



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 16 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2016

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΤΩΝ ΤΟΠΙΚΩΝ ΝΟΜΑΡΧΙΑΚΩΝ
ΕΠΙΤΡΟΠΩΝ, ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΕΝΤΡΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΤΗΡΗΤΕΣ

1. Παρακαλούμε να διαβάσετε προσεκτικά τις οδηγίες στους μαθητές.
2. Οι επιτηρητές των αιθουσών θα διανείμουν πρώτα κόλλες αναφοράς, στις οποίες οι μαθητές θα πρέπει απαραίτητα να γράψουν **ΕΠΩΝΥΜΟ, ΟΝΟΜΑ, ΣΧΟΛΕΙΟ, ΤΑΞΗ, το ΣΤΑΘΕΡΟ και ΚΙΝΗΤΟ ΤΗΛΕΦΩΝΟ**, τα οποία θα ελεγχθούν σε αντιπαραβολή με την ταυτότητα που θα έχουν οι εξεταζόμενοι, πριν καλυφθούν και μετά θα γίνει η διανομή φωτοτυπιών των θεμάτων στους μαθητές.
3. Να φωτοτυπηθεί και να μοιραστεί σε όλους τους μαθητές η επιστολή που σας αποστέλλουμε μαζί με τα θέματα.
4. Η εξέταση πρέπει να διαρκέσει ακριβώς τρεις (3) ώρες από τη στιγμή που θα γίνει η διανομή φωτοτυπιών (9-12 περίπου). Δε θα επιτρέπεται σε κανένα μαθητή ν' αποχωρήσει πριν παρέλθει μία ώρα από την έναρξη της εξέτασης.
5. Οι επιτηρητές των αιθουσών έχουν το δικαίωμα ν' ακυρώσουν τη συμμετοχή μαθητών, αν αποδειχθεί ότι αυτοί έχουν χρησιμοποιήσει αθέμιτα μέσα, σημειώνοντας τούτο στις κόλλες των μαθητών. Η επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε. έχει δικαίωμα να επανεξετάσει μαθητή, αν έχει λόγους να υποπτευεται ότι το γραπτό του είναι αποτέλεσμα χρήσης αθέμιτου μέσου.
6. Υπολογιστές οποιουδήποτε τύπου, καθώς και η χρήση κινητών απαγορεύονται.
7. Αμέσως μετά το πέρας της εξέτασης, οι κόλλες των μαθητών πρέπει να σφραγιστούν εντός φακέλου ή φακέλων, που θα έχουν την υπογραφή του υπεύθυνου του εξεταστικού κέντρου και ν' αποσταλούν στην Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε., Πανεπιστημίου 34, 106 79 Αθήνα, αφού πρώτα στα παραρτήματα, εφόσον είναι εφικτό, γίνει μία πρώτη βαθμολόγηση, σύμφωνα με το σχέδιο βαθμολόγησης της επιτροπής διαγωνισμών. Θερμή παράκληση, όπως τα αδιόρθωτα γραπτά αποσταλούν στην ΕΜΕ άμεσα και τα διορθωμένα το αργότερο μέχρι 5 Φεβρουαρίου.
8. Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού θα σταλούν στους Προέδρους των Τοπικών Νομαρχιακών Επιτροπών (ΤΝΕ) και τα Παραρτήματα της Ε.Μ.Ε.
9. Η Εθνική Ολυμπιάδα Μαθηματικών «ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ» θα γίνει στις 27 Φεβρουαρίου 2016 στην Αθήνα. Από τους διαγωνισμούς αυτούς και επί πλέον από ένα τελικό προκριματικό διαγωνισμό στην Ε.Μ.Ε. που θα γίνει στις 26 Μαρτίου 2016 θα επιλεγεί η εθνική ομάδα, που θα συμμετάσχει στην Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (Αλβανία, Μάιος 2016), στην 20^η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (Ιούνιος 2016) και στην 57^η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Χονγκ Κονγκ, Ιούλιος 2016).
10. Με την ευκαιρία αυτή, το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. ευχαριστεί όλους τους συναδέλφους που συμβάλλουν με την εθελοντική τους συμμετοχή στην επιτυχία των Πανελλήνιων Μαθητικών Διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

11. Παρακαλούμε τον Πρόεδρο της ΤΝΕ να αναπαράγει με τα ονόματα των επιτηρητών την ευχαριστήρια επιστολή του Δ.Σ. της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και την παραδώσει στους επιτηρητές.

Για το Διοικητικό Συμβούλιο
της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ο Πρόεδρος
Νικόλαος Αλεξανδρής
Ομότιμος Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Ο Γενικός Γραμματέας
Ιωάννης Τυρλής
Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
16 Ιανουαρίου 2016

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Δίνονται οι δεκαδικοί περιοδικοί αριθμοί $\alpha = 0, \bar{2}$ και $\beta = 0, \bar{3}$.

(α) Να γράψετε τους αριθμούς α και β σε κλασματική μορφή.

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = (3\alpha - 5\beta)^{2015} + (18\alpha^2 + \beta^2)^{2016}$$

Πρόβλημα 2.

Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο με τον οποίο είτε πολλαπλασιάσουμε είτε διαιρέσουμε το 2016, προκύπτει ως αποτέλεσμα τέλει τετράγωνο.

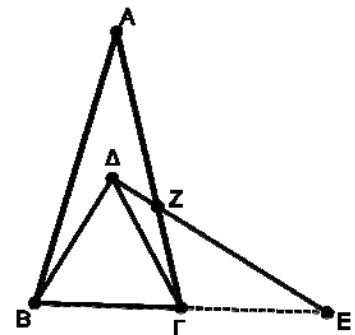
Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$) και $\hat{A} = 30^\circ$. Το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο και το σημείο E βρίσκεται στη προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και είναι τέτοιο ώστε $B\Gamma = \Gamma E$. Αν η πλευρά $A\Gamma$ τέμνεται από τη ΔE στο σημείο Z , τότε:

(α) Να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{A}B\Delta$ και $\hat{A}\Gamma\Delta$.

(β) Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελή.

(γ) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ορθογώνιο.



Πρόβλημα 4

Για την εκτέλεση ενός μεγάλου ερευνητικού έργου στο προαπαιτούμενο χρονικό όριο, ξεκίνησαν να εργάζονται συνολικά 500 ερευνητές. Όταν τελείωσε στην ώρα του το $\frac{1}{4}$ του

έργου, αποχώρησαν 100 ερευνητές, οπότε το δεύτερο τέταρτο του έργου ολοκληρώθηκε με καθυστέρηση. Αποχώρησαν όμως τότε και άλλοι 100 ερευνητές, οπότε το τρίτο τέταρτο του έργου ολοκληρώθηκε με επιπλέον καθυστέρηση. Πόσοι ερευνητές πρέπει να προσληφθούν, ώστε το έργο να τελειώσει στον προγραμματισμένο χρόνο.

(Υποθέτουμε ότι όλοι οι ερευνητές που εργάστηκαν, αλλά και αυτοί που θα προσληφθούν, δουλεύουν με την ίδια απόδοση)

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία.



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
16 Ιανουαρίου 2016

Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο: $P(x) = 4(x+4)^2 - 28(x+4) + 48$
και να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = 6\sqrt{P(-5)} - 4\sqrt{P(4)} .$$

Πρόβλημα 2

(α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $x(2x-1)(2x+1)+x=4x^3$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

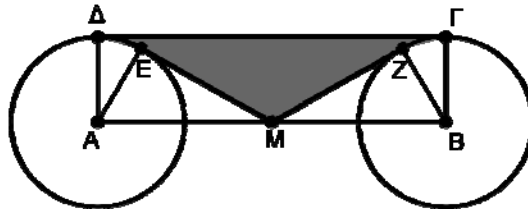
(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = 4031 \cdot 4033 \cdot 32256 + 32256$ ισούται με τον κύβο ενός ακεραίου αριθμού τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $AD = a$ και $AB = 4a$. Με κέντρα τα σημεία Α, Β και ακτίνα a γράφουμε κύκλους. Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, η ΜΕ είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου Α και η ΜΖ είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου Β, όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Delta A E}$.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του μικτόγραμμου γραμμοσκιασμένου χωρίου ΔΕΜΖΓ που περικλείεται από το τόξο ΔΕ, τα τμήματα ΕΜ, ΜΖ, το τόξο ΖΓ και το τμήμα ΓΔ.



Πρόβλημα 4

Δύο φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα, παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα $\frac{3}{4}$ και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις δίνει στο Βαγγέλη. Στη συνέχεια ο Βαγγέλης παίρνει τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το $\frac{1}{12}$ και δίνει στο Γιάννη τις υπόλοιπες.

Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι εξαπλάσιες από τις καραμέλες του Βαγγέλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
16 Ιανουαρίου 2016
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης

$$A = \left(\frac{25}{x+8} - \frac{\sqrt[3]{x} + 2}{\sqrt[3]{x^2} - 2 \cdot \sqrt[3]{x} + 4} \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{x^4} + 8 \cdot \sqrt[3]{x}}{9 - \sqrt[3]{x^2}} + \frac{21 - \sqrt[3]{x^2}}{3 + \sqrt[3]{x}}, \text{ όπου } x > 0 \text{ και } x \neq 27.$$

Πρόβλημα 2

Να εξετάσετε, αν η εξίσωση $64x^2 + 16^{10}x - 2016^{2016} = 0$ έχει ρητή ρίζα.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 40^\circ$. Έστω Δ το μέσο της πλευράς AG . Θεωρούμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $AE\Delta$ και $\Delta\Gamma Z$ των οποίων οι κορυφές E, Z βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο με ακμή την AG και στο οποίο ανήκει η κορυφή B . Αν η $E\Delta$ τέμνει την AB στο K , να αποδείξετε ότι η KZ είναι κάθετη στη $B\Gamma$.

Πρόβλημα 4

Τρεις φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης και ο Βασίλης, έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα στη σακούλα, παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα $\frac{3}{4}$ και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Ο Βαγγέλης παίρνει κάποιες από τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το $\frac{1}{4}$ από αυτές και τις υπόλοιπες από αυτές που έβγαλε τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Τέλος ο Βασίλης παίρνει τις υπόλοιπες που είχαν μείνει στη σακούλα κρατάει το $\frac{1}{6}$ από αυτές και τις υπόλοιπες από αυτές που έβγαλε τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει θετικό ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι τριπλάσιες από τις καραμέλες του Βασίλη και οι καραμέλες του Βαγγέλη είναι διπλάσιες από τις καραμέλες του Βασίλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
16 Ιανουαρίου 2016

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $\alpha_1 = (2-x)^2$, $\alpha_2 = 2^2 + x^2, \dots$, όπου x πραγματικός αριθμός.

Να προσδιορίσετε:

(α) Το άθροισμα των n πρώτων όρων της.

(β) Την τιμή του n , ($n > 1$), για την οποία ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με το τετράγωνο μιας παράστασης του x , για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση

$$10x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 0.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) και τα μέσα M, N των πλευρών AB και $A\Gamma$, αντίστοιχα. Ο κύκλος (c_1) έχει διάμετρο την AM και τέμνει τις $A\Gamma, MN$ στα σημεία Δ, E αντίστοιχα. Ο κύκλος (c_2) έχει διάμετρο την ΓN και τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο Λ . Η $E\Lambda$ τέμνει το κύκλο (c_1) στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $Z\Delta N\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (a, b) που είναι τέτοια ώστε ο αριθμός

$$\frac{a}{b} + \frac{17b}{36a}$$
 να είναι ακέραιος.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
16 Ιανουαρίου 2016

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $b_1 = (x-4)^2$, $b_2 = x^2 + 16, \dots$, όπου x πραγματικός αριθμός.

Να προσδιορίσετε:

(α) Το άθροισμα των n πρώτων όρων της.

(β) Την τιμή του n , ($n > 1$), για την οποία ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με το τετράγωνο μιας παράστασης του x , για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση:

$$10x^4 - 8x^3 - 24x^2 - 32x - 16 = 0.$$

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : A \rightarrow R$, όπου $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και $f(x) \cdot g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν για κάθε $x, y \in A$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$f\left(\frac{g(x)}{g(y)}\right) = \frac{f(g(x))}{y} \quad (1), \quad g\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right) = \frac{g(f(x))}{y}, \quad (2)$$

να αποδείξετε ότι:

(α) Οι συναρτήσεις f, g είναι '1-1' (ένα προς ένα).

(β) $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = g(x) \cdot g\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ για κάθε $x \in A$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ABC (με $AB < AC < BC$) και ο περιγεγραμμένος κύκλος του $c(O, R)$.

Ο κύκλος $c_1(C, AB)$ (με κέντρο το σημείο C και ακτίνα AB) τέμνει τον κύκλο (c) στα σημεία D και E (το E ανήκει στο τόξο στο οποίο δεν ανήκει το σημείο A). Ο κύκλος $c_2(B, BD)$ (με κέντρο το σημείο B και ακτίνα BD) τέμνει τον κύκλο (c_1) στο σημείο F . Να αποδείξετε ότι η AF περνάει από το μέσο M της BC .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”

16 Ιανουαρίου 2016

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Δίνονται οι δεκαδικοί περιοδικοί αριθμοί $\alpha = 0, \bar{2}$ και $\beta = 0, \bar{3}$.

(α) Να γράψετε τους αριθμούς α και β σε κλασματική μορφή.

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = (3\alpha - 5\beta)^{2015} + (18\alpha^2 + \beta^2)^{2016}.$$

Λύση

(α) Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,222 \dots \\ 10\alpha &= 2,222 \dots \\ 10\alpha &= 0,222 \dots + 2 \\ 10\alpha &= \alpha + 2 \\ 9\alpha &= 2 \end{aligned}$$

Άρα είναι $\alpha = \frac{2}{9}$..

Εργαζόμενοι ομοίως, βρίσκουμε ότι: $\beta = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

(β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= (3\alpha - 5\beta)^{2015} + (18\alpha^2 + \beta^2)^{2016} = \left(3 \cdot \frac{2}{9} - 5 \cdot \frac{3}{9}\right)^{2015} + \left(18 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{3}{9}\right)^2\right)^{2016} \\ &= \left(\frac{6}{9} - \frac{15}{9}\right)^{2015} + \left(18 \cdot \frac{4}{81} + \frac{9}{81}\right)^{2016} = (-1)^{2015} + (+1)^{2016} = -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2.

Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο με τον οποίο είτε πολλαπλασιάσουμε είτε διαιρέσουμε το 2016, προκύπτει ως αποτέλεσμα τέλει τετράγωνο.

Λύση

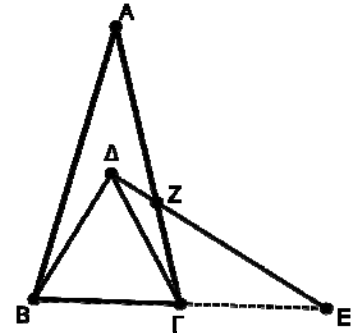
Αναλύουμε το 2016 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Έχουμε ότι $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Επομένως, όταν ο αριθμός 2016 πολλαπλασιαστεί με κάποιο παράγοντα, για να προκύψει γινόμενο που είναι τέλει τετράγωνο, θα πρέπει ο παράγοντας αυτός να έχει ως παράγοντες τους αριθμούς 2 και 7 σε περιττό εκθέτη και κάθε άλλο πρώτο παράγοντα σε άρτιο εκθέτη. Ο μικρότερος τέτοιος αριθμός είναι ο $2 \cdot 7 = 14$. Παρατηρούμε ότι και η

διαίρεση $2016:(2 \cdot 7)$ δίνει ηλίκο ίσο με $2^4 \cdot 3^2 = (2^2 \cdot 3)^2 = 12^2$, που είναι τέλειο τετράγωνο.

Επομένως ο μικρότερος θετικός ακέραιος με τη ζητούμενη ιδιότητα είναι ο 14.

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$) και $\hat{A} = 30^\circ$. Το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο και το σημείο E βρίσκεται στη προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και είναι τέτοιο ώστε $B\Gamma = \Gamma E$. Αν η πλευρά $A\Gamma$ τέμνεται από τη ΔE στο σημείο Z , τότε:

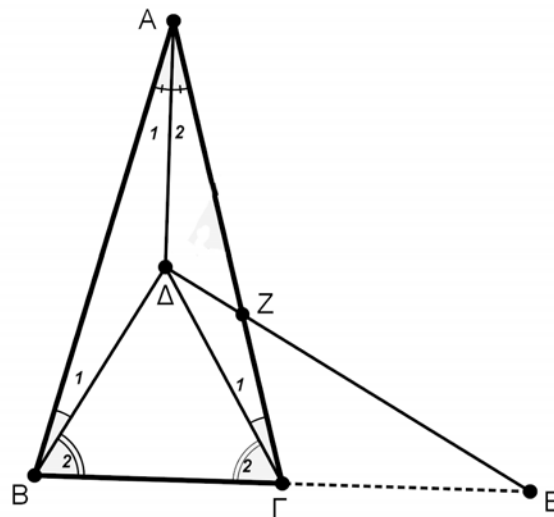


(α) Να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{A}\hat{B}\Delta$ και $\hat{A}\hat{\Gamma}\Delta$.

(β) Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta \Gamma$ είναι ισοσκελή.

(γ) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

Λύση



Σχήμα 1

(α) Το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο άρα $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2 = 60^\circ$.

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\hat{A} = 30^\circ$ άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 75^\circ$.

Αφαιρώντας τις ισότητες κατά μέλη, έχουμε:

$$\hat{B} - \hat{B}_2 = \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}_2 = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = 15^\circ.$$

β) Επειδή $AB = A\Gamma$ και $\Delta B = \Delta \Gamma$ η $A\Delta$ είναι μεσοκάθετη της $B\Gamma$, άρα και διχοτόμος της γωνίας \hat{A} , οπότε

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 15^\circ.$$

Άρα τα τρίγωνα $A\Delta \Gamma$ και $A\Delta B$ είναι ισοσκελή.

(γ) Το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές ($\Gamma\Delta = \Gamma E$) με

$$\hat{\Delta}\hat{E}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_1 + \hat{Z}\hat{\Gamma}E = 15^\circ + (180^\circ - \hat{\Gamma}) =$$

$$= 15^{\circ} + 180^{\circ} - 75^{\circ} = 120^{\circ}.$$

Άρα $\widehat{ΓΔΕ} = \widehat{ΔΕΓ} = 30^{\circ}$. Επειδή από το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΔ είναι

$$\widehat{ΕΒΔ} = \widehat{ΓΒΔ} = 60^{\circ},$$

έπεται ότι:

$$\widehat{ΒΔΕ} = 180^{\circ} - (\widehat{ΕΒΔ} + \widehat{ΔΕΒ}) = 180^{\circ} - (60^{\circ} + 30^{\circ}) = 90^{\circ},$$

οπότε το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ορθογώνιο.

Πρόβλημα 4.

Για την εκτέλεση ενός μεγάλου ερευνητικού έργου στο προαπαιτούμενο χρονικό όριο, ξεκίνησαν να εργάζονται συνολικά 500 ερευνητές. Όταν τελείωσε στην ώρα του το $\frac{1}{4}$ του έργου, αποχώρησαν 100 ερευνητές, οπότε το δεύτερο τέταρτο του έργου ολοκληρώθηκε με καθυστέρηση. Αποχώρησαν όμως τότε και άλλοι 100 ερευνητές, οπότε το τρίτο τέταρτο του έργου ολοκληρώθηκε με επιπλέον καθυστέρηση. Πόσοι ερευνητές πρέπει να προσληφθούν, ώστε το έργο να τελειώσει στον προγραμματισμένο χρόνο.

(Υποθέτουμε ότι όλοι οι ερευνητές που εργάστηκαν, αλλά και αυτοί που θα προσληφθούν, δουλεύουν με την ίδια απόδοση)

Λύση

Αφού στο πρώτο τέταρτο δούλεψαν όλοι οι ερευνητές, το έργο ολοκληρώθηκε στην ώρα του και υποθέτουμε ότι χρειάστηκαν χρόνο t .

Στο δεύτερο τέταρτο σε κάθε χρονική μονάδα ολοκληρώνεται το $\frac{500-100}{500} = \frac{400}{500} = \frac{4}{5}$ από το έργο που θα ολοκληρωνόταν αν δούλεψαν όλοι. Επομένως, για να ολοκληρωθεί το δεύτερο τέταρτο του έργου χρειάζεται χρόνος $\frac{5}{4}t$.

Όμοια για να ολοκληρωθεί το τρίτο τέταρτο του έργου θα χρειαστεί χρόνος $\frac{5}{3}t$.

Έστω τέλος ότι με την προσθήκη των ερευνητών στο τελευταίο τέταρτο χρειάζεται χρόνος x .

Το έργο για να τελειώσει στην ώρα ή νωρίτερα του χρειάζεται χρόνος τετραπλάσιος από το πρώτο τέταρτο που δούλεψαν όλοι, δηλαδή χρόνος μικρότερος ή ίσος με $4t$.

Άρα, έχουμε τη σχέση:

$$t + \frac{5}{4}t + \frac{5}{3}t + x = 4t \Leftrightarrow x = t \left(3 - \frac{5}{4} - \frac{5}{3} \right) = t \frac{(36-15-20)}{12} = \frac{1}{12}t$$

Επομένως, αν έγινε πρόσληψη y ερευνητών στο τελευταίο τέταρτο δούλεψαν $300 + y$ επιστήμονες και για το τελευταίο τέταρτο χρειάστηκαν χρόνο $x = \frac{500}{300+y}t$,

οπότε πρέπει $\frac{500}{300+y}t = \frac{1}{12}t \Rightarrow 6000 = y + 300 \Rightarrow 5700 = y$

Επομένως πρέπει να προσληφθούν 5700 επιστήμονες.

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο: $P(x) = 4(x+4)^2 - 28(x+4) + 48$ και να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = 6\sqrt{P(-5)} - 4\sqrt{P(4)} .$$

Λύση

$$(α) P(x) = 4(x+4)^2 - 28(x+4) + 48 = 4[(x+4)^2 - 7(x+4) + 12]$$

$$= 4(x^2 + 8x + 16 - 7x - 28 + 12) = 4(x^2 + x) = 4x(x+1).$$

$$(β) A = 6\sqrt{P(-5)} - 4\sqrt{P(4)} = 6\sqrt{-20(-5+1)} - 4\sqrt{16(4+1)} = 6\sqrt{80} - 4\sqrt{80} = 2\sqrt{80} = 8\sqrt{5}$$

Πρόβλημα 2

(α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$x(2x-1)(2x+1) + x = 4x^3, \text{ για κάθε πραγματικό αριθμό } x.$$

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = 4031 \cdot 4033 \cdot 32256 + 32256$ είναι κύβος ενός ακέραιου αριθμού τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Λύση

$$(α) x(2x-1)(2x+1) + x = x(4x^2 - 1) + x = 4x^3 - x + x = 4x^3.$$

(β) Επειδή οι ακέραιοι 4031 και 4033 διαφέρουν κατά δύο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $2x-1 = 4031$, $2x+1 = 4033$, οπότε θα είναι $x = 2016$. Για να αντιστοιχήσουμε τον αριθμό A στην προηγούμενη ταυτότητα, πρέπει να την πολλαπλασιάσουμε με τον ακέραιο $\frac{32256}{2016} = 16$. Τότε αυτή γίνεται: $16x(2x-1)(2x+1) + 16x = 64x^3$, οπότε θέτοντας $x = 2016$, έχουμε:

$$A = 4031 \cdot 4033 \cdot 32256 + 32256 = 64 \cdot 2016^3 = 4^3 \cdot 2016^3 = (4 \cdot 2016)^3 = 8064^3.$$

Επομένως, ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 8064.

Πρόβλημα 3

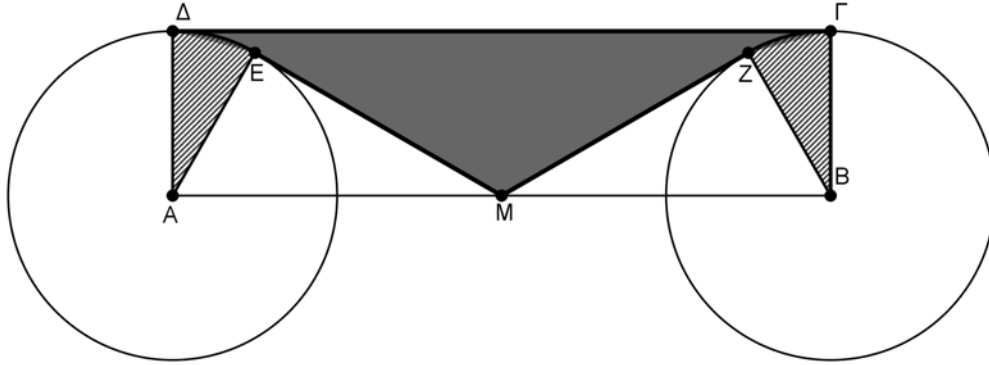
Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $AD = a$ και $AB = 4a$. Με κέντρα τα σημεία Α, Β και ακτίνα a γράφουμε κύκλους. Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, η ΜΕ είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου Α και η ΜΖ είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου Β, όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Delta A E}$.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του μικτόγραμμου γραμμοσκιασμένου χωρίου ΔΕΜΖΓ που περικλείεται από το τόξο ΔΕ, τα τμήματα ΕΜ, ΜΖ, το τόξο ΖΓ και το τμήμα ΓΔ.

Λύση

(α) Επειδή το M είναι το μέσον του AB θα έχουμε ότι $MA = 2\alpha$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο EAM έχουμε $\eta\mu(\widehat{EMA}) = \frac{EA}{AM} = \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2}$, οπότε $\widehat{EMA} = 30^\circ$, $\widehat{EAM} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ και συνεπώς $\widehat{EAD} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.



Σχήμα 2

(β) Το εμβαδό του μικτόγραμμου γραμμοσκιασμένου χωρίου προκύπτει, αν από το εμβαδό του ορθογώνιου παραλληλογράμμου ABΓΔ αφαιρέσουμε το εμβαδό των τριγώνων EAM, MZB και αφαιρέσουμε και τους κυκλικούς τομείς ΔΑΕ, ΖΒΓ. Προφανώς $(AB\Gamma\Delta) = \alpha \cdot 4\alpha = 4\alpha^2$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε $EM^2 = 4\alpha^2 - \alpha^2 = 3\alpha^2 \Rightarrow EM = \alpha\sqrt{3}$, οπότε $(EAM) = \frac{1}{2}EA \cdot EM = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}$, και όμοια $(BZM) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}$. Επιπλέον, ομοίως με το ερώτημα (α) υπολογίζουμε ότι $\widehat{ZB\Gamma} = 30^\circ$, οπότε έχουμε

$$\text{εμβτομέα}(\Delta AE) = \text{εμβτομέα}(ZB\Gamma) = \frac{\pi\alpha^2}{12}.$$

Επομένως, έχουμε:

$$\text{εμβγραμ. χωρίου}(\Delta EMZ\Gamma) = 4\alpha^2 - 2 \cdot \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2} - 2 \frac{\pi\alpha^2}{12} = \alpha^2 \left(4 - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \right).$$

Πρόβλημα 4

Δύο φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα $\frac{3}{4}$ και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις δίνει στο Βαγγέλη. Στη συνέχεια ο Βαγγέλης παίρνει τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το $\frac{1}{12}$ και δίνει στο Γιάννη τις υπόλοιπες. Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι εξαπλάσιες από τις καραμέλες του Βαγγέλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα.

Λύση.

Έστω α οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Γιάννης και β οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Βαγγέλης. Τότε ο Γιάννης κρατάει $\frac{3\alpha}{4}$ και δίνει στο Βαγγέλη $\frac{\alpha}{4}$. Και αφού σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες, πρέπει το α να είναι πολλαπλάσιο του 4. (1)

Αντίστοιχα, ο Βαγγέλης κρατάει $\frac{\beta}{12}$ και δίνει στο Γιάννη $\frac{11\beta}{12}$.

Επομένως, ο Γιάννης έχει συνολικά $\frac{3\alpha}{4} + \frac{11\beta}{12}$ καραμέλες, ενώ ο Βαγγέλης έχει $\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{12}$.

Επομένως πρέπει να ισχύει $6\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{12}\right) = \frac{3\alpha}{4} + \frac{11\beta}{12} \Leftrightarrow \frac{3\alpha}{4} = \frac{5\beta}{12} \Leftrightarrow 9\alpha = 5\beta$. (2)

Για να ισχύει η (2), πρέπει το α να είναι πολλαπλάσιο του 5. (3)

Από τις (1) και (3) συνάγουμε ότι το α πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του $5 \cdot 4 = 20$, οπότε η ελάχιστη τιμή του α είναι 20. Επομένως, από τη σχέση (2) παίρνουμε $\beta = 36$. Επομένως, ο ελάχιστος αριθμός από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα είναι $20 + 36 = 56$.

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης

$$A = \left(\frac{25}{x+8} - \frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{x^2}-2\cdot\sqrt[3]{x}+4} \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{x^4}+8\cdot\sqrt[3]{x}}{9-\sqrt[3]{x^2}} + \frac{21-\sqrt[3]{x^2}}{3+\sqrt[3]{x}}, \text{ όπου } x > 0 \text{ και } x \neq 27.$$

Λύση.

Θέτουμε: $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = y > 0$, $x > 0 \Rightarrow x = y^3$, $x, y > 0$, οπότε η A γράφεται:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{25}{y^3+8} - \frac{y+2}{y^2-2y+4} \right) \cdot \frac{y^4+8y}{9-y^2} + \frac{21-y^2}{3+y} \\ &= \left[\frac{25}{(y+2)(y^2-2y+4)} - \frac{y+2}{y^2-2y+4} \right] \cdot \frac{y(y^3+8)}{(3-y)\cdot(3+y)} + \frac{21-y^2}{3+y} \\ &= \frac{[5^2-(y+2)^2]}{(y+2)\cdot(y^2-2y+4)} \cdot \frac{y\cdot(y+2)\cdot(y^2-2y+4)}{(3+y)\cdot(3-y)} + \frac{21-y^2}{3+y} \\ &= \frac{(7+y)(3-y)y(y+2)(y^2-2\cdot y+4)}{(y+2)(y^2-2y+4)(3+y)(3-y)} + \frac{21-y^2}{3+y} \\ &= \frac{y(7+y)}{3+y} + \frac{21-y^2}{3+y} = \frac{7y+y^2+21-y^2}{3+y} = \frac{7(y+3)}{y+3} = 7. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Να εξετάσετε, αν η εξίσωση $64x^2 + 16^{10}x - 2016^{2016} = 0$ έχει ρητή ρίζα.

Λύση

Αν η εξίσωση έχει ρητή λύση, τότε η διακρίνουσα πρέπει να είναι τέλει τετράγωνο ρητού. Έχουμε ότι $\Delta = 16^{20} + 4 \cdot 64 \cdot 2016^{2016}$ και ας υποθέσουμε ότι:

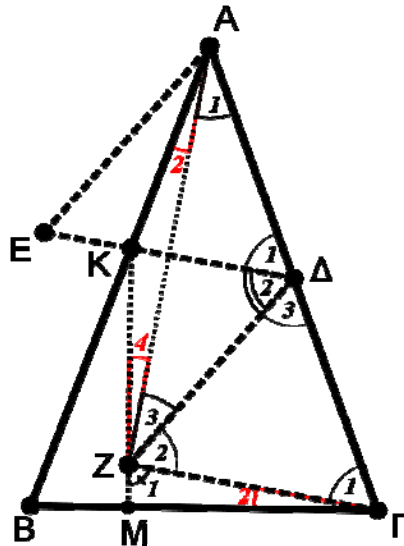
$$16^{20} + 4 \cdot 64 \cdot 2016^{2016} = \kappa^2, \text{ όπου } \kappa \text{ ρητός.}$$

Αφού όμως το αριστερό μέλος είναι ακέραιος, θα πρέπει και ο κ να είναι ακέραιος. Παρατηρούμε ότι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού 16^{20} είναι 6 και το ίδιο ισχύει για το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $4 \cdot 64 \cdot 2016^{2016} = 256 \cdot 2016^{2016}$. Επομένως το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $16^{20} + 4 \cdot 64 \cdot 2016^{2016}$ είναι το 2, αφού $6+6=12$. Όμως, κάθε τέλει τετράγωνο λήγει σε κάποιο από τα ψηφία 0,1,4,5,6,9, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως η εξίσωση δεν έχει ρητή ρίζα.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = 40^\circ$ και έστω Δ το μέσο της πλευράς $A\Gamma$. Θεωρούμε τα ισόπλευρα τρίγωνα AED , ΔFZ των οποίων οι κορυφές E, Z βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο με ακμή την $A\Gamma$ και στο οποίο ανήκει η κορυφή B . Αν η ED τέμνει την AB στο K , να αποδείξετε ότι η KZ είναι κάθετη στη $B\Gamma$.

Λύση



Σχήμα 3

Έστω ότι η KZ τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο M . Θα αποδείξουμε ότι $\hat{\Gamma}_2 + \hat{Z}_1 = 90^\circ$

Το τρίγωνο $\Gamma\Delta Z$ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{\Gamma}_1 = 60^\circ$.

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($\hat{B} = \hat{\Gamma}$) με $\hat{A} = 40^\circ$ (οπότε από $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$) έχουμε: $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 70^\circ$.

$$\text{Άρα } \hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}_1 = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ \quad (1).$$

Ισχύει $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 + \hat{\Delta}_3 = 180^\circ$ και επειδή $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_3 = 60^\circ$ (ως γωνίες ισόπλευρων τριγώνων), συμπεραίνουμε ότι: $\hat{\Delta}_2 = 60^\circ$.

Το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές (διότι $A\Delta = \Delta\Gamma = \Delta Z$) και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 60^\circ$.

Δηλαδή η ΔK είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\Delta Z$, οπότε θα είναι και μεσοκάθετος της βάσης AZ του (ισοσκελούς) τριγώνου $A\Delta Z$.

Εφόσον η ΔK είναι μεσοκάθετη της AZ , το τρίγωνο AKZ είναι ισοσκελές.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $AΔΖ$ έχουμε: $\hat{A}_1 = \hat{Z}_3$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο AKZ έχουμε: $\hat{A}_2 = \hat{Z}_4$.

Προσθέτοντας τις σχέσεις κατά μέλη έχουμε: $\hat{Z}_3 + \hat{Z}_4 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 40^\circ$.

Από τη ισότητα $\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3 + \hat{Z}_4 = 180^\circ$ (με δεδομένο ότι $\hat{Z}_2 = 60^\circ$), καταλήγουμε:

$$\hat{Z}_1 = 80^\circ \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1),(2) έχουμε: $\hat{\Gamma}_2 + \hat{Z}_1 = 90^\circ$.

Πρόβλημα 4

Τρεις φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης και ο Βασίλης, έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα στη σακούλα, παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα $\frac{3}{4}$ και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Ο Βαγγέλης παίρνει κάποιες από τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το $\frac{1}{4}$ από αυτές και τις υπόλοιπες από αυτές που έβγαλε τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Τέλος ο Βασίλης παίρνει τις υπόλοιπες που είχαν μείνει στη σακούλα κρατάει το $\frac{1}{6}$ από αυτές και τις υπόλοιπες από αυτές που έβγαλε τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει θετικό ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι τριπλάσιες από τις καραμέλες του Βασίλη και οι καραμέλες του Βαγγέλη είναι διπλάσιες από τις καραμέλες του Βασίλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα.

Λύση

Έστω α οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Γιάννης και β οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Βαγγέλης και γ ο Βασίλης. Τότε ο Γιάννης κρατάει $\frac{3\alpha}{4}$ και δίνει στο Βαγγέλη και το Βασίλη $\frac{\alpha}{8}$.

Αντίστοιχα, ο Βαγγέλης κρατάει $\frac{\beta}{4}$ και δίνει στο Γιάννη και το Βασίλη $\frac{3\beta}{8}$. Και αφού σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες, πρέπει το β να είναι πολλαπλάσιο του 8. (1)

Τέλος, ο Βασίλης κρατάει $\frac{\gamma}{6}$ και δίνει στο Γιάννη και το Βαγγέλη από $\frac{5\gamma}{12}$.

Επομένως ο Γιάννης έχει συνολικά $\frac{3\alpha}{4} + \frac{3\beta}{8} + \frac{5\gamma}{12}$ καραμέλες, ο Βαγγέλης έχει $\frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{4} + \frac{5\gamma}{12}$ και ο Βασίλης έχει $\frac{\alpha}{8} + \frac{3\beta}{8} + \frac{\gamma}{6}$.

Επομένως πρέπει να ισχύει

$$3\left(\frac{\alpha}{8} + \frac{3\beta}{8} + \frac{\gamma}{6}\right) = \frac{3\alpha}{4} + \frac{3\beta}{8} + \frac{5\gamma}{12} \Leftrightarrow \frac{3\beta}{4} + \frac{\gamma}{12} = \frac{3\alpha}{8} \Leftrightarrow 18\beta + 2\gamma = 9\alpha. \quad (2)$$

$$2\left(\frac{\alpha}{8} + \frac{3\beta}{8} + \frac{\gamma}{6}\right) = \frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{4} + \frac{5\gamma}{12} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{12} \Leftrightarrow 3\alpha + 12\beta = 2\gamma \quad (3)$$

Προσθέτοντας τις (2), (3) κατά μέλη έχουμε ότι :

$$30\beta = 6\alpha \Leftrightarrow 5\beta = \alpha$$

Οπότε από την (3) προκύπτει ότι:

$$27\beta = 2\gamma.$$

Το β αφού είναι πολλαπλάσιο του 8 η ελάχιστη τιμή του είναι 8. Οπότε η ελάχιστη τιμή για το α είναι $\alpha = 5 \cdot 8 = 40$ και για το $\gamma = \frac{27 \cdot 8}{2} = 27 \cdot 4 = 108$. Δηλαδή η ελάχιστη τιμή από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα είναι $8 + 40 + 108 = 156$.

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $\alpha_1 = (2-x)^2$, $\alpha_2 = 2^2 + x^2, \dots$, όπου x πραγματικός αριθμός. Να προσδιορίσετε:

(α) Το άθροισμα των n πρώτων όρων της.

(β) Την τιμή του n , ($n > 1$), για την οποία ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με το τετράγωνο μιας παράστασης του x , για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Λύση

(α) Η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι: $\omega = 2^2 + x^2 - (2-x)^2 = 4x$. Επομένως το άθροισμα των n πρώτων όρων της θα είναι:

$$S_n = \frac{[2(2-x)^2 + 4(n-1)x]n}{2} = (x^2 + 2(n-3)x + 4)n.$$

(β) Ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με

$$\frac{S_n}{n} = x^2 + 2(n-3)x + 4$$

και είναι τριώνυμο μεταβλητής x . Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 4(n-3)^2 - 16 = 4(n^2 - 6n + 5)$. Επομένως το τριώνυμο ισούται με τέλειο τετράγωνο μιας πολυωνυμικής παράστασης του x , αν και μόνον, αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow n^2 - 6n + 5 = 0 \Leftrightarrow n = 1$ ή $n = 5$.

Η τιμή $n = 1$ απορρίπτεται, γιατί $n > 1$. Επομένως, για $n = 5$ είναι

$$\frac{S_5}{5} = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2.$$

Αν ζητήσουμε οποιαδήποτε αλγεβρική παράσταση του x , τότε έχουμε

$\frac{S_n}{n} = x^2 + 2(n-3)x + 4 \geq 0$, για $x \in \square$, εφόσον $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq n \leq 5$. Τότε, για

$n \in \{2, 3, 4, 5\}$ ισχύει: $\frac{S_n}{n} = \left(\sqrt{x^2 + 2(n-3)x + 4}\right)^2$ για κάθε $x \in \square$.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση

$$10x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 0.$$

Λύση

Έχουμε

$$10x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow 10x^3 - (6x^2 + 12x + 8) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι η παράσταση που είναι μέσα στην παρένθεση γράφεται:

$$6x^2 + 12x + 8 = (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) - x^3 = (x+2)^3 - x^3,$$

οπότε η εξίσωση γίνεται:

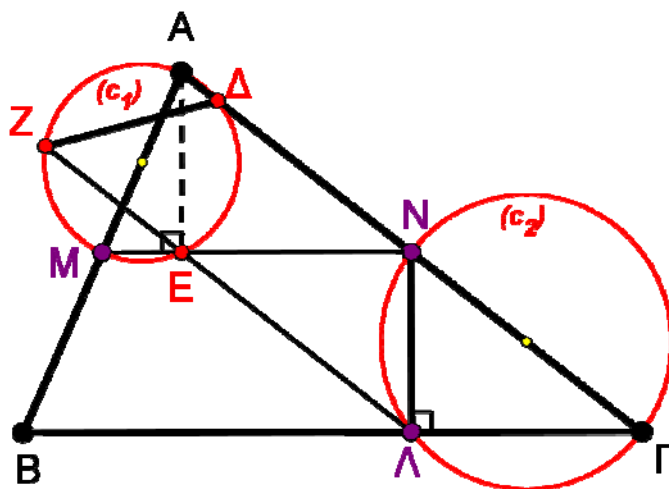
$$10x^3 - (6x^2 + 12x + 8) = 0 \Leftrightarrow 10x^3 - (x+2)^3 + x^3 = 0 \Leftrightarrow 11x^3 = (x+2)^3$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt[3]{11} = x+2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt[3]{11}-1}.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) και τα μέσα M, N των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Ο κύκλος (c_1) έχει διάμετρο την AM και τέμνει τις $A\Gamma, MN$ στα σημεία Δ, E , αντίστοιχα. Ο κύκλος (c_2) έχει διάμετρο την ΓN και τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο Λ . Η $E\Lambda$ τέμνει το κύκλο (c_1) στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $Z\Delta N\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση



Σχήμα 4

Η γωνία \hat{AEM} είναι ορθή διότι είναι εγγεγραμμένη (στο κύκλο (c_1)) και βαίνει στη διάμετρο AM του κύκλου (c_1) , οπότε θα είναι:

$$AE \perp MN \quad (1).$$

Η γωνία $\hat{N\Lambda\Gamma}$ είναι ορθή διότι είναι εγγεγραμμένη (στο κύκλο (c_2)) και βαίνει στη διάμετρο ΓN του κύκλου (c_2) , οπότε θα είναι

$$N\Lambda \perp B\Gamma \quad (2).$$

Τα σημεία M, N είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε θα είναι:

$$MN \parallel \frac{BG}{2} \quad (3).$$

Από τις σχέσεις (1),(2),(3) συμπεραίνουμε ότι: $AE = \Lambda N = \frac{\nu_a}{2}$ και $AE \parallel \Lambda N$.

Άρα το τετράπλευρο $AE\Lambda N$ είναι παραλληλόγραμμο.

Το τετράπλευρο $\Lambda\Delta EZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, διότι είναι τραπέζιο $EZ \parallel \Lambda\Delta$, εγγεγραμμένο στον κύκλο (c_1) . Άρα $AE = \Delta Z$ οπότε θα είναι και $\Delta Z = \Lambda\Lambda$.

Δηλαδή το τετράπλευρο $\Delta Z\Lambda N$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (a,b) που είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $\frac{a}{b} + \frac{17b}{36a}$ να είναι ακέραιος.

Λύση

Θέλουμε $\frac{a}{b} + \frac{17b}{36a} = \kappa$, όπου κ είναι ένας ακέραιος. Θέτουμε $\frac{a}{b} = x$ και τότε η σχέση

γράφεται ως $x + \frac{17}{36x} = \kappa \Leftrightarrow 36x^2 - 36\kappa x + 17 = 0$ (1) και ουσιαστικά ψάχνουμε τις ρητές

λύσεις της (1). Για να έχει ρητές λύσεις η (1) πρέπει η διακρίνουσα να είναι τέλειο τετράγωνο. Δηλαδή θέλουμε $\Delta = (36\kappa)^2 - 4 \cdot 36 \cdot 17 = (2 \cdot 6)^2 (9\kappa^2 - 17)$ να είναι τέλειο τετράγωνο, οπότε θέλουμε $9\kappa^2 - 17 = s^2$ για κάποιον θετικό ακέραιο s .

Τότε $(3\kappa)^2 - s^2 = 17 \Leftrightarrow (3\kappa - s)(3\kappa + s) = 17$ και αφού ο 17 είναι πρώτος και οι

$$\kappa, s \text{ θετικοί ακέραιοι, έπεται ότι } \begin{cases} 3\kappa - s = 1 \\ 3\kappa + s = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \kappa = 3, s = 8.$$

Για $\kappa = 3$ η παραπάνω εξίσωση έχει λύσεις τις $x_1 = \frac{17}{6}$ και $x_2 = \frac{1}{6}$, οπότε $\frac{a}{b} = \frac{17}{6}$

ή $\frac{a}{b} = \frac{1}{6}$, οπότε έχουμε για λύσεις τις $(a,b) = (17t,6t)$ ή $(a,b) = (t,6t)$ όπου t θετικός ακέραιος.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $b_1 = (x-4)^2, b_2 = x^2 + 16, \dots$, όπου x πραγματικός αριθμός. Να προσδιορίσετε:

(α) Το άθροισμα των n πρώτων όρων της.

(β) Την τιμή του $n, (n > 1)$, για την οποία ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με το τετράγωνο μιας παράστασης του x , για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Λύση

(α) Η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι: $\omega = x^2 + 16 - (x-4)^2 = 8x$.

Επομένως το άθροισμα των n πρώτων όρων της θα είναι:

$$S_n = \frac{[2(x-4)^2 + 8(n-1)x]n}{2} = (x^2 + 4(n-3)x + 16)n.$$

(β) Ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με

$$\frac{S_n}{n} = x^2 + 4(n-3)x + 16$$

και μπορεί να θεωρηθεί ως τριώνυμο μεταβλητής x . Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 16(n-3)^2 - 64 = 16(n^2 - 6n + 5)$. Επομένως το τριώνυμο ισούται με τέλειο τετράγωνο μιας πολυωνυμικής παράστασης του x , αν και μόνον, αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow n^2 - 6n + 5 = 0 \Leftrightarrow n = 1$ ή $n = 5$.

Η τιμή $n = 1$ απορρίπτεται, γιατί $n > 1$. Επομένως, μόνον για $n = 5$ είναι

$$\frac{S_5}{5} = x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2.$$

Αν ζητήσουμε οποιαδήποτε αλγεβρική παράσταση του x , τότε έχουμε $\frac{S_n}{n} = x^2 + 4(n-3)x + 16 \geq 0$, για $x \in \square$, εφόσον $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq n \leq 5$. Τότε για

$n \in \{2, 3, 4, 5\}$ ισχύει: $\frac{S_n}{n} = \left(\sqrt{x^2 + 4(n-3)x + 16}\right)^2$ για κάθε $x \in \square$.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση:

$$10x^4 - 8x^3 - 24x^2 - 32x - 16 = 0.$$

Λύση

Έχουμε

$$10x^4 - 8x^3 - 24x^2 - 32x - 16 = 0 \Leftrightarrow 10x^4 - (8x^3 + 24x^2 + 32x + 16) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι η παράσταση που είναι μέσα στην παρένθεση γράφεται:

$$8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 = (x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16) - x^4 = (x+2)^4 - x^4,$$

οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$10x^4 - (8x^3 + 24x^2 + 32x + 16) = 0 \Leftrightarrow 10x^4 - (x+2)^4 + x^4 = 0 \Leftrightarrow 11x^4 = (x+2)^4$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt[4]{11} = x+2 \text{ ή } x\sqrt[4]{11} = -x-2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt[4]{11}-1} \text{ ή } x = -\frac{2}{\sqrt[4]{11}+1}.$$

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow R$, όπου $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και $f(x) \cdot g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν για κάθε $x, y \in A$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$f\left(\frac{g(x)}{g(y)}\right) = \frac{f(g(x))}{y} \quad (1), \quad g\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right) = \frac{g(f(x))}{y}, \quad (2)$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) Οι συναρτήσεις f, g είναι '1-1' (ένα προς ένα).

(β) $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = g(x) \cdot g\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ για κάθε $x \in A$.

Λύση

(α) Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $g(x_1) = g(x_2)$. Θα αποδείξουμε ότι $x_1 = x_2$.

Θέτοντας στη σχέση (1), όπου x το x_1 και όπου y το x_2 , έχουμε:

$$f\left(\frac{g(x_1)}{g(x_2)}\right) = \frac{f(g(x_1))}{x_2} \Leftrightarrow f(1) = \frac{f(g(x_1))}{x_2} \Leftrightarrow f(g(x_1)) = f(1) \cdot x_2 \quad (\text{A}).$$

Θέτοντας στη σχέση (1), όπου x το x_2 και όπου y το x_1 , έχουμε:

$$f\left(\frac{g(x_2)}{g(x_1)}\right) = \frac{f(g(x_2))}{x_1} \Leftrightarrow f(1) = \frac{f(g(x_2))}{x_1} \Leftrightarrow f(g(x_2)) = f(1) \cdot x_1 \quad (\text{B}).$$

Από την ισότητα $g(x_1) = g(x_2)$ έχουμε: $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$ (Γ).

Από τις σχέσεις (A),(B),(Γ) συμπεραίνουμε ότι: $x_1 = x_2$.

Ομοίως, μέσω της σχέσης (2), αποδεικνύουμε ότι και η συνάρτηση f είναι '1-1'.

(β) Στις σχέσεις (1),(2) θέτουμε όπου y το x και έχουμε τις σχέσεις:

$$f\left(\frac{g(x)}{g(x)}\right) = \frac{f(g(x))}{x} \Leftrightarrow f(1) = \frac{f(g(x))}{x} \Leftrightarrow f(g(x)) = f(1) \cdot x$$

$$g\left(\frac{f(x)}{f(x)}\right) = \frac{g(f(x))}{x} \Leftrightarrow g(1) = \frac{g(f(x))}{x} \Leftrightarrow g(f(x)) = g(1) \cdot x$$

που για $x=1$, γίνονται: $f(g(1)) = f(1)$ και $g(f(1)) = g(1)$.

Επειδή όμως οι συναρτήσεις f, g είναι '1-1', θα ισχύει: $f(1) = g(1) = 1$ που σε συνδυασμό με τις προηγούμενες ισότητες έχουμε: $f(g(x)) = g(f(x)) = x$.

Αρα η ισότητα (1) γίνεται: $f\left(\frac{g(x)}{g(y)}\right) = \frac{x}{y}$.

Στην τελευταία ισότητα θέτουμε όπου x το $f(x)$ και όπου y το $f(y)$.

Αρα $f\left(\frac{g(f(x))}{g(f(y))}\right) = \frac{f(x)}{f(y)} \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)}$ και για $x=1$, έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{f(1)}{f(y)} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{f(y)} \Leftrightarrow f(y) \cdot f\left(\frac{1}{y}\right) = 1.$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ABC (με $AB < AC < BC$) και ο περιγεγραμμένος κύκλος του $c(O, R)$. Ο κύκλος $c_1(C, AB)$ (με κέντρο το σημείο C και ακτίνα AB) τέμνει τον κύκλο (c) στα σημεία D και E (το E ανήκει στο τόξο στο οποίο δεν ανήκει το σημείο A). Ο κύκλος $c_2(B, BD)$ (με κέντρο το σημείο B και ακτίνα BD) τέμνει τον κύκλο (c_1) στο σημείο F . Να αποδείξετε ότι η AF περνάει από το μέσο M της BC .

Λύση

Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABCD$, ισχύει $AB = CD$ (διότι CD ακτίνα του κύκλου (c_1)).

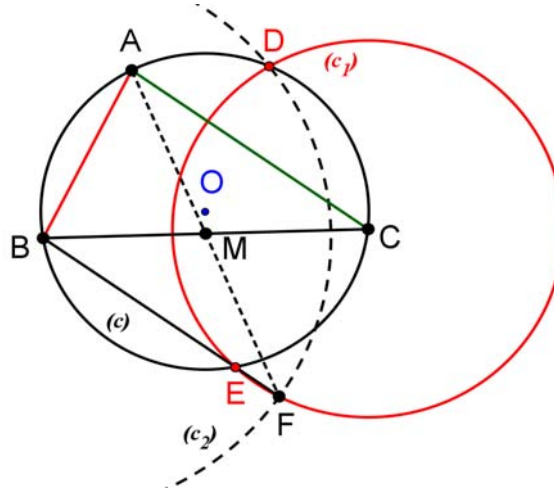
Άρα το τετράπλευρο $ABCD$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $AB = CD$, $AD \parallel BC$ (*).

Από τις ίσες διαγώνιες του ισοσκελούς τραπέζιου $ABCD$ έχουμε:

$$AC = BD \quad (1).$$

Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABEC$, ισχύει $AB = CD = CE$ (διότι $CD = CE$ ακτίνες του κύκλου (c_1)).

Άρα το τετράπλευρο $ABEC$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $AB = CE$ και $AC \parallel BE$ (2).



Σχήμα 5

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι τα σημεία B, E, F είναι συνευθειακά (θα αποδείξουμε ότι $\hat{EBC} = \hat{FBC}$).

Από το ισοσκελές τραπέζιο $ABEC$ έχουμε: $\hat{EBC} = \hat{ACB} = \hat{C}$ (3).

Η διάκεντρος BC των κύκλων (c_1) και (c_2) είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους DF .

Άρα, από το ισοσκελές τραπέζιο $ABCD$ έχουμε:

$$\hat{FBC} = \hat{CBD} = \hat{ACB} = \hat{C} \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε: $\hat{EBC} = \hat{FBC} = \hat{C}$.

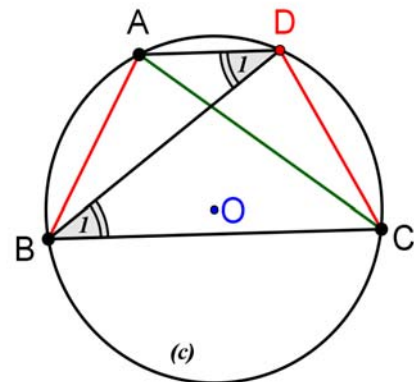
Από τη σχέση (2), έχουμε $AC \parallel BE \parallel BF$ και επειδή $AC = BF = BD$ (από τη σχέση (1)), καταλήγουμε ότι τα τμήματα AC, BF είναι ίσα και παράλληλα.

Δηλαδή το τετράπλευρο $ABFC$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται.

(*)

Ισχύει $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ (διότι είναι εγγεγραμμένες στον ίδιο κύκλο και βαίνουν σε ίσα τόξα).

Οι γωνίες αυτές είναι εντός εναλλάξ στις AD και BC με τέμνουσα την BD . Άρα $AD \parallel BC$, δηλαδή το τετράπλευρο $ABCD$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Σχήμα 6

