Εισήγηση στην 9η Μαθηματική Εβδομάδα της Θεσσαλονίκης (15-19 Μαρτίου 2017)

Η συμβολή του Θεωρήματος Rolle, του Θ.Μ.Τ. και Μαθηματικών Λογισμικών στην Επίλυση Εκθετικών Εξισώσεων-Ανισώσεων

Πρόδρομος Π. Ελευθερίου
Επίτιμος Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Ν. Λέσβου
Email: makisel@sch.gr

Θεσσαλονίκη, 17-3-2017

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αναφέρεται στη διδασκαλία της επίλυσης Εκθετικών Εξισώσεων και Ανισώσεων με τη βοήθεια των θεωρημάτων Rolle και Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού. Το ενδιαφέρον στη συγκεκριμένη διδακτική πρακτική είναι ότι δίνει την ευκαιρία στον εκπαιδευτικό να προκαλέσει τους μαθητές σε ένα ενδιαφέρον διερευνητικό παιχνίδι. Κατά τη διάρκεια αυτού οι μαθητές, με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού με το οποίο μπορεί σχεδιαστεί με μεγάλη ακρίβεια η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, καλούνται να μαντεύουν τις λύσεις και στη συνέχεια να επιβεβαιώνουν με συλλογισμούς, δηλαδή να αποδεικνύουν την αλήθεια ή όχι αυτού που κάθε φορά μάντεψαν.

Λέξεις κλειδιά

Εκθετικές Εξισώσεις, Ανισώσεις, Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού, Θεώρημα Rolle, συνάρτηση 1-1, μονοτονία, Geogebra.

Abstract

This work deals with the teaching of Solutions to the Exponential Equations and Inequalities with the use of Mean Value Theorem of Differential Calculus and Rolle’s Theorem. The approach that may be interesting in this teaching approach is the fact that the teacher may invite the students to an exciting educational “game”. During this “game”, the students with the aid of appropriate software will draw the graph of a function with considerable detail and are requested to guess the solutions. After that, they

will confirm with reflections whether what they guessed every time was true or not.

Keywords

Exponential equations, Inequalities, Mean Value Theorem of Differential, Calculus, Rolle's Theorem, 1-1 function, monotony, Geogebra.

Εισαγωγή

Κύριος και τελικός αποδέκτης της παρούσας εισήγησης είναι ο μαθητής των Ομάδων Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Οικονομίας & Πληροφορικής της Γ΄ Λυκείου. Για το λόγον αυτό η προτεινόμενη διδακτική πρακτική έχει σχεδιαστεί με βάση τη σχολική διδακτέα ύλη και στοχεύει στην απόκτηση δεξιοτήτων εκ μέρους των μαθητών για την επίλυση εκθετικών εξισώσεων και ανισώσεων κάνοντας, χρήση και κατάλληλων μαθηματικών λογισμικών. Ένα από αυτά μπορεί να είναι το Geogebra.

Δίνεται έμφαση στο να καταστούν ικανοί οι μαθητές να κατασκευάζουν τις δικές τους ασκήσεις, γνωρίζοντας εκ των προτέρων ποιες είναι οι λύσεις τους. Έτσι, εκτός από τη χαρά της δημιουργίας εμβαθύνουν και κατακτούν τη γνώση, αφού εμπλέκονται ενεργά σε αυτή. Ενδιαφέρον μάλιστα έχει το παιχνίδι που μπορεί να στηθεί, με έπαθλο ή και όχι, ανάμεσα στους μαθητές εκείνους που κατασκευάζουν και σε εκείνους που λύνουν τις προτεινόμενες ασκήσεις. Ειλικρινά, είναι ένα παιχνίδι που αποδεδειγμένα αρέσει στους μαθητές και προάγει τη μαθηματική σκέψη. Κατά τη διάρκεια της 27χρονης διδασκαλίας μου στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, η κατασκευή ασκήσεων από τους μαθητές ήταν πάντα ένας από τους διδακτικούς μου στόχους και είχε πάντα θετικότατα αποτελέσματα.

Τέλος, θα ήθελα να αναφέρω ότι στις παιδαγωγικές συναντήσεις που είχα ως Σχολικός Σύμβουλος με τους εκπαιδευτικούς της περιοχής ευθύνης μου υπήρχε πάντοτε εκ μέρους μου η προτροπή να εμπλέκουν τους μαθητές τους σε διαδικασίες κατασκευής ασκήσεων, αναπτύσσοντας και αναλύοντας παράλληλα τα ευεργετικά αποτελέσματα μιας τέτοιας εμπλοκής.

Κύριο μέρος

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Επιδίωξη είναι οι μαθητές να κατασκευάζουν δικές τους εκθετικές εξισώσεις και ανισώσεις και με τη χρήση ενός μαθηματικού λογισμικού:

- Να κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση μιας κατάλληλης συνάρτησης f, η οποία σχετίζεται με την αντίστοιχη εκθετική εξίσωση ή ανίσωση, και με τη βοήθεια αυτής, να μπορούν να μαντέψουν αν η εξίσωση ή η ανίσωση έχει λύσεις.
- Να διατυπώνουν τον ισχυρισμό για το ποιες είναι οι λύσεις των εξισώσεων ή ανισώσεων και στη συνέχεια,
- Να αποδεικνύουν αν οι ισχυρισμοί τους είναι αληθείς ή ψευδείς.

Εκθετικές Εξισώσεις της Μορφής

$$\alpha^x+\beta^x=\gamma^x+\delta^x,\ \alpha,\beta,\gamma,\delta>0$$

- ✓ 1η περίπτωση: α+β=γ+δ
- ✓ 2η περίπτωση: α+β≠γ+δ

Εκθετικές Ανισώσεις της Μορφής

$$\alpha^x+\beta^x>\gamma^x+\delta^x,\ (1),\ \alpha,\beta,\gamma,\delta>0$$

Σχόλιο 1

- Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha^x+\beta^x=\gamma^x+\delta^x$ με α+β=γ+δ και α,β,γ,δ>0 μπορεί να λυθεί με δύο τρόπους:

1ος τρόπος: Με τη βοήθεια του θεωρήματος μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού (Θ.Μ.Τ.).

2ος τρόπος: Με τη βοήθεια του θεωρήματος Rolle.

- Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha^x+\beta^x=\gamma^x+\delta^x$ (1) με α,β,γ,δ>0, η οποία έχει ρίζα ρ≠0, είναι ισοδύναμη με εξίσωση της μορφής:

$$\alpha_1^x+\beta_1^x=\gamma_1^x+\delta_1^x \text{ με } \alpha_1+\beta_1=\gamma_1+\delta_1.$$

Πράγματι:

Αν ρ είναι μια ρίζα ρ της (1), τότε: $\alpha^\rho+\beta^\rho=\gamma^\rho+\delta^\rho$.

Θέτουμε x=yρ, οπότε η εξίσωση (1) γράφεται:

$\alpha^{\rho y}+\beta^{\rho y}=\gamma^{\rho y}+\delta^{\rho y}$ ή ισοδύναμα $\alpha_1^y+\beta_1^y=\gamma_1^y+\delta_1^y$, με $\alpha_1+\beta_1=\gamma_1+\delta_1$ όπου:

$$\alpha_1 = \alpha^\rho,\ \beta_1 = \beta^\rho,\ \gamma_1 = \gamma^\rho \text{ και } \delta_1 = \delta^\rho .$$

- Όλες οι εξισώσεις της μορφής $\alpha^x + \beta^x = \gamma^x + \delta^x$ με α,β,γ,δ>0 έχουν ρίζα 0.
- Όλες οι εξισώσεις της μορφής $\alpha^x + \beta^x = \gamma^x + \delta^x$ με α,β,γ,δ>0 και α+β=γ+δ, έχουν ακριβώς δυο ρίζες. Οι ρίζες αυτές είναι το 0 και το 1, όπως θα αποδείξουμε παρακάτω.

Επίλυση Εκθετικών Εξισώσεων της Μορφής

$$\alpha^x + \beta^x = \gamma^x + \delta^x \text{ με } \alpha,\beta,\gamma,\delta>0$$

Άσκηση 1

Να λύσετε την εξίσωση: $7^x + 2^x = 4^x + 5^x$, (1)

Λύση

Η εξίσωση είναι της μορφής $\alpha^x + \beta^x = \gamma^x + \delta^x$ με α+β=γ+δ και α,β,γ,δ>0, και μάλιστα μπορεί να λυθεί με δύο τρόπους:

- Με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ.
- Με τη βοήθεια του θεωρήματος Rolle.

Με δοκιμές βρίσκουμε ότι δυο ρίζες της εξίσωσης (1) είναι το 0 και το 1.

Θα εξετάσουμε αν η εξίσωση (1) έχει και άλλες ρίζες.

1ος τρόπος (Θ.Μ.Τ.)

Παρατηρούμε ότι τα αθροίσματα $7^x + 2^x$ και $4^x + 5^x$ μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια της συνάρτησης $f(t) = t^x$, με $t \geq 2$ και $x \in IR$, αφού:

$$f(7) + f(2) = 7^x + 2^x \text{ και } f(4) + f(5) = 4^x + 5^x$$

Έχουμε:

$$7^x + 2^x = 4^x + 5^x \Leftrightarrow f(7) + f(2) = f(4) + f(5) \Leftrightarrow$$
$$f(7) - f(5) = f(4) - f(2),\ (2)$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα κλειστά διαστήματα [2,4] και [5,7] και παραγωγίσιμη στα ανοιχτά διαστήματα (2,4) και (5,7).

Επομένως, σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ., υπάρχουν $\xi_1 \in (2,4)$ και $\xi_2 \in (5,7)$, για τα οποία ισχύουν:

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ f'(\xi_1)=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{f(4)-f(2)}{2} \\ &\bullet\ f'(\xi_2)=\frac{f(7)-f(5)}{7-5}=\frac{f(7)-f(5)}{2} \end{aligned}\right\}$$

Άρα, $(2)\Leftrightarrow f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$.

Όμως $f'(t)=x\cdot t^{x-1}$ και $f''(t)=x(x-1)\cdot t^{x-2}$, οπότε:

- Αν x<0 ή x>1, τότε η f' είναι γνησίως αύξουσα.
- Αν 0<x<1, τότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα.
- Αν 0=x ή x=1, τότε η f' είναι σταθερή.

Αφού, όμως, $2<\xi_1<\xi_2$, είναι προφανές ότι η ισότητα $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ ισχύει μόνο όταν 0=x ή x=1.

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να οδηγηθούμε και ως εξής:

$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)\Leftrightarrow x\left(\xi_1\right)^{x-1}=x\left(\xi_2\right)^{x-1}\Leftrightarrow x\left(\left(\xi_1\right)^{x-1}-\left(\xi_2\right)^{x-1}\right)=0\Leftrightarrow$

$$\left(\xi_1\right)^{x-1}=\left(\xi_2\right)^{x-1}\ \text{ή}\ \boxed{x=0}.$$

Όμως:

$$\left(\xi_1\right)^{x-1}=\left(\xi_2\right)^{x-1}\Leftrightarrow\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{x-1}=1\Leftrightarrow\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{x-1}=\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{0}\Leftrightarrow\boxed{x=1}$$

Επομένως, η εξίσωση (1), δεν έχει άλλες ρίζες εκτός από τις 0 και1.

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι οι αριθμοί 0 και 1.

2ος τρόπος

Έχουμε:

$$7^x+2^x=4^x+5^x\Leftrightarrow 7^x-5^x=4^x-2^x,\ (3)$$

Αν υποθέσουμε ότι ρ είναι μια ρίζα της εξίσωσης (3), τότε θα ισχύει:

$$7^\rho-5^\rho=4^\rho-2^\rho,\ (4)$$

Παρατηρούμε ότι οι διαφορές $7^\rho-5^\rho$ και $4^\rho-2^\rho$ μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια της συνάρτησης:

- $f(x)=x^\rho$, αφού $f(7)-f(5)=7^\rho-5^\rho$ και $f(4)-f(2)=4^\rho-2^\rho$ ή της
- $f(x)=(x+2)^\rho-x^\rho$, αφού $f(5)=7^\rho-5^\rho$ και $f(2)=4^\rho-2^\rho$

Αν επιλέξουμε $f(x)=x^{\rho}$, τότε πάμε με το Θ.Μ.Τ. και εργαζόμαστε όπως στον 1^{o} τρόπο, ενώ, αν επιλέξουμε $f(x)=(x+2)^{\rho}-x^{\rho}$, τότε πάμε με το θεώρημα Rolle.

Θα εργαστούμε με το θεώρημα Rolle.
Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x)=(x+2)^{\rho}-x^{\rho}.$$

Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [2,5], παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (2,5) και, λόγω της (4), ισχύει f(5)=f(2).

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi\in(2,5)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi)=0$.
Έχουμε:

- $f'(x)=\rho(x+2)^{\rho-1}-\rho x^{\rho-1}$
- $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow \rho(\xi+2)^{\rho-1}-\rho\xi^{\rho-1}=0 \Leftrightarrow (\xi+2)^{\rho-1}=\xi^{\rho-1}$ ή $\boxed{\rho=0}$
- $(\xi+2)^{\rho-1}=\xi^{\rho-1} \Leftrightarrow \left(\dfrac{\xi+2}{\xi}\right)^{\rho-1}=\left(\dfrac{\xi+2}{\xi}\right)^{0} \Leftrightarrow \boxed{\rho=1}$

Επειδή όμως οι τιμές 0 και 1 επαληθεύουν την (1), συμπεραίνουμε ότι οι τιμές 0 και 1 είναι οι μοναδικές ρίζες αυτής.

Άσκηση 2

Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $9^x+2^x=7^x+6^x$, (Ε1)

ii) $1+12^x=9^x+10^x$, (Ε2)

Λύση

i) Με δοκιμές βρίσκουμε ότι δυο ρίζες της εξίσωσης (Ε1) είναι το 0 και το 2.
Θα εξετάσουμε αν η εξίσωση έχει και άλλες ρίζες.

1^{ος} τρόπος (Θ.Μ.Τ).

Παρατηρούμε ότι τα αθροίσματα 9^x+2^x και 7^x+6^x μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια της συνάρτησης $f(t)=t^x$, με $t\geq 2$ και $x\in$IR, αφού:

$$f(9)+f(2)=9^x+2^x \text{ και } f(7)+f(6)=7^x+6^x$$

Έχουμε:

$$9^x+2^x=7^x+6^x \Leftrightarrow f(9)+f(2)=f(7)+f(6) \Leftrightarrow$$
$$f(9)-f(7)=f(6)-f(2),\ (1)$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα κλειστά διαστήματα [2,6] και [7,9] και παραγωγίσιμη στα ανοιχτά διαστήματα (2,6) και (7,9).

Επομένως, σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1 \in (2,6)$ και $\xi_2 \in (7,9)$ για τα οποία ισχύουν:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f'(\xi_1) = \dfrac{f(6)-f(2)}{6-2} = \dfrac{f(6)-f(2)}{4} \\ \bullet\ f'(\xi_2) = \dfrac{f(9)-f(7)}{9-7} = \dfrac{f(9)-f(7)}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4f'(\xi_1) = f(6)-f(2) \\ 2f'(\xi_2) = f(9)-f(7) \end{array}\right\}$$

Άρα, $(1) \Leftrightarrow 4f'(\xi_1) = 2f'(\xi_2) \Leftrightarrow 2f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$, (2).

Είναι $f'(t) = x \cdot t^{x-1}$, οπότε:

$$(2) \Leftrightarrow 2x\xi_1^{x-1} = x\xi_2^{x-1} \Leftrightarrow x\left(2\xi_1^{x-1} - \xi_2^{x-1}\right) = 0 \Leftrightarrow\ 2\xi_1^{x-1} = \xi_2^{x-1} \text{ ή } \boxed{x=0}$$

Όμως:

$$2\xi_1^{x-1} = \xi_2^{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^{x-1} = 2 \Leftrightarrow (x\text{-}1)\ln\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right) = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln\xi_2 - \ln\xi_1} + 1 > 1$$

Άρα, η εξίσωση (Ε1) έχει δύο ρίζες.

Οι ρίζες της (Ε1) είναι οι αριθμοί 0 και $\dfrac{\ln 2}{\ln\xi_2 - \ln\xi_1} + 1$.

Επειδή το 2 είναι ρίζα της (Ε1), όπως εύκολα διαπιστώνεται με δοκιμές, κατ' ανάγκη θα ισχύει $\dfrac{\ln 2}{\ln\xi_2 - \ln\xi_1} + 1 = 2$.

Άρα, οι ρίζες της εξίσωσης (Ε1) είναι οι αριθμοί 0 και 2.

Σχόλιο 2

Επειδή $\dfrac{\ln 2}{\ln\xi_2 - \ln\xi_1} + 1 = 2$ συμπεραίνουμε ότι $\xi_2 = 2\xi_1$.

Στη σχέση $\xi_2 = 2\xi_1$ μπορούμε να οδηγηθούμε και ως εξής:

Για x=2, $f(t)=t^2$, οπότε:

- $4f'(\xi_1) = f(6) - f(2) \Leftrightarrow 4 \cdot 2\xi_1 = 36 - 4 \Leftrightarrow \xi_1 = 4$
- $2f'(\xi_2) = f(9) - f(7) \Leftrightarrow 2 \cdot 2\xi_2 = 81 - 49 \Leftrightarrow 4\xi_2 = 32 \Leftrightarrow \xi_2 = 8$.

2ος τρόπος

Επειδή $9^2 + 2^2 = 6^2 + 7^2$, δηλαδή ο αριθμός ρ= 2 είναι ρίζα της εξίσωσης, οπότε θέτοντας x= 2y, η εξίσωση $9^x + 2^x = 7^x + 6^x$ γράφεται

$81^y+4^y=36^y+49^y$ και επιπλέον ισχύει 81+4 = 36+49, οπότε η επίλυσή της τώρα γίνεται απλούστερη:

Εργαζόμενοι όπως στην άσκηση 1, είτε με το θεώρημα Rolle είτε με το Θ.Μ.Τ., βρίσκουμε ότι y= 0 ή y= 1, άρα x= 0 ή x= 2.

Επομένως, οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι το 0 και το 2.

ii) Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι οι αριθμοί 0 και 3 είναι ρίζες της εξίσωσης (Ε2).

Θέτουμε x= 3y, οπότε:

$$(\text{E2}) \Leftrightarrow 1+12^{3y}=9^{3y}+10^{3y} \Leftrightarrow 1+1728^y=729^y+1000^y$$

Είναι 1+1728 = 729+1000, οπότε εργαζόμενοι όπως στην άσκηση 1, είτε με το θεώρημα Rolle είτε με το Θ.Μ.Τ., βρίσκουμε ότι y= 0 ή y= 1, άρα x= 0 ή x= 3.

Επομένως, οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι το 0 και το 3.

Άσκηση 3

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3^x+11^x=7^x+8^x$ (1) έχει ακριβώς δύο ρίζες από τις οποίες η μία μόνο είναι ακέραιη.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t)=t^x$,με $t\geq 3$ και $x\in IR$. Έχουμε:

$$3^x+11^x=7^x+8^x \Leftrightarrow f(3)+f(11)=f(7)+f(8) \Leftrightarrow$$
$$f(11)-f(8)=f(7)-f(3),\ (2)$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα κλειστά διαστήματα [3,7] και [8,11] και παραγωγίσιμη στα ανοιχτά διαστήματα (3,7) και (8,11).

Επομένως, σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ υπάρχουν $\xi_1\in(3,7)$ και $\xi_2\in(8,11)$ και για τα οποία ισχύουν:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\quad f'(\xi_1)=\dfrac{f(7)-f(3)}{7-3}=\dfrac{f(7)-f(3)}{4} \\[2ex] \bullet\quad f'(\xi_2)=\dfrac{f(11)-f(8)}{11-8}=\dfrac{f(11)-f(8)}{3} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4f'(\xi_1)=f(7)-f(3) \\ 3f'(\xi_2)=f(11)-f(8) \end{array}\right\},(3)$$

Είναι $f'(t)=x\cdot t^{x-1}$, οπότε: $(2)\overset{(3)}{\Leftrightarrow} 4f'(\xi_1)=3f'(\xi_2)$

Έχουμε:

$$4f'(\xi_1)=3f'(\xi_2) \Leftrightarrow 4x\cdot\xi_1^{x-1}=3x\cdot\xi_2^{x-1} \Leftrightarrow x\left(4\xi_1^{x-1}-3\xi_2^{x-1}\right) \Leftrightarrow$$

$$4\xi_1^{x-1}=3\xi_2^{x-1} \text{ ή } \boxed{x=0}$$

Όμως:

$$4\xi_1^{x-1}= 3\xi_2^{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^{x-1} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow (x\text{-}1)\ln\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right) = \ln\frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$x= \frac{\ln 4 - \ln 3}{\ln \xi_2 - \ln \xi_1} + 1 > 1.$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες.
Οι ρίζες της (1) είναι οι αριθμοί:

$$0 \text{ και } \frac{\ln 4 - \ln 3}{\ln \xi_2 - \ln \xi_1} + 1 \quad .$$

Θα αποδείξουμε ότι ο αριθμός $\frac{\ln 4 - \ln 3}{\ln \xi_2 - \ln \xi_1} + 1$ περιέχεται στο ανοιχτό διάστημα (1, 2) και επομένως δεν είναι ακέραιος.

Για την απόδειξη, θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = 3^x + 11^x - 7^x - 8^x$$

η οποία έχει τις ίδιες ρίζες με την εξίσωση (1), και, σύμφωνα με τα παραπάνω οι ρίζες της g είναι οι αριθμοί 0 και $\frac{\ln 4 - \ln 3}{\ln \xi_2 - \ln \xi_1} + 1$.

Επειδή όμως η g είναι συνεχής στο [1,2] με g(1)= -1 και g(2)=17, σύμφωνα με το Θ.Bolzano, η g θα έχει μια ρίζα στο (1,2).

Επομένως:

$$1 < \frac{\ln 4 - \ln 3}{\ln\xi_2 - \ln\xi_1} + 1 < 2.$$

Άρα, η εξίσωση (1) έχει ακριβώς δύο ρίζες από τις οποίες η μία μόνο είναι ακέραιη.

Γενίκευση

Επίλυση εξισώσεων της μορφής:

$$\alpha^x + \beta^x = \gamma^x + \delta^x, \ (1) \text{ με } \alpha,\beta,\gamma,\delta>0.$$

Σημειώνουμε ότι:

- Το 0 είναι ρίζα κάθε εξίσωσης της παραπάνω μορφής.
- Αν $\alpha>\gamma$ και $\beta\geq\delta$, ή $\alpha<\gamma$ και $\beta\leq\delta$, τότε είναι προφανές ότι το 0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1).

Θα εξετάσουμε αν η εξίσωση έχει και άλλες ρίζες.

- Έστω ότι $0<\alpha<\gamma<\delta<\beta$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t)=t^x$, με $t\geq\alpha$ και $x\in IR$.

Έχουμε:

$$\alpha^x+\beta^x=\gamma^x+\delta^x \Leftrightarrow f(\alpha)+f(\beta)=f(\gamma)+f(\delta) \Leftrightarrow$$
$$f(\beta)-f(\delta)=f(\gamma)-f(\alpha),\ (2)$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα κλειστά διαστήματα [α,γ] και [δ,β] και παραγωγίσιμη στα ανοιχτά διαστήματα (α,γ) και (δ,β). Επομένως, σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ., υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,\gamma)$ και $\xi_2\in(\delta,\beta)$ για τα οποία ισχύουν.

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ f'(\xi_1)=\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha} \\ &\bullet\ f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f(\delta)}{\beta-\delta}\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} &(\gamma-\alpha)f'(\xi_1)=f(\gamma)-f(\alpha) \\ &(\beta-\delta)f'(\xi_2)=f(\beta)-f(\delta)\end{aligned}\right\}$$

Είναι $f'(t)=x\cdot t^{x-1}$, οπότε:

$$(2)\Leftrightarrow(\gamma-\alpha)f'(\xi_1)=(\beta-\delta)f'(\xi_2)\Leftrightarrow(\gamma-\alpha)x\cdot\xi_1^{x-1}=(\beta-\delta)x\cdot\xi_2^{x-1}\Leftrightarrow$$
$$x\left((\gamma-\alpha)\xi_1^{x-1}-(\beta-\delta)\xi_2^{x-1}\right)=0\Leftrightarrow(\gamma-\alpha)\xi_1^{x-1}=(\beta-\delta)\xi_2^{x-1}=0 \text{ ή } \boxed{x=0}$$

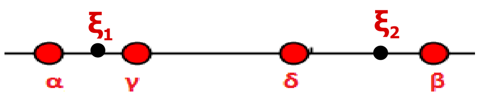
Όμως:

$$(\gamma-\alpha)\xi_1^{x-1}=(\beta-\delta)\xi_2^{x-1}\Leftrightarrow\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{x-1}=\frac{\beta-\delta}{\gamma-\alpha}\Leftrightarrow(x-1)\ln\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)=\ln\frac{\beta-\delta}{\gamma-\alpha}\Leftrightarrow$$
$$x=\frac{\ln(\beta-\delta)-\ln(\gamma-\alpha)}{\ln\xi_1-\ln\xi_2}+1$$

Άρα, αν $0<\alpha<\beta<\gamma<\delta$, τότε η εξίσωση $\alpha^x+\beta^x=\gamma^x+\delta^x$ έχει δύο ρίζες. Οι ρίζες της είναι οι αριθμοί :

$$0 \text{ και } \rho=\frac{\ln(\beta-\delta)-\ln(\gamma-\alpha)}{\ln\xi_1-\ln\xi_2}+1$$

με $\xi_1\in(\alpha,\gamma)$ και $\xi_2\in(\delta,\beta)$



Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

- Αν α+β =γ+δ, τότε ρ=1,
- Αν α+β>γ+δ, τότε ρ<1. (Αφού $\ln(\beta-\delta)>\ln(\gamma-\alpha)$ και $\ln\xi_1<\ln\xi_2$))
- Αν α+β<γ+δ, τότε ρ>1.

Ώστε, για τις λύσεις της εξίσωσης:

$$\alpha^x+\beta^x=\gamma^x+\delta^x \text{ με } \alpha,\beta,\gamma,\delta>0.$$

Ισχύουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

$$\text{Αν}\begin{cases}\bullet\ \alpha+\beta=\gamma+\delta\\ \bullet\ \alpha+\beta>\gamma+\delta\\ \bullet\ \alpha+\beta<\gamma+\delta\\ \bullet\ (\alpha>\gamma \text{ και } \beta\geq\delta)\text{ ή }(\alpha<\gamma \text{ και } \beta\leq\delta)\end{cases}\text{Λύσεις}\begin{cases}\bullet\ 0 \text{ και } 1\\ \bullet\ 0 \text{ και } \rho \text{ με } \rho<1\\ \bullet\ 0 \text{ και } \rho \text{ με } \rho>1\\ \bullet\ 0\end{cases}$$

Σχόλιο 3

Θα μπορούσαμε να εργαστούμε και με το θεώρημα Rolle, αλλά η διαδικασία επίλυσης είναι συνθετότερη.

Επίλυση Εκθετικών Ανισώσεων της Μορφής

$$\alpha^x+\beta^x<\gamma^x+\delta^x \text{ με } \alpha,\beta,\gamma,\delta>0$$

Άσκηση 4

Να λύσετε την ανίσωση : $2^x+5^x<4^x+3^x$, (1) και να αποδείξετε ότι:

$$\frac{3}{\ln 4}+\frac{2}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 2}>\frac{4}{\ln 5}$$

Λύση

1ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t)=t^x$ με $t\geq 2$ και $x\in$IR.

Έχουμε:

$$2^x+5^x<4^x+3^x \Leftrightarrow f(2)+f(5)<f(4)+f(3)\Leftrightarrow$$
$$f(5)-f(4)<f(3)-f(2),\ (2)$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα κλειστά διαστήματα [2,3] και [4,5] και παραγωγίσιμη στα ανοιχτά διαστήματα (2,3) και (4,5). Επομένως, σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ., υπάρχουν $\xi_1\in(2,3)$ και $\xi_2\in(4,5)$, για τα οποία ισχύουν:

- $f'(\xi_1)=\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}=f(3)-f(2)$
- $f'(\xi_2)=\dfrac{f(5)-f(4)}{5-4}=f(5)-f(4)$

$\left.\right\}$ (3)

Έχουμε: $(2)\overset{(3)}{\Leftrightarrow} f'(\xi_2)<f'(\xi_1)$ και επειδή, σύμφωνα με την άσκηση 1 ισχύουν τα παρακάτω:

- Αν x<0 ή x>1, τότε η f' είναι γνησίως αύξουσα.
- Αν 0<x<1, τότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα.
- Αν 0=x ή x=1, τότε η f' είναι σταθερή

Συμπεραίνουμε ότι, αφού $2<\xi_1<\xi_2$, η ανισότητα $f'(\xi_2)<f'(\xi_1)$ ισχύει μόνο όταν $x\in(0,1)$.

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να οδηγηθούμε και ως εξής:

Είναι $f'(t)=x\cdot t^{x-1}$, οπότε:

$$f'(\xi_2)<f'(\xi_1)\Leftrightarrow x\left(\xi_2\right)^{x-1}<x\left(\xi_1\right)^{x-1}\ ,\ (4)$$

- Για x>0 έχουμε:

$$(4)\Leftrightarrow\left(\xi_2\right)^{x-1}<\left(\xi_1\right)^{x-1}\Leftrightarrow\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^{x-1}<1\Leftrightarrow 0<x<1$$

- Για x<0 έχουμε:

$$(4)\Leftrightarrow\left(\xi_2\right)^{x-1}>\left(\xi_1\right)^{x-1}\Leftrightarrow\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^{x-1}>1\Leftrightarrow x>1.$$

επομένως η (4), άρα και η (1), δεν έχει αρνητικές λύσεις. Επίσης, ούτε το 0 επαληθεύει την (1), άρα, οι λύσεις της ανίσωσης $2^x+5^x<4^x+3^x$ είναι τα σημεία του διαστήματος (0,1) και μόνο αυτά.

2ος τρόπος

Λύνουμε την εξίσωση $2^x+5^x=4^x+3^x$ και στη συνέχεια βρίσκουμε το πρόσημο της συνάρτησης:

$$g(x)=2^x+5^x-\left(4^x+3^x\right).$$

- Η g είναι συνεχής.
- Με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ. ή του θεωρήματος Rolle ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, βρίσκουμε ότι οι ρίζες της είναι το 0 και το 1.

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει το πρόσημο της g για τις διάφορες τιμές του x.

Διάστημα	$(-\infty, 0)$	$(0,1)$	$(1, +\infty)$
Επιλεγμένος αριθμός x_o	-1	$\frac{1}{2}$	2
$g(x_o)$	$\frac{7}{60} > 0$	$\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2<0$	4
Πρόσημο	+	–	+

Επομένως, στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(1, +\infty)$ είναι g(x)>0, ενώ στο διάστημα $(0,1)$ είναι g(x)<0.

Επομένως, οι λύσεις της ανίσωσης $2^x+5^x<4^x+3^x$ είναι τα σημεία του διαστήματος (0,1).

- **Απόδειξη της ανισότητας** $\frac{3}{\ln 4}+\frac{2}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 2}>\frac{4}{\ln 5}$

Για κάθε $x\in[0,1]$ είναι $2^x+5^x \le 4^x+3^x$. Η ισότητα ισχύει για x=0 ή x=1.
Επομένως θα έχουμε:

$$2^x+5^x \le 4^x+3^x \Rightarrow \int_0^1\left(2^x+5^x\right)dx<\int_0^1\left(4^x+3^x\right)dx \Rightarrow$$

$$\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^1+\left[\frac{5^x}{\ln 5}\right]_0^1<\left[\frac{4^x}{\ln 4}\right]_0^1+\left[\frac{3^x}{\ln 5}\right]_0^1 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}+\frac{5}{\ln 5}-\frac{1}{\ln 5}<\frac{4}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 4}+\frac{3}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\ln 2}+\frac{4}{\ln 5}<\frac{3}{\ln 4}+\frac{2}{\ln 3} \Rightarrow \frac{3}{\ln 4}+\frac{2}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 2}>\frac{4}{\ln 5}$$

Σχόλιο 4

Θεωρούμε ότι ασκήσεις, όπως οι προηγούμενες, μπορούν να συμβάλλουν στον εμπλουτισμό, με επιπλέον ερωτήματα, ασκήσεων οι οποίες σχετίζονται με συναρτήσεις 1-1.

Για παράδειγμα, στη σελίδα 286 του σχολικού βιβλίου υπάρχει η παρακάτω άσκηση.

«Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\ln x}{1-x}, & 0<x\neq 1 \\ -1, & x=1 \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι:

i) Η f είναι συνεχής ii) $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$ »

Την παραπάνω άσκηση μπορούμε να την εμπλουτίσουμε με επιπλέον ερωτήματα. Μια τροποποίηση μπορεί να είναι και η παρακάτω.

«Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\ln x}{1-x}, & 0<x\neq 1 \\ k, & x=1 \end{cases}$.

Α1. Να αποδείξετε ότι:

i) k = -1.

ii) Η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την παράγωγό της.

Θεωρούμε επίσης και τη συνάρτηση:

$$g:(0,+\infty)\to IR \text{ με } g(x)=x^{\alpha} \text{ με } \alpha\in(0,1).$$

Α2. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f, g και fog ως προς τη μονοτονία.

Α3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα ξ με ξ∈(2,3) για το οποίο ισχύει:

$$\alpha\cdot\xi^{\alpha-1}=g(3)-g(2).$$

Α4. Να αποδείξετε ότι:

i) Για κάθε α με $0\leq\alpha\leq 1$ ισχύει $f\left(2^{\alpha}+5^{\alpha}\right)\geq f\left(4^{\alpha}+3^{\alpha}\right)$

ii) $\dfrac{3}{\ln 4}+\dfrac{2}{\ln 3}-\dfrac{1}{\ln 2}>\dfrac{4}{\ln 5}$.

Συμπεράσματα

- **Επιλογή κατάλληλων ασκήσεων.** Η επιλογή κατάλληλων ασκήσεων διαβαθμισμένης δυσκολίας οδηγεί τους μαθητές βήμα βήμα στην ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων.
- **Αξιοποίηση Λαθών.** Τα λάθη παρέχουν πολύτιμα στοιχεία σχετικά με τον τρόπο σκέψης των μαθητών και δίνουν σημαντικές ευκαιρίες μάθησης, αφού για την αντιμετώπισή τους οδηγούνται οι μαθητές σε ερευνητικές

διαδικασίες και στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης. Επιπλέον, προσπαθώντας να ανακαλύψουν το λάθος εθίζονται στην αυτοεξήγηση, διαδικασία σημαντική για την κατάκτηση της γνώσης.

- **Χρήση Αντιπαραδειγμάτων.** Είναι αναγκαία η εξοικείωση των μαθητών στη χρήση αντιπαραδειγμάτων, ώστε να καταστούν ικανοί μέσω αυτών να προχωρούν στην απόρριψη ενός ισχυρισμού. Η δυνατότητα των μαθητών στη χρήση ή και κατασκευή αντιπαραδειγμάτων εξασφαλίζει υψηλά επίπεδα κατανόησης, κυρίως, «λεπτών» εννοιών.
- **Χρήση μαθηματικών λογισμικών**. Τα λογισμικά, με τις δυνατότητες που παρέχουν, ανοίγουν νέους δρόμους στη διδακτική πρακτική. Είναι πολύτιμοι αρωγοί εκπαιδευτών και εκπαιδευομένων, διότι η χρήση τους:

– Οδηγεί σε νέα μονοπάτια αναζήτησης της γνώσης με τη διατύπωση εικασιών και υποθέσεων, μέσω του πειραματισμού.

– Βοηθά στην κατανόηση αφηρημένων εννοιών, εμπλέκοντας τους μαθητές σε διαδικασίες ερευνητικού χαρακτήρα και επίλυσης προβλημάτων.

– Προκαλεί τους μαθητές να εργαστούν και να συνεργαστούν δημιουργικά, έτσι ώστε, αναπτύσσοντας τη φαντασία τους, να οδηγηθούν σε πρωτότυπες, έξυπνες, ασυνήθιστες και σπάνιες ιδέες και λύσεις.

– Μετατρέπει τον εκπαιδευτικό από μοναδικό μεταδότη γνώσεων σε καθοδηγητή και οργανωτή της μαθησιακής διαδικασίας.

– Συμβάλλει στη βαθύτερη κατανόηση των εννοιών, σε συνδυασμό με άλλες τεχνικές και μεθοδολογίες που αναπτύσσονται στην τάξη.

Βιβλιογραφία

1. Ανδρεαδάκης, Σ., κ.ά. (2016). *Μαθηματικά Γ΄ Γενικού Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σποδών Οικονομίας & Πληροφορικής*, Αθήνα: ΙΕΠ & ΙΤΥΕ "Διόφαντος".

2. ΙΤΥ. (2008). *Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης* Τεύχος 4: Κλάδος ΠΕ03. Πάτρα

3. *Κυνηγός, Χ. κ.ά,* Η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στη Διδακτική των Μαθηματικών με τη βοήθεια εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας 2Ο ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΣΥΡΟΥ – ΤΠΕ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ.

4. Νεγρεπόντης, Σ. κ. α. (1993). *Απειροστικός Λογισμός τόμος ΙΙ*. Αθήνα: Συμμετρία.

5. Ντούγιας, Σ. (2007). *Απειροστικός Λογισμός Ι.* Αθήνα: Leader Books.

6. Μιχαηλίδης, Γ. (2016) *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ Β΄ ΤΟΜΟΣ.*

Προσανατολισμός Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής. Αθήνα: ΕΛΛΗΝΟΕΚΔΟΤΙΚΗ.

7. Μπάρλας, Α. (2013). *Μαθηματικά Θετικής& Τεχνολογικής κατεύθυνσης Τεύχος.* Αυτοέκδοση

8. Παντελίδης, Γ. (2006). *ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ ΔΙΑΔΑΣΚΟΝΤΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ,* Θεσσαλονίκη: Ζήτη.

9. Παπαδημητράκης, Μ. (2015). *Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής,* Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα: www.kallipos.gr

10. Spivak, Michael. (1991). *Διαφορικός & Ολοκληρωτικός Λογισμός* (μτφ Γιαννόπουλου Απ.), Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

11. Στεργίου, Χ. (2015). *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ2 Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ,* Αθήνα: Σαββάλας.

12. Thomas, G. κ.α. (2004). *Απειροστικός λογισμός* Τόμος Ι. (μτφ Αντωγιαννάκης, Μ.), Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.