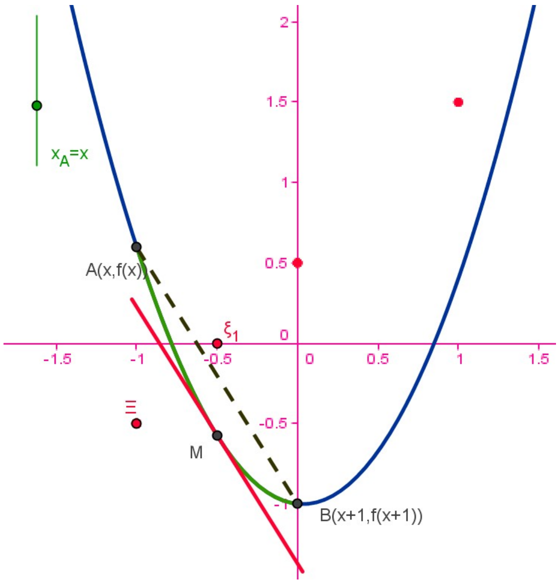
Έχουμε: $\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f'(\xi)=0 \\ \xi\to+\infty, \text{ όταν } x\to+\infty\end{cases}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$, *άτοπο.*

Άρα η C_f δεν έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη».

Στο ερώτημα του εκπαιδευτικού αν στο συλλογισμό του Οδυσσέα υπήρχε κάποιο σφάλμα, όλοι οι μαθητές απάντησαν αρνητικά, εκτός από έναν, ο οποίος προβληματισμένος είπε ότι μάλλον υπήρχε κάποιο σφάλμα, αλλά δεν μπορούσε να εντοπίσει σε ποιο ακριβώς βήμα είχε γίνει.

Ο εκπαιδευτικός, τότε, αποφεύγοντας να απαντήσει άμεσα άνοιξε ένα αρχείο geogebra, όπου είχε σχεδιάσει:

- την παραβολή C: $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (α,β,γ δρομείς), χωρίς όμως να φαίνεται η εξίσωσή της.
- Τη χορδή με άκρα τα σημεία A=(x,f(x)) και B=(x+1, f(x+1)), (x δρομέας).
- Την ευθεία ε//AB εφαπτόμενη στη C στο σημείο της M.



Μετά από συζήτηση διατυπώθηκε το συμπέρασμα ότι η τετμημένη του M είναι ο αριθμός ξ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα [x, x+1].

Τέθηκε επίσης το ερώτημα αν υπάρχει κάποια σχέση που συνδέει τα x με τα αντίστοιχα ξ.

Προκειμένου να αναζητηθεί η ζητούμενη σχέση, ορίστηκε το σημείο Ξ(x,ξ) και παρατηρήθηκε ότι μεταβάλλοντας το δρομέα x άλλαζε θέση και το M, ενώ το Ξ άφηνε το ίχνος του. Διατυπώθηκε, έτσι, από τους μαθητές η **εικασία** ότι το Ξ κινείται στην ευθεία $y=x+\frac{1}{2}$, άρα $\xi=x+\frac{1}{2}$.

Αποκαλύπτοντας σε αυτούς ότι η γραμμή C ήταν γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$, τους ζητήθηκε να επιβεβαιωθεί θεωρητικά η εικασία ότι $\xi=x+\frac{1}{2}$. Δηλαδή ζητήθηκε να αποδειχθεί ότι σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής [x, x+1] ο αριθμός ξ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής είναι ο $\xi = x + \frac{1}{2}$.

Όλοι οι μαθητές απέδειξαν ότι πράγματι η ισότητα $\xi = x + \frac{1}{2}$ ισχύει. Επίσης, κάποιοι σημείωσαν ότι το ξ είναι το κέντρο του διαστήματος [x,x+1]. Επιπλέον, κάποιοι άλλοι προχώρησαν ένα βήμα παραπέρα και παρατήρησαν ότι, όταν το x μεταβάλλεται, κατ' ανάγκη μεταβάλλεται και το ξ (όπως άλλωστε φάνηκε και με το λογισμικό), και μάλιστα όλα αυτά τα ξ είναι **<u>τιμές</u>** της **<u>συνάρτησης</u>** $x + \frac{1}{2}$. Τέλος, ένας μαθητής διατύπωσε την άποψη ότι είναι σωστότερο να γράφεται $\xi(x) = x + \frac{1}{2}$ αντί της ισότητας $\xi = x + \frac{1}{2}$.

Ο εκπαιδευτικός θεώρησε ότι ήταν η κατάλληλη στιγμή να συζητηθεί η «λύση» του Οδυσσέα και έγραψε στον πίνακα τη συνεπαγωγή:

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f'(\xi) = 0 \\ \xi \to +\infty, \text{ όταν } x \to +\infty \end{cases}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$$

Ο Οδυσσέας μάλιστα είπε ότι θα ήταν προτιμότερο να γραφόταν:

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f'(\xi(x)) = 0 \\ \xi(x) \to +\infty, \text{ όταν } x \to +\infty \end{cases}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$$

Στο σημείο αυτό κάποιοι μαθητές απάντησαν ότι από την υπόθεση:
$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f'(\xi) = 0 \\ \xi \to +\infty, \text{ όταν } x \to +\infty \end{cases}\right\}$ ή ακριβέστερα από την $\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f'(\xi(x)) = 0 \\ \xi(x) \to +\infty, \text{ όταν } x \to +\infty \end{cases}\right\}$ δεν μπορούμε με σιγουριά να πούμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ και έδωσαν το παρακάτω αντιπαράδειγμα, το οποίο είχε παρουσιαστεί στην τάξη, κατά τη διδασκαλία του ορίου σύνθετης συνάρτησης:

«Αν $f(x)=\frac{|x|}{x}$ και g(x)=|x|, τότε $\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 0} f\left(g(x)\right)=1 \\ g(x)\to 0,\ \text{όταν } x\to 0 \end{matrix}\right\}$, όμως δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$».

Πράγματι: $\lim\limits_{x\to 0} f(|x|)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{||x||}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{|x|}=1$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$.

Άρα, η ύπαρξη του $\lim\limits_{x\to 0} f\left(g(x)\right)$ δε συνεπάγεται την ύπαρξη του $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, αν και $g(x)\to 0$, όταν $x\to 0$».

Επομένως, κατ' αναλογία, η ύπαρξη του $\lim\limits_{x\to +\infty} f'\left(\xi(x)\right)$ δε συνεπάγεται την ύπαρξη του $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x)$, παρόλο που $\xi(x)\to +\infty$, όταν $x\to +\infty$.

Επειδή σχολιάστηκε ότι το «κατ' αναλογία» πολλές φορές μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα συμπεράσματα, ο εκπαιδευτικός έδωσε, επιπλέον, το επόμενο αντιπαράδειγμα[1] με το οποίο επιβεβαιώνεται ότι η ύπαρξη του $\lim\limits_{x\to +\infty} f'\left(\xi(x)\right)$ με $\xi(x)\to +\infty$, όταν $x\to +\infty$,δε συνεπάγεται την ύπαρξη του $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x)$.

Αντιπαράδειγμα

«Αν $f(x)=\frac{1}{x}\eta\mu x^2$ και $f'\left(\xi(x)\right)=f(x+1)-f(x)$ με $x<\xi(x)<x+1$, τότε $\lim\limits_{x\to +\infty} f'\left(\xi(x)\right)=0$, όμως δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x)$, αφού $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\eta\mu x^2+2\sigma\upsilon\nu x^2$».

Ο Οδυσσέας, τότε, φανερά ενθουσιασμένος, είπε: *«Βρήκα σε ποιο ακριβώς βήμα έγινε το σφάλμα! Από την υπόθεση:* $\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{x\to +\infty} f'\left(\xi\right)=0 \\ \xi\to +\infty,\ \text{όταν } x\to +\infty \end{matrix}\right\}$ *έβγαλα, κακώς, το συμπέρασμα ότι υπάρχει το* $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x)$*»* .

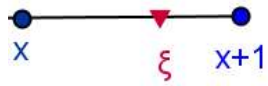
Μετά τη διαπίστωση αυτή θέλησε να γράψει από την αρχή την αποδεικτική του διαδικασία, την οποία παραθέτω αυτούσια:

---

[1] Το αντιπαράδειγμα κατασκευάστηκε από τον Καθηγητή του Ε.Μ.Π. κ. Καρανάσιο Σωτήρη.

«Αν υποθέσουμε ότι η C_f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=\ell$, τότε θα ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής [x, x+1], σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ., για κάθε x>0 θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x, x+1)$, τέτοιο ώστε:



$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=f(x+1)-f(x) \quad (1)$$

*Όταν το $x\to+\infty$, τότε τα αντίστοιχα ξ είναι **<u>τιμές</u>** μιας συνάρτησης ξ(x), για την οποία ισχύει x<ξ(x)<x+1, και, επειδή $x\to+\infty$, συμπεραίνουμε ότι $\xi(x)\to+\infty$.*

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$, *οπότε* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1) \overset{u=x+1}{\underset{u\to+\infty}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty} f(u)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.

Επομένως από την (1) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(\xi(x))=0$, *άτοπο, διότι:*

Αν y = ξ(x), τότε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} \xi(x)=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f'\big(\xi(x)\big)=\lim\limits_{y\to+\infty} f'(y)=\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=1$.

Άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$».

Μετά από όλα αυτά οι μαθητές προκλήθηκαν να απαντήσουν αν η παρακάτω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής:

«Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} u=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(u)=\ell$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(u)=\lim\limits_{u\to+\infty} f(u)=\ell$.»

Σχεδόν όλοι απάντησαν ότι είναι αληθής μόνο όταν υπάρχει το $\lim\limits_{u\to+\infty} f(u)$ ή ισοδύναμα μόνο όταν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Κάποιος μαθητής έβαλε το ερώτημα αν σε κάθε διάστημα [x, x+1] το ξ του Θ.Μ.Τ είναι μοναδικό, ερώτημα που απαντήθηκε σε επόμενο μάθημα Παρακάτω παρουσιάζεται περιληπτικά η διαδικασία που ακολουθήθηκε στην απάντηση του ερωτήματος, καθώς και οι πληροφορίες που ο εκπαιδευτικός έδωσε στους μαθητές, πολλές από τις οποίες, αν και είναι έξω από τα πλαίσια της διδακτέας ύλης, κέντρισαν το ενδιαφέρον τους.

Με τη βοήθεια του geogebra, έγινε η γραφική παράσταση της συνάρτηση f(x)=ημ(kx) και κατασκευάστηκαν:

- Δρομείς k, x, d).
- Χορδή με άκρα τα σημεία A=(x,f(x)) και B=(x+d, f(x+d)).

- Ευθεία ε//ΑΒ εφαπτόμενη στη C στο σημείο της $M(\xi, f(\xi))$.

Μεταβάλλοντας το δρομέα x φάνηκε πολύ καθαρά ότι εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. σε κάθε κλειστό διάστημα της μορφής [x,x+c], το ξ που εμφανίζεται δεν είναι μοναδικό. Έτσι, δόθηκε η ευκαιρία να ειπωθούν τα εξής:

«Επειδή, λοιπόν, κατά την εφαρμογή του Θ.Μ.Τ , μπορεί να υπάρχουν περισσότερα του ενός ξ σε κάθε κλειστό διάστημα της μορφής [x,x+c], θα μπορούσε κανείς να πει ότι ο ισχυρισμός:

$$\xi \to +\infty, \text{ όταν } x \to +\infty$$

δεν έχει απολύτως κανένα νόημα, αφού για κάθε x μπορεί να έχουμε περισσότερες από μια επιλογές για τα αντίστοιχα ξ, οπότε δεν έχουμε κάποια συνάρτηση ξ(x), ώστε να νομιμοποιούμαστε να συζητάμε για την ύπαρξη του ορίου της.

Υπάρχει όμως, το Αξίωμα Επιλογής της Θεωρίας Συνόλων που «σώζει» την κατάσταση.

Σύμφωνα με το Αξίωμα αυτό: «Για οποιαδήποτε οικογένεια μη κενών συνόλων υπάρχει ένα σύνολο του οποίου η τομή με κάθε ένα από τα σύνολα της οικογένειας αυτής είναι μονοσύνολο.»

Δηλαδή το σύνολο αυτό «επιλέγει» ένα ακριβώς στοιχείο από κάθε μέλος της οικογένειας αυτής. Έτσι, αν Α είναι το σύνολο όλων αυτών των μοναδικών ξ, τότε ορίζεται μια συνάρτηση $\xi(x)$ *με πεδίο ορισμού ένα διάστημα της μορφής (α, +∞) και σύνολο τιμών το Α. Επιπλέον ισχύει:*

$\lim\limits_{x\to\infty} \xi(x)=+\infty$, *αφού για κάθε x είναι x<ξ(x)<x+c και* $x \to +\infty$ *».*

Συμπεράσματα

Η ανωτέρω εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού οδηγεί αβίαστα στο συμπέρασμα ότι ο δραστήριος και σε διαρκή εγρήγορση εκπαιδευτικός μπορεί, εκμεταλλευόμενος ανά πάσα στιγμή τις «ευκαιρίες» και «προκλήσεις» που του προκύπτουν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας στην τάξη, να γίνεται ενορχηστρωτής σε ένα μοναδικό παιχνίδι κατάκτησης από τους μαθητές της μαθηματικής γνώσης, αξιοποιώντας, ανάλογα με την εκάστοτε περίπτωση, μερικές πολύ απλές αλλά ιδιαίτερα αποτελεσματικές μεθόδους, τεχνικές και πρακτικές. Ενδεικτικά μόνο επικεντρωνόμαστε στις παρακάτω, οι οποίες συνέβαλαν, εκτός των άλλων, στην κατανόηση και εμβάθυνση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού:

- **Επιλογή κατάλληλων ασκήσεων.** Η επιλογή κατάλληλων απλών «θεωρητικών» ασκήσεων συμβάλλει στην κατανόηση εννοιών και στην ορθή χρήση προτάσεων και ορισμών.
- **Αξιοποίηση Λαθών.** Τα λάθη παρέχουν πολύτιμα στοιχεία σχετικά με τον τρόπο σκέψης των μαθητών και δίνουν σημαντικές ευκαιρίες μάθησης, αφού για την αντιμετώπισή τους, οδηγούνται οι μαθητές σε ερευνητικές διαδικασίες και στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης. Επιπλέον, προσπαθώντας να ανακαλύψουν το λάθος εθίζονται στην αυτοεξήγηση, διαδικασία σημαντική για την κατάκτηση της γνώσης.
- **Χρήση Αντιπαραδειγμάτων.** Είναι αναγκαία η εξοικείωση των μαθητών στη χρήση αντιπαραδειγμάτων, ώστε να καταστούν ικανοί μέσω αυτών να προχωρούν στην απόρριψη ενός ισχυρισμού. Η δυνατότητα των μαθητών στη χρήση ή και κατασκευή αντιπαραδειγμάτων εξασφαλίζει υψηλά επίπεδα κατανόησης, κυρίως, «λεπτών» εννοιών.
- **Χρήση Τ.Π.Ε.** Οι νέες τεχνολογίες, με τις δυνατότητες που παρέχουν, ανοίγουν νέους δρόμους στη διδακτική πρακτική. Είναι πολύτιμοι αρωγοί εκπαιδευτών και εκπαιδευομένων, διότι η χρήση τους:
  - Οδηγεί σε νέα μονοπάτια αναζήτησης της γνώσης με τη διατύπωση εικασιών και υποθέσεων, μέσω του πειραματισμού.
  - Βοηθά στην κατανόηση αφηρημένων εννοιών, εμπλέκοντας τους μαθητές σε διαδικασίες ερευνητικού χαρακτήρα και επίλυσης προβλημάτων.
  - Προκαλεί τους μαθητές να εργαστούν και να συνεργαστούν δημιουργικά, έτσι ώστε, αναπτύσσοντας τη φαντασία τους, να οδηγηθούν σε πρωτότυπες, έξυπνες, ασυνήθιστες και σπάνιες ιδέες και λύσεις.
  - Μετατρέπει τον εκπαιδευτικό από μοναδικό μεταδότη γνώσεων σε καθοδηγητή και οργανωτή της μαθησιακής διαδικασίας.
  - Συμβάλλει στη βαθύτερη κατανόηση των εννοιών, σε συνδυασμό με άλλες τεχνικές και μεθοδολογίες που αναπτύσσονται στην τάξη.
  - Συμβάλλει στη *«μάθηση των μαθηματικών ως μια εμπειρική, υποθετικο-παραγωγική διαδικασία, όπου ζητούμενο είναι η δημιουργία και η ανάπτυξη προσωπικών νοημάτων από τους μαθητές μέσα από υποθέσεις, εικασίες, αποδείξεις, ανασκευές, αντιπαραδείγματα, συνεχείς τροποποιήσεις και ελέγχους»* (Κυνηγός, 2007).

<u>Βιβλιογραφία</u>

1. Halmos, p. (2002). *Αφελής συνολοθεωρία.* Αθήνα: Εκκρεμές., 90-94.
2. Ανδρεαδάκης Σ. κ.ά, *Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης*, ΙΤΥΕ-Διόφαντος, 2013.
3. Δαμβακάκης, Γ. *κ.ά,* (2008). *Επαναληπτικά Θέματα στα Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου.* Καγκουρό Ελλάς., 15-18.
4. ΙΤΥ. (2008). *Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης* Τεύχος 4: Κλάδος ΠΕ03. Πάτρα.
5. Κακαβάκης, Δ. *Γιατί οι νέες τεχνολογίες στην εκπαίδευση και ειδικότερα γιατί οι νέες τεχνολογίες στα μαθηματικά.* Πρακτικά 2ου Συνεδρίου Σύρου – Τ.Π.Ε. στην εκπαίδευση., 257
6. *Κυνηγός, Χ. κ.ά,* Η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στη Διδακτική των Μαθηματικών με τη βοήθεια εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας 2Ο ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΣΥΡΟΥ – ΤΠΕ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ.
7. Μάκρας, Σ. (1998). *Σχετικά με μια άσκηση της ανάλυσης*. Θεσσαλονίκη: Μαθηματική Έκφραση., 116-119.
8. Ντούγια, Σ. (2007). *Απειροστικός Λογισμός Ι.* Αθήνα: Leader Books., 347.
9. Χαιρέτη Μ. *Τα λάθη και οι παρανοήσεις των μαθητών στα μαθηματικά και η διδακτική αξιοποίησή τους*. Ιωάννινα: Διπλωματική Εργασία.