ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$65^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2004

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2^3 \cdot 5^3 + 2004 : 4 + (3^2 - 4) \cdot 100 + 3$$

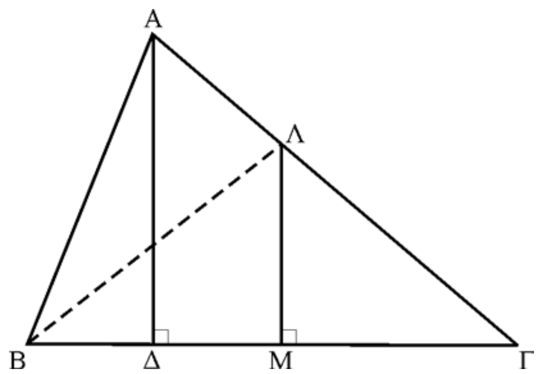
Μονάδες 5

2. Ένας τετραψήφιος αριθμός Κ έχει όλα τα ψηφία του ίσα και το άθροισμα των ψηφίων του είναι 20.

(α) Να βρεθεί ο αριθμός Κ ***Μονάδες 2***

(β) Να βρεθεί δεκαδικός αριθμός a και φυσικός αριθμός ν τέτοιοι ώστε να ισχύει: $K = a \cdot 10^{\nu}$, με $1 \le a < 10$. ***Μονάδες 3***

3. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ΜΛ είναι κάθετη προς την πλευρά ΒΓ στο μέσον της Μ. Επιπλέον δίνονται: ΜΓ=5cm, $\widehat{M\Lambda\Gamma} = 45^{o}$, $\widehat{AB\Lambda} = 30^{o}$ και το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ ίσο με 35cm^2.



Να βρείτε

(α) τις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ και

Μονάδες 3

(β) το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ

Μονάδες 2

4. Η τιμή του πετρελαίου στη Ν. Υόρκη ένα χρόνο πριν στις 30-10-2003 ήταν 32 δολάρια το βαρέλι, ενώ σήμερα είναι 54,4 δολάρια το βαρέλι.

(α) Πόσο τις εκατό έχει αυξηθεί η τιμή του βαρελιού σε σχέση με την τιμή που είχε ένα χρόνο πριν;

Μονάδες 2

(β) Πόσα δολάρια πρέπει να μειωθεί η τιμή του βαρελιού μέχρι την 30-11-2004 έτσι ώστε η τιμή που θα έχει τότε να είναι αυξημένη κατά 40% σε σχέση με την τιμή που είχε στις 30-10-2003;

Μονάδες 3

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

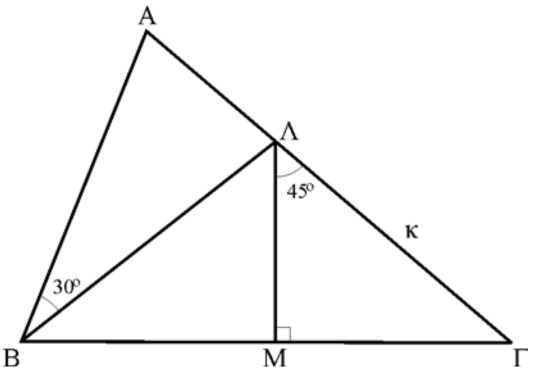
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
65^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2004

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \dfrac{\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2 \cdot 5^2 - 3^2 + x}{\left[1-(-1)^{2005}\right]^0}$, $\quad B = \dfrac{\left[(-2)^3 + (-1)^3\right]}{9} + \dfrac{x}{2}$

Αν είναι $A = 6B$, να προσδιορίσετε την τιμή του x. ***Μονάδες 5***

2. Στο διπλανό σχήμα το σημείο Μ είναι μέσον της πλευράς ΒΓ και η μεσοκάθετη της ΒΓ τέμνει τη ΑΓ στο Λ.
Επίσης δίνονται:
$\widehat{M\Lambda\Gamma} = 45^o$, $\widehat{AB\Lambda} = 30^o$, $\Lambda\Gamma = \kappa$.
Να βρείτε :
(α) τις γωνίες $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ. ***(Μονάδες 2)***

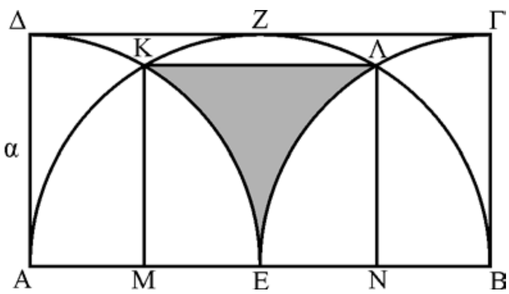


(β) τις πλευρές ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ συναρτήσει του κ. ***(Μονάδες 2)***
(γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. ***(Μονάδες 1)***

3. Μία εταιρεία χρησιμοποίησε 20 εργάτες επί 6 μήνες, εργαζόμενους 8 ώρες το 24ωρο, για να τελειώσει το μισό ενός έργου. Επειδή το υπόλοιπο του έργου πρέπει να τελειώσει σε 2 μήνες η εταιρεία αποφάσισε να προσλάβει και άλλους εργάτες, της ιδίας απόδοσης ανά ώρα, οι οποίοι θα δουλεύουν δεύτερη βάρδια επί 10 ώρες το 24ωρο, ενώ οι υπάρχοντες εργάτες θα δουλεύουν όπως και πριν. Πόσους επιπλέον εργάτες πρέπει να προσλάβει η εταιρεία ώστε να τελειώσει το έργο ακριβώς σε δύο μήνες;

Μονάδες 5

4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ=2ΑΔ= 2α, τα μέσα Ε και Ζ των ΑΒ και ΓΔ, αντίστοιχα, και οι τρεις κύκλοι με κέντρα Α, Ε και Β και ακτίνας α, που τέμνονται μέσα στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ στα σημεία Κ και Λ. Να βρείτε :
(α) το εμβαδόν του τριγώνου ΚΑΕ **(Μονάδες 1)**
(β) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΚΛΝΜ, όπου Μ μέσον της ΑΕ και Ν μέσον της ΕΒ **(Μονάδες 1)**
(γ) το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου γραμμοσκιασμένου τριγώνου ΕΚΛ. **(Μονάδες3)**



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
65^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2004

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Το τετράγωνο ενός αριθμού x ισούται με το διπλάσιο του αριθμού αυξημένο κατά 8. Επιπλέον το διπλάσιο του αριθμού είναι μεγαλύτερο του -2. Να βρεθεί ο αριθμός x.

Μονάδες 5

2. Αν το τετράγωνο του αθροίσματος των πραγματικών αριθμών x, y και z ισούται με το τριπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων τους και επιπλέον ισχύει $x+2y+3z=60$, να βρείτε τους αριθμούς x, y και z.

Μονάδες 5

3. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A}=\hat{B}=90^\circ$, $ΑΔ=α$, $ΒΓ=2α$ και $ΓΔ=\frac{3α}{2}$, του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές τέμνονται στο Ε.

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 1

(β) Να αποδείξετε ότι η ΔΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ΒΔΕ}$.

Μονάδες 2

(γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ και το λόγο $\frac{E(ΕΒΓ)}{E(ΑΒΓΔ)}$.

Μονάδες 2

4. Οι θετικοί ακέραιοι x, y με $x>y$ είναι τέτοιοι ώστε

$$x^3-y^3+x^2y-xy^2=49(x-y).$$

Να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
65^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2004

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ=2ΑΒ η διχοτόμος ΒΔ ισούται με το ευθύγραμμο τμήμα ΔΓ. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 5

2. **(α)** Αν για τους ακέραιους a, b αληθεύει η ισότητα

$$a + a^2 + a^4 = b + b^2 + b^4,$$

τότε να αποδείξετε ότι $a = b$.

Μονάδες 3

(β) Αφού επαληθεύσετε ότι η εξίσωση $x + x^2 + x^4 = 22$ έχει ως λύση τον ακέραιο αριθμό 2, να αποδείξετε ότι η εξίσωση δεν μπορεί να έχει άλλη ακέραια λύση.

Μονάδες 2

3. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, το ύψος του ΑΔ και την εξωτερική διχοτόμο της γωνίας Α η οποία τέμνει την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο Ε. Φέρουμε τη ΒΖ κάθετη προς την ΑΕ και την ΕΗ κάθετη προς την ΑΓ.

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Ζ και Η είναι συνευθειακά.

Μονάδες 2

(β) Αν είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} + 30^\circ$, να βρείτε τη γωνία $\widehat{AH\Delta}$.

Μονάδες 3

4. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι x, y για τους οποίους ο αριθμός

$$A = x^2 + y^2 + 1 - 2xy + x - y$$

είναι τέλειο τετράγωνο και επιπλέον ισχύει $x^2 + y^2 < 12$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
65^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2004

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$(x^2-1)(x^2-3)(x^2-2)^2=72$$

Μονάδες 5

2. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι x, y για τους οποίους ισχύει ότι

$$9(x^2+y^2)+10xy=177+x^2y^2$$

Μονάδες 5

3. Δίνεται ο αριθμός

$$S(\nu)=1^5+2^5+...+\nu^5,\ \nu\in\mathbb{N}^*.$$

Να προσδιορίσετε τους αριθμούς ν για τους οποίους ισχύει ότι : $(\nu+1)\,|\,S(\nu)$

Μονάδες 5

4. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, τη διχοτόμο του ΒΕ, το μέσο Μ της ΕΓ και σημείο Κ της πλευράς ΑΒ τέτοιο ώστε η διχοτόμος ΒΕ να τέμνει τη ΜΚ στο μέσο της Ο.
Να αποδείξετε ότι $\widehat{ΒΟΓ}>90^\circ$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

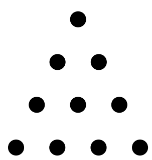
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Οι αριθμοί α και β είναι ακέραιοι και ισχύει $\alpha + \beta = 1000$. Είναι δυνατόν να ισχύει $3\alpha + 5\beta = 3005$; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

2. Σε ένα δοχείο υπάρχουν 6 λευκά, 9 κίτρινα, 12 κόκκινα και 15 πράσινα σφαιρίδια. Να προσδιορισθεί ο ελάχιστος αριθμός σφαιριδίων που πρέπει να πάρουμε τυχαία έτσι ώστε να εξασφαλισθεί η παρουσία στο δείγμα τουλάχιστον
   Α) 3 λευκών
   Β) 5 κίτρινων
   Γ) 6 κόκκινων
   Δ) 10 πράσινων σφαιριδίων
   (τέσσερα διαφορετικά ερωτήματα).

3. Δέκα σημεία είναι τοποθετημένα σε σχήμα ισοπλεύρου τριγώνου όπως στο σχήμα



   Να διαγραφεί ο ελάχιστος αριθμός σημείων έτσι ώστε τα υπόλοιπα να μη σχηματίζουν κανένα ισόπλευρο τρίγωνο.

4. Ποιος από τους αριθμούς

$$A = \frac{1}{99}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{99}\right)$$

και

$$B = \frac{1}{100}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100}\right)$$

είναι μεγαλύτερος και γιατί;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να λυθεί η εξίσωση $\mathbf{x + 2x + 3x + \ldots + 100x = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 101}$.

2. Ποιο από τα κλάσματα

$$\kappa = \frac{33333333331}{33333333334}$$

και

$$\lambda = \frac{22222222221}{22222222223}$$

είναι μεγαλύτερο και γιατί;

3. Δίνεται τραπέζιο **ΑΒΓΔ**, όπου **ΑΔ = α, ΒΓ = β, ΑΒ = α + β** και η πλευρά ΑΒ είναι κάθετος προς τις πλευρές ΒΓ και ΑΔ. Να υπολογισθεί η απόσταση της κορυφής Α από το μέσο της πλευράς ΓΔ συναρτήσει των α και β.

4. Αν οι αριθμοί α, β, γ, δ και ε είναι διαφορετικοί και καθένας παίρνει μια από τις τιμές 1, 2, 3, 4 και 5, είναι δυνατόν να έχουμε τη σχέση

$$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \delta)(\delta + \varepsilon)(\varepsilon + \alpha)=(\alpha +\gamma)(\gamma + \varepsilon)(\varepsilon +\beta)(\beta +\delta)(\delta + \alpha);$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Έστω ότι οι ακέραιοι αριθμοί α και $\alpha + 2$ είναι πρώτοι με $\alpha > 3$. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\alpha + 4$ είναι σύνθετος.

2. Οι αριθμοί α και β είναι θετικοί και ισχύει $\alpha + \beta = \lambda$. Να δεχθεί ότι

$$\frac{4}{3\lambda} \leq \frac{1}{\alpha+\lambda} + \frac{1}{\beta+\lambda} < \frac{3}{2\lambda}.$$

3. Έστω ΑΒΓ ένα σκαληνό τρίγωνο. Πόσα σημεία Δ υπάρχουν στο επίπεδο του τριγώνου τέτοια ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ, Δ να έχει άξονα συμμετρίας διαφορετικό από πλευρά του τριγώνου;

4. Έστω Α και Β δύο μη κενά και ξένα μεταξύ τους σύνολα των οποίων η ένωση είναι το σύνολο {1, 2, 3, 4, 5}. Να αποδειχθεί ότι ένα τουλάχιστον από τα Α και Β περιέχει τουλάχιστον τη διαφορά δύο στοιχείων του.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

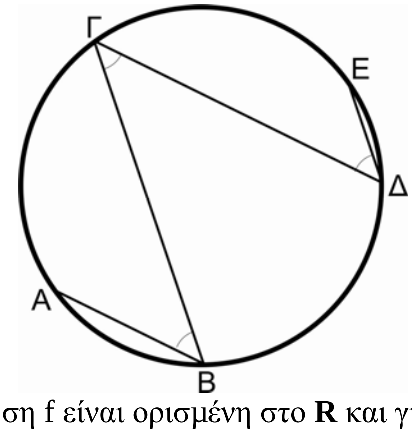
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Υπάρχει θετικός ακέραιος ν τέτοιος ώστε:
   Α) Ο **3ν** είναι τέλειος κύβος, ο **4ν** τέλεια τέταρτη δύναμη και ο **5ν** τέλεια πέμπτη δύναμη;
   Β) Ο **3ν** είναι τέλειος κύβος, ο **4ν** τέλεια τέταρτη δύναμη, ο **5ν** τέλεια πέμπτη δύναμη και ο **6ν** τέλεια έκτη δύναμη;

2. Να βρεθούν πραγματικοί αριθμοί *x, y, z, w* για τους οποίους ισχύει
$$\sqrt{x-y}+\sqrt{y-z}+\sqrt{z-w}+\sqrt{x+w}=x+2.$$

3. Οι κορυφές Α, Β, Γ, Δ, Ε μιας τεθλασμένης γραμμής βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο όπως στο σχήμα και οι γωνίες **ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ** έχουν μέτρο 45^0. Να αποδειχτεί ότι
$$\mathbf{AB^2 + \Gamma\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Delta E^2.}$$



4. Μια πραγματική συνάρτηση f είναι ορισμένη στο **R** και για κάθε $x \in R$ ισχύει
$$f(x+1)f(x)+f(x+1)+1=f(x).$$
Να δεχθεί ότι για κάθε $x \in R$ ισχύουν:
1) $f(x) \neq -1$, **2)** $f(x) \neq 0$, **3)** $f(x+4)=f(x)$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”

ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Για μια συνάρτηση $f : R \to R$ ισχύει
$$f(f(x)) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1,$$
για κάθε $x \in R$.
A) Να βρεθεί το $f(1)$.
B) Να εξετασθεί αν η συνάρτηση
$$g(x) = x^3 + x^2 f(x) - 2xf^2(x) + 3$$
είναι 1-1.

2. Έστω α, β θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε
$$\frac{\alpha}{\beta} < \sqrt{5}.$$
Να αποδειχθεί ότι
$$\sqrt{5} - \frac{\alpha}{\beta} > \frac{1}{4\alpha\beta}.$$

3. Έστω ΑΒΓΔ κυρτό τετράπλευρο τέτοιο ώστε **ΑΔ = ΒΓ**, ΑΔ μη παράλληλη προς τη ΒΓ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο Ρ διάφορο του Ο τέτοιο ώστε ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΡΒΔ και ΡΑΓ να ισούται με το τετράγωνο του λόγου των πλευρών ΡΒ και ΡΑ αντίστοιχα.

4. Έστω $2\nu > \kappa$ και έστω ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ αφήνουν διαφορετικά υπόλοιπα όταν διαιρεθούν δια του κ. Να αποδειχθεί ότι για κάθε ακέραιο αριθμό λ υπάρχουν δείκτες i, j από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, \nu\}$ τέτοιοι ώστε
$$\kappa \mid \alpha_i + \alpha_j - \lambda.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Αδύνατο (άρτια – περιττά).

2. **Α)** 3 + 9 + 12 + 15 = 39,
   Β) 5 + 6 + 12 + 15 = 38,
   Γ) 6 + 6 + 9 + 15 = 36,
   Δ) 10 + 6 + 9 + 12 = 37.

3. Διαγραφή πρώτης σειράς (1 σφαιρίδιο), του μεσαίου της τρίτης σειράς και των δύο μεσαίων της τέταρτης σειράς.

4. Έστω

$$\Gamma = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{99}$$

Τότε

$$A = \Gamma/99,$$

$$B = \Gamma/100 + 1/10000$$

και

$$A - B = (\Gamma - 1)/9900 + 1/990000 > 0.$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. $x = 10$

2. Έστω $α = 33333333334$ και $β = 22222222223$. Τότε $κ = 1 – 3/α$ και $λ = 1 – 2/β$ και $κ – λ = 2/β – 3/α = (2α – 3β)/αβ = - 1/αβ$. Άρα $κ < λ$.

3. $(α + β)/\sqrt{2}$.

4. Αν ήταν δυνατόν, τότε ο αριθμός $(α + β)(β + γ)(γ + δ)(δ + ε)(ε + α)(α +γ)(γ + ε)(ε +β)(β +δ)(δ + α)$ θα ήταν τέλειο τετράγωνο.
   Λόγω συμμετρίας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $α = 1$, $β = 2$, $γ = 3$, $δ = 4$, $ε = 5$, οπότε το γινόμενο αυτό παίρνει την τιμή $2^7 3^5 5^2 7^2$ που δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Ένας από τους αριθμούς α, α +1, α + 2 διαιρείται με τον 3 και αυτός πρέπει να είναι ο α + 1. Άρα ο αριθμός α + 4 = α + 1 + 3 διαιρείται με τον 3.

2. Έχουμε

$$\frac{1}{\alpha+\lambda}+\frac{1}{\beta+\lambda}=\frac{3\lambda}{\alpha\beta+2\lambda^2}.$$

   Η πρώτη ανισότητα είναι ισοδύναμη με

$$4\alpha\beta \le (\alpha+\beta)^2,$$

   και η δεύτερη με

$$3\alpha\beta > 0.$$

3. Το Δ πρέπει να είναι συμμετρικό κορυφής του τριγώνου ως προς τη μεσοκάθετο της απέναντι πλευράς. Άρα υπάρχουν 3 τέτοια σημεία.

4. Έστω ότι κανένα από τα δύο σύνολα δεν περιέχει τη διαφορά δύο στοιχείων του. Τότε προφανώς το 2 δεν μπορεί να ανήκει στο ίδιο σύνολο με το 1 ούτε με το 4 γιατί 2 – 1 = 1 και 4 – 2 = 2. Έστω λοιπόν $2 \in A$, οπότε $1 \in B$ και $4 \in B$.
   Επειδή 4 – 1 = 3, έπεται ότι $3 \notin B$ και επομένως $3 \in A$. Επειδή 5 – 2 = 3, έπεται ότι $5 \notin A$ και επειδή 5 – 1 = 4, έπεται $5 \notin B$. Άτοπο επειδή $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. **Α)** Ναι, π.χ. $\nu = 2^{30}3^{30}5^{24}$.

   Β) Όχι., διότι, αν υπήρχε, τότε $2|\nu$. Έστω α ο μεγαλύτερος εκθέτης τέτοιος ώστε $2^{\alpha}|\nu$.

   Τότε $4|\alpha+2$ (λόγω του ότι ο 4ν είναι τέλεια τετάρτη δύναμη) και $2|\alpha+1$ (λόγω του ότι ο 6ν είναι τέλεια έκτη δύναμη) και άρα $2|1$, δηλ. άτοπο.

2. Η σχέση είναι ισοδύναμη με

$$(\sqrt{x-y}-1)^2+(\sqrt{y-z}-1)^2+(\sqrt{z-w}-1)^2+(\sqrt{x+w}-1)^2=0$$

   και άρα $x = 2, y = 1, z = 0, w = -1$.

3. Προφανώς ΑΒ||ΓΔ και ΒΓ||ΔΕ και άρα ΑΓ = ΒΔ = ΕΓ. Επίσης έχουμε ΒΓ = ΑΔ, ΔΓ = ΒΕ και <ΑΒΕ = <ΑΔΕ = 90^0. Άρα

$$ΑΒ^2 + ΓΔ^2 = ΑΒ^2 + ΓΔ^2 = ΑΕ^2 = ΑΔ^2 + ΔΕ^2 = ΒΓ^2 + ΔΕ^2.$$

4. 1) Αν $f(a) = -1$, τότε $2 = 0$. 2) Αν $f(\beta) = 0$, τότε $f(\beta + 1) = -1$. Άτοπο λόγω 1).

   3) Έχουμε $f(x + 1) = (f(x) - 1)/(f(x) + 1)$, $f(x + 2) = -1/f(x)$ και επομένως

$$f(x + 4) = -1/f(x + 2) = f(x).$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Ισχύει f(f(1)) = 1 και επομένως f(1) = f(f(f(1))) =$(f(1))^3 - 2(f(1))^2 + 3f(1) - 1$. Λύνοντας ως προς f(1) έχουμε f(1) = 1. Επίσης, g(0) = g(1) = 3.

2. Έχουμε

$$\sqrt{5} - \alpha/\beta = (\beta\sqrt{5} - a)/\beta = (5\beta^2 - a^2)/\beta(\beta\sqrt{5} + a) \geq 1/\beta(\beta\sqrt{5} + a) > 1/4\alpha\beta$$

αν 3α > β$\sqrt{5}$. Αν 3α < β$\sqrt{5}$, τότε

$$\sqrt{5} - \alpha/\beta > \sqrt{5} - \sqrt{5}/3 = 2\sqrt{5}/3 > 1 > 1/4\alpha\beta.$$

3. Θεωρούμε τους περιγεγραμμένους K_1 και K_2 στα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ με διαφορετικά σημεία τομής Ο και Ρ λογω του ότι η πλευρά ΑΔ δεν είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ. Λόγω του ότι οι γωνίες ΑΟΔ και ΒΟΓ είναι ίσες ως κατά κορυφήν καθώς και οι πλευρές ΑΔ , ΒΓ από την υπόθεση, οι κύκλοι K_1 και K_2 είναι ίσοι και τα τρίγωνα ΡΒΔ, ΡΑΓ όμοια.

4. Οι αριθμοί $\lambda - \alpha_1$, $\lambda - \alpha_2$, …, $\lambda - \alpha_\nu$ αφήνουν διαφορετικά υπόλοιπα όταν διαιρεθούν δια του κ. Ο μέγιστος αριθμός αυτών των υπολοίπων είναι κ. Επειδή 2ν > κ, δύο από τους 2ν αριθμούς $\alpha_{1,}$ $\alpha_{2,}$ …, α_ν, $\lambda - \alpha_1$, $\lambda - \alpha_2$, …, $\lambda - \alpha_\nu$ θα αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν δια του κ και δεν μπορούν να ανήκουν στο ίδιο σύνολο $\{\lambda - \alpha_1, \lambda - \alpha_2, \ldots, \lambda - \alpha_\nu\}$ ή $\{\alpha_{1,} \alpha_{2,} \ldots, \alpha_\nu\}$, δηλ. ο ένας θα είναι κάποιος α_i και ο άλλος κάποιος λ - α_j . Η διαφορά τους διαιρείται με τον κ.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Β΄ τάξη Γυμνασίου

1. Να υπολογίσετε την παράσταση:

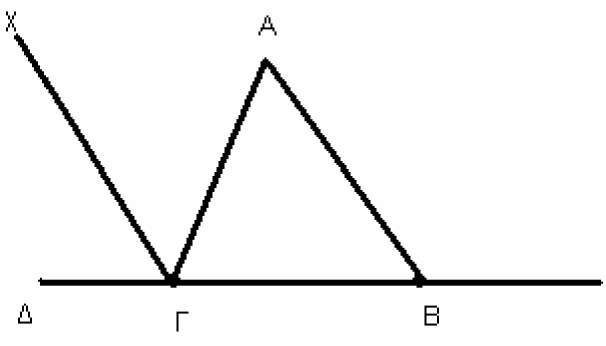
$$A=\left\{111-\left[264-\left(15+\frac{54}{6}\right)\cdot\left|-5\right|\right]:12\right\}:11+1$$

2. Είναι δυνατόν ένα χαρτονόμισμα των 100€ να ανταλλαγεί με 18 νομίσματα των 2€ και των 10€;

3.Το 6% του αριθμού $\alpha\neq 0$ είναι ίσο με το 4% του αριθμού β. Να βρείτε την τιμή του κλάσματος.

$$\kappa=\frac{9\alpha-3\beta}{6\alpha-\beta}$$

4. Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = ΒΓ και η διχοτόμος Γx της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta$ είναι παράλληλη στην ΑΒ. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

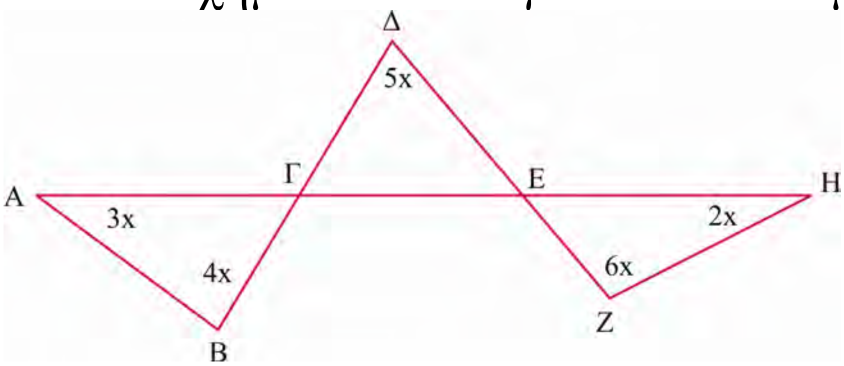
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

1. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το x σε μοίρες



2. Αν $\alpha + 2\beta + \frac{\gamma}{2} = 0$ και αβγ=10, τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \alpha^2\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)^2 \cdot (\alpha + 2\beta)^2$$

3. Αν p είναι πρώτος αριθμός, να αποδείξετε ότι ο αριθμός 27p + 1 είναι σύνθετος.

4. Να εξετάσετε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α,β διάφοροι του μηδενός, τέτοιοι ώστε

$$\frac{3}{2}a\beta^{-1} + \frac{10}{3}a^{-1}\beta = 3.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Α΄ τάξη Λυκείου

1. Η Α΄ τάξη ενός Λυκείου έχει 5 τμήματα που το καθένα έχει τουλάχιστον 20 μαθητές. Σε καθένα από τους μαθητές των τμημάτων αυτών δίνουμε 10 €. Έτσι δώσαμε 1090€. Να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τα τμήματα αυτά έχουν τον ίδιο αριθμό μαθητών.

2. Να λυθεί η εξίσωση $\lambda(\lambda x+3)=\lambda^3+2\lambda x-2$

για τις διαφορές πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ.

3. Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 \geq 3\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}>\hat{B}$ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$, $\hat{B}$ τέμνονται στο Ι. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΔ = ΒΓ−ΑΓ. Να αποδείξετε ότι : ΙΔ = ΙΑ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$67^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Β΄ τάξη Λυκείου

1. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $x^2-(2006\kappa+1)x+2007=0$ όπου $\kappa\in\mathbb{Z}$, έχει δύο ακέραιες ρίζες.

2. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 4, ΒΓ = 2 και σημείο Μ στο εσωτερικό του με ΜΓ = 1 και ΜΒ = $\sqrt{3}$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ.

3. Έστω $\kappa=2+2^2+2^3+\ldots+2^{2008}$. Να αποδείξετε ότι ο 30 διαιρεί τον κ.

4. α) Να αποδείξετε ότι : $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}>\sqrt[3]{19}$

   β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$2^{-1}x+x^{-1}=\frac{\sqrt[3]{38}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Γ΄ τάξη Λυκείου

1. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(f(x+y)) = x - f(y)$ για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $h(x) = f(x)+f(-x)$ είναι σταθερή.

2. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης
$$3^{x+1} - x\cdot 3^{x} - 4x - 1 = 0.$$

3. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 $και$ $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Να αποδείξετε ότι:
$$\frac{|z_1|^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}+\frac{|z_2|^2}{\eta\mu^2\theta}\geq |z_1|^2+|z_2|^2+2\,\mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2).$$

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και τα σημεία Κ, Λ, Μ προς το ίδιο μέρος της ευθείας ΒΓ.

Αν $\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma = \mathrm{B}\hat{\Lambda}\Gamma = \mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma$, τότε να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τα γινόμενα **ΚΒ· ΚΓ**, **ΛΒ· ΛΓ** και **ΜΒ· ΜΓ** είναι άνισα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Λύσεις Β΄ Γυμνασίου

1. Εκτελούμε τις πράξεις και βρίσκουμε

$$\mathrm{A} = (111 - 144:12):11 + 1 = (111 - 12):11 + 1 = 99:11 + 1 = 9 + 1 = 10$$

2. Επειδή ο 100 λήγει σε 0 και τα πολλαπλάσια του 10 λήγουν σε 0, θα πρέπει και ο αριθμός που εκφράζει τα νομίσματα των 2€ να λήγει σε 0. Άρα τα νομίσματα των 2€ θα είναι 5 ή 10 ή 15. Όμως παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να είναι 5 ή 15. Άρα θα είναι 10 . Πράγματι

$$10 \cdot 2 + 8 \cdot 10 = 100.$$

3. Έχουμε:

$$\frac{6}{100}\alpha = \frac{4}{100}\beta \;\; \text{οπότε} \;\; \alpha = \frac{2}{3}\beta$$. Έτσι έχουμε

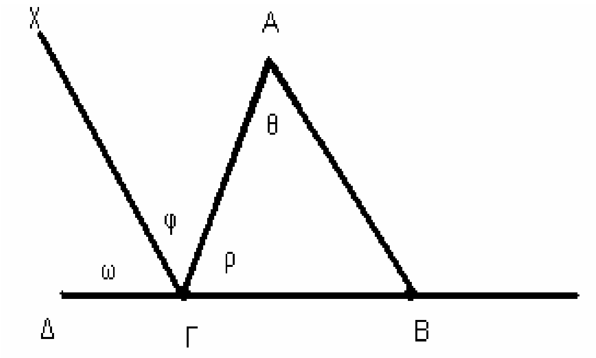
$$\kappa = \frac{9 \cdot \frac{2}{3}\beta - 3\beta}{6 \cdot \frac{2}{3}\beta - \beta} = \frac{6\beta - 3\beta}{4\beta - \beta} = \frac{3\beta}{3\beta} = 1$$

4. Αφού η Γx είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta$ θα ισχύει $\omega = \phi$. Επειδή Γx//ΑΒ θα ισχύει $\phi = \theta$ και αφού

ΑΒ=ΒΓ θα είναι $\theta = \rho$. Άρα $\omega = \phi = \theta = \rho$, και

$\omega + \phi + \rho = 180^0$, οπότε $\omega = \phi = \rho = 60^0$

Άρα $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 60^0$.



Λύσεις Γ΄ Γυμνασίου

1. Έχουμε

$$\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = 180^0 - 3x - 4x = 180^0 - 7x$$

$$\Delta\hat{\mathrm{E}}\Gamma = \mathrm{H}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = 180^0 - 2x - 6x = 180^0 - 8x$$

Έτσι, έχουμε, στο τρίγωνο ΓΔΕ:

$\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E} + \Delta\hat{\mathrm{E}}\Gamma + \hat{\Delta} = 180^0$ οπότε

$180^0 - 7x + 180^0 - 8x + 5x = 180^0 \Leftrightarrow 10x = 180^0 \Leftrightarrow x = 18^0.$

2. $\mathrm{A} = \alpha^2 \cdot (-2\beta)^2 \cdot (-\frac{\gamma}{2})^2 = \alpha^2 \cdot 4\beta^2 \cdot \frac{\gamma^2}{4} = \alpha^2\beta^2\gamma^2 =$

$= (\alpha\beta\gamma)^2 = 10^2 = 100.$

3. Έστω Α=27p+1. Για p=2 έχουμε $\mathrm{A}=27 \cdot 2+1=55=5 \cdot 11$, ενώ για p≠2 ο 27p είναι περιττός οπότε ο Α είναι άρτιος.

4. Αν υπήρχαν τέτοιοι αριθμοί τότε

$$\left(\frac{3}{2}a\beta^{-1}+\frac{10}{3}a^{-1}\beta\right)^2=9\text{, οπότε}$$

$$\frac{9}{4}a^2\beta^{-2}+\frac{100}{9}a^{-2}\beta^2+10=9\text{ οπότε}$$

$$\frac{9}{4}a^2\beta^{-2}+\frac{100}{9}a^{-2}\beta^2=9-10=-1,\ \textit{που δεν ισχύει.}$$

<u>ΛΥΣΕΙΣ</u> Α΄ τάξη Λυκείου

1. Έστω ότι α,β,γ,δ,ε είναι οι αριθμοί των μαθητών των πέντε αυτών τμημάτων. Έτσι έχουμε:

$$10(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)=1090\Rightarrow$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=109 \quad (1)$$

Έστω ότι οι αριθμοί των μαθητών των τμημάτων αυτών είναι ανά δύο διαφορετικοί και έστω ότι:

$\alpha<\beta<\gamma<\delta<\varepsilon$. Επειδή $\alpha\geq 20$ και α,β,γ,δ,ε φυσικοί έχουμε:

$$\beta>\alpha\geq 20\Rightarrow\beta>20\Rightarrow\beta\geq 21$$

$$\gamma>\beta\geq 21\Rightarrow\gamma>21\Rightarrow\gamma\geq 22$$

$$\delta>\gamma\geq 22\Rightarrow\delta>22\Rightarrow\delta\geq 23$$

$$\varepsilon>\delta\geq 23\Rightarrow\varepsilon>23\Rightarrow\varepsilon\geq 24$$

Συνεπώς $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon \geq 110$, άτοπο λόγω της (1). Άρα, δύο τουλάχιστον από τα τμήματα αυτά έχουν τον ίδιο αριθμό μαθητών.

2. Η εξίσωση γράφεται:

$$\lambda^2 x + 3\lambda = \lambda^3 + 2\lambda x - 2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 x - 2\lambda x = \lambda^3 - 3\lambda - 2 \Leftrightarrow$$

$$x\left(\lambda^2 - 2\lambda\right) = \lambda^3 - 3\lambda - 2$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda\left(\lambda - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \;\; \acute{\eta} \;\; \lambda = 2$$

1. Αν λ=0 είναι αδύνατη
2. Αν λ=2 είναι αόριστη
3. Αν λ≠0 και λ≠2 τότε

$$x = \frac{\lambda^3 - 3\lambda - 2}{\lambda^2 - 2\lambda}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\left(\lambda-2\right)\left(\lambda+1\right)^2}{\lambda\left(\lambda-2\right)} \Leftrightarrow x = \frac{\left(\lambda+1\right)^2}{\lambda}$$

3. Η ανίσωση γράφεται:

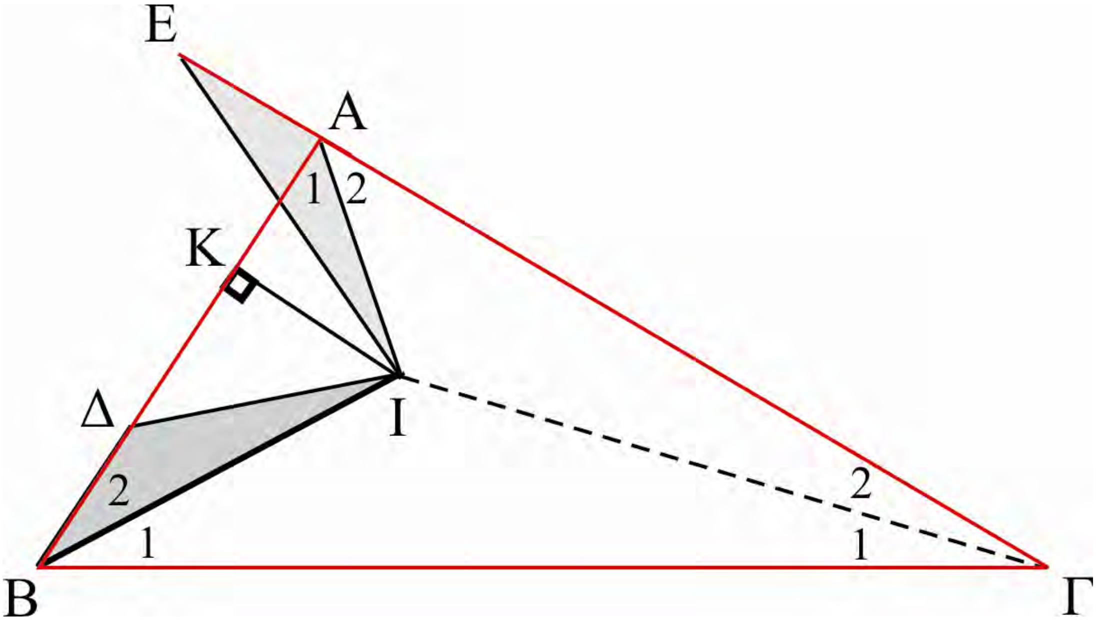
$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + 2\frac{\alpha}{\gamma} + 2\frac{\gamma}{\beta} + 2\frac{\beta}{\alpha} \geq 3\frac{\alpha}{\gamma} + 3\frac{\gamma}{\beta} + 3\frac{\beta}{\alpha},$$ αρκεί

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 - \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \geq 0$$, αρκεί

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma}-\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right]\geq 0,$$

η οποία ισχύει.

4.



Αν ΓΕ=α τότε ΑΕ=α-β=ΒΔ και ΓΙ η τρίτη διχοτόμος.

Έχουμε $\overset{\Delta}{\mathrm{I\Gamma E}}=\overset{\Delta}{\mathrm{I\Gamma B}}$ διότι ΙΓ=ΙΓ, ΓΕ=ΓΒ και $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2$ άρα $\hat{\mathrm{E}}=\hat{\mathrm{B}}_1$, ΙΕ=ΙΒ.

Άρα $\overset{\Delta}{\mathrm{IAE}}=\overset{\Delta}{\mathrm{IB\Delta}}$ διότι ΒΔ=ΑΕ, ΙΕ=ΙΒ και $\hat{\mathrm{E}}=\hat{\mathrm{B}}_1=\hat{\mathrm{B}}_2$, άρα ΙΑ=ΙΔ.

Β΄ τρόπος

Αρκεί το Ι να ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΔ. Αν δηλαδή ΙΚ⊥ΑΔ, αρκεί ΚΑ=ΚΔ. Πράγματι ΚΑ=τ–α
και ΚΔ=|ΒΚ–ΒΔ|=|τ–β– (α–β)|=|τ–α|=τ–α, αφού τ>α.

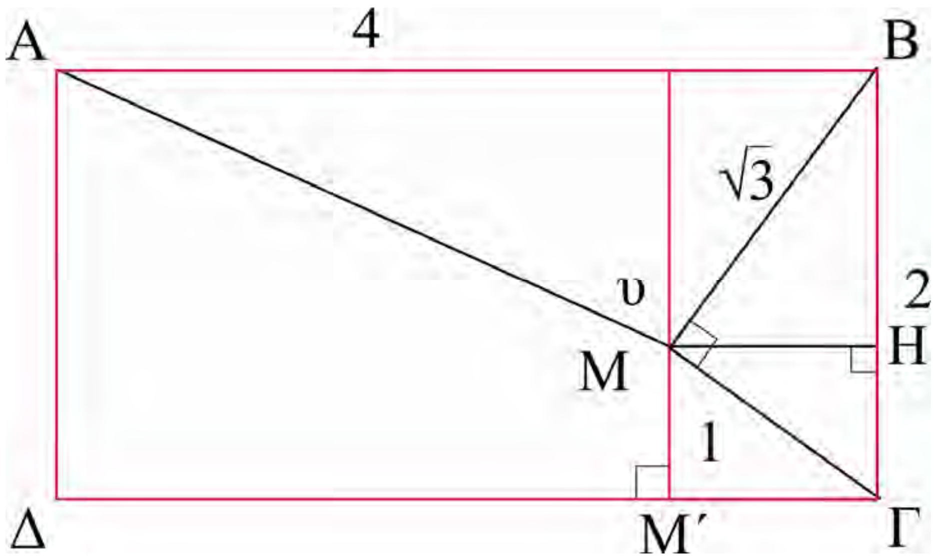
<u>ΛΥΣΕΙΣ</u> Β΄ τάξη Λυκείου

1. Αν x_1, x_2 οι ρίζες , τότε

$$x_1 + x_2 = 2006\kappa + 1 \quad (1) \text{ και } x_1 \cdot x_2 = 2007 \quad (2).$$

Από την (2) προκύπτει ότι οι x_1, x_2 θα είναι περιττοί. Αλλά τότε το άθροισμα τους $x_1 + x_2$ θα είναι άρτιος, οπότε δεν θα ισχύει η (1).

2.



Παρατηρούμε ότι $\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 4 = 2^2$ οπότε το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ορθογώνιο στο Μ. Επειδή

$$\text{Μ}\Gamma = \frac{\text{Β}\Gamma}{2} \; \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon \; \overset{\Lambda}{\text{ΜΒ}\Gamma} = 30^0,$$

οπότε $\overset{\Lambda}{\text{Μ}\Gamma\text{Β}} = 60^0 \; \kappa\alpha\iota \; \overset{\Lambda}{\text{Μ}\Gamma\Delta} = 30^0$. Έστω

$MM' \perp \Delta\Gamma$, τότε $MM' = \frac{1}{2}$ άρα $\upsilon = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Το εμβαδόν του $\overset{\Delta}{MAB}$ είναι $E = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} = 3$..

β΄ τρόπος

$MB^2 = B\Gamma \cdot BH$ οπότε $3 = 2 \cdot \upsilon$ άρα $\upsilon = \frac{3}{2}$

3. Είναι

$$\kappa = (2+2^2+2^3+2^4)+2^4(2+2^2+2^3+2^4)+...+2^{2004}(2+2^2+2^3+2^4) =$$

$$= 30(1+2^4+2^8+...+2^{2004}) = \pi o\lambda.30$$

4. **α)** Από τη γνωστή ανισότητα: $\frac{\alpha+\beta}{2} > \sqrt{\alpha\beta}$ όπου α, β θετικοί με $\alpha \neq \beta$, έχουμε:

$$\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}{2} > \sqrt{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{6}$$

Οπότε $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3} > 2\sqrt[6]{6}$.

Αρκεί λοιπόν

$$2\sqrt[6]{6} \geq \sqrt[3]{19}, \quad \acute{\eta} \quad 2^6 \cdot 6 \geq 19^2, \quad \acute{\eta} \quad 384 \geq 361$$

που ισχύει.

β) Αν $\lambda = \dfrac{\sqrt[3]{38}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$ τότε

$$\lambda = \frac{\sqrt[3]{19}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2} \textit{ οπότε } \lambda^2 < 2.$$

Η εξίσωση για $x \neq 0$ είναι ισοδύναμη με την $x^2 - 2\lambda x + 2 = 0$ με $\Delta = 4(\lambda^2 - 2) < 0$.

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

β΄ τρόπος

$$x^2 - 2\lambda x + 2 = x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda^2 + 2 =$$

$$= (x-\lambda)^2 + (2-\lambda^2) \geq 2 - \lambda^2 > 0$$

ΛΥΣΕΙΣ Γ΄ τάξη Λυκείου

1. Για $x = 0$ έχουμε $f(f(y)) = -f(y) \textit{ για κάθε } y \in \mathbb{R}$.
Για $y = 0$ έχουμε $f(f(x)) = x - f(0) \textit{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$.
Άρα

$$f(f(x)) = -f(x) \textit{ και } f(f(x)) = x - f(0), \textit{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επομένως

$-f(x) = x - f(0)$ ή

$$f(x) = f(0) - x \quad (1) \quad \text{και} \quad f(-x) = f(0) + x \quad (2), \textit{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Οπότε από τις (1) και (2) έχουμε:

$$f(x) + f(-x) = 2f(0), \textit{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η h είναι σταθερή.

2. Έστω ότι η εξίσωση έχει μια ακέραια λύση ρ. Τότε

$$3^{\rho+1}-\rho\cdot 3^{\rho}-4\rho-1=0\Rightarrow 3^{\rho}(3-\rho)=4\rho+1$$

$$\Rightarrow 3^{\rho}=\frac{4\rho+1}{3-\rho}\,(\text{αφού προφανώς } \rho\neq 3)\Rightarrow \frac{4\rho+1}{3-\rho}>0$$

$$\Rightarrow (4\rho+1)(\rho-3)<0\Rightarrow -\frac{1}{4}<\rho<3\Rightarrow \rho\in\{0,1,2\}.$$

Όπως βρίσκουμε εύκολα, οι αριθμοί ρ=0 και ρ=1 δεν είναι λύσεις της εξίσωσης. Ο αριθμός ρ=2 όμως είναι λύση της εξίσωσης. Άρα η εξίσωση έχει τη μοναδική λύση ρ=2.

3. Επειδή

$$|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}\left(\overline{z_1}z_2\right)=z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2+\overline{z}_2z_1=|z_1+z_2|^2$$

αρκεί να δείξουμε ότι: $\dfrac{|z_1|^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}+\dfrac{|z_2|^2}{\eta\mu^2\theta}\geq|z_1+z_2|^2$.

Πράγματι

$$\frac{|z_1|^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}+\frac{|z_2|^2}{\eta\mu^2\theta}=(\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta)\left(\left(\frac{|z_1|}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)^2+\left(\frac{|z_2|}{\eta\mu\theta}\right)^2\right)\geq\left(|z_1|+|z_2|\right)^2\geq|z_1+z_2|^2$$

4. Από την ισότητα $\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\Lambda}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma$ έχουμε ότι τα Κ, Λ, Μ βρίσκονται στο ίδιο τόξο χορδής ΒΓ. Έστω

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\Lambda}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma=\phi.$$

Αν ΚΒ· ΚΓ= ΛΒ· ΛΓ= ΜΒ· ΜΓ, τότε

$$\frac{1}{2}\mathrm{KB}\cdot\mathrm{K}\Gamma\,\eta\mu\phi=\frac{1}{2}\Lambda\mathrm{B}\cdot\Lambda\Gamma\,\eta\mu\phi=\frac{1}{2}\mathrm{MB}\cdot\mathrm{M}\Gamma\,\eta\mu\phi$$

$$\Rightarrow(\mathrm{KB}\Gamma)=(\Lambda\mathrm{B}\Gamma)=(\mathrm{MB}\Gamma).$$

Αυτό σημαίνει ότι τα Κ, Λ, Μ θα βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη στην ΒΓ, άτοπο αφού το μέγιστο πλήθος κοινών σημείων ευθείας και κύκλου είναι 2.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1.

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης

$$A=\left(200:8+12\cdot 100\right)+\left[200:\left(8+2\right)+762\right]\cdot\left[\left(-1\right)^{13}+\left(-1\right)^{12}+\left(-1\right)^{2007}\right]^2.$$

Πρόβλημα 2.

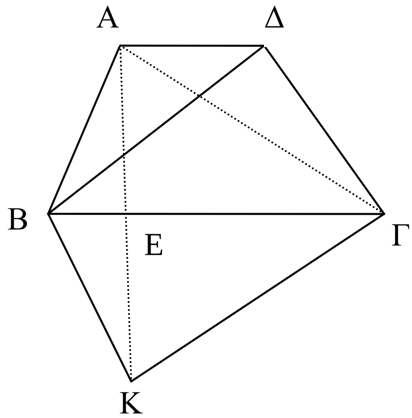
Οι μαθητές ενός Γυμνασίου μπορούν να παραταχθούν σε εξάδες, σε οκτάδες και σε δεκάδες, χωρίς να περισσεύει κανείς. Τα πλήθη των μαθητών των τάξεων Α΄, Β΄ και Γ΄ είναι αριθμοί ανάλογοι προς τους αριθμούς 5, 4 και 3, αντίστοιχα. Αν το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου είναι αριθμός μεγαλύτερος του 300 και μικρότερος του 400, να βρεθεί το πλήθος των μαθητών κάθε τάξης.

Πρόβλημα 3.

Ένας έμπορος αγόρασε 200 κιλά φράουλες με τιμή αγοράς 3 ευρώ το κιλό. Κατά τη μεταφορά είχε απώλεια 10% στα κιλά που αγόρασε. Πόσο πρέπει να πουλήσει το κιλό τις φράουλες ώστε να έχει κέρδος 20% επί της τιμής της αγοράς;

Πρόβλημα 4.

Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος η μεγάλη βάση ΒΓ είναι διπλάσια της μικρής βάσης ΑΔ. Αν το εμβαδόν του τραπεζίου είναι $300cm^2$ και το σημείο Κ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ΒΓ (δηλαδή η ΒΓ είναι μεσοκάθετος της ΑΚ), να υπολογίσετε:
(α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ και
(β) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΚΓ.



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$\mathrm{A} = -\left[(-2)^8 : (-4)^2 + (-4)^2\right] : (-2)^4, \quad \mathrm{B} = -(x-3) - 3(y-4) - \left[x(y-2) - y(x+3)\right].$$

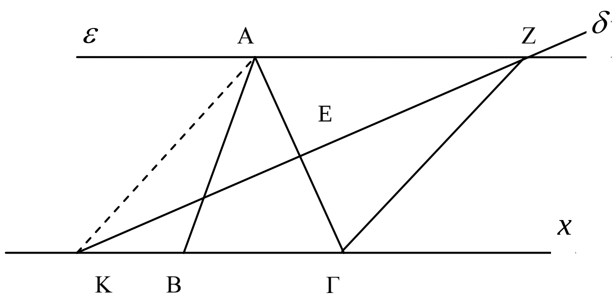
Για ποιες τιμές του x αληθεύει η ανίσωση: $\mathrm{A} > \mathrm{B}$.

Πρόβλημα 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = 40^\circ$. Η ευθεία ε είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ και η ευθεία δ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ.

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\mathrm{Z\hat{\Gamma}}x$,

(β) Να αποδείξετε ότι ΚΑ = ΑΖ.



Πρόβλημα 3

(α) Να αποδείξετε ότι, αν ένας φυσικός αριθμός είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, τότε το τελευταίο του ψηφίο ανήκει στο σύνολο $\Sigma = \{0,1,4,5,6,9\}$.

(β) Να βρεθεί πενταψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής $\mathrm{A} = aaabb$, όπου a,b ψηφία με $a \neq 0$, ο οποίος είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, περιττός και διαιρείται με το 9.

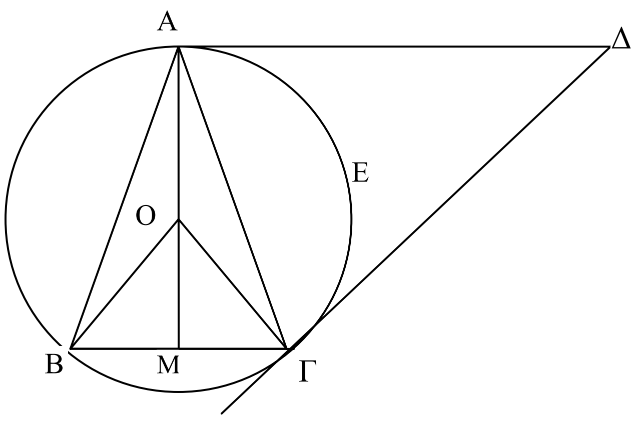
Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$. Η ΑΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ και η ΓΔ είναι κάθετη προς την ΟΓ.

(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΑΕΓ συναρτήσει της πλευράς ΒΓ = α του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει της πλευράς ΒΓ = α .

(γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές.



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Δύο παιδιά συζητούν για αλγεβρικά προβλήματα.

Ο Γιάννης λέει στη Μαρία: *Έχω σκεφτεί δύο ακέραιους αριθμούς x και y που είναι τέτοιοι ώστε, αν μειώσω τον x κατά 50 και αυξήσω τον y κατά 40, τότε το γινόμενό τους δεν μεταβάλλεται.*

Η Μαρία ρωτάει το Γιάννη: *Αν αυξήσεις τον αριθμό x κατά 100 και μειώσεις τον αριθμό y κατά 20, τότε πάλι το γινόμενό τους δεν μεταβάλλεται;*

Ο Γιάννης απαντάει: *Πράγματι, αυτό ισχύει.*

Η Μαρία καταλήγει: *Τότε γνωρίζω τους αριθμούς που σκέφθηκες.*

Έχει δίκιο η Μαρία; Εσείς μπορείτε να βρείτε τους αριθμούς που σκέφθηκε ο Γιάννης;

Πρόβλημα 2

Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\neq 0$ τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{(\beta-1)(\beta+1)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{(\gamma-1)(\gamma+1)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{\mathrm{A}}=45^\circ$. Φέρουμε ευθεία ε κάθετη προς την ΑΓ στο Α η οποία τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο Ε. Πάνω στην ευθεία ε παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΑΓ με το σημείο Α να βρίσκεται μεταξύ των Ε και Δ. Να υπολογίσετε συναρτήσει της πλευράς $\mathrm{A\Gamma}=\beta$:

(α) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ,

(β) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΕ.

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί x,y που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^6+2x^3y^2+3x^3+y^4+3y^2-40=0$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^6 + x^4 - 2x^3 - 2x^2y^2 - 2y^2 + 2y^4 + 2 = 0.$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές των θετικών μονοψήφιων ακεραίων αριθμών κ, λ, μ, για τους οποίους η δευτεροβάθμια εξίσωση $\kappa x^2 + \lambda x + \mu = 0$ έχει δύο ακέραιες ίσες λύσεις.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και ημιευθεία $\mathrm{A}x // \mathrm{B\Gamma}$ (η $\mathrm{A}x$ βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο με το σημείο Γ ως προς την ευθεία ΑΒ). Στην ημιευθεία $\mathrm{A}x$ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε έτσι, ώστε το τετράπλευρο ΒΓΔΕ να είναι ρόμβος (το σημείο Ε βρίσκεται ανάμεσα στο Α και στο Δ). Στο σημείο Δ θεωρούμε την κάθετη ευθεία στη ΔΓ που τέμνει την προέκταση της πλευράς ΒΑ στο Ζ.

(α) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

(β) Να αποδειχθεί ότι το Ε είναι έγκεντρο του τριγώνου ΑΓΖ.

Πρόβλημα 4.

Αν $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} 3x^2y + 2yz^2 &= 70xz \\ 7y^2z + 4zx^2 &= 256xy \\ 5z^2x + 6xy^2 &= 52yz. \end{aligned}$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A} = 30^\circ$. Στα σημεία Α και Γ θεωρούμε τις εφαπτόμενες του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνονται στο Δ.

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι όμοια.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ συναρτήσει της πλευράς ΒΓ = α του τριγώνου ΑΒΓ.

Πρόβλημα 2

(α) Να προσδιοριστούν οι παράμετροι $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε ο αριθμός 2 να είναι ρίζα των εξισώσεων:

$$\lambda x^3 - (\mu + 4)x - 2 = 0 \text{ και } \mu x^2 - 4x - \lambda - 2 = 0.$$

(β) Για τις τιμές των λ, μ που βρήκατε στο ερώτημα (α), να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{\lambda x^3 - (\mu + 4)x - 2}{\mu x^2 - 4x - \lambda - 2} = \frac{17}{8}.$$

Πρόβλημα 3

Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f\left(f(x) - f(y)\right) = f\left(f(x)\right) - y, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R},$$

τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

Πρόβλημα 4

Για κάθε τρεις μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b και c, που είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 \geq 2.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
$68^{ου}$ ΘΑΛΗΣ
24 Νοεμβρίου 2007

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. $\mathrm{A} = \left(200:8+12\cdot 100\right)+\left[200:\left(8+2\right)+762\right]\cdot\left[\left(-1\right)^{13}+\left(-1\right)^{12}+\left(-1\right)^{2007}\right]^2$

$$= \left(25+1200\right)+\left(200:10+762\right)\cdot\left[\left(-1\right)+1+\left(-1\right)\right]^2$$
$$= 1225+\left(20+762\right)\cdot\left(-1\right)^2$$
$$= 1225+782\cdot 1 = 2007.$$

2. Αν ω είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου, τότε ο ω είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 6, 8 και 10. Επειδή $\text{ΕΚΠ}\left[6,8,10\right]=120$, έπεται ότι $\omega\in\left\{120,240,360,480,...\right\}$ και αφού $300<\omega<400$, θα είναι $\omega=360$.

Αν x,y,z είναι ο αριθμός των μαθητών της Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξης, αντίστοιχα, τότε θα έχουμε

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}=\lambda \text{ και } x+y+z=360.$$

Άρα είναι

$$x=5\lambda, y=4\lambda, z=3\lambda$$
$$\text{και } 5\lambda+4\lambda+3\lambda=360 \Leftrightarrow 12\lambda=360 \Leftrightarrow \lambda=30.$$

Άρα είναι: $x=5\cdot 30=150,\ y=4\cdot 30=120,\ z=3\cdot 30=90.$

3. Ο έμπορος πλήρωσε για την αγορά $200\cdot 3=600$ ευρώ.

Η απώλεια του σε κιλά ήταν $200\cdot\frac{10}{100}=20$ κιλά, οπότε του έμειναν

$$200-20=180 \text{ κιλά}.$$

Για να έχει κέρδος 20% επί της τιμής αγοράς πρέπει να εισπράξει

$$600+600\cdot\frac{20}{100}=720 \text{ ευρώ}.$$

Άρα πρέπει να πουλήσει το κιλό $720:180=4$ ευρώ.

4. (α) Αν $x=\mathrm{B\Gamma}$, $y=\mathrm{A\Delta}$ και $\mathrm{AE}=\upsilon$, τότε $x=2y$ και

$$\frac{\left(x+y\right)\upsilon}{2}=\mathrm{E}=\left(\mathrm{AB\Gamma\Delta}\right)\Leftrightarrow 3y\cdot\upsilon=2\mathrm{E}\Leftrightarrow y\cdot\upsilon=\frac{2\mathrm{E}}{3}\Leftrightarrow y\cdot\upsilon=200cm^2.$$

Άρα έχουμε

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{AB\Delta}\right)=\frac{1}{2}y\cdot\upsilon=\frac{1}{2}\cdot 200cm^2=100cm^2.$$

(β) $\left(\mathrm{ABK\Gamma}\right)=2\left(\mathrm{AB\Gamma}\right)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2y\cdot\upsilon=2\left(y\cdot\upsilon\right)=2\cdot 200=400cm^2.$

Διαφορετικά
Το τετράπλευρο ΑΒΚΓ έχει καθέτους διαγώνιους, οπότε έχει εμβαδόν

$$\left(\mathrm{AB K\Gamma}\right) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{B\Gamma} \cdot \mathrm{AK} = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot 2\upsilon = 2\left(y \cdot \upsilon\right) = 2 \cdot 200 = 400cm^2.$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. $$\mathrm{A}=-\left[(-2)^8:(-4)^2+(-4)^2\right]:(-2)^4=-\left[2^8:4^2+4^2\right]:2^4$$
$$=-\left[2^8:\left(2^2\right)^2+4^2\right]:2^4=-\left(2^8:2^4+4^2\right):2^4$$
$$=-\left(2^4+4^2\right):2^4=-32:16=-2.$$
$$\mathrm{B}=-(x-3)-3(y-4)-\left[x(y-2)-y(x+3)\right]$$
$$=-x+3-3y+12-(xy-2x-yx-3y)$$
$$=-x-3y+15-xy+2x+xy+3y=x+15.$$
$$\mathrm{A}>\mathrm{B}\Leftrightarrow -2>x+15\Leftrightarrow -x>17\Leftrightarrow x<-17.$$

2. (α) $\mathrm{Z}\hat{\Gamma}x=\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma$ (ως εντός εναλλάξ στις παράλληλες ΒΓ και ε).
Επειδή η δ είναι μεσοκάθετη της ΑΓ το τρίγωνο ΑΓΖ είναι ισοσκελές με $\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{A}=\mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$. Όμως, από την παραλληλία των ευθειών ε και ΒΓ προκύπτει ότι $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\hat{\Gamma}$. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=40^\circ$ προκύπτει ότι
$$\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=\frac{180^\circ-\hat{\mathrm{A}}}{2}=\frac{180^\circ-40^\circ}{2}=70^\circ.$$
Άρα έχουμε
$$\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{A}=\mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\hat{\Gamma}=70^\circ,$$
οπότε θα είναι
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma=180^\circ-2\cdot 70^\circ=40^\circ$$
$$\Rightarrow \mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}x=40^\circ.$$
(β) Επειδή η δ είναι μεσοκάθετη της ΑΓ, το τρίγωνο ΚΑΓ είναι ισοσκελές με ΚΑ = ΚΓ, οπότε η ΚΕ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΑΚΓ. Άρα έχουμε
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z}=\Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z}.$$
Επειδή είναι $\varepsilon \parallel \mathrm{B}\Gamma$ θα έχουμε
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{K}=\Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z},$$
οπότε θα είναι και
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{K},$$
οπότε το τρίγωνο ΚΑΖ είναι ισοσκελές με ΚΑ = ΑΖ .

3. (α) Από τον κανόνα πολλαπλασιασμού δύο φυσικών αριθμών έπεται ότι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου τους είναι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου των ψηφίων των μονάδων τους. Θεωρώντας τα τετράγωνα των μονοψήφιων φυσικών αριθμών διαπιστώνουμε ότι αυτά λήγουν σε 0, 1, 4, 5, 6, 9, οπότε το τελευταίο ψηφίο κάθε τετραγώνου φυσικού αριθμού ανήκει στο σύνολο $\Sigma=\{0,1,4,5,6,9\}$.

(β) Σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα θα πρέπει $b\in\{0,1,4,5,6,9\}$ και αφού ο αριθμός είναι περιττός πρέπει $b\in\{1,5,9\}$.

Επειδή ο Α διαιρείται με το 9 πρέπει να ισχύει ότι:
$$3a+2b=\text{πολλαπλάσιο του } 9. \qquad (1)$$

- Για $b=1$ λαμβάνουμε $3a+2=\pi o\lambda.9$, αδύνατο.
- Για $b=5$ λαμβάνουμε $3a+10=\pi o\lambda.9$, αδύνατο.
- Για $b=9$ λαμβάνουμε $3a+18=\pi o\lambda.9$, οπότε προκύπτει ότι $a\in\{3,6,9\}$. Άρα είναι $\mathrm{A}=33399$ ή $\mathrm{A}=66699$ ή $\mathrm{A}=99999$.

4. (α) Παρατηρούμε ότι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Gamma=2\hat{\mathrm{A}}=60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο και ισχύει ότι $R=\mathrm{B}\Gamma=\alpha$. Επιπλέον $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=\dfrac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ$.

Άρα είναι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\Gamma=2\cdot75^\circ=150^\circ$, οπότε θα έχουμε

$$E_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}(\mathrm{OAE}\Gamma)=\pi\alpha^2\cdot\frac{150^\circ}{360^\circ}=\frac{5\pi\alpha^2}{12}.$$

(β) Επειδή είναι $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\hat{\Gamma}=75^\circ$ (εντός εναλλάξ στις παράλληλες ΑΔ και ΒΓ με τέμνουσα την ΑΓ) και $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta=90^\circ-\mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{A}=90^\circ-\mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma=75^\circ$, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια.

(γ) Επειδή είναι $\mathrm{OA}\perp\mathrm{A}\Delta$ και $\mathrm{A}\Delta\parallel\mathrm{B}\Gamma$ θα είναι και $\mathrm{OA}\perp\mathrm{B}\Gamma$, οπότε η ΟΑ περνάει από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ. Από το τρίγωνο ΟΜΓ έχουμε

$$\mathrm{OM}^2=\mathrm{O}\Gamma^2-\mathrm{M}\Gamma^2\Leftrightarrow\mathrm{OM}^2=\alpha^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\Leftrightarrow\mathrm{OM}^2=\frac{3\alpha^2}{4}\Leftrightarrow\mathrm{OM}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα είναι $\mathrm{AM}=\mathrm{AO}+\mathrm{OM}=\alpha\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ και

$$(\mathrm{AB}\Gamma)=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\left(\alpha+\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\alpha^2\left(2+\sqrt{3}\right)}{4}.$$

.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Σύμφωνα με τη συζήτηση που είχε ο Γιάννης με τη Μαρία, αν x, y είναι οι αριθμοί, τότε θα ισχύουν:

$$\left\{\begin{aligned} xy &= (x-50)(y+40) \\ xy &= (x+100)(y-20) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 40x-50y &= 2000 \\ -20x+100y &= 2000 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 100 \\ y &= 20 \end{aligned}\right\}.$$

2. Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρανομαστών είναι

$$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\neq 0,$$

οπότε έχουμε

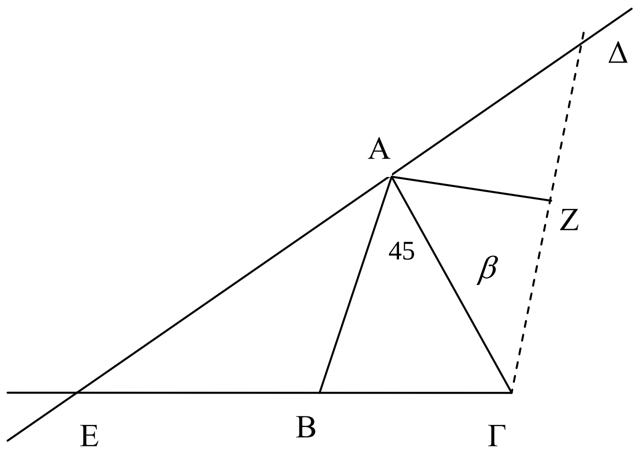
$$\mathrm{A}=\frac{(\beta-\gamma)(\alpha^2-1)}{-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}+\frac{(\gamma-\alpha)(\beta^2-1)}{-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}+\frac{(\alpha-\beta)(\gamma^2-1)}{-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=$$

$$=-\frac{(\beta-\gamma)\alpha^2+(\gamma-\alpha)\beta^2+(\alpha-\beta)\gamma^2+(\beta-\gamma+\gamma-\alpha+\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=$$

$$=-\frac{(\beta-\gamma)\alpha^2+\beta\gamma(\beta-\gamma)-\alpha(\beta^2-\gamma^2)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=$$

$$=-\frac{(\beta-\gamma)(\alpha^2+\beta\gamma-\alpha(\beta+\gamma))}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}==-\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)}=1.$$

3.



(α) Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta=45^\circ$. Άρα είναι $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta=45^\circ=\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$, οπότε $\mathrm{AB}\parallel\Gamma\Delta$, αφού τεμνόμενες από την ΑΓ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο με βάσεις ΑΒ = β, $\Gamma\Delta=\sqrt{\beta^2+\beta^2}=\beta\sqrt{2}$ και ύψος $\mathrm{AZ}=\frac{\Gamma\Delta}{2}=\frac{\beta\sqrt{2}}{2}$. Άρα έχει εμβαδόν

$$(\mathrm{AB}\Gamma\Delta)=\frac{\beta+\beta\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\beta\sqrt{2}}{2}=\frac{\beta^2\left(2+\sqrt{2}\right)}{4}.$$

(β) Επειδή είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ τα τρίγωνα ΕΑΒ και ΕΔΓ είναι όμοια, οπότε, αν $EA = x$, θα έχουμε:

$$\frac{x}{AB} = \frac{E\Delta}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \frac{x}{\beta} = \frac{x+\beta}{\beta\sqrt{2}} \Leftrightarrow x\sqrt{2} = x+\beta \Leftrightarrow x\left(\sqrt{2}-1\right) = \beta \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\beta}{\sqrt{2}-1} = \beta\left(\sqrt{2}+1\right).$$

4. Η δεδομένη σχέση γράφεται διαδοχικά:

$$\underbrace{x^6 + 2x^3y^2 + y^4} + 3x^3 + 3y^2 = 40$$

$$\left(x^3 + y^2\right)^2 + 3\left(x^3 + y^2\right) + 2 = 42$$

$$\left(x^3 + y^2 + 1\right)\cdot\left(x^3 + y^2 + 2\right) = 42.$$

Οι αριθμοί όμως $x^3 + y^2 + 1$ και $x^3 + y^2 + 2$, είναι θετικοί ακέραιοι με $x^3 + y^2 + 1 < x^3 + y^2 + 2$ και γινόμενο

$$42 = 1\cdot 41 = 2\cdot 21 = 3\cdot 14 = 6\cdot 7.$$

Επομένως θα πρέπει:

$$x^3 + y^2 + 1 = 1 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 42 \quad (1)$$
$$x^3 + y^2 + 1 = 2 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 21 \quad (2)$$
$$x^3 + y^2 + 1 = 3 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 14 \quad (3)$$
$$x^3 + y^2 + 1 = 6 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 7 \quad (4)$$

Προφανώς οι σχέσεις $(1), (2), (3)$ είναι αδύνατες και από τη σχέση (4), έχουμε:

$$x^3 + y^2 = 5 \text{ που αληθεύει για } x = 1 \text{ και } y = 2.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το τριώνυμο

$$\omega^2 + 3\omega - 40 = 0, \text{ όπου } \omega = x^3 + y^2,$$

η οποία, αφού $x, y > 0$ έχει τη μοναδική λύση $x^3 + y^2 = 5$, που αληθεύει μόνο για $x = 1$ και $y = 2$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Ισοδύναμα από την δεδομένη ισότητα, έχουμε:

$$\underbrace{x^6-2x^3+1}+\underbrace{x^4-2x^2y^2+y^4}+\underbrace{y^4-2y^2+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-1\right)^2+\left(x^2-y^2\right)^2+\left(y^2-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-1=0 \text{ και } x^2-y^2=0 \text{ και } y^2-1=0\right).$$

$$\Leftrightarrow \left(x=1 \text{ και } y=1\right) \text{ ή } \left(x=1 \text{ και } y=-1\right)$$

2. Για να έχει η εξίσωση διπλή λύση, πρέπει η διακρίνουσά της να είναι μηδέν.

$$\Delta=0 \Leftrightarrow \lambda^2-4\kappa\mu=0 \Leftrightarrow \lambda^2=4\kappa\mu .$$

Στη περίπτωση αυτή η διπλή λύση είναι: $x_1=x_2=\dfrac{-\lambda}{2\kappa}$

Ο αριθμός $4\kappa\mu$ είναι άρτιος. Άρα και ο λ^2 είναι άρτιος, οπότε ο λ είναι άρτιος.

Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο λ (δεδομένου ότι είναι μονοψήφιος θετικός ακέραιος) είναι: $\lambda=2$ ή $\lambda=4$ ή $\lambda=6$ ή $\lambda=8$.

Αν $\lambda=2$ τότε: $4=4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu=1$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

$$\kappa=1 \text{ και } \mu=1.$$

Αν $\lambda=4$ τότε: $16=4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu=4$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

($\kappa=1$ και $\mu=4$) ή ($\kappa=4$ και $\mu=1$) ή ($\kappa=2$ και $\mu=2$).

Αν $\lambda=6$ τότε: $36=4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu=9$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

($\kappa=1$ και $\mu=9$) ή ($\kappa=9$ και $\mu=1$) ή ($\kappa=3$ και $\mu=3$).

Αν $\lambda=8$ τότε: $64=4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu=16$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

($\kappa=2$ και $\mu=8$) ή ($\kappa=8$ και $\mu=2$) ή ($\kappa=4$ και $\mu=4$).

Άρα οι δυνατές τιμές για τη διατεταγμένη τριάδα (κ,λ,μ) είναι:

$(1,2,1)$, $(1,4,4)$, $(2,4,2)$, $(1,6,9)$, $(3,6,3)$, $(2,8,8)$, $(4,8,4)$.

Οι άλλες περιπτώσεις απορρίπτονται, διότι δεν δίνουν ακέραια λύση.

Οι εξισώσεις που προκύπτουν, με την αντίστοιχη διπλή λύση είναι:

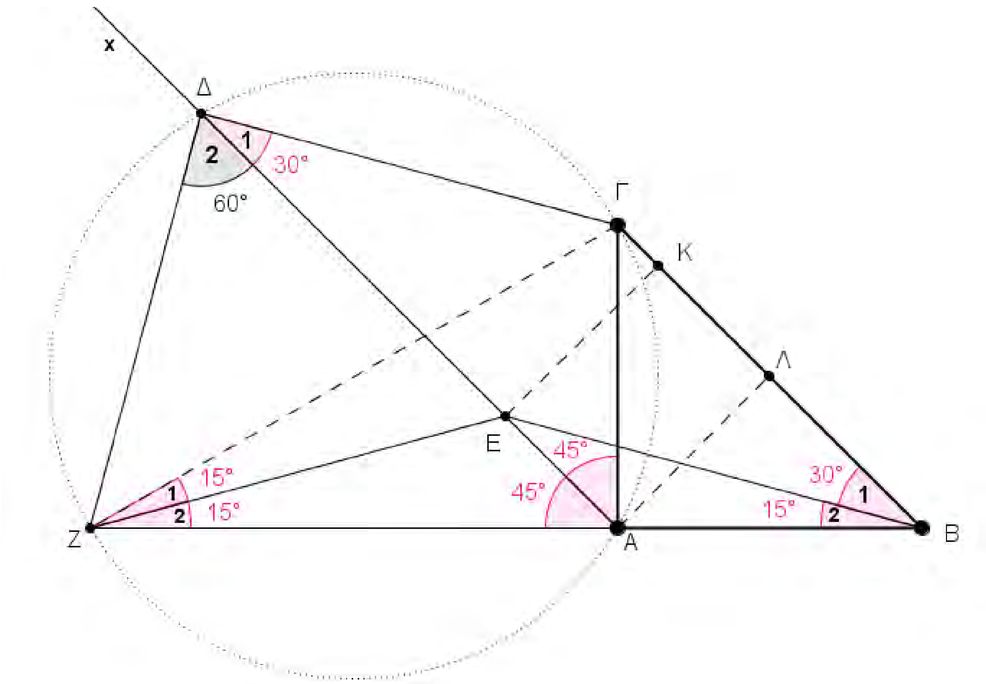
$$x^2+2x+1=0 \text{ με διπλή λύση } x_1=x_2=-1,$$

$$x^2+4x+4=0 \text{ με διπλή λύση } x_1=x_2=-2,$$

$$x^2+6x+9=0 \text{ με διπλή λύση } x_1=x_2=-3.$$

3. (α) Εφόσον το ΒΓΔΕ είναι ρόμβος, θα ισχύουν οι ισότητες:

$$\text{ΒΓ}=\text{ΓΔ}=\text{ΔΕ}=\text{ΒΕ} \qquad (1)$$



Θεωρούμε $ΑΛ$ και $ΕΚ$ κάθετες στη $ΒΓ$.
Τότε $ΑΛ = ΕΚ$ (διότι $ΑΛΚΕ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο).
Η $ΑΛ$ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$, οπότε $ΑΛ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Άρα $ΑΛ = ΕΚ = \frac{ΒΓ}{2} \overset{(1)}{=} \frac{ΒΕ}{2}$. Δηλαδή στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΕΚ$, έχουμε:

$$ΕΚ = \frac{ΒΕ}{2} \text{ οπότε } \hat{Β}_1 = 30^o.$$

Από το ρόμβο $ΒΓΔΕ$ έχουμε $\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1 = 30^o$ και επειδή $Γ\hat{Δ}Ζ = 90^o$ έχουμε τελικά ότι:

$$\boxed{\hat{Δ}_2 = 60^o} \qquad (2)$$

Το τετράπλευρο $ΑΓΔΖ$ είναι εγγράψιμο (διότι $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^o$) και η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Γ\hat{Α}Ζ$. Άρα το $Δ$ είναι μέσο του τόξου $ΓΖ$, οπότε

$$\boxed{ΔΓ = ΔΖ \overset{(1)}{=} ΔΕ} \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $ΔΕΖ$ είναι ισόπλευρο.

(β) Προφανώς η $ΑΕ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Γ\hat{Α}Ζ$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $ΖΕ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Γ\hat{Ζ}Α$.
Εφόσον το τρίγωνο $ΔΕΖ$ είναι ισόπλευρο, θα ισχύει $ΕΖ = ΕΒ$ και επειδή $\hat{Β}_2 = 15^o$, θα ισχύει:

$$\hat{Ζ}_2 = 15^o \qquad (4)$$

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $\mathrm{A\Gamma\Delta Z}$ έχουμε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = \hat{\Delta}_1 = 30^o$, οπότε θα είναι $\hat{\mathrm{Z}}_1 = 15^o$.

4. Για $xyz \neq 0$ το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\frac{3xy}{z} + \frac{2yz}{x} = 70, \ \frac{7yz}{x} + \frac{4zx}{y} = 256, \ \frac{5zx}{y} + \frac{6xy}{z} = 52,$$

το οποίο, αν θέσουμε

$$\frac{xy}{z} = u, \ \frac{yz}{x} = v, \ \frac{zx}{y} = w$$

γίνεται

$$\left.\begin{cases} 3u + 2v = 70 & (1) \\ 7v + 4w = 256 & (2) \\ 5w + 6u = 52 & (3) \end{cases}\right\}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε

$$9(u + v + w) = 378 \Leftrightarrow .$$

$$u + v + w = 42 \ . \qquad (4)$$

Λόγω της (4) η εξίσωση (2) γίνεται

$$7v + 4(42 - u - v) = 256$$

$$\Leftrightarrow -4u + 3v = 88. \qquad (5)$$

Από τις (1) και (5) λαμβάνουμε $u = 2, \ v = 32$, οπότε από την (4) προκύπτει ότι $w = 8$. Άρα έχουμε το σύστημα

$$\frac{xy}{z} = 2, \ \frac{yz}{x} = 32, \ \frac{zx}{y} = 8 \qquad (6)$$

από το οποίο με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των τριών εξισώσεων έχουμε

$$xyz = 2 \cdot 8 \cdot 32 \, . \qquad (7)$$

Από τις (6) και (7) λαμβάνουμε

$$\left\{\begin{matrix} 32x^2 = 2 \cdot 8 \cdot 32 \\ 8y^2 = 2 \cdot 8 \cdot 32 \\ 2z^2 = 2 \cdot 8 \cdot 32 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2 = 16 \\ y^2 = 64 \\ z^2 = 256 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = \pm 4 \\ y = \pm 8 \\ z = \pm 16 \end{matrix}\right\},$$

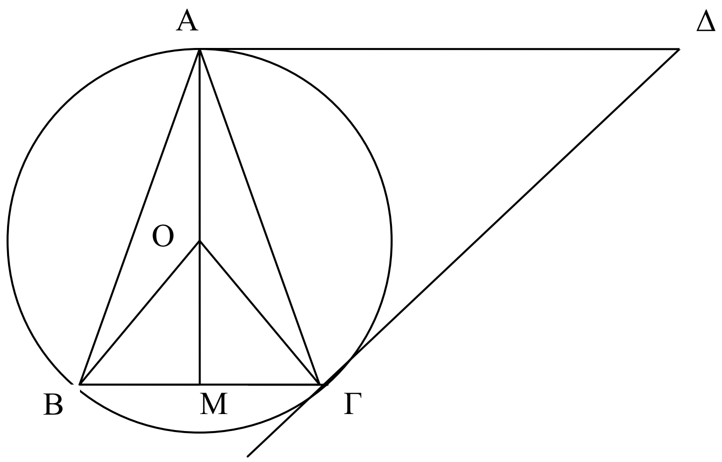
οπότε προκύπτουν συνολικά 8 τριάδες που είναι λύσεις του συστήματος:

$$(x, y, z) = (4, 8, 16) \text{ ή } (-4, -8, -16) \text{ ή } (4, 8, -16) \text{ ή } (-4, -8, 16)$$

$$\text{ή } (4, -8, -16) \text{ ή } (-4, 8, 16) \text{ ή } (4, -8, 16) \text{ ή } (-4, 8, -16).$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1.



(α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι ισοσκελή ΄(ΔΑ = ΔΓ, ως εφαπτόμενες από το Δ στον περιγεγραμμένο κύκλο) και έχουν $\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}\Delta$, ως εντός εναλλάξ. Άρα είναι όμοια.

(β) Παρατηρούμε ότι $B\hat{O}\Gamma = 2\hat{A} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο και ισχύει ότι $R = B\Gamma = \alpha$.

Έστω η ΑΟ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Μ. Επειδή είναι ΟΑ = ΟΒ και ΑΒ = ΑΓ η ΟΑ είναι η μεσοκάθετη της ΒΓ. Άρα είναι $A\Delta \parallel B\Gamma$ και το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

Επιπλέον από το τρίγωνο ΑΜΓ έχουμε $AM = \alpha\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ και

$$A\Gamma^2 = \left(\alpha + \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{4} \Leftrightarrow A\Gamma = \alpha\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Επειδή τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια ($\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}\Delta$), θα έχουμε

$$\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{A\Gamma^2}{B\Gamma} \Leftrightarrow A\Delta = \alpha\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Άρα είναι

$$\left(AB\Gamma\Delta\right) = \frac{\alpha + \alpha\left(2+\sqrt{3}\right)}{2} \cdot \frac{\alpha\left(2+\sqrt{3}\right)}{2} = \frac{\alpha^2\left(9+5\sqrt{3}\right)}{4}$$

2. **(α)** Για να είναι το 2 κοινή ρίζα των δύο εξισώσεων πρέπει και αρκεί:

$$\left\{\begin{matrix} 8\lambda - 2(\mu+4) - 2 = 0 \\ 4\mu - 4\cdot 2 - \lambda - 2 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \lambda = 2 \\ \mu = 3 \end{matrix}\right\}.$$

(β) Για λ=2 και μ=3 η δεδομένη εξίσωση γίνεται:

$$\frac{2x^3 - 7x - 2}{3x^2 - 4x - 4} = \frac{17}{8}.$$

Όμως έχουμε τις παραγοντοποιήσεις

$$2x^3-7x-2=(x-2)\left(2x^2+4x+1\right)$$
$$3x^2-4x-4=(x-2)(3x+2).$$
οπότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση
$$\frac{2x^2+4x+1}{3x+2}=\frac{17}{8},\quad x\in\mathbb{R}-\left\{2,-\frac{2}{3}\right\}.$$
$$\Leftrightarrow 16x^2-19x-26=0,\ x\in\mathbb{R}-\left\{2,\ -\frac{2}{3}\right\}$$
$$\Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=-\frac{13}{16},\ x\in\mathbb{R}-\left\{2,\ -\frac{2}{3}\right\}$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{13}{16}.$$

3. Για $x=y=0$ από τη δοσμένη συναρτησιακή σχέση (1) έχουμε:
$$f\left(f(0)-f(0)\right)=f\left(f(0)\right)-0$$
$$\Leftrightarrow\ f(0)=f\left(f(0)\right) \qquad (2)$$
Από τη δοσμένη συναρτησιακή σχέση (1) θέτοντας όπου y το $f(x)$ έχουμε:
$$f\left(f(x)-f\left(f(x)\right)\right)=f\left(f(x)\right)-f(x) \qquad (3)$$
Αν τώρα στη (3) θέσουμε $x=0$ έχουμε:
$$f\left(f(0)-f\left(f(0)\right)\right)=f\left(f(0)\right)-f(0)$$
και σε συνδυασμό με την (2) καταλήγουμε $f\left(f(0)\right)=f(0)=0$.
Θέτοντας στην (1) όπου $x=0$, έχουμε:
$$f\left(f(0)-f(y)\right)=f\left(f(0)\right)-y \text{ και δεδομένου ότι } f\left(f(0)\right)=f(0)=0,$$
καταλήγουμε στη σχέση
$$f\left(-f(y)\right)=-y. \qquad (4)$$

Θέτοντας στην (1) όπου y το x έχουμε:
$$f\left(f(x)-f(x)\right)=f\left(f(x)\right)-x \Leftrightarrow f(0)=f\left(f(x)\right)-x \Leftrightarrow$$
$$f\left(f(x)\right)=x \qquad (5)$$
Αντικαθιστώντας στην (4) όπου y το $f(x)$, έχουμε:
$$f\left(-f\left(f(x)\right)\right)=-f(x)$$
και σε συνδυασμό με την (5), καταλήγουμε στη σχέση
$$f(-x)=-f(x), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$
δηλαδή η f είναι περιττή.

4. Αν θέσουμε $x=\dfrac{a+b}{a-b}$, τότε λαμβάνουμε
$$\frac{a}{b}=\frac{x+1}{x-1} \qquad (1)$$

(είναι $x \neq 1$, αφού $b \neq 0$). Ομοίως, αν θέσουμε $y = \dfrac{b+c}{b-c}$, $z = \dfrac{c+a}{c-a}$, τότε λαμβάνουμε

$$\frac{b}{c} = \frac{y+1}{y-1} \tag{2}$$

και $$\frac{c}{a} = \frac{z+1}{z-1}\ . \tag{3}$$

Από τις (1), (2) και (3) με πολλαπλασιασμό κατά μέλη λαμβάνουμε

$$\frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{(x-1)(y-1)(z-1)} = \frac{abc}{bca} = 1 \Rightarrow xy + yz + zx = -1.$$

Όμως έχουμε

$$0 \leq (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+zx) = x^2 + y^2 + z^2 - 2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 2.$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

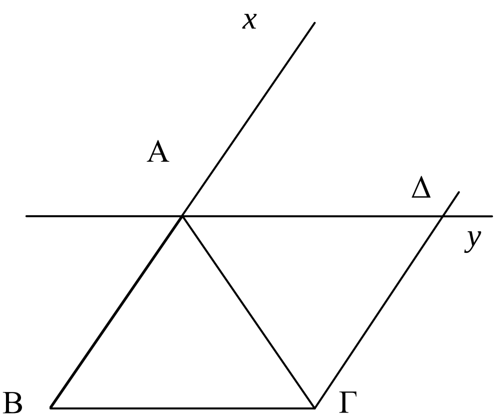
1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4$$

Μονάδες 5

2. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία Αy είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ και διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{\mathrm{A}}x$. Δίνεται ακόμη ότι:

$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 62^\circ$ και ΑΒ = ΑΔ.



(α) Να βρείτε τις γωνίες $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 2

(β) Να εξηγήσετε γιατί η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$.

Μονάδες 3

3. Αν για το θετικό ακέραιο αριθμό α ισχύει:

$$\frac{21}{5} < \frac{42}{\alpha} < \frac{21}{4},$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A} = \alpha + 5(4+\alpha) + 3(\alpha - 4) + 1919 \ .$$

Μονάδες 5

4. Ένα Γυμνάσιο συμμετέχει στην παρέλαση για την επέτειο μιας Εθνικής Εορτής με το 60% του αριθμού των αγοριών και το 80% του αριθμού των κοριτσιών του. Τα αγόρια που συμμετέχουν, αν παραταχθούν σε τριάδες, τότε δεν περισσεύει κανείς, ενώ, αν παραταχθούν σε πεντάδες ή επτάδες, τότε και στις δύο περιπτώσεις περισσεύουν από τρεις. Όλα τα αγόρια του Γυμνασίου είναι περισσότερα από 100 και λιγότερα από 200. Αν το 80% των κοριτσιών είναι αριθμός διπλάσιος από τον αριθμό που αντιστοιχεί στο 60% του αριθμού των αγοριών, να βρείτε το συνολικό αριθμό των κοριτσιών και αγοριών του Γυμνασίου.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$69^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνονται οι παραστάσεις: $\mathrm{A}=\dfrac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4\cdot 2^4-3^4+x}{\left[1-(-1)^{2009}\right]^0}$, $\quad \mathrm{B}=\dfrac{\left[(-2)^2+(-1)^2\right]^2}{5}+\dfrac{x}{2}$.

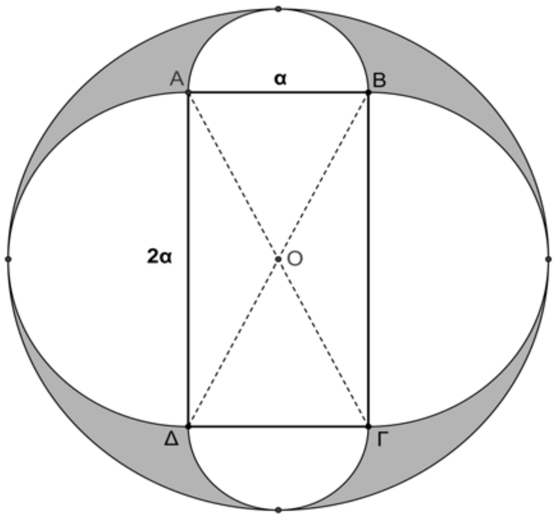
Αν είναι $\mathrm{A}=\mathrm{B}$, να προσδιορίσετε την τιμή του x. ***Μονάδες 5***

2. Το σημείο $\mathrm{A}(-\lambda+2, 4\lambda-1)$), όπου λ θετικός ακέραιος, βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy. Να βρεθούν:

(α) ο θετικός ακέραιος λ,
(β) το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΟΑ και
(γ) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΟΒΑΓ, όπου Β, Γ είναι τα ίχνη των καθέτων από το σημείο Α στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy, αντίστοιχα.

Μονάδες 5

3. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{AB}=\alpha$, $\mathrm{A\Delta}=2\alpha$ και τέσσερα ημικύκλια εξωτερικά του ορθογωνίου. Ο εξωτερικός κύκλος έχει κέντρο το σημείο τομής Ο των διαγωνίων του ορθογωνίου. Να υπολογιστεί συναρτήσει του α το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου. ***Μονάδες 5***



4. Αν ισχύει $\dfrac{45^{\nu}\cdot 2^{2\nu}}{6^{\nu}}=900$, όπου ν θετικός ακέραιος, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=2003\cdot(-1)^{\nu}-(-1)^{\nu+1}+4\cdot(-1)^{\nu+2}.$$ ***Μονάδες 5***

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν στο $\frac{1}{8}$ ενός αριθμού x προσθέσουμε το $\frac{1}{4}$ του αριθμού αυτού προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 1255 του αριθμού x. Να βρεθεί ο αριθμός x.

Μονάδες 5

2. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x, y και z που είναι τέτοιοι ώστε $0 \le x \le y \le z$ και

$$xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 44.$$

Μονάδες 5

3. Να βρεθούν οι γωνίες των ισοσκελών τριγώνων τα οποία έχουν τη παρακάτω ιδιότητα: “*υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μία κορυφή με την απέναντι πλευρά ώστε να δημιουργούνται μέσα στο ισοσκελές τρίγωνο, δύο ισοσκελή τρίγωνα*”.
(Να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις).

Μονάδες 5

4. Αν οι πραγματικοί αριθμοί ικανοποιούν τις ισότητες

$$x^2 - y = z^2,\ \ y^2 - z = x^2,\ \ z^2 - x = y^2,$$

να αποδείξετε ότι:

(α) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

(β) Ένας τουλάχιστον από τους x, y, z ισούται με 0.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δεκαπέντε θετικοί ακέραιοι αριθμοί, με ψηφία περισσότερα από δύο, έχουν ως τελευταίο διψήφιο τμήμα τους τον αριθμό 15. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα τους είναι πολλαπλάσιο του 25.

Μονάδες 5

2. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\text{ΑΔ} \parallel \text{ΒΓ}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$. Φέρουμε από το Α κάθετη προς τη ΒΓ που την τέμνει στο σημείο Ε και από το Ε κάθετη προς την διαγώνιο ΒΔ που την τέμνει στο σημείο Ζ. Να προσδιορίσετε το μέτρο της γωνίας $\text{Α}\hat{\text{Ζ}}\Gamma$.

Μονάδες 5

3. Να προσδιορίσετε τις τριάδες ακέραιων (x, y, z) με $x \geq y \geq z$, που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=2,$$
$$x+y+z=300.$$

Μονάδες 5

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Θεωρούμε τυχόν σημείο Μ εκτός του ΑΒ και τέτοιο ώστε η κάθετη από το Μ προς την ευθεία ΑΒ να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ έτσι ώστε

$$\text{ΑΓ} \perp \text{ΑΜ} \text{ και } \text{ΑΓ} = \text{ΑΜ}, \quad \text{ΒΔ} \perp \text{ΜΒ} \text{ και } \text{ΒΔ} = \text{ΜΒ},$$

και επιπλέον τα σημεία Γ, Μ και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν οι θετικοί ακέραιοι α και β έχουν 120 κοινούς θετικούς διαιρέτες, να προσδιορίσετε το πλήθος των κοινών θετικών διαιρετών των αριθμών

$$\mathrm{A} = 4\alpha + 5\beta \text{ και } \mathrm{B} = 3\alpha + 4\beta .$$

Μονάδες 5

2. Να προσδιορίσετε το πλήθος και το άθροισμα των άρτιων θετικών ακέραιων που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών $\mathrm{A} = n^2 - n + 1$ και $\mathrm{B} = n^2 + n + 1$, όπου n θετικός ακέραιος.

Μονάδες 5

3. Να προσδιορίσετε τις τριάδες ακέραιων (x, y, z) με $x \geq y \geq z$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x) = 6.$$

Ποιες από τις τριάδες αυτές έχουν άθροισμα τετραγώνων ελάχιστο;

Μονάδες 5

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ . Θεωρούμε τυχόν σημείο Μ εκτός του ΑΒ και τέτοιο ώστε η κάθετη από αυτό προς την ευθεία ΑΒ να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέτοια ώστε

$$\mathrm{A\Gamma} \perp \mathrm{AM} \text{ και } \mathrm{A\Gamma} = 2 \cdot \mathrm{AM} \ , \ \mathrm{B\Delta} \perp \mathrm{MB} \text{ και } \mathrm{B\Delta} = 2 \cdot \mathrm{MB}$$

και επιπλέον τα σημεία Μ, Γ και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4$$

Λύση

$$A = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4 = (4 \cdot 25)^2 + 502 + (27 - 25) \cdot 249 - 10^4$$

$$= 100^2 + 502 + 2 \cdot 249 - 10000 = 10000 + 502 + 498 - 10000 = 1000$$

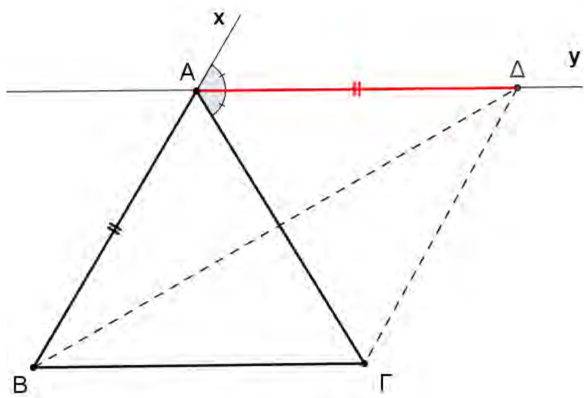
2. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία Ay είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ και διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{A}x$.

Δίνεται ακόμη ότι

$B\hat{A}\Gamma = 62^\circ$ και ΑΒ = ΑΔ.

(α) Να βρείτε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να εξηγήσετε γιατί η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$.



Σχήμα 1

Λύση

(α) Επειδή η Ay είναι διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{A}x$ θα είναι $\Gamma\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}x$. Όμως είναι $\Gamma\hat{A}\Delta + \Delta\hat{A}x = 180^0 - B\hat{A}\Gamma = 180^0 - 62^0 = 118^0$, οπότε καθεμία από τις γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $\Delta\hat{A}x$ είναι 59°.

Επειδή είναι $Ay \parallel B\Gamma$ έχουμε τις ισότητες γωνιών

$$\hat{B} = \Delta\hat{A}x = 59^0 \text{ και } \hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}\Delta = 59^0.$$

(β) Επειδή είναι ΑΒ = ΑΔ. έπεται ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με

$$A\hat{B}\Delta = A\hat{\Delta}B. \qquad (1)$$

Λόγω της παραλληλίας των ευθειών ΒΓ και Ay έχουμε ότι

$$A\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}\Gamma \text{ (εντός εναλλάξ γωνίες)} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι:

$$A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}\Gamma,$$

οπότε η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$.

3. Αν για το θετικό ακέραιο αριθμό α ισχύει: $\frac{21}{5}<\frac{42}{\alpha}<\frac{21}{4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστα σης

$$\mathrm{A}=\alpha+5(4+\alpha)+3(\alpha-4)+1919\ .$$

Λύση

Έχουμε:

$$\frac{21}{5}<\frac{42}{\alpha}<\frac{21}{4}\Leftrightarrow\frac{42}{10}<\frac{42}{\alpha}<\frac{42}{8}\Leftrightarrow 8<\alpha<10,$$

οπότε θα είναι $\alpha=9$, αφού α θετικός ακέραιος. Άρα είναι:

$$\mathrm{A}=9+5(4+9)+3(9-4)+1919=9+5\cdot 13+3\cdot 5+1919=2008.$$

4. Ένα Γυμνάσιο συμμετέχει στην παρέλαση για την επέτειο μιας Εθνικής Εορτής με το 60% του αριθμού των αγοριών και το 80% του αριθμού των κοριτσιών του. Τα αγόρια που συμμετέχουν, αν παραταχθούν σε τριάδες, τότε δεν περισσεύει κανείς, ενώ, αν παραταχθούν σε πεντάδες ή επτάδες, τότε και στις δύο περιπτώσεις περισσεύουν από τρεις. Όλα τα αγόρια του Γυμνασίου είναι περισσότερα από 100 και λιγότερα από 200. Αν το 80% των κοριτσιών είναι αριθμός διπλάσιος από τον αριθμό που αντιστοιχεί στο 60% του αριθμού των αγοριών, να βρείτε το συνολικό αριθμό των κοριτσιών και αγοριών του Γυμνασίου.

Λύση

Αν είναι A_1 ο αριθμός των αγοριών που συμμετέχουν στην παρέλαση, τότε ο A_1 είναι πολλαπλάσιο του 3 και επιπλέον έχουμε

$$\left.\begin{cases}\mathrm{A}_1=\pi o\lambda.5+3\\ \mathrm{A}_1=\pi o\lambda.7+3\end{cases}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\mathrm{A}_1-3=\pi o\lambda.5\\ \mathrm{A}_1-3=\pi o\lambda.7\end{matrix}\right\},$$

οπότε ο αριθμός A_1-3 είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 5 και 7. Τότε ο αριθμός A_1-3 θα είναι πολλαπλάσιο του ΕΚΠ(5,7)=35, δηλαδή θα είναι ένας από του αριθμούς

35, 70, 105, 140,...,

Επομένως ο αριθμός A_1 θα είναι κάποιος από τους αριθμούς

38, 73, 108, 143,....

Αν Α είναι ο αριθμός των αγοριών του Γυμνασίου, τότε από την υπόθεση είναι

$$100<\mathrm{A}<200\Rightarrow\frac{60}{100}\cdot 100<\frac{60}{100}\cdot\mathrm{A}<\frac{60}{100}\cdot 100\Rightarrow 60<\mathrm{A}_1<120,$$

οπότε οι αποδεκτές τιμές για τον αριθμό A_1 είναι οι 73 και 108. Επειδή ο αριθμός A_1 είναι και πολλαπλάσιο του 3, έπεται ότι $\mathrm{A}_1=108$, οπότε ο αριθμός των αγοριών του Γυμνασίου είναι:

$$\mathrm{A}=108\cdot\frac{100}{60}=180.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι τα κορίτσια που συμμετείχαν στην παρέλαση ήταν $2\cdot 108=216$, οπότε ο αριθμός Κ των κοριτσιών του Γυμνασίου είναι:

$$\mathrm{K}=216\cdot\frac{100}{80}=270.$$

Άρα συνολικά το Γυμνάσιο έχει 180+270=450 μαθητές και μαθήτριες.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4\cdot 2^4-3^4+x}{\left[1-(-1)^{2005}\right]^0},\quad \mathrm{B}=\frac{\left[(-2)^2+(-1)^2\right]^2}{5}+\frac{x}{2}$$

Αν είναι $\mathrm{A}=\mathrm{B}$, να προσδιορίσετε την τιμή του x.

Λύση

Επειδή $1-\left(-1\right)^{2009}=1-\left(-1\right)=2\neq 0$ έχουμε $\left[1-\left(-1\right)^{2009}\right]^0=1$, οπότε:

$$\mathrm{A}=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4\cdot 2^4-3^4+x}{\left[1-(-1)^{2005}\right]^0}=\frac{3^4}{2^4}\cdot 2^4-3^4+x=x.$$

Επίσης έχουμε

$$\mathrm{B}=\frac{\left[(-2)^2+(-1)^2\right]^2}{5}+\frac{x}{2}=\frac{\left(4+1\right)^2}{5}+\frac{x}{2}=5+\frac{x}{2}.$$

Επομένως έχουμε

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}\Leftrightarrow x=5+\frac{x}{2}\Leftrightarrow 2x=10+x\Leftrightarrow x=10.$$

2. Το σημείο $\mathrm{A}(-\lambda+2,4\lambda-1)$), όπου λ θετικός ακέραιος, βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy. Να βρεθούν:

(α) ο θετικός ακέραιος λ,
(β) το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΟΑ,
(γ) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΟΒΑΓ , όπου Β, Γ είναι τα ίχνη των καθέτων από το σημείο Α προς τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy, αντίστοιχα.

Λύση

(α) Σύμφωνα με τις υποθέσεις πρέπει να συναληθεύουν οι ανισότητες:

$$-\lambda+2>0 \text{ και } 4\lambda-1>0 \Leftrightarrow \lambda<2 \text{ και } \lambda>\frac{1}{4},$$

από τις οποίες, αφού ο λ είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι $\lambda=1$.

(β) Για $\lambda=1$ είναι $\mathrm{A}\left(1,3\right)$, οπότε

$$\mathrm{OA}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}.$$

(γ)

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{OAB\Gamma}\right)=1\cdot 3=3$$

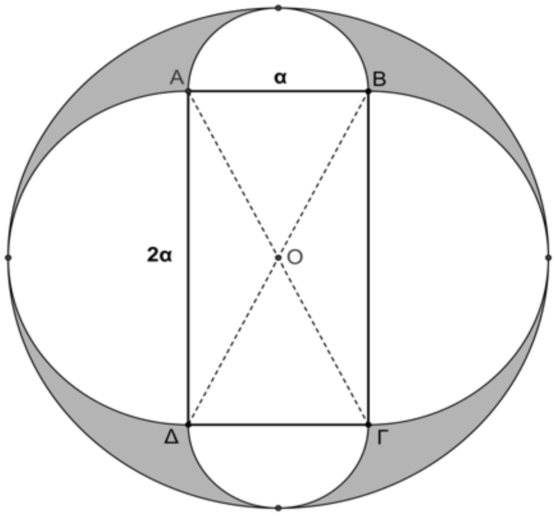
3. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{AB}=\alpha$, $\mathrm{A\Delta}=2\alpha$ και τέσσερα ημικύκλια εξωτερικά του ορθογωνίου. Ο εξωτερικός κύκλος έχει κέντρο το σημείο τομής Ο των διαγωνίων του ορθογωνίου. Να υπολογιστεί συναρτήσει του α το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

Λύση

Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι:

Ο μεγάλος κύκλος έχει ακτίνα $\frac{3\alpha}{2}$, τα μικρά ημικύκλια έχουν ακτίνα $\frac{\alpha}{2}$ και τα μεγάλα ημικύκλια έχουν ακτίνα α.

Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου προκύπτει από το εμβαδόν του μεγάλου κύκλου $\pi\left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2=\frac{9\pi\alpha^2}{4}$, αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ που είναι $2\alpha^2$, τα εμβαδά των δύο μικρών ημικυκλίων $2\cdot\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{\pi\alpha^2}{4}$ και τα εμβαδά των δύο μεγάλων ημικυκλίων



Σχήμα 2

$2\cdot\frac{1}{2}\pi\alpha^2=\pi\alpha^2$. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\frac{9\pi\alpha^2}{4}-\frac{\pi\alpha^2}{4}-\pi\alpha^2-2\alpha^2=\frac{4\pi\alpha^2-8\alpha^2}{4}=(\pi-2)\alpha^2.$$

4. Αν ισχύει $\frac{45^\nu\cdot 2^{2\nu}}{6^\nu}=900$, όπου ν θετικός ακέραιος, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A=2003\cdot(-1)^\nu-(-1)^{\nu+1}+4\cdot(-1)^{\nu+2}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\frac{45^\nu.2^{2\nu}}{6^\nu}=900\Leftrightarrow\frac{45^\nu\cdot 4^\nu}{6^\nu}\Leftrightarrow\left(\frac{45\cdot 4}{6}\right)^\nu=900\Leftrightarrow 30^\nu=2^2\cdot 3^2\cdot 5^2.$$

$$\Leftrightarrow 30^\nu=(2\cdot 3\cdot 5)^2\Leftrightarrow 30^\nu=30^2\Leftrightarrow 30^{\nu-2}=1,$$

από την οποία προκύπτει ότι $\nu-2=0\Leftrightarrow\nu=2$, αφού για κάθε άλλη τιμή του $\nu-2$ η τιμή της δύναμης $30^{\nu-2}$ δεν μπορεί να είναι 1.

Άρα έχουμε:

$$A=2003\cdot(-1)^2-(-1)^{2+1}+4(-1)^{2+2}=2003\cdot 1-(-1)+4\cdot 1=2003+1+4=2008..$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν στο $\frac{1}{8}$ ενός αριθμού x προσθέσουμε το $\frac{1}{4}$ του αριθμού αυτού προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 1255 του αριθμού x. Να βρεθεί ο αριθμός x.

Λύση
Σύμφωνα με την υπόθεση θα έχουμε την εξίσωση
$$\frac{x}{8}+\frac{x}{4}+1255=x \Leftrightarrow x-\frac{x}{8}-\frac{x}{4}=1255 \Leftrightarrow \frac{5x}{8}=1255 \Leftrightarrow x=\frac{1255\cdot 8}{5}=2008.$$

2. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x, y και z που είναι τέτοιοι ώστε:
$$0 \le x \le y \le z,$$
$$xyz+xy+yz+zx+x+y+z=44.$$

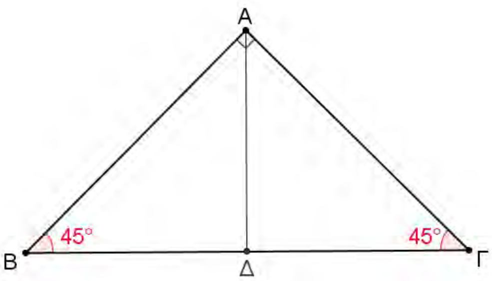
Λύση
Η τελευταία εξίσωση γράφεται:
$$xyz+xy+yz+zx+x+y+z=44$$
$$\Leftrightarrow xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1=45$$
$$\Leftrightarrow xy(z+1)+x(z+1)+y(z+1)+(z+1)=45$$
$$\Leftrightarrow (xy+x+y+1)(z+1)=45$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(y+1)(z+1)=45. \qquad (1)$$
Επειδή οι x, y, z είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και $x \le y \le z$, έπεται ότι:
$$1 \le x+1 \le y+1 \le z+1. \qquad (2)$$
Από τις (1) και (2) και αφού $45=1\cdot 3\cdot 3\cdot 5$ προκύπτουν οι περιπτώσεις
$$(x+1, y+1, z+1)=(1,3,15) \text{ ή } (1,5,9) \text{ ή } (3,3,5) \text{ ή } (1,1,45)$$
$$\Leftrightarrow (x,y,z)=(0,\ 2,\ 14) \text{ ή } (0,\ 4,\ 8) \text{ ή } (2,\ 2,\ 4) \text{ ή } (0,0,44).$$

3. Να βρεθούν οι γωνίες των ισοσκελών τριγώνων που έχουν τη παρακάτω ιδιότητα:
"*υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μία κορυφή με την απέναντι πλευρά ώστε να δημιουργούνται μέσα στο ισοσκελές τρίγωνο, δύο ισοσκελή τρίγωνα*".
(Να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις)

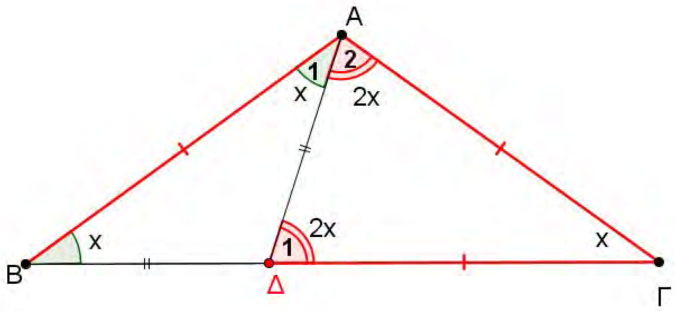
Λύση
Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ).
1η περίπτωση.
Θεωρούμε σημείο Δ στη πλευρά ΒΓ ώστε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ να είναι ισοσκελή. Διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:
- Αν είναι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta=\hat{\mathrm{B}}$ και $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta=\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{A}$ τότε ισχύουν οι ισότητες των γωνιών (σχ. 3) : $\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=\hat{x}$ και $\hat{\mathrm{A}}_2=\hat{\Delta}_1=2\hat{x}$, (ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΔ, οπότε από τη σχέση $\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=180$ καταλήγουμε στην εξίσωση:
$$5\hat{x}=180^o \Leftrightarrow \hat{x}=36^o.$$
Στη περίπτωση αυτή είναι $\hat{\mathrm{A}}=108^o$ και $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=36^o$.

- Στην περίπτωση που είναι πάλιν ισοσκελή τα τρίγωνα $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{A\Delta\Gamma}$ με ίσες γωνίες $\mathrm{B\hat{A}\Delta = B\hat{\Delta}A}$ και $\mathrm{\Gamma\hat{A}\Delta = \hat{\Gamma}}$, τότε προκύπτουν οι ίδιες γωνίες για το τρίγωνο ΑΒΓ.

Στην περίπτωση που είναι πάλιν ισοσκελή τα τρίγωνα $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{A\Gamma\Delta}$ με ίσες γωνίες $\mathrm{B\hat{A}\Delta = B\hat{\Delta}A}$ και $\mathrm{\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}A}$, τότε προκύπτουν οι γωνίες $\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ$ και $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 45^0$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές. Πράγματι, από τις ισότητες $\hat{\mathrm{B}} = \mathrm{B\hat{A}\Delta}$ και $\hat{\Gamma} = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ έπεται ότι: $\hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{A}} \Rightarrow 180^\circ - \hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{A}} \Rightarrow \hat{\mathrm{A}} = 90^\circ$, οπότε θα είναι $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$.



Σχήμα 3α



Σχήμα 3β

2η περίπτωση.

Θεωρούμε σημείο Δ στη πλευρά ΑΓ ώστε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΓΔ να είναι ισοσκελή και διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

- Αν $\mathrm{A\hat{B}\Delta} = \hat{\mathrm{A}}$ και $\mathrm{B\hat{\Delta}\Gamma} = \hat{\Gamma}$, τότε (σχ. 4) ισχύουν οι ισότητες των γωνιών:

$$\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\mathrm{B}}_2 = \hat{x}$$

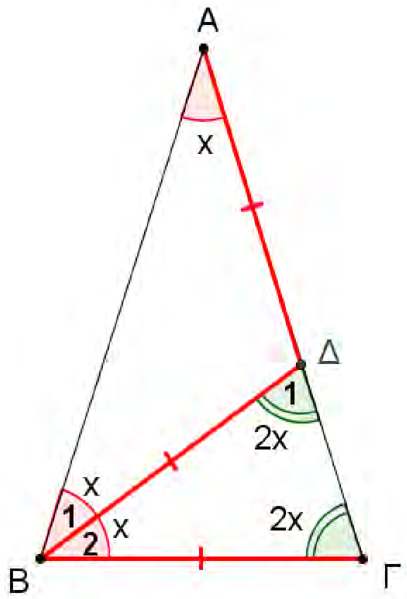
$$\text{και } \hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma} = 2\hat{x},$$

αφού η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔΑΒ, οπότε

$$\hat{x} + \hat{\mathrm{B}}_2 = \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 2x \Rightarrow \hat{\mathrm{B}}_2 = x.$$

Από τη σχέση $\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = 180^0$ καταλήγουμε στην εξίσωση:

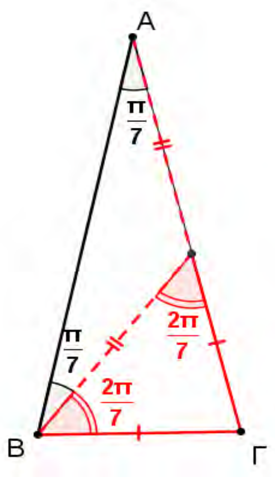
$$5\hat{x} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{x} = 36^\circ.$$



Σχήμα 4

Στη περίπτωση αυτή είναι:

$$\hat{\mathrm{A}} = 36^\circ \text{ και } \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 72^\circ.$$



Σχήμα 5

- Αν $\mathrm{A\hat{B}\Delta} = \hat{\mathrm{A}} = x$ και $\mathrm{B\hat{\Delta}\Gamma} = \Gamma\hat{\mathrm{B}}\Delta = y$, τότε θα έχουμε $y = 2x$ και $3x + 2y = \pi$.οπότε λαμβάνουμε τελικά τις γωνίες

$$\hat{\mathrm{A}} = \frac{\pi}{7},\ \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = \frac{3\pi}{7}.$$

4. Αν οι πραγματικοί αριθμοί $x,\ y$ και z ικανοποιούν τις ισότητες

$$x^2 - y = z^2,\ y^2 - z = x^2,\ z^2 - x = y^2,$$

να αποδείξετε ότι:

(α) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

(β) Ένας τουλάχιστον από τους $x,\ y,\ z$ ισούται με 0.

Λύση

(α) Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών δεδομένων ισοτήτων λαμβάνουμε:

$$x^2 + y^2 + z^2 - (x + y + z) = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow$$

$$x + y + z = 0, \qquad (1)$$

από την οποία προκύπτει άμεσα το ερώτημα (α), αφού τότε είναι $z = -(x+y)$ και

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= x^3 + y^3 + \left[-(x+y)\right]^3 \\ &= x^3 + y^3 - x^3 - y^3 - 3xy(x+y) \\ &= -3xy(-z) = 3xyz. \end{aligned}$$

(β) Από την ισότητα $x + y + z = 0$ προκύπτει ότι $z = -x - y$, οπότε η ισότητα $x^2 - y = z^2$ γίνεται

$$x^2 - y = (x+y)^2 \Leftrightarrow -y = 2xy + y^2$$

$$\Leftrightarrow y \cdot (y + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = -2x - 1.$$

- Για $y = 0$ λαμβάνουμε $x + z = 0 \Leftrightarrow z = -x$, οπότε η δεύτερη και η τρίτη των δεδομένων σχέσεων γίνονται:

$$x = x^2 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1,$$

οπότε έχουμε τις τριάδες

$$(x, y, z) = (0,0,0) \text{ ή } (1,0,-1).$$

- Για $y = -2x - 1$ από την (1) λαμβάνουμε

$$z = -x - y = x + 1,$$

οπότε με αντικατάσταση των y, z στις αρχικές σχέσεις προκύπτει η εξίσωση

$$x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1.$$

Έτσι λαμβάνουμε και τις τριάδες

$$(x, y, z) = (0,-1,1) \text{ ή } (-1,1,0).$$

Από την εύρεση όλων των δυνατών τριάδων προέκυψε ότι σε κάθε περίπτωση ένας τουλάχιστον από τους x, y, z ισούται με 0.

2^{ος} τρόπος για το (β)

Οι δεδομένες ισότητες $x^2 - y = z^2,\ y^2 - z = x^2,\ z^2 - x = y^2$ με πολλαπλασιασμό επί y^2, z^2 και x^2, αντίστοιχα, γίνονται

$$\left(x^2 - z^2\right)y^2 = y^3,\ \left(y^2 - x^2\right)z^2 = z^3, \left(z^2 - y^2\right)x^2 = x^3,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0.$$

Λόγω του (α) λαμβάνουμε $xyz = 0$, δηλαδή ένας τουλάχιστον από τους x, y, z ισούται με 0.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δεκαπέντε θετικοί ακέραιοι αριθμοί, με ψηφία περισσότερα από 2, έχουν το τελευταίο διψήφιο τμήμα τους τον αριθμό 15. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα τους είναι πολλαπλάσιο του 25.

Λύση

Κάθε θετικός ακέραιος που τελειώνει σε 15 είναι της μορφής: $100x+15$, όπου x μη αρνητικός ακέραιος.
Άρα το άθροισμα των δεκαπέντε θετικών ακεραίων θα είναι:

$$S=(100x_1+15)+(100x_2+15)+\cdots+(100x_{15}+15)=100(x_1+x_2+\cdots+x_{15})+15\cdot 15=$$
$$=25\cdot 4(x_1+x_2+\cdots+x_{15})+25\cdot 9=25\cdot\left[4(x_1+x_2+\cdots+x_{15})+9\right],$$

δηλαδή είναι πολλαπλάσιο του 25.

Παρατήρηση

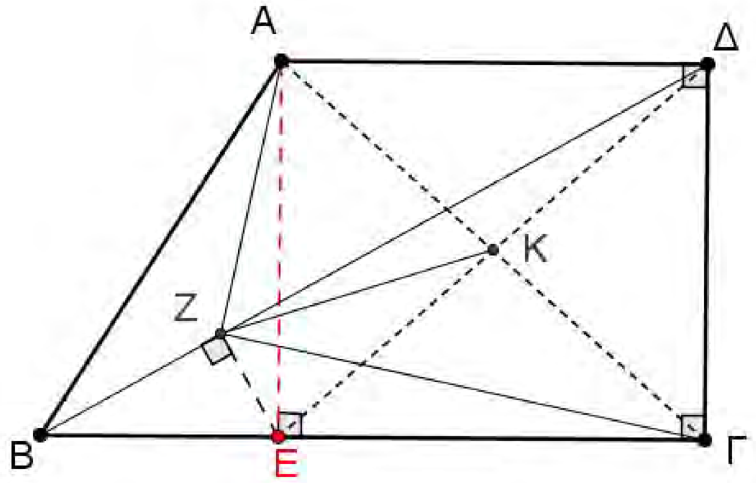
Η "κεντρική ιδέα" της άσκησης είναι ότι: ο θετικός ακέραιος που το τελευταίο διψήφιο τμήμα του είναι "$\alpha\beta$", έχει τη μορφή $100x+\overline{\alpha\beta}$.
Με όμοιο τρόπο καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι: ο θετικός ακέραιος που το τελευταίο τριψήφιο τμήμα του είναι "$\alpha\beta\gamma$", έχει τη μορφή $1000x+\overline{\alpha\beta\gamma}$.

3. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΔ \parallel ΒΓ$ και $\hat{Γ}=\hat{Δ}=90^\circ$. Φέρουμε το ύψος ΑΕ και από το Ε κάθετη προς την διαγώνιο ΒΔ που την τέμνει στο σημείο Ζ. Να προσδιορίσετε το μέτρο της γωνίας $Α\hat{Ζ}Γ$.

Λύση (1ος τρόπος)

Επειδή είναι $Α\hat{Ε}Γ=\hat{Γ}=\hat{Δ}=90^\circ$ το τετράπλευρο ΑΕΓΔ είναι ορθογώνιο, οπότε οι διαγώνιοι του είναι ίσες και διχοτομούνται, δηλαδή το σημείο Κ είναι μέσον των ΑΓ και ΕΔ και

$$ΑΓ=ΕΔ. \qquad (1)$$

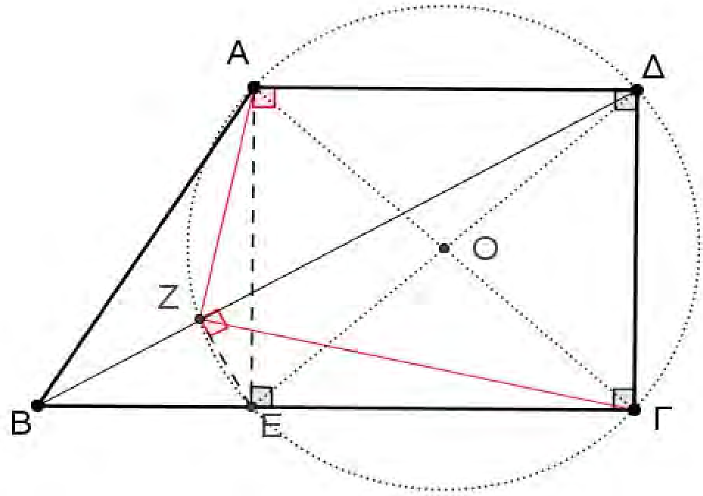


Σχήμα 6

Επειδή είναι $ΕΖ \perp ΒΔ$ το τρίγωνο ΕΖΔ είναι ορθογώνιο και η ΖΚ είναι η διάμεσος αυτού προς την υποτείνουσα. Άρα είναι

$$ΖΚ=\frac{ΕΔ}{2}. \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι $\mathrm{ZK} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{2}$, δηλαδή η διάμεσος του τριγώνου ΑΖΓ προς την πλευρά ΑΓ ισούται με το μισό της πλευράς ΑΓ. Επομένως είναι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = 90^\circ$.



Σχήμα 7

2^{ος} Τρόπος

Το τετράπλευρο $\mathrm{A\Delta\Gamma E}$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, οπότε θα είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων του O.

Εφόσον $\mathrm{E}\hat{\mathrm{Z}}\Delta = \mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Delta = 90^o$, το τετράπλευρο $\mathrm{EZA\Delta}$ είναι εγγράψιμο και κατά συνέπεια τα σημεία $\mathrm{A}, \Delta, \Gamma, \mathrm{E}, \mathrm{Z}$ είναι ομοκυκλικά. Άρα $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = 90^o$ (διότι βαίνει στη διάμετρο $\mathrm{A\Gamma}$).

3. Βρείτε τις τριάδες θετικών ακέραιων (x, y, z) με $x \geq y \geq z$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = 2,$$
$$x + y + z = 300.$$

Λύση

Έχουμε

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = 2 \Leftrightarrow x^2y - x^2z + y^2z - y^2x + z^2x - z^2y = 2$$
$$\Leftrightarrow (x^2y - y^2x) - (x^2z - y^2z) + (z^2x - z^2y) = 2$$
$$\Leftrightarrow xy(x-y) - z(x-y)(x+y) + z^2(x-y) = 2$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left[xy - z(x+y) + z^2\right] = 2 \Leftrightarrow (x-y)(xy - zx - zy + z^2) = 2$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(y-z)(x-z) = 2.$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι οι ακέραιοι $x-y, y-z, x-z$ είναι διάφοροι από το 0. Επιπλέον, από την υπόθεση $x \geq y \geq z$ έπεται ότι

$$x - y \geq 0 \text{ και } x - z \geq y - z > 0$$

και αφού

$$(x-y) + (y-z) = x - z,$$

έπεται ότι οι δυνατές τιμές για τις διαφορές $x-y, y-z, x-z$ είναι:

$$x - y = 1, y - z = 1, x - z = 2.$$

Επειδή η τρίτη εξίσωση προκύπτει με πρόσθεση κατά μέλη της πρώτης και της δεύτερης, κάθε λύση του συστήματος της πρώτης και δεύτερης εξίσωσης είναι και λύση της τρίτης εξίσωσης, οπότε από το προηγούμενο σύστημα λαμβάνουμε:

$$x-y=1,\ y-z=1 \Leftrightarrow x=y+1,\ z=y-1,$$

όπου y θετικός ακέραιος. Έτσι έχουν προκύψει οι τριάδες θετικών ακέραιων

$$(x,y,z)=(k+1,k,k-1),\ \text{όπου } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Από την εξίσωση $x+y+z=300$ λαμβάνουμε:

$$(k+1)+k+(k-1)=300 \Leftrightarrow 3k=300 \Leftrightarrow k=100,$$

οπότε η ζητούμενη τριάδα είναι μόνον η

$$(x,y,z)=(101,\ 100,\ 99).$$

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB. Θεωρούμε τυχόν σημείο M εκτός του AB και τέτοιο ώστε η κάθετη από το M προς την ευθεία AB να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέτοια ώστε

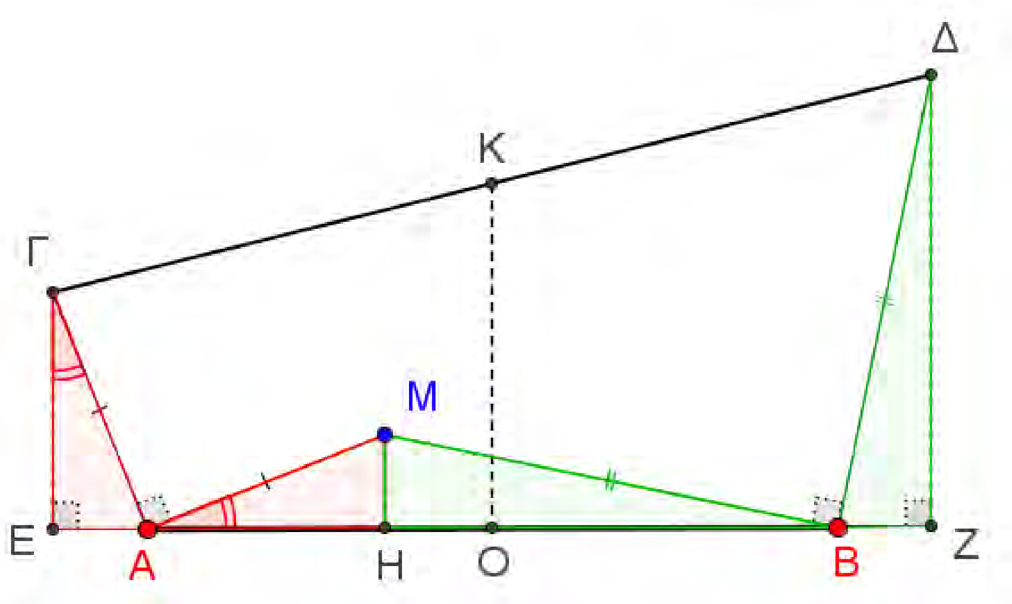
$$A\Gamma \perp AM \text{ και } A\Gamma = AM\ ,\ B\Delta \perp MB \text{ και } B\Delta = MB,$$

και επιπλέον τα σημεία Γ, M και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία AB. Να αποδείξετε ότι το μέσον K του ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου M.

Λύση

Από τα σημεία Γ, M και Δ φέρουμε καθέτους ΓE, MH και ΔZ προς την ευθεία AB. Τότε οι οξείες γωνίες $M\hat{A}H$ και $A\hat{\Gamma}E$ έχουν πλευρές κάθετες, οπότε είναι ίσες. Για τον ίδιο λόγο είναι ίσες και οι γωνίες $M\hat{B}H$ και $B\hat{\Delta}Z$. Έτσι από την υπόθεση $A\Gamma = AM$ προκύπτει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα AHM, ΓEA είναι ίσα, οπότε θα έχουμε:

$$\Gamma E = AH \qquad (1)$$
$$EA = MH. \qquad (2)$$



Σχήμα 8

Ομοίως από την υπόθεση $B\Delta = MB$ και $B\Delta \perp MB$ προκύπτει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα MHB, $BZ\Delta$ είναι ίσα, οπότε θα έχουμε:

$$\Delta Z = HB \qquad (3)$$
$$BZ = MH. \qquad (4)$$

Έστω ότι η κάθετη από το μέσον Κ της ΓΔ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ο. Τότε η ΚΟ θα είναι η διάμεσος του τραπεζίου ΓΕΖΔ, οπότε θα ισχύει:

$$\mathrm{OK} = \frac{\Gamma\mathrm{E} + \Delta\mathrm{Z}}{2}. \tag{5}$$

Λόγω των (1) και (3) η σχέση (5) γίνεται

$$\mathrm{OK} = \frac{\Gamma\mathrm{E} + \Delta\mathrm{Z}}{2} = \frac{\mathrm{AH} + \mathrm{HB}}{2} = \frac{\mathrm{AB}}{2}. \tag{6}$$

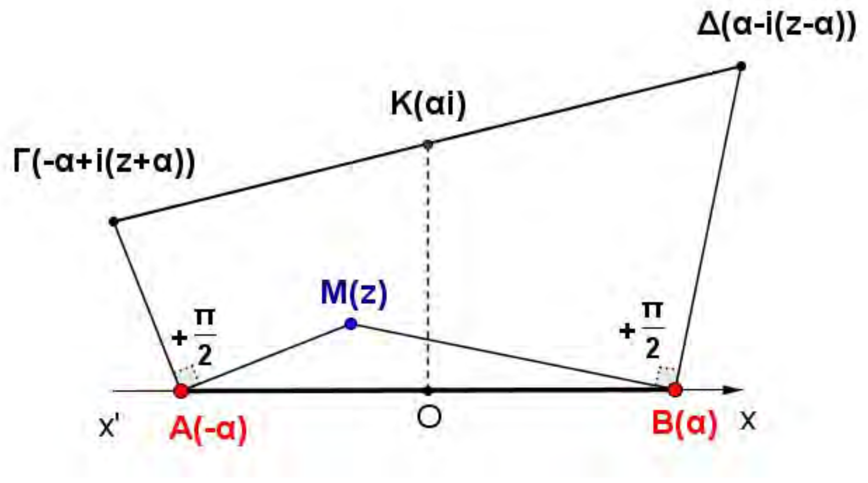
Επιπλέον, το μέσον Ο της ΕΖ είναι και μέσον της ΑΒ, αφού από τις σχέσεις (2) και (4) προκύπτει ότι ΕΑ = ΒΖ, οπότε θα έχουμε

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OE} - \mathrm{AE} = \mathrm{OZ} - \mathrm{BZ} = \mathrm{OB}. \tag{7}$$

Επομένως το σημείο Κ βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ σε απόσταση από το μέσον Ο ίση προς το μισό του ΑΒ. Άρα είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

2ος τρόπος

Θεωρούμε την ευθεία ΑΒ ως άξονα των πραγματικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο και το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ως την αρχή των αξόνων. Έστω ότι το σημείο Μ είναι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z, το σημείο Β είναι η εικόνα του πραγματικού αριθμού a, οπότε το σημείο Α θα είναι η εικόνα του πραγματικού αριθμού $-a$. Τότε στο διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός $z+a$ και επειδή είναι $\mathrm{A\Gamma} \perp \mathrm{AM}$, $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{AM}$ έπεται ότι $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}}\right) = 90^\circ$, οπότε στο διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός $i(z+a)$. Επομένως στο διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$, άρα και στο σημείο Γ, αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός $-a+i(z+a)$.



Σχήμα 9

Με το ίδιο σκεπτικό, αλλά με την παρατήρηση ότι $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{BM}}, \overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}}\right) = -90^\circ$, καταλήγουμε ότι στο σημείο Δ αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός $a-i(z-a)$.

Επομένως το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι εικόνα του μιγαδικού αριθμού

$$\frac{-a+i(z+a)+a-i(z-a)}{2} = ai,$$

οπότε το σημείο Κ είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του μιγαδικού αριθμού z, άρα ανεξάρτητο από τη θέση του σημείο Μ.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν οι θετικοί ακέραιοι α και β έχουν 120 κοινούς θετικούς διαιρέτες, να προσδιορίσετε το πλήθος των κοινών θετικών διαιρετών των αριθμών

$$\mathrm{A} = 4\alpha + 5\beta \text{ και } \mathrm{B} = 3\alpha + 4\beta .$$

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι τα σύνολα των θετικών ακέραιων κοινών διαιρετών των αριθμών $\alpha,\ \beta$ και των αριθμών Α και Β ταυτίζονται.

Έστω ότι ο θετικός ακέραιος δ είναι κοινός διαιρέτης των αριθμών $\alpha,\ \beta$. Τότε από τις σχέσεις $\delta\,|\,\alpha$ και $\delta\,|\,\beta$ λαμβάνουμε ότι ο δ διαιρεί και κάθε γραμμικό συνδυασμό τους , οπότε

$$\delta\,|\,(4\alpha + 5\beta) = \mathrm{A} \text{ και } \delta\,|\,(3\alpha + 4\beta) = \mathrm{B},$$

δηλαδή ο δ είναι κοινός διαιρέτης των Α και Β.

Αντίστροφα, έστω ότι ο θετικός ακέραιος δ είναι κοινός διαιρέτης των ακεραίων Α και Β. Τότε από τις υποθέσεις $\delta\,|\,\mathrm{A} = 4\alpha + 5\beta$ και $\delta\,|\,\mathrm{B} = 3\alpha + 4\beta$ έπεται ότι $\delta\,|\,\mathrm{A} - \mathrm{B} = \alpha + \beta$, οπότε προκύπτει ότι:

$$\delta\,|\,5(\mathrm{A} - \mathrm{B}) - \mathrm{A} = \alpha \quad \text{και} \quad \delta\,|\,\mathrm{A} - 4(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = \beta ,$$

οπότε ο δ είναι κοινός διαιρέτης και των αριθμών α και β.

Επομένως και οι αριθμοί Α και Β έχουν 120 κοινούς θετικούς ακέραιους διαιρέτες.

2. Να προσδιορίσετε το πλήθος και το άθροισμα των άρτιων θετικών ακέραιων που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών $\mathrm{A} = n^2 - n + 1$ και $\mathrm{B} = n^2 + n + 1$, όπου n θετικός ακέραιος.

Λύση

Έχουμε $\mathrm{A} = n(n - 1) + 1$ και $\mathrm{B} = n(n + 1) + 1$, οπότε και οι δύο αριθμοί είναι περιττοί, αφού τα γινόμενα διαδοχικών ακέραιων $n(n - 1)$ και $n(n + 1)$ είναι άρτιοι ακέραιοι. Επιπλέον, είναι $\mathrm{B} - \mathrm{A} = 2n > 0$, οπότε $\mathrm{A} < \mathrm{B}$. Έστω $\mathrm{A} + 1, \mathrm{A} + 3, \ldots, \mathrm{A} + (2\kappa - 1)$, όπου κ θετικός ακέραιος, οι άρτιοι ακέραιοι που βρίσκονται μεταξύ των περιττών Α και Β. Τότε πρέπει

$$\mathrm{A}+(2\kappa-1) = \mathrm{B} - 1,$$

δηλαδή

$$\mathrm{B} - \mathrm{A} = 2\kappa \Leftrightarrow 2n = 2\kappa \Leftrightarrow \kappa = n.$$

Επομένως μεταξύ των αριθμών Α και Β βρίσκονται n άρτιοι ακέραιοι, οι οποίοι είναι οι

$$\mathrm{A} + 1, \mathrm{A} + 3, \ldots, \mathrm{A} + (2n - 1),$$

ενώ το άθροισμά τους είναι

$$\Sigma = n\mathrm{A} + [1 + 3 + \ldots + (2n - 1)] = n^3 - n^2 + n + \frac{(1 + 2n - 1)\cdot n}{2} = n^3 + n .$$

3. Να προσδιορίσετε τις τριάδες ακέραιων (x, y, z) με $x \geq y \geq z$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x) = 6.$$

Ποιες από τις τριάδες αυτές έχουν άθροισμα τετραγώνων ελάχιστο;

Λύση

Το πρώτο μέλος της δεδομένης εξίσωσης γράφεται:

$$\begin{aligned} xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x) &= x^2y-xy^2+y^2z-yz^2+z^2x-zx^2 \\ &= xy(x-y)+(x-y)z^2-\left(x^2-y^2\right)z \\ &= (x-y)\left[xy+z^2-xz-yz\right] \\ &= (x-y)\left[x(y-z)-z(y-z)\right] \\ &= (x-y)(y-z)(x-z). \end{aligned}$$

Άρα η δεδομένη εξίσωση γίνεται:

$$(x-y)(y-z)(x-z)=6.$$

Από την τελευταία μορφή προκύπτει ότι οι ακέραιοι $x-y, y-z, x-z$ είναι διάφοροι από το 0. Επιπλέον από την υπόθεση $x \geq y \geq z$ έπεται ότι $x-y \geq 0$ και $x-z \geq y-z > 0$, και αφού οι θετικοί διαιρέτες του 6 είναι οι 1, 2, 3, 6, έπεται ότι οι δυνατές τιμές για τις διαφορές $x-y, y-z, x-z$, είναι:

$$x-y=1, y-z=2, x-z=3 \qquad (1)$$

$$\text{ή } \; x-y=2, y-z=1, x-z=3 \qquad (2)$$

$$\text{ή } \; x-y=1, y-z=1, x-z=6 \qquad (3)$$

Επειδή η τρίτη εξίσωση προκύπτει με πρόσθεση κατά μέλη της πρώτης και της δεύτερης, η περίπτωση (3) δεν είναι αποδεκτή. Τα συστήματα (1) και (2) είναι αποδεκτά , αφού κάθε λύση του συστήματος της πρώτης και δεύτερης εξίσωσης είναι και λύση της τρίτης εξίσωσης, οπότε:

- Από το σύστημα (1) λαμβάνουμε:

  $$x-y=1, \;\; y-z=2 \Leftrightarrow x=y+1, \;\; z=y-2,$$

  όπου y θετικός ακέραιος. Έτσι έχουν προκύψει οι τριάδες θετικών ακέραιων

  $$(x,y,z)=(k+1,k,k-2), \text{ όπου } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

- Από το σύστημα (2) λαμβάνουμε τελικά:

  $$(x,y,z)=(k+2,k,k-1), \text{ όπου } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Στην πρώτη περίπτωση οι τριάδες $(x,y,z)=(k+1,k,k-2), k \in \mathbb{Z}$, έχουν άθροισμα τετραγώνων

$$S=(k+1)^2+k^2+(k-2)^2=3k^2-2k+5,$$

που είναι τριώνυμο ως προς k και έχει ελάχιστο για $k=\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$. Λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης $S(k)=3k^2-2k+5$ εξετάζουμε τις τιμές της στους γειτονικούς ακέραιους του $\frac{1}{3}$ και έχουμε $S(0)=5$ και $S(1)=6$, οπότε η ελάχιστη τιμή του S λαμβάνεται για κ=0 από την τριάδα $(x,y,z)=(1,0,-2)$.

Στην δεύτερη περίπτωση οι τριάδες $(x,y,z)=(k+2,k,k-1), k \in \mathbb{Z}$, έχουν άθροισμα τετραγώνων

$$S=(k+2)^2+k^2+(k-1)^2=3k^2+2k+5,$$

που είναι τριώνυμο ως προς k και έχει ελάχιστο για $k=-\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$. Λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης $S(k)=3k^2+2k+5$ εξετάζουμε τις τιμές της στους γειτονικούς ακέραιους του $\frac{1}{3}$ και έχουμε $S(0)=5$ και $S(-1)=6$, οπότε η ελάχιστη τιμή του S λαμβάνεται για κ=0 από την τριάδα $(x,y,z)=(2,0,-1)$.

Επομένως η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος των τετραγώνων των μελών των τριάδων που ικανοποιούν την δεδομένη εξίσωση είναι 5 και λαμβάνεται από τις τριάδες

$$(x,y,z)=(1,0,-2) \text{ και } (x,y,z)=(2,0,-1).$$

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ . Θεωρούμε τυχόν σημείο Μ εκτός του ΑΒ και τέτοιο ώστε η κάθετη από το αυτό προς την ευθεία ΑΒ να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέτοια ώστε

$$\mathrm{A\Gamma} \perp \mathrm{AM} \text{ και } \mathrm{A\Gamma} = 2\cdot \mathrm{AM}\ ,\ \ \mathrm{B\Delta} \perp \mathrm{MB} \text{ και } \mathrm{B\Delta} = 2\cdot \mathrm{MB}$$

και επιπλέον τα σημεία Μ, Γ και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

Λύση

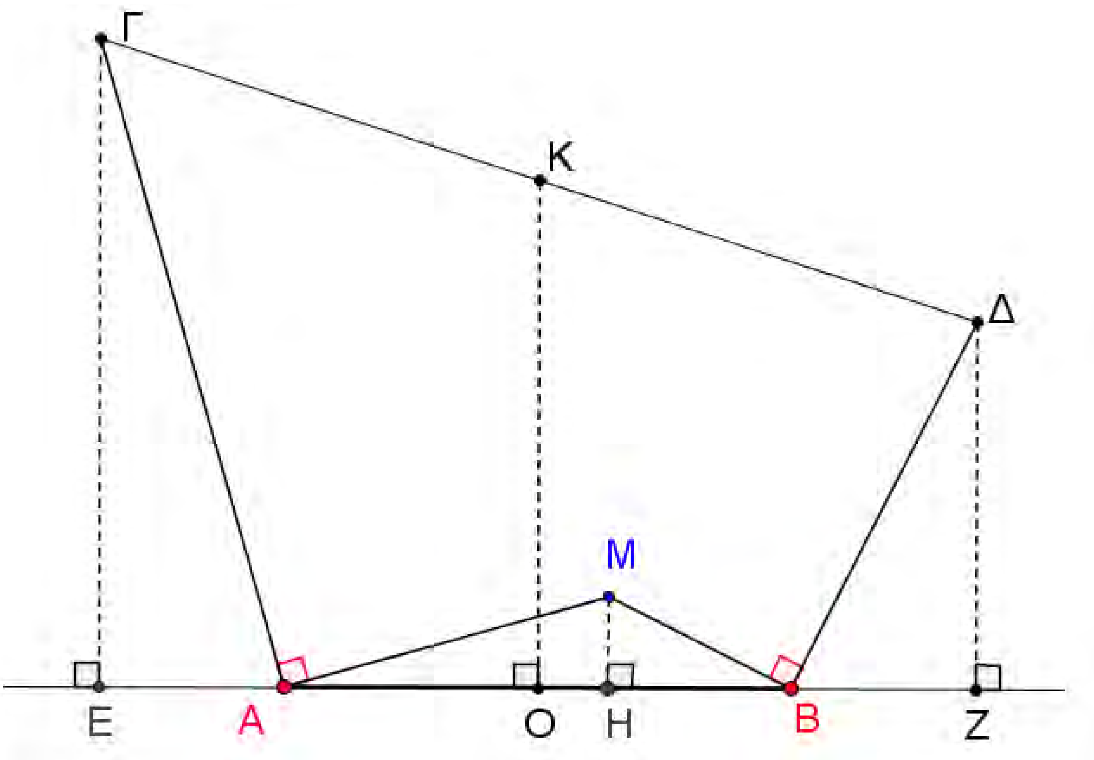
Από τα σημεία Γ, Μ και Δ φέρουμε καθέτους ΓΕ, ΜΗ και ΔΖ προς την ευθεία ΑΒ. Τότε οι οξείες γωνίες $\mathrm{M\hat{A}H}$ και $\mathrm{A\hat{\Gamma}E}$ έχουν πλευρές κάθετες, οπότε είναι ίσες. Για τον ίδιο λόγο είναι ίσες και οι γωνίες $\mathrm{M\hat{B}H}$ και $\mathrm{B\hat{\Delta}Z}$. Έτσι τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΜ , ΓΕΑ είναι όμοια, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\mathrm{\Gamma E}}{\mathrm{AH}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{MH}}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AM}}=2\,,$$

οπότε προκύπτουν οι ισότητες:

$$\mathrm{\Gamma E}=2\cdot\mathrm{AH} \qquad (1)$$

$$\mathrm{EA}=2\cdot\mathrm{MH}\,. \qquad (2)$$



Σχήμα 10

Ομοίως τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΗΒ, ΒΖΔ είναι όμοια, οπότε ομοίως θα έχουμε:

$$\Delta Z = 2 \cdot HB \qquad (3)$$

$$BZ = 2 \cdot MH . \qquad (4)$$

Έστω ότι η κάθετη από το μέσον Κ της ΓΔ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ο. Τότε η ΚΟ θα είναι η διάμεσος του τραπεζίου ΓΕΖΔ, οπότε θα ισχύει:

$$OK = \frac{\Gamma E + \Delta Z}{2} . \qquad (5)$$

Λόγω των (1) και (3) η σχέση (5) γίνεται

$$OK = \frac{\Gamma E + \Delta Z}{2} = \frac{2 \cdot AH + 2 \cdot HB}{2} = \frac{2 \cdot AB}{2} = AB . \qquad (6)$$

Επιπλέον, το μέσον Ο της ΕΖ είναι και μέσον της ΑΒ, αφού από τις σχέσεις (2) και (4) προκύπτει ότι ΕΑ = ΒΖ, οπότε θα έχουμε

$$OA = OE - AE = OZ - BZ = OB . \qquad (7)$$

Επομένως το σημείο Κ βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ σε απόσταση από το μέσον Ο ίση προς το ΑΒ. Άρα είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

Παρατήρηση

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με χρήση της γεωμετρικής αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$70^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ $1^{ο}$

Αν $a = 4 - 2\frac{1}{5}$ και $b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2}$, να υπολογίσετε την τιμή παράστασης:

$$\mathrm{A} = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ $2^{ο}$

Έστω α θετικός ακέραιος τον οποίο διαιρούμε με 4.

(i) Ποιες είναι οι δυνατές μορφές του παραπάνω θετικού ακέραιου α ;

(ii) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός α , αν είναι περιττός, μεγαλύτερος από 39 και μικρότερος από 50, και διαιρούμενος με το 4 δίνει υπόλοιπο 1.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ $3^{ο}$

Δίνεται ένα τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$, του οποίου οι γωνίες $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$ έχουν άθροισμα 140^{0} και είναι ανάλογες με τους αριθμούς 1 και 6, αντίστοιχα.

(α) Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.

(β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν το ύψος και η διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχούν στην πλευρά του $\mathrm{B\Gamma}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ $4^{ο}$

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου, το $\frac{1}{4}$ ασχολείται με το στίβο, το $\frac{1}{5}$ ασχολείται με το μπάσκετ, το $\frac{1}{8}$ ασχολείται με το βόλεϊ και περισσεύουν και 80 μαθητές που δεν ασχολούνται με κανένα από αυτά τα αθλήματα. Δεδομένου ότι οι μαθητές του Γυμνασίου οι ασχολούμενοι με τον αθλητισμό, ασχολούνται με ένα μόνο άθλημα, εκτός από 12 μαθητές που ασχολούνται και με το μπάσκετ και με το βόλεϊ, να βρείτε:

(α) Ποιος είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου;

(β) Πόσοι είναι οι μαθητές του Γυμνασίου που ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ;

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Αν ν είναι φυσικός αριθμός διαφορετικός από το μηδέν , να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = 4\cdot(-1)^{\nu} + 2\cdot\frac{(-1)^{2\nu+1}}{5} - 7\cdot\frac{(-1)^{3\nu}}{5}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Ο θετικός ακέραιος α είναι περιττός και όταν διαιρεθεί με το 5 αφήνει υπόλοιπο 2. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού α .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Η ευθεία ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση 4, ενώ η ευθεία ε_2 είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\eta): y = 2x$ και διέρχεται από το σημείο Γ(0,6).

(α) Να βρείτε τις εξισώσεις των παραπάνω ευθειών καθώς και το κοινό τους σημείο Α.

(β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο είναι η αρχή του συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy, Α είναι το κοινό σημείο των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και Β είναι το σημείο όπου η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Τρεις κύκλοι έχουν το ίδιο κέντρο Ο και ακτίνες r_1, r_2, r_3 με $0 < r_1 < r_2 < r_3$. Έστω Δ_1 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο με ακτίνες r_1, r_2, και Δ_2 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο με ακτίνες r_2, r_3. Αν είναι $r_2 - r_1 = r_3 - r_2$ και $r_3 = 3r_1$, να βρείτε το λόγο $\dfrac{\mathrm{E}(\Delta_1)}{\mathrm{E}(\Delta_2)}$, όπου $\mathrm{E}(\Delta_1)$ και $\mathrm{E}(\Delta_2)$ είναι τα εμβαδά των κυκλικών δακτυλίων Δ_1 και Δ_2, αντίστοιχα.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο
Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού είναι μεγαλύτερο από το δεκαπλάσιο του αριθμού κατά 75. Να βρεθεί ο αριθμός.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο
Αν οι αριθμοί μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι και ισχύει ότι

$$4^{\mu-2} + 4^{\nu+2} \leq 2^{\mu+\nu+1},$$

να αποδείξετε ότι ο ακέραιος $\mathrm{A} = 2^{\mu} + 2^{\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του 34.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΔ ύψος του.

(α) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{Z}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

(β) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το μέρος του Α), αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{Z}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο .
Μία βρύση Α γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) μία δεξαμενή σε τρεις ώρες. Μία δεύτερη βρύση Β γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή σε τέσσερις ώρες. Μία τρίτη τέλος βρύση Γ αδειάζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή , όταν βέβαια είναι γεμάτη, σε έξι ώρες. Ένας αυτόματος μηχανισμός ανοίγει με τυχαία σειρά και τις τρεις βρύσες με τον εξής τρόπο: ανοίγει μία βρύση, μετά από δύο ώρες ανοίγει μία άλλη και τέλος μετά από μία ώρα ανοίγει και την άλλη βρύση. Ένας άλλος μηχανισμός μετρά το χρόνο που χρειάζεται να γεμίσει η δεξαμενή και ξεκινά τη λειτουργία του μόλις πέσει νερό μέσα στη δεξαμενή. Ποια είναι εκείνη η σειρά με την οποία, αν ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός, ο αριθμός των ωρών που θα χρειαστούν για να γεμίσει η δεξαμενή θα είναι ακέραιος αριθμός; Ποιος είναι σε κάθε περίπτωση αυτός ο ακέραιος αριθμός;

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Αν α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} \le \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$. Αν $\mathrm{A_1, B_1, \Gamma_1}$ είναι τα μέσα των πλευρών του $\mathrm{B\Gamma, A\Gamma, AB}$ αντίστοιχα και $\mathrm{A_2, B_2, \Gamma_2}$ είναι τα μέσα των $\mathrm{OA, OB, O\Gamma}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το εξάγωνο $\mathrm{A_2B_1\Gamma_2A_1B_2\Gamma_1}$ έχει τις πλευρές του ίσες και ότι οι διαγώνιές του $\mathrm{A_1A_2}$, $\mathrm{B_1B_2}$ και $\mathrm{\Gamma_1\Gamma_2}$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y με $x \ge 2009$ και $y \ge -2009$ ισχύει ότι:

$$\sqrt{x-2009}+\sqrt{y+2009}=\frac{x+y}{2}+1,$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{x-y+2}{2}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Να λυθεί το σύστημα:

$$\left.\begin{cases}(x+y)^3 = z-2x-y\\(y+z)^3 = x-2y-z\\(z+x)^3 = y-2z-x\end{cases}\right\} \qquad (\Sigma),$$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{ο} .

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y που να επαληθεύουν την εξίσωση

$$2x^2+3x\left(x-2\right)+11x-10y=2015$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f\left(x-f\left(y\right)\right)-f\left(y-f\left(x\right)\right)=2f\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right),$$

για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x-f(x))=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Δίνονται τρεις θετικοί ακέραιοι αριθμοί με δεκαδική αναπαράσταση της μορφής $\overline{\alpha\underbrace{000\cdots000}_{2\nu-\psi\eta\varphi\iota\alpha}\alpha}$, όπου α είναι θετικός μονοψήφιος ακέραιος και μεταξύ του πρώτου και του τελευταίου ψηφίου του αριθμού $\overline{\alpha\,00\cdots00\,\alpha}$, μεσολαβούν 2ν το πλήθος μηδενικά.

Να αποδείξετε ότι: "ή ένας από αυτούς θα διαιρείται με το 33 ή το άθροισμα κάποιων από αυτούς θα διαιρείται με το 33".

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^{ο} .

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ και έστω A_1, B_1, Γ_1 τα μέσα των πλευρών του $\mathrm{B\Gamma}, \mathrm{A\Gamma}, \mathrm{AB}$ αντίστοιχα. Θεωρούμε τους κύκλους $C_1(\mathrm{A}_1, \frac{R}{2})$, $C_2(\mathrm{B}_1, \frac{R}{2})$ και $C_3(\Gamma_1, \frac{R}{2})$. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1, C_2, C_3 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω N) και ότι τα δεύτερα κοινά σημεία τους είναι τα μέσα $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \Gamma_2$ των $\mathrm{OA}, \mathrm{OB}, \mathrm{O\Gamma}$ αντίστοιχα. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$, $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$, $\Gamma_1\Gamma_2$ και ON περνάνε από το ίδιο σημείο.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$70^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ $1^{ο}$

Αν $a = 4 - 2\frac{1}{5}$ και $b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2}$, να υπολογίσετε την τιμή παράστασης:

$$\mathrm{A} = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a}.$$

Λύση.
Είναι

$$a = 4 - 2\frac{1}{5} = \frac{4}{1} - \frac{11}{5} = \frac{20}{5} - \frac{11}{5} = \frac{9}{5} \text{ και } b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2} = 5 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = 5 - \frac{8}{2} = 5 - 4 = 1,$$

οπότε η παράσταση Α γίνεται:

$$\mathrm{A} = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a} = \frac{9}{5} : 1^{2009} - 1 - \frac{1}{5 \cdot \frac{9}{5}} = \frac{9}{5} : 1 - 1 - \frac{1}{9} = \frac{9}{5} - 1 - \frac{1}{9} = \frac{76}{45} - 1 = \frac{31}{45}.$$

ΘΕΜΑ $2^{ο}$

Έστω α θετικός ακέραιος τον οποίο διαιρούμε με 4.

(i) Ποιες είναι οι δυνατές μορφές του παραπάνω θετικού ακέραιου α;

(ii) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός α, αν είναι περιττός μεγαλύτερος από 39 και μικρότερος από 50, και διαιρούμενος με το 4 δίνει υπόλοιπο 1.

Λύση

(i) Οι δυνατές μορφές του ακέραιου αριθμού α είναι οι εξής:
α = 4ρ, όπου ρ θετικός ακέραιος, ή α = 4ρ + 1 ή α = 4ρ + 2 ή α = 4ρ + 3 όπου ρ μη αρνητικός ακέραιος.

(ii) Σύμφωνα με την υπόθεση είναι α = 4ρ + 1, οπότε έχουμε:

$$39 < 4\rho + 1 < 50 \Leftrightarrow 38 < 4\rho < 49 \Leftrightarrow 9,5 < \rho < 12,25$$

Επομένως, αφού ο ρ είναι μη αρνητικός ακέραιος, έπεται ότι ρ = 10 ή ρ = 11 ή ρ = 12 και α = 41 ή α = 45 ή α=49.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ έχουν άθροισμα 140^0 και είναι ανάλογες με τους αριθμούς 1 και 6, αντίστοιχα.

α) Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν το ύψος και η διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχούν στην πλευρά του ΒΓ.

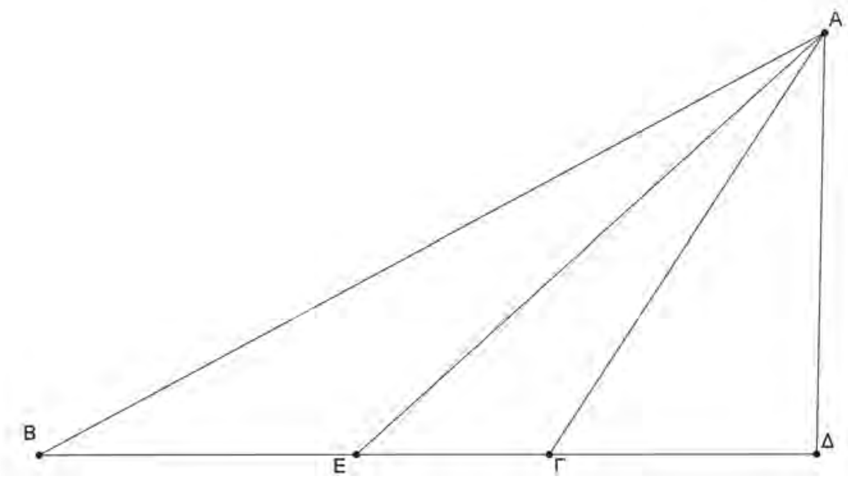
Λύση

α) Κατ' αρχή έχουμε: $\hat{A} = 180^0 - \left(\hat{B} + \hat{\Gamma}\right) = 180^0 - 140^0 = 40^0$.

Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε: $\frac{\hat{B}}{1} = \frac{\hat{\Gamma}}{6}$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 140^0$, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\hat{B}}{1} = \frac{\hat{\Gamma}}{6} = \lambda \Rightarrow \hat{B} = \lambda, \hat{\Gamma} = 6\lambda \text{ και } \lambda + 6\lambda = 140^0 \Rightarrow \lambda = 20^0.$$

Άρα είναι: $\hat{B} = 20^0$ και $\hat{\Gamma} = 120^0$.



Σχήμα 1

β) Έστω ΑΔ το ύψος και ΑΕ η διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ. Τότε το σημείο Γ βρίσκεται μεταξύ των σημείων Β και Δ, αφού διαφορετικά το τρίγωνο ΑΓΔ θα είχε άθροισμα γωνιών μεγαλύτερο των 180^0. Έτσι έχουμε:

$$\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}E = \left(90^\circ - \Delta\hat{\Gamma}A\right) + \frac{\hat{A}}{2}. \qquad (1)$$

Επειδή είναι $\hat{A} = 40^0$, $\Delta\hat{\Gamma}A = 180^0 - 120^0 = 60^0$, από τη σχέση (1) λαμβάνουμε $\Delta\hat{A}E = 50^0$.

ΘΕΜΑ 4ο

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου, το $\frac{1}{4}$ ασχολείται με το στίβο, το $\frac{1}{5}$ ασχολείται με το μπάσκετ, το $\frac{1}{8}$ ασχολείται με το βόλεϊ και περισσεύουν και 80 μαθητές που δεν ασχολούνται με κανένα από αυτά τα αθλήματα. Δεδομένου ότι οι μαθητές του Γυμνασίου οι ασχολούμενοι με τον αθλητισμό, ασχολούνται με ένα μόνο άθλημα, εκτός από 12 μαθητές που ασχολούνται και με το μπάσκετ και με το βόλεϊ, να βρείτε:

α) Ποιος είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου;

β) Πόσοι είναι οι μαθητές του Γυμνασίου που ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ;

Λύση (1^{ος} τρόπος)

α) Έχουμε $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{23}{40}$. Όμως στα $\frac{23}{40}$ των μαθητών του Γυμνασίου έχουν υπολογιστεί δύο φορές οι 12 μαθητές που ασχολούνται με μπάσκετ και βόλεϊ. Άρα οι 80 -12=68 μαθητές είναι τα $\frac{40}{40}-\frac{23}{40}=\frac{17}{40}$ των μαθητών του Γυμνασίου. Έτσι όλο το σχολείο έχει :

$$68:\frac{17}{40}=68\cdot\frac{40}{17}=4\cdot 40=160 \text{ μαθητές.}$$

β) Μόνο με το μπάσκετ ασχολούνται $160\cdot\frac{1}{5}-12=32-12=20$ μαθητές.

2^{ος} τρόπος

α) Αν x είναι ο αριθμός των μαθητών του Σχολείου, τότε , σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+\frac{x}{8}+80-12=x,$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$10x+8x+5x+3200-480=40x \Leftrightarrow 17x=2720 \Leftrightarrow x=160.$$

β) $\frac{x}{5}-12=\frac{160}{5}-12=20$ μαθητές ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Αν ν είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=4\cdot(-1)^{\nu}+2\cdot\frac{(-1)^{2\nu+1}}{5}-7\cdot\frac{(-1)^{3\nu}}{5}.$$

Λύση

$$\mathrm{A}=4\cdot(-1)^{\nu}+2\cdot\frac{(-1)^{2\nu+1}}{5}-7\cdot\frac{(-1)^{3\nu}}{5}=4\cdot(-1)^{\nu}+2\cdot\frac{(-1)}{5}-7\cdot\frac{\left[(-1)^{3}\right]^{\nu}}{5}$$

$$=4\cdot(-1)^{\nu}-\frac{2}{5}-\frac{7\cdot\left(-1\right)^{\nu}}{5}=\left(4-\frac{7}{5}\right)\cdot\left(-1\right)^{\nu}-\frac{2}{5}=\frac{13\cdot\left(-1\right)^{\nu}-2}{5},$$

οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν ν άρτιος, τότε $\mathrm{A}=\frac{13-2}{5}=\frac{11}{5}$.
- Αν ν περιττός, τότε $\mathrm{A}=-3$.

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Ο θετικός ακέραιος α είναι περιττός και όταν διαιρεθεί με το 5 δίνει υπόλοιπο 2. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού α .

Λύση

Αφού ο α διαιρούμενος με το 5 αφήνει υπόλοιπο 2, θα είναι της μορφής $\alpha = 5\lambda + 2$, όπου λ μη αρνητικός ακέραιος. Όμως, αν ο λ ήταν άρτιος, τότε ο α επίσης θα ήταν άρτιος, που αντίκειται στην υπόθεση. Άρα ο λ είναι περιττός, δηλαδή είναι $\lambda = 2\kappa + 1,$ όπου κ μη αρνητικός ακέραιος.

Επομένως, έχουμε

$$\alpha = 5\cdot\left(2\kappa + 1\right) + 2 = 10\kappa + 7,$$

σχέση που δείχνει ότι ο θετικός ακέραιος α διαιρούμενος με το 10 αφήνει υπόλοιπο 7, δηλαδή με άλλα λόγια, το τελευταίο ψηφίο του α είναι 7. Διαφορετικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο α έχει κ δεκάδες και 7 μονάδες, οπότε το τελευταίο του ψηφίο είναι 7.

ΘΕΜΑ 3$^{\text{ο}}$

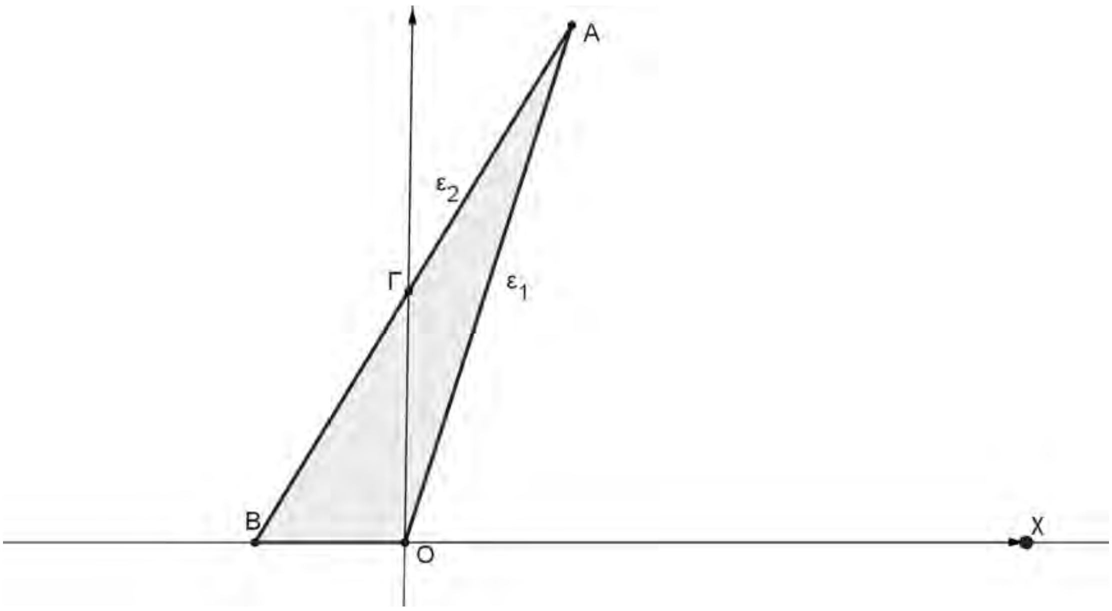
Δίνονται δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Η ευθεία ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση 4 , ενώ η ευθεία ε_2 είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\eta): y = 2x$ και διέρχεται από το σημείο Γ(0,6).

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των παραπάνω ευθειών καθώς και το κοινό τους σημείο Α.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο είναι η αρχή συστήματος ορθογωνίων αξόνων $\text{O}xy$, Α το κοινό σημείο των ευθειών και Β το σημείο όπου η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$.

Λύση

α) Η ευθεία ε_1 έχει εξίσωση $y = 4x$, ενώ η ευθεία ε_2 έχει εξίσωση $y = 2x + \beta$, αφού είναι παράλληλη με την (η). Όμως διέρχεται από το σημείο Β(0,6), οπότε θα ισχύει $6 = 2\cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 6$. Άρα η εξίσωση της ευθείας ε_2 είναι $y = 2x + 6$. Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των δύο ευθειών βρίσκουμε ότι το κοινό σημείο τους είναι το $\text{A}\left(3{,}12\right)$.



Σχήμα 2

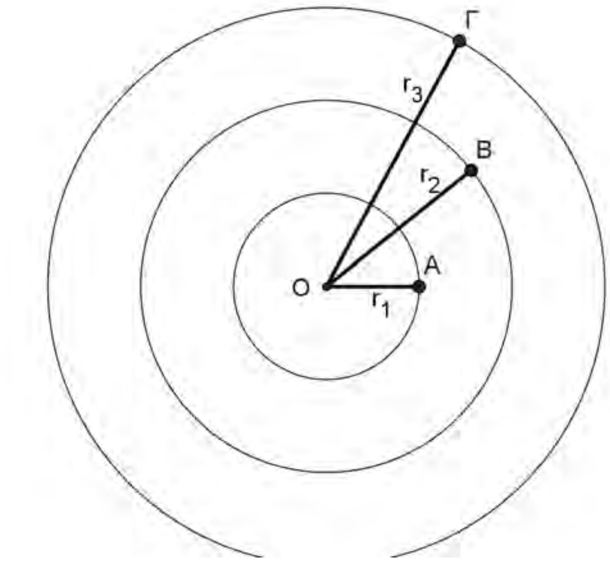
β) Η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $\text{B}\left(-3,0\right)$, οπότε η τη βάση του τριγώνου έχει μήκος 3, ενώ το ύψος του ίσο με 12. Άρα έχουμε:

$$\text{Ε(ΟΑΒ)} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 12 = 18 \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4ο

Τρεις κύκλοι έχουν το ίδιο κέντρο Ο και ακτίνες r_1, r_2, r_3 με $0 < r_1 < r_2 < r_3$. Έστω Δ_1 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο και ακτίνες r_1, r_2 και Δ_2 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο και ακτίνες r_2, r_3. Αν είναι $r_2 - r_1 = r_3 - r_2$ και $r_3 = 3r_1$, να βρείτε το λόγο $\dfrac{\text{Ε}(\Delta_1)}{\text{Ε}(\Delta_2)}$, όπου $\text{Ε}(\Delta_1)$ και $\text{Ε}(\Delta_2)$ είναι τα εμβαδά των δακτυλίων Δ_1 και Δ_2, αντίστοιχα.

Λύση



Σχήμα 3

Έχουμε

$$\frac{\text{Ε}(\Delta_1)}{\text{Ε}(\Delta_2)} = \frac{\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{\pi\left(r_3^2 - r_2^2\right)} = \frac{\left(r_2 - r_1\right)\left(r_2 + r_1\right)}{\left(r_3 - r_2\right)\left(r_3 + r_2\right)} = \frac{r_2 + r_1}{r_3 + r_2}, \qquad (1)$$

αφού δίνεται ότι $r_2 - r_1 = r_3 - r_2$. Από την ίδια σχέση προκύπτει ότι $r_2 = \dfrac{r_1 + r_3}{2}$, οπότε, λόγω τη σχέσης $r_3 = 3r_1$ λαμβάνουμε $r_2 = \dfrac{r_1 + 3r_1}{2} = 2r_1$. Έτσι η σχέση (1) γίνεται

$$\frac{\text{Ε}(\Delta_1)}{\text{Ε}(\Delta_2)} = \frac{r_2 + r_1}{r_3 + r_2} = \frac{3r_1}{3r_1 + 2r_1} = \frac{3r_1}{5r_1} = \frac{3}{5}.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να βρούμε πρώτα τη σχέση $r_2 = \dfrac{r_1 + 3r_1}{2} = 2r_1$ και στη συνέχεια να εργαστούμε με το λόγο

$$\frac{\text{Ε}(\Delta_1)}{\text{Ε}(\Delta_2)} = \frac{\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{\pi\left(r_3^2 - r_2^2\right)} = \frac{\pi\left[\left(2r_1\right)^2 - r_1^2\right]}{\pi\left[\left(3r_1\right)^2 - \left(2r_1\right)^2\right]} = \frac{3r_1^2}{5r_1^2} = \frac{3}{5}.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού είναι μεγαλύτερο από το δεκαπλάσιο του αριθμού κατά 75. Να βρεθεί ο αριθμός.

Λύση

Αν x είναι ο ζητούμενος αριθμός, τότε από τα δεδομένα του προβλήματος θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$x^2-10x=75 \Leftrightarrow x^2-10x-75=0 \Leftrightarrow x=15 \text{ ή } x=-5.$$

Επειδή ο ζητούμενος αριθμός είναι θετικός, η μοναδική λύση του προβλήματος είναι ο αριθμός 15.

ΘΕΜΑ 2ο

Αν οι αριθμοί μ και ν είναι θετικοί ακέραιοι και ισχύει ότι

$$4^{\mu-2}+4^{\nu+2}\le 2^{\mu+\nu+1},$$

να αποδείξετε ότι ο ακέραιος $\mathrm{A}=2^{\mu}+2^{\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του 34.

Λύση.

Η δεδομένη σχέση γράφεται στη μορφή

$$\left(2^2\right)^{\mu-2}+\left(2^2\right)^{\nu+2}-2\cdot 2^{\mu+\nu}\le 0 \Leftrightarrow \left(2^{\mu-2}\right)^2+\left(2^{\nu+2}\right)^2-2\cdot 2^{\mu+\nu}\le 0 \Leftrightarrow \left(2^{\mu-2}-2^{\nu+2}\right)^2\le 0$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$2^{\mu-2}-2^{\nu+2}=0 \Leftrightarrow 2^{\mu-\nu-4}=1 \Leftrightarrow \mu-\nu-4=0.$$

Επομένως έχουμε

$$\mathrm{A}=2^{\mu}+2^{\nu}=2^{\nu+4}+2^{\nu}=2^{\nu}\cdot\left(2^4+1\right)=17\cdot 2^{\nu}=34\cdot 2^{\nu-1},$$

που είναι πολλαπλάσιο του 34, αφού ο ν είναι θετικός ακέραιος.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΔ ύψος του.

(α) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta\mathrm{E}=\Delta\mathrm{Z}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

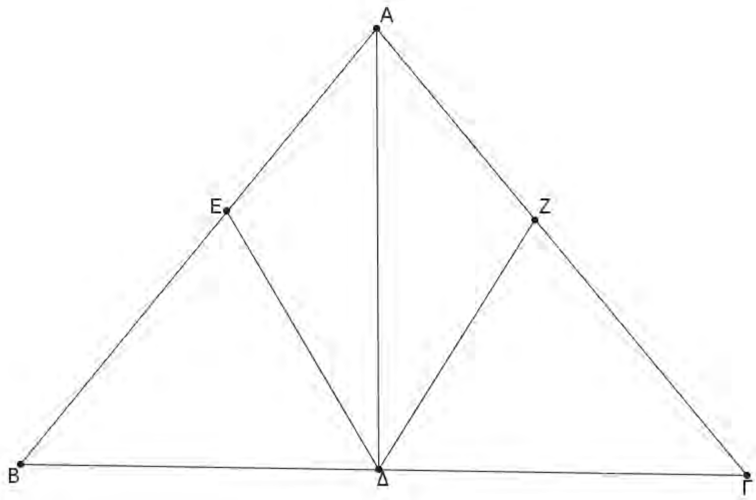
(β) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ προς το μέρος του Α, αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta\mathrm{E}=\Delta\mathrm{Z}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Λύση

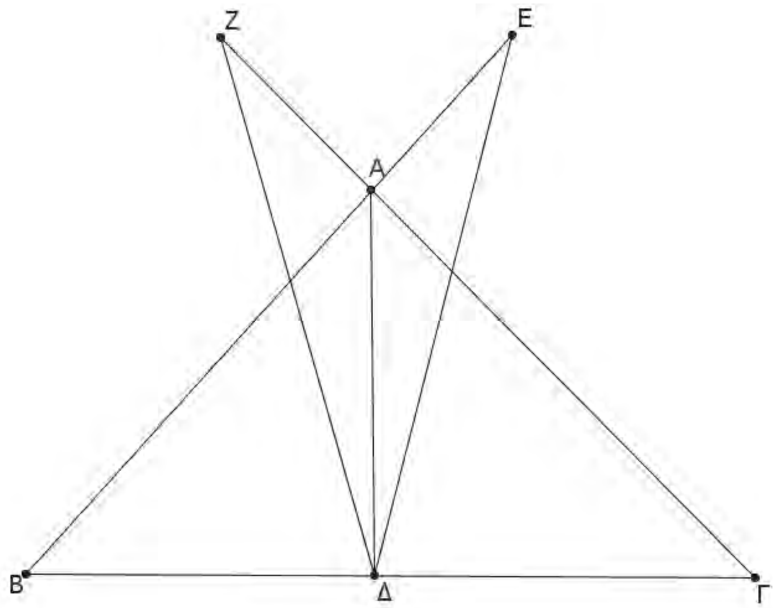
(α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΖ έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία ($\mathrm{A}\Delta=\mathrm{A}\Delta, \Delta\mathrm{E}=\Delta\mathrm{Z}$) και τις περιεχόμενες γωνίες των ίσων πλευρών ίσες, $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}=\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z}$, δηλαδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

Στη συνέχεια συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ, τα οποία είναι ορθογώνια με $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}=\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma=90^\circ$ και έχουν την πλευρά ΑΔ κοινή και τις οξείες γωνίες

$\Delta\hat{A}B$ και $\Delta\hat{A}\Gamma$ ίσες. Άρα τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι ίσα , οπότε θα έχουν και $AB = A\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές



Σχήμα 4



Σχήμα 5

(β) Ομοίως όπως στο ερώτημα (α) τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΖ είναι ίσα, οπότε θα έχουν

$$\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{A}Z.$$

Επειδή οι γωνίες $\Gamma\hat{A}E$ και $B\hat{A}Z$ είναι ίσες ως κατά κορυφή, έπεται ότι:

$$\Delta\hat{A}E - \Gamma\hat{A}E = \Delta\hat{A}Z - B\hat{A}Z \Rightarrow \Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}B,$$

οπότε και στην περίπτωση αυτή προκύπτει ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ. Στη συνέχεια προχωράμε όπως στο ερώτημα (α).
Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε ως εξής:

Από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΔΖ προκύπτει και η ισότητα $\Delta\hat{Z}A = \Delta\hat{E}A$, οπότε εύκολα προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΔΓΖ είναι ίσα, οπότε θα είναι $\Delta B = \Delta\Gamma$, η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ. Άρα είναι ΑΒ = ΑΓ.
Και στις δύο περιπτώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γνωστό θεώρημα της Γεωμετρίας, βάσει του οποίου, αν σε ένα τρίγωνο ένα ύψος του είναι και διχοτόμος, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 4^o

Μία βρύση Α γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) μία δεξαμενή σε τρεις ώρες. Μία δεύτερη βρύση Β γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή σε τέσσερις ώρες. Μία τρίτη τέλος βρύση Γ αδειάζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή (όταν βέβαια είναι γεμάτη) σε έξι ώρες. Ένας αυτόματος μηχανισμός ανοίγει με τυχαία σειρά και τις τρεις βρύσες με τον εξής τρόπο: ανοίγει μία βρύση, μετά από δύο ώρες ανοίγει μία άλλη και τέλος μετά από μία ώρα ανοίγει και την άλλη βρύση. Ένας άλλος μηχανισμός μετρά το χρόνο που χρειάζεται να γεμίσει η δεξαμενή και ξεκινά τη λειτουργία του μόλις πέσει νερό μέσα στη δεξαμενή. Ποια είναι εκείνη η σειρά με την οποία αν ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός, ο αριθμός των ωρών που θα χρειαστούν (για να γεμίσει η δεξαμενή) να είναι ακέραιος αριθμός; Ποιος είναι σε κάθε περίπτωση αυτός ο ακέραιος αριθμός;

Λύση

Έστω x, ο αριθμός των ωρών που χρειάζονται για να γεμίσει η δεξαμενή. Τότε οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός (μαζί με τις αντίστοιχες εξισώσεις που δημιουργούνται) είναι:

(1) Α-Β-Γ $\quad \frac{x}{3}+\frac{x-2}{4}-\frac{x-3}{6}=1 \Leftrightarrow 5x=12+6-6 \Leftrightarrow x=\frac{12}{5}$

(2) Β-Α-Γ $\quad \frac{x}{4}+\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{6}=1 \Leftrightarrow 5x=12+8-6 \Leftrightarrow x=\frac{14}{5}$

(3) Α-Γ-Β $\quad \frac{x}{3}-\frac{x-2}{6}+\frac{x-3}{4}=1 \Leftrightarrow 5x=12+9-4 \Leftrightarrow x=\frac{17}{5}$

(4) Β-Γ-Α $\quad \frac{x}{4}-\frac{x-2}{6}+\frac{x-3}{3}=1 \Leftrightarrow 5x=12+12-4 \Leftrightarrow x=4$

(5) Γ-Β-Α $\quad \frac{x}{4}+\frac{x-1}{3}-\frac{x}{6}=1 \Leftrightarrow 5x=12+4 \Leftrightarrow x=\frac{16}{5}$

(6) Γ-Α-Β $\quad \frac{x}{3}+\frac{x-1}{4}-\frac{x}{6}=1 \Leftrightarrow 5x=12+3 \Leftrightarrow x=3$

Ένας τρόπος ανοίγματος είναι Β-Γ-Α με αντίστοιχη διάρκεια $x=4$ ώρες (περίπτωση **(4)**).
Ένας δεύτερος τρόπος ανοίγματος είναι Γ-Α-Β με αντίστοιχη διάρκεια $x=3$ ώρες (περίπτωση **(6)**).
Στη περίπτωση **(4)** (που ανοίγει πρώτα η βρύση Β), ο χρόνος αρχίζει να μετράει με το άνοιγμα της βρύσης Β.

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι ο απαιτούμενος χρόνος για να γεμίσει η δεξαμενή είναι x ώρες, τότε η βρύση Β θα έχει γεμίσει τα $\frac{x}{4}$ της δεξαμενής. Στη συνέχεια ανοίγει η βρύση Γ η οποία θα λειτουργήσει $x-2$ ώρες και θα αδειάσει τα $\frac{x-2}{6}$ της δεξαμενής. Τέλος θα ανοίξει η βρύση Α η οποία θα λειτουργήσει $x-3$ ώρες και θα γεμίσει τα $\frac{x-3}{3}$ της δεξαμενής. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η εξίσωση **(4)**.

Στη περίπτωση **(6)** (που ανοίγει πρώτα η βρύση Γ), ο χρόνος αρχίζει να μετράει με το άνοιγμα της βρύσης Α (διότι ο μηχανισμός χρονομέτρησης αρχίζει μόλις πέσει νερό στη δεξαμενή).

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι ο απαιτούμενος χρόνος για να γεμίσει η δεξαμενή είναι x ώρες, τότε η βρύση Α θα έχει γεμίσει τα $\frac{x}{3}$ της δεξαμενής. Στη συνέχεια ανοίγει η βρύση Β η οποία θα λειτουργήσει $x-1$ ώρες και θα γεμίσει τα $\frac{x-1}{4}$ της δεξαμενής.

Τέλος η βρύση Γ θα λειτουργήσει x ώρες, και θα αδειάσει τα $\frac{x}{6}$ της δεξαμενής. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η εξίσωση **(6)**.

Ανάλογα εξηγούνται και οι υπόλοιπες περιπτώσεις.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο (

Αν α,β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} \le \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\sqrt{\alpha\beta} \le \frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (1)$$

που ισχύει γιατί είναι ισοδύναμη με την αληθή ανισότητα $0 \le \left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2$.

Επιπλέον έχουμε

$$\frac{4}{\alpha+\beta} \le \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}, \qquad (2)$$

η οποία ισχύει γιατί γράφεται ως

$$\frac{4}{\alpha+\beta} \le \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \frac{4}{\alpha+\beta} \le \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} \Leftrightarrow 4\alpha\beta \le (\alpha+\beta)^2 \Leftrightarrow 0 \le (\alpha-\beta)^2.$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των δύο ανισοτήτων (1) και (2) λαμβάνουμε τη ζητούμενη ανισότητα

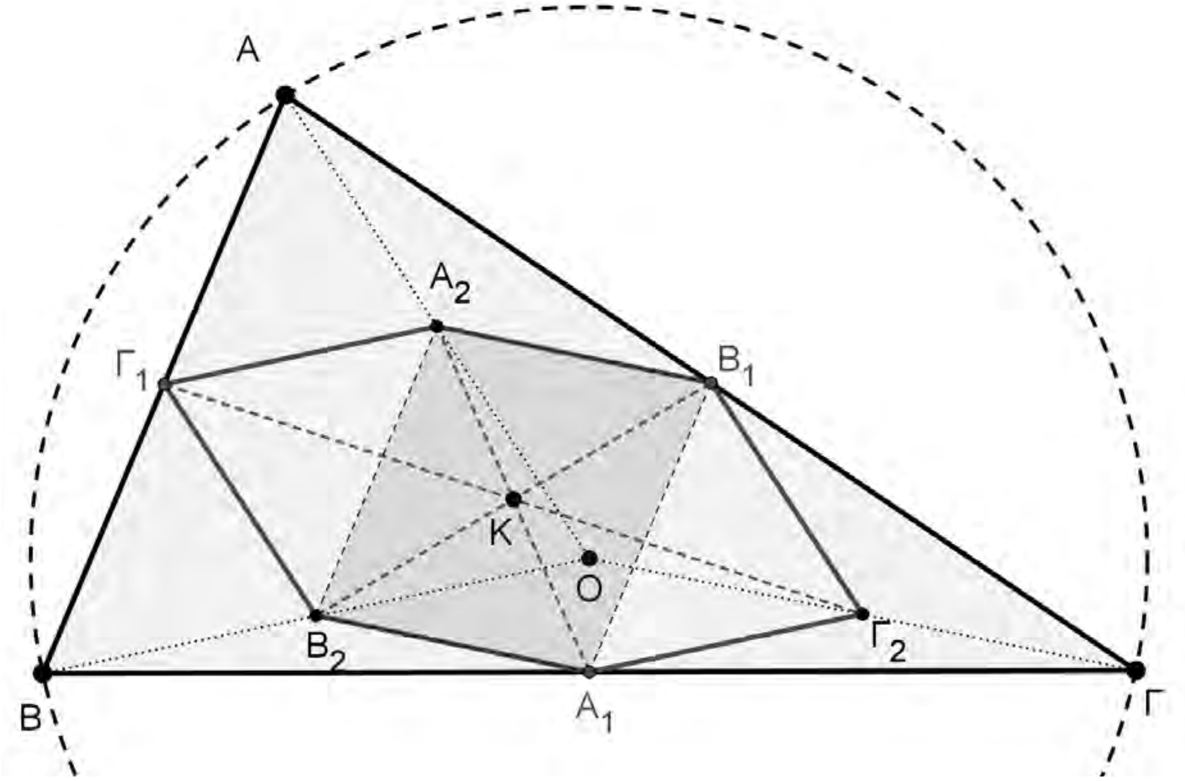
$$\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} \le \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

ΘΕΜΑ 2^{ο} .

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$. Αν $Α_1,Β_1,Γ_1$ είναι τα μέσα των πλευρών του $ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ$ αντίστοιχα και $Α_2,Β_2,Γ_2$ είναι τα μέσα των $ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το εξάγωνο $Α_2Β_1Γ_2Α_1Β_2Γ_1$ έχει τις πλευρές του ίσες και ότι οι διαγώνιές του $Α_1Α_2$, $Β_1Β_2$ και $Γ_1Γ_2$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση

Εφόσον Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου, θα ισχύει: $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = R$.



Σχήμα 6

Το ευθύγραμμο τμήμα $Α_2Β_1$ συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $ΟΑΓ$, άρα:

$$Α_2Β_1 = \frac{ΟΓ}{2} = \frac{R}{2} \qquad (1).$$

Το ευθύγραμμο τμήμα $Α_1Β_2$ συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $ΟΒΓ$, άρα:

$$Α_1Β_2 = \frac{ΟΓ}{2} = \frac{R}{2} \qquad (2).$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι όλες οι πλευρές του πολυγώνου είναι ίσες με $\frac{R}{2}$.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $Α_1Β_1Α_2Β_2$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται στο σημείο K.

Με όμοιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $A_1\Gamma_2A_2\Gamma_1$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε και σε αυτή τη περίπτωση οι διαγώνιες θα διχοτομούνται στο σημείο K.

ΘΕΜΑ 3ο .

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y με $x \geq 2009$ και $y \geq -2009$ ισχύει ότι:

$$\sqrt{x-2009}+\sqrt{y+2009}=\frac{x+y}{2}+1,$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A=\frac{x-y+2}{2}.$$

Λύση

Οι άρρητες παραστάσεις ορίζονται γιατί δίνεται ότι: $x \geq 2009$ και $y \geq -2009$.

Αν θέσουμε $\sqrt{x-2009}=a$ και $\sqrt{y+2009}=b$, τότε λαμβάνουμε $x=a^2+2009$ και $y=b^2-2009$, από τις οποίες προκύπτει η εξίσωση $x+y=a^2+b^2$.

Τότε η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$a+b=\frac{a^2+b^2}{2}+1 \Leftrightarrow a^2+b^2-2a-2b+2=0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2=0 \Leftrightarrow a-1=b-1=0 \Leftrightarrow a=b=1,$$

οπότε θα είναι $x=2010, y=-2008$ και $A=2010$.

ΘΕΜΑ 4ο

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} (x+y)^3=z-2x-y \\ (y+z)^3=x-2y-z \\ (z+x)^3=y-2z-x \end{Bmatrix} \qquad (\Sigma)$$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Λύση

Θέτουμε $x+y=\alpha$, $y+z=\beta$ και $z+x=\gamma$, οπότε το δοσμένο σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} \alpha^3+2\alpha=\beta \\ \beta^3+2\beta=\gamma \\ \gamma^3+2\gamma=\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(\alpha^2+2)=\beta \\ \beta(\beta^2+2)=\gamma \\ \gamma(\gamma^2+2)=\alpha \end{cases}$$

Από τη τελευταία έκφραση του συστήματος συμπεραίνουμε ότι έχει τη προφανή λύση:

$$\alpha=\beta=\gamma=0.$$

Θα αποδείξουμε ότι το σύστημα δεν έχει άλλη λύση.

Αν $\alpha\beta\gamma \neq 0$ τότε πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις έχουμε:

$$\alpha\beta\gamma(\alpha^2+2)(\beta^2+2)(\gamma^2+2)=\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow (\alpha^2+2)(\beta^2+2)(\gamma^2+2)=1.$$

Η τελευταία ισότητα δεν είναι δυνατό να ισχύει , οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.

Αν υποθέσουμε ότι $\alpha=0$ τότε θα ισχύει: $\beta=\gamma=0$.

Αν υποθέσουμε ότι $\beta=0$ τότε θα ισχύει: $\alpha=\gamma=0$.

Αν υποθέσουμε ότι $\gamma=0$ τότε θα ισχύει: $\alpha=\beta=0$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι το σύστημα δεν έχει άλλη λύση εκτός από την $\alpha=\beta=\gamma=0$.
Άρα το αρχικό σύστημα γίνεται:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+x=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x=y=z=0.$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y που να επαληθεύουν την εξίσωση

$$2x^2+3x(x-2)+11x-10y=2015.$$

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$x(x+1)-2y=403. \qquad (1)$$

Επειδή για όλους τους θετικούς ακέραιους x, y οι αριθμοί $x(x+1)$ και $2y$ είναι άρτιοι θετικοί ακέραιοι και η διαφορά τους $x(x+1)-2y$ θα είναι άρτιος θετικός ακέραιος, οπότε δεν είναι δυνατόν να ισούται με 403.

ΘΕΜΑ 2ο

Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f(x-f(y))-f(y-f(x))=2f(f(x)-f(y)), \text{ για κάθε } x, y\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξτε ότι $f(x-f(x))=0$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

Θέτουμε στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου y το x και παίρνουμε:

$$f(x-f(x))-f(x-f(x))=2f(f(x)-f(x)),$$

οπότε θα είναι $f(0)=0$.

Θέτουμε στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου x το 0 και παίρνουμε:

$$f(0-f(y))-f(y-f(0))=2f(f(0)-f(y))$$

και χρησιμοποιώντας την ισότητα $f(0)=0$, καταλήγουμε:

$$f(-f(y))-f(y)=2f(-f(y))\Leftrightarrow f(-f(y))=-f(y).$$

Θέτουμε (στη τελευταία ισότητα) όπου y το x και έχουμε τη σχέση:

$$f(-f(x))=-f(x). \qquad (1)$$

Θέτουμε στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου y το 0 και παίρνουμε:

$$f(x-f(0))-f(0-f(x))=2f(f(x)-f(0))$$

και χρησιμοποιώντας την ισότητα $f(0)=0$, καταλήγουμε:

$$f(x)-f(-f(x))=2f(f(x)). \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(x\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Θέτουμε τέλος στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου y το $f(x)$ και χρησιμοποιώντας τη προηγούμενη ισότητα έχουμε $f\left(x-f\left(x\right)\right)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 3ο.

Δίνονται τρεις θετικοί ακέραιοι αριθμοί της μορφής $\overline{\boldsymbol{\alpha}\underbrace{\mathbf{000\cdots000}}_{2\nu-\psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}\boldsymbol{\alpha}}$, όπου $\boldsymbol{\alpha}$ είναι θετικός μονοψήφιος ακέραιος και μεταξύ του πρώτου και του τελευταίου ψηφίου του αριθμού $\overline{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{00}\cdots\mathbf{00}\boldsymbol{\alpha}}$, μεσολαβούν $\boldsymbol{2\nu}$ το πλήθος μηδενικά. Να αποδείξετε ότι: "ή ένας από αυτούς θα διαιρείται με το $\boldsymbol{33}$ ή το άθροισμα κάποιων από αυτούς θα διαιρείται με το $\boldsymbol{33}$".

Λύση

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι κάθε αριθμός της μορφής $\overline{\alpha\underbrace{000\cdots000}_{2\nu-\psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}\alpha}$ διαιρείται με το 11. Πράγματι, κάθε αριθμός της παραπάνω μορφής γράφεται;

$$\begin{aligned}\overline{\alpha00\cdots00\alpha}&=\alpha\cdot10^0+0\cdot10^1+\cdots+0\cdot10^{2\nu}+\alpha\cdot10^{2\nu+1}=\\&=\alpha+\alpha\cdot10^{2\nu+1}=\\&=\alpha(1+10^{2\nu+1})=\\&=\alpha(1+10)(\underbrace{10^{2\nu}-10^{2\nu-1}+\cdots+1}_{\kappa})=11\alpha\cdot\kappa.\end{aligned}$$

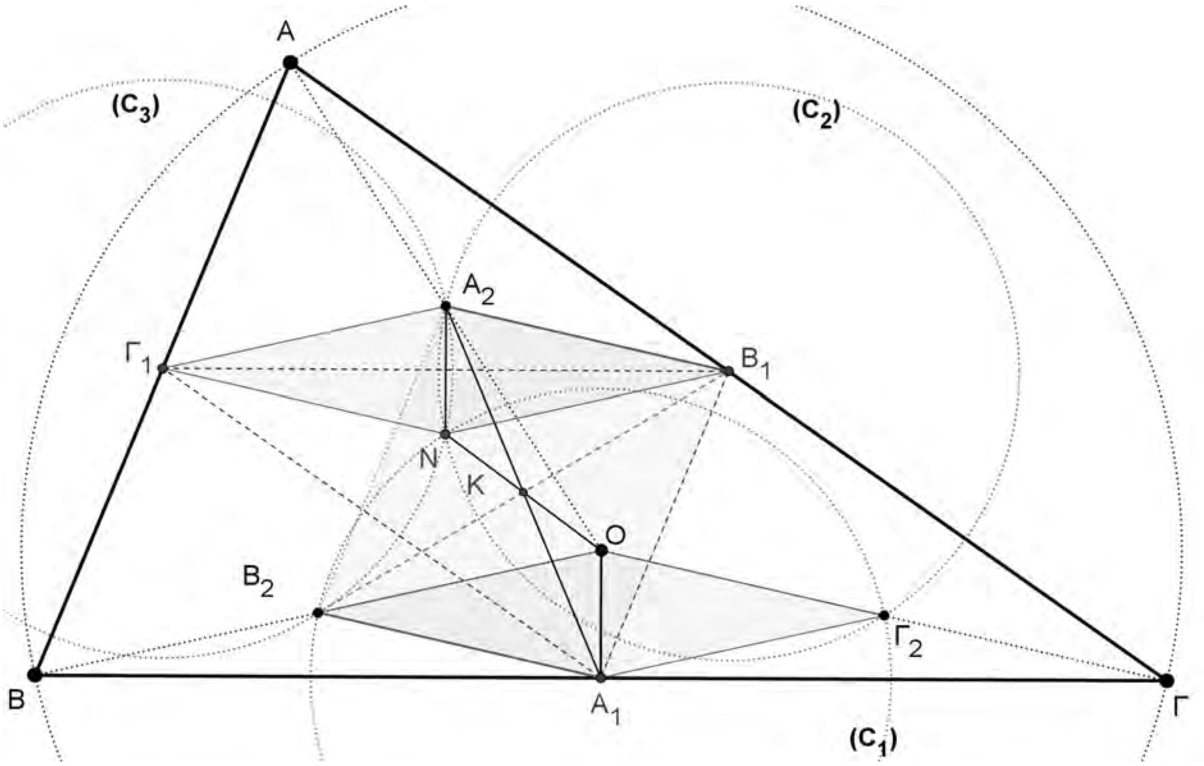
Έστω τώρα $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ τρεις οποιοιδήποτε θετικοί ακέραιοι αριθμοί. της μορφής $\overline{\alpha\underbrace{000\cdots000}_{2\nu-\psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}\alpha}$. Θα αποδείξουμε ότι: "ή ένας από αυτούς θα διαιρείται με το 3 ή το άθροισμα κάποιων από αυτούς θα διαιρείται με το 3". **(1)**
Αν κάποιος από τους αριθμούς $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ διαιρείται με το 3, τότε προφανώς θα ισχύει η πρόταση.
Έστω ότι το 3 δεν διαιρεί κανένα από τους αριθμούς $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.
Τότε υπάρχουν οι παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:
1) Αν όλοι οι αριθμοί είναι της μορφής $3k+1$, τότε προφανώς $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3m$
2) Αν όλοι οι αριθμοί είναι της μορφής $3k+2$, τότε προφανώς $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3n$
Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις ένας τουλάχιστον αριθμός θα είναι της μορφής $3k+1$ και ένας τουλάχιστον της μορφής $3k+2$, οπότε το άθροισμα αυτών των δύο αριθμών θα είναι προφανώς πολλαπλάσιο του τρία.
Επειδή καθένας από τους αριθμούς $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ της μορφής $\overline{\alpha00\cdots00\alpha}$ διαιρείται με το 11, έπεται ότι και το άθροισμα οσωνδήποτε από αυτούς θα διαιρείται με το 11.
Λαμβάνοντας υπόψιν τις προηγούμενες προτάσεις, καταλήγουμε στο ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 4ο .

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ και έστω $\mathrm{A}_1,\mathrm{B}_1,\Gamma_1$ τα μέσα των πλευρών του $\mathrm{B\Gamma},\mathrm{A\Gamma},\mathrm{AB}$ αντίστοιχα. Θεωρούμε τους κύκλους $C_1(\mathrm{A}_1,\frac{R}{2})$, $C_2(\mathrm{B}_1,\frac{R}{2})$ και $C_3(\Gamma_1,\frac{R}{2})$. Αποδείξτε ότι οι κύκλοι C_1,C_2,C_3 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω N) και ότι τα δεύτερα κοινά σημεία τους είναι τα μέσα A_2, B_2, Γ_2 των $OA, OB, O\Gamma$ αντίστοιχα. Στη συνέχεια να αποδείξτε ότι οι A_1A_2, B_1B_2, $\Gamma_1\Gamma_2$ και ON περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση

Το τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $AB\Gamma$. Ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων είναι $\lambda = \frac{1}{2}$, οπότε ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ θα έχει ακτίνα $\frac{R}{2}$.



Σχήμα 7

Οι κύκλοι τώρα που έχουν κέντρα τις κορυφές του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ και ακτίνα $\frac{R}{2}$ θα περνάνε από το περίκεντρο N του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$. (Το σημείο N είναι το κέντρο του κύκλου του Euler του τριγώνου $AB\Gamma$)

Αν A_2, B_2, Γ_2 είναι τα μέσα των $OA, OB, O\Gamma$ αντίστοιχα, τότε:

$$A_1B_2 = A_1\Gamma_2 = B_1A_2 = B_1\Gamma_2 = \Gamma_1A_2 = \Gamma_1B_2 = \frac{R}{2}.$$

(Τα παραπάνω τμήματα $A_1B_2, A_1\Gamma_2, B_1A_2, B_1\Gamma_2, \Gamma_1A_2, \Gamma_1B_2$ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα των ορθογωνίων τριγώνων OA_1B, $OA_1\Gamma$, OB_1A, $OB_1\Gamma$, $O\Gamma_1A$ και $O\Gamma_1B$.)

Άρα τα δεύτερα κοινά σημεία των κύκλων $C_1(A_1, \frac{R}{2})$, $C_2(B_1, \frac{R}{2})$ και $C_3(\Gamma_1, \frac{R}{2})$ είναι τα σημεία A_2, B_2, Γ_2.

Τα τετράπλευρα $\Gamma_1 N B_1 A_2$ και $O B_2 A_1 \Gamma_2$ είναι ρόμβοι με πλευρές μήκους $\frac{R}{2}$ και οι πλευρές του ενός τετραπλεύρου, είναι παράλληλες με τις πλευρές του άλλου ($A_2B_1 = // B_2A_1$, $\Gamma_1 A_2 = // A_1\Gamma_2, \ldots$).
Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:
Το τετράπλευρο $A_2 O A_1 N$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται. Δηλαδή η A_1A_2 περνά από το μέσο K του ON που είναι μέσο και του A_1A_2.
Το τετράπλευρο $\Gamma_1 A_2 \Gamma_2 A_1$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται. Δηλαδή η $\Gamma_1\Gamma_2$ περνά από το μέσο K του A_1A_2 που είναι μέσο και του $\Gamma_1\Gamma_2$.
Τέλος το τετράπλευρο $B_1\Gamma_1 B_2 \Gamma_2$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται. Δηλαδή η B_1B_2 και περνά από το μέσο K του $\Gamma_1\Gamma_2$ που είναι μέσο και του B_1B_2.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Β΄ Γυμνασίου

1. Έστω $x = 3^2 - 4\cdot 2^3 : 4 + 2^5$ και $y = 4\cdot 5^2 - 4^3 + 7\cdot 3^2$.

(α) Να βρεθούν οι αριθμοί x και y.

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο ακέραιο Α του οποίου οι αριθμοί x και y είναι πολλαπλάσια.

2. Έστω α, β φυσικοί αριθμοί. Δίνεται ότι η Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρετέο τον α και διαιρέτη τον β δίνει πηλίκο 6. Να βρεθεί ο αριθμός α, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ο α είναι πολλαπλάσιο του 7, ενώ ο αριθμός β είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 16, 32 και 248.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Ι. Η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ ενώ η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Αν είναι $\mathrm{I}\hat{\Delta}\Gamma = 70^0$ και $\mathrm{I}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = 130^0$, να βρεθούν:

α) η γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) οι γωνίες $\mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\Delta$ και $\mathrm{E}\hat{\mathrm{I}}\Gamma$.

4. Ένας αγρότης καλλιέργησε δύο κτήματα με ελαιόδενδρα. Το ένα κτήμα είναι δικό του και έχει 80 ελαιόδενδρα, ενώ το άλλο το μισθώνει και έχει 120 ελαιόδενδρα. Η συνολική παραγωγή λαδιού ήταν 2600 κιλά λάδι. Αν είχε συμφωνήσει να δώσει στον ιδιοκτήτη του μισθωμένου κτήματος το 10% της παραγωγής λαδιού του μισθωμένου κτήματος, πόσα κιλά λάδι θα πάρει ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Καθένα από τα ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων παράγει τα ίδια κιλά λάδι.

β. Κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος έχει απόδοση σε λάδι ίση με το 150% της απόδοσης σε λάδι κάθε ελαιόδενδρου του κτήματος του αγρότη.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Γ΄ Γυμνασίου

1. Αν $x+y=3\cdot(-2)^2$ και $y-w=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^4\right]^6\cdot\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^6\right]^{-4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=7x+10y-3w-87\,.$$

2. Να βρείτε έναν τετραψήφιο φυσικό αριθμό, αν γνωρίζετε ότι ισχύουν όλα τα παρακάτω:
(α) Το ψηφίο των μονάδων του είναι πολλαπλάσιο του 4,
(β) Το ψηφίο των δεκάδων του είναι το μισό του ψηφίου των μονάδων του,
(γ) Το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι διαιρέτης του 5 ,
(δ) Το ψηφίο των χιλιάδων του είναι ίσο με το ψηφίο των εκατοντάδων του μειωμένο κατά 1.

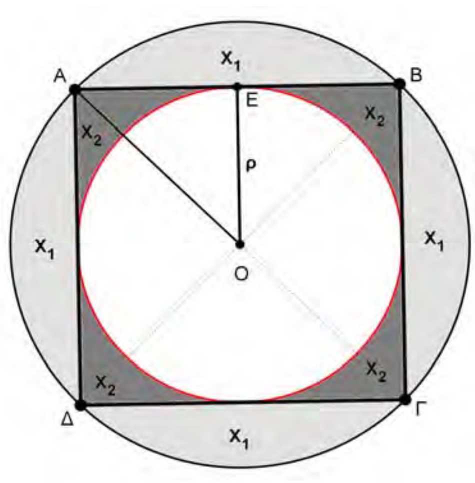
3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=120^0$. Στο εσωτερικό της γωνίας Α φέρουμε ημιευθείες $\mathrm{A}x$ και $\mathrm{A}y$ κάθετες στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα που τέμνουν την πλευρά ΒΓ στα σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα. Αν $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}=120^0$, $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Delta=60^0$ και το ύψος ΑΗ έχει μήκος $2\sqrt{3}$ μονάδες μήκους, τότε:
α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.
β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
γ. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ.

4. Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά 2ρ .Ονομάζουμε X_1 το χωρίο που αποτελείται από τα τέσσερα κυκλικά τμήματα του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{OA})$ που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ. Επίσης ονομάζουμε X_2 το χωρίο που βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ και εσωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

α. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου $\Delta(\mathrm{O},\rho,\mathrm{OA})$ που ορίζεται από τους κύκλους $C(\mathrm{O},\rho)$ και $C(\mathrm{O},\mathrm{OA})$.

β. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)$ και $\mathrm{E}(\mathrm{X}_2)$ των χωρίων X_1 και X_2, αντίστοιχα, έχουν λόγο $\frac{\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)}{\mathrm{E}(\mathrm{X}_2)}$ μεγαλύτερο του $\frac{13}{5}$.

γ. Να προσδιορίσετε την ακτίνα x του κύκλου $C(\mathrm{O},x)$ που χωρίζει τον κυκλικό δακτύλιο $\Delta(\mathrm{O},\rho,\mathrm{OA})$ σε δύο κυκλικούς δακτύλιους ίσου εμβαδού.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
Ιστοσελίδα: www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Α΄ Λυκείου

1. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους που είναι λύσεις του συστήματος εξίσωσης-ανίσωσης

$$x^2-5x=14,\quad \frac{x-1}{2}+\frac{x^2-1}{4}<\frac{x\left(x-1\right)}{4}.$$

2. Αν α,β,γ είναι πραγματικοί αριθμοί, με κατάλληλο χωρισμό των όρων της σε ομάδες, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$\mathrm{A}=\alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta^3\gamma^2-\beta^4\gamma^2-\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^4.$$

3. Να λύσετε το σύστημα:

$$\frac{x}{2}-1=\frac{4}{y}\quad,\quad \frac{x-1}{2}-\frac{2}{3y}=\frac{5}{3}+\frac{x}{3}.$$

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και το ύψος του $\mathrm{A\Delta}$. Από τυχόν σημείο E του ύψους $\mathrm{A\Delta}$ θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη στη $\mathrm{B\Gamma}$. Πάνω στην ευθεία (ε) θεωρούμε δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία M, N έτσι ώστε $\mathrm{EM}=\mathrm{EN}$ και $\mathrm{MB}<\mathrm{M\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $\mathrm{M\Gamma}$ και NB τέμνονται πάνω στο ύψος $\mathrm{A\Delta}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
Ιστοσελίδα: www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Β΄ Λυκείου

1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύουν οι ισότητες

$$\sqrt{x^2-y-z}=x-2$$
$$\sqrt{y^2-z-x}=y-2$$
$$\sqrt{z^2-x-y}=z-2,$$

να αποδείξετε ότι $x+y+z=6$ και να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z.

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ και οι κύκλοι $c_1(\mathrm{A},\mathrm{AB})$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα $R_1=\mathrm{AB}$) και $c_2(\mathrm{A},\mathrm{A\Gamma})$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα $R_2=\mathrm{A\Gamma}$). Ο κύκλος $c_1(\mathrm{A},\mathrm{AB})$ τέμνει την ευθεία $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο E και την ευθεία AB στο σημείο Δ. Ο κύκλος $c_2(\mathrm{A},\mathrm{A\Gamma})$ τέμνει την ευθεία $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο K και την ευθεία $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο N.

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta\mathrm{EKN}$ είναι ορθογώνιο.

β. Αν το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές με $\Gamma\mathrm{A}=\Gamma\mathrm{B}$ και $\hat{\Gamma}=30^o$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta\mathrm{EKN}$ είναι τετράγωνο.

3. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $x+y=4$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(2x+1)^2}{x}+\frac{(2y+1)^2}{y}\geq 25.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ $(\hat{\mathrm{A}}=90^o)$ και έστω E το μέσο της διχοτόμου $\mathrm{B}\Delta$. Η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου AEB στο σημείο A τέμνει την πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο M. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ME και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Γ΄ Λυκείου

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$\left(2x^2+3x+1\right)^3-\left(x^2+3x+2\right)^3=7\left(x^2-1\right)^3.$$

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Το ύψος του ΑΔ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του στο σημείο Ζ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΔΖ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ε. Αν η ευθεία ΕΔ τέμνει την ευθεία ΑΓ στο Κ και η ευθεία ΖΚ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Λ, να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $\text{Β}\Lambda$.

3. Σε τουρνουά τένις συμμετέχουν 2^m, όπου m θετικός ακέραιος, αθλητές οι οποίοι έχουν βαθμολογηθεί και καταταγεί ανάλογα με την γενικότερη επίδοση τους. Το τουρνουά διεξάγεται σε "γύρους". Στον πρώτο "γύρο" ο πρώτος αθλητής αγωνίζεται με τον τελευταίο αθλητή, ο δεύτερος αγωνίζεται με τον προτελευταίο και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να αγωνιστούν όλοι οι αθλητές. Οι νικητές του πρώτου "γύρου" κατατάσσονται ξανά και συμμετέχουν στον δεύτερο "γύρο" ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με αυτή του πρώτου "γύρου". Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να ανακηρυχτεί ο πρωταθλητής. Σε κάθε νικητή του πρώτου γύρου δίνονται 10 βαθμοί, σε κάθε νικητή του δεύτερου γύρου δίνονται 20 βαθμοί, σε κάθε νικητή του τρίτου γύρου δίνονται 30 βαθμοί κ.ο.κ.

- **α.** Αν ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι το συνολικό πλήθος των αγώνων είναι πολλαπλάσιο του 7.
- **β.** Αν ο πρωταθλητής συγκέντρωσε συνολικά 210 βαθμούς, να βρείτε τον αριθμό των αθλητών που συμμετείχαν.

4. Μια ευθεία εφάπτεται των κύκλων $c_1(\text{O}_1,\text{r}_1)$ και $c_2(\text{O}_2,\text{r}_2)$ στα διακεκριμένα σημεία Α και Β, αντιστοίχως. Αν το Μ είναι κοινό σημείο των δύο κύκλων $c_1(\text{O}_1,\text{r}_1)$, $c_2(\text{O}_2,\text{r}_2)$ και ισχύει ότι $\text{r}_1<\text{r}_2$, να αποδείξετε ότι $\text{ΜΑ}<\text{ΜΒ}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Έστω $x = 3^2 - 4\cdot 2^3 : 4 + 2^5$ και $y = 4\cdot 5^2 - 4^3 + 7\cdot 3^2$.

(α) Να βρεθούν οι αριθμοί x και y.

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο θετικό ακέραιο A, του οποίου οι αριθμοί x και y είναι πολλαπλάσια.

Λύση

(α) Έχουμε

$$x = 3^2 - 4\cdot 2^3 : 4 + 2^5 = 9 - 4\cdot 8 : 4 + 32 = 9 - 32 : 4 + 32 = 9 - 8 + 32 = 33.$$

$$y = 4\cdot 5^2 - 4^3 + 7\cdot 3^2 = 4\cdot 25 - 64 + 7\cdot 9 = 100 - 64 + 63 = 99.$$

(β) Για την εύρεση του A αρκεί να βρούμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών x, y. Επειδή είναι $\text{ΜΚΔ}(33,99) = 33$, έπεται ότι θα είναι $A = 33$.

2. Έστω α, β φυσικοί αριθμοί. Δίνεται ότι η Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρετέο τον α και διαιρέτη τον β δίνει πηλίκο 6. Να βρεθεί ο αριθμός α, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ο α είναι πολλαπλάσιο του 7, ενώ ο αριθμός β είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 16, 32 και 248.

Λύση

Με τη γνωστή διαδικασία της διαίρεσης των δεδομένων ακέραιων με τον μικρότερό τους, βρίσκουμε το ΜΚΔ των αριθμών 16, 32 και 248. Έχουμε

$$\begin{array}{ccc} 16 & 32 & 248 \\ 16 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 8 \end{array},$$

οπότε είναι $\beta = \text{ΜΚΔ}(16,\ 32,\ 248) = 8$.

Από την υπόθεση έχουμε: $\alpha = 8\cdot 6 + \upsilon = 48 + \upsilon$, όπου υ ακέραιος με δυνατές τιμές από 0 μέχρι και 7. Δοκιμάζοντας τις δυνατές τιμές του υ στην παραπάνω σχέση διαπιστώνουμε ότι μόνο για $\upsilon = 1$, ο αριθμός $\alpha = 49$ που προκύπτει, είναι πολλαπλάσιο του 7.

Άρα έχουμε $\alpha = 49$ και $\beta = 8$.

3. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Ι. Η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ ενώ η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Αν είναι $Ι\hat{Δ}Γ = 70^0$ και $Ι\hat{Ε}Γ = 130^0$, να βρεθούν:

α) η γωνία $\hat{Α}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) οι γωνίες $Β\hat{Ι}Δ$ και $Ε\hat{Ι}Γ$.

Λύση

α. Εφόσον $ΙΔ//ΑΒ$ θα ισχύει: $\hat{Β} = \hat{Δ}_1 = 70^o$,(ως εντός εκτός επί τα αυτά των παραλλήλων $ΙΔ, ΑΒ$ τεμνομένων από την $ΒΔ$).

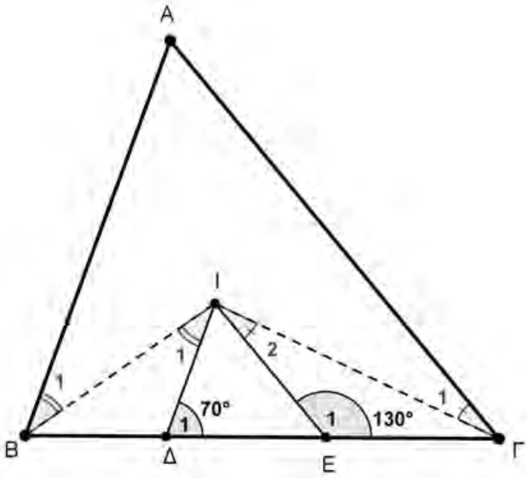
Επειδή είναι $ΙΕ//ΑΓ$, θα ισχύει: $\hat{Γ} = \hat{Ε}_1 = 180^o - 130^o = 50^o$. (Οι γωνίες $\hat{Γ}, \hat{Ε}_1$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων $ΙΕ, ΑΓ$ τεμνομένων από την $ΕΓ$).

Οι γωνίες $\hat{Α}, \hat{Β}, \hat{Γ}$ είναι γωνίες του τριγώνου $ΑΒΓ$, οπότε θα ισχύει:

$$\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^o \Leftrightarrow \hat{Α} = 180^o - \hat{Β} - \hat{Γ} = 180^o - 70^o - 50^o = 60^o.$$

β. Επειδή η $ΙΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Β}$, θα ισχύει: $\hat{Β}_1 = \frac{\hat{Β}}{2} = \frac{70^o}{2} = 35^o$.

Επίσης, επειδή $ΙΔ//ΑΒ$, θα ισχύει: $\hat{Ι}_1 = \hat{Β}_1 = 35^o$, γιατί οι γωνίες $\hat{Ι}_1, \hat{Β}_1$ είναι εντός εναλλάξ στις παράλληλες $ΙΔ, ΑΒ$ που τέμνονται από την $ΙΒ$.



Σχήμα 1

Εφόσον $ΙΓ$ διχοτόμος της γωνίας $\hat{Γ}$, θα ισχύει: $\hat{Γ}_1 = \frac{\hat{Γ}}{2} = \frac{50^o}{2} = 25^o$.

Επίσης είναι $ΙΕ//ΑΓ$, οπότε θα ισχύει: $\hat{Ι}_2 = \hat{Γ}_1 = 25^o$, αφού οι γωνίες $\hat{Ι}_2, \hat{Γ}_1$ είναι εντός εναλλάξ στις παράλληλες $ΙΕ, ΑΓ$ που τέμνονται από την $ΙΓ$.

4. Ένας αγρότης καλλιέργησε δύο κτήματα με ελαιόδενδρα. Το ένα κτήμα είναι δικό του και έχει 80 ελαιόδενδρα, ενώ το άλλο το μισθώνει και έχει 120 ελαιόδενδρα. Η συνολική παραγωγή λαδιού ήταν 2600 κιλά λάδι. Αν είχε συμφωνήσει να δώσει στον ιδιοκτήτη του μισθωμένου κτήματος το 10% της παραγωγής λαδιού του μισθωμένου κτήματος, πόσα κιλά λάδι θα πάρει ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Καθένα από τα ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων παράγει τα ίδια κιλά λάδι.

β. Κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος έχει απόδοση σε λάδι ίση με το 150% της απόδοσης σε λάδι κάθε ελαιόδενδρου του κτήματος του αγρότη.

Λύση

α. Επειδή θεωρούμε ότι τα 120+80=200 ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων είναι της ιδίας απόδοσης σε λάδι, έπεται ότι το λάδι που παράγεται από κάθε ελαιόδενδρο είναι 2600:200=13 κιλά. Επομένως τα 120 ελαιόδενδρα του μισθωμένου κτήματος παρήγαγαν $120 \cdot 13 = 1560$ κιλά λάδι.

Άρα ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος θα πάρει $1560 \cdot \frac{10}{100} = 156$ κιλά λάδι.

β. Αν υποθέσουμε ότι τα ελαιόδενδρα του κτήματος του αγρότη παράγουν x κιλά λάδι το καθένα, τότε κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος θα παράγει $x \cdot \frac{150}{100} = \frac{3x}{2}$ κιλά λάδι. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος θα έχουμε την εξίσωση

$$80 \cdot x + 120 \cdot \frac{3x}{2} = 2600 \Leftrightarrow 80x + 180x = 2600 \Leftrightarrow 260x = 2600 \Leftrightarrow x = \frac{2600}{260} = 10.$$

Επομένως τα ελαιόδενδρα του μισθωμένου κτήματος θα παράγουν $\frac{3 \cdot 10}{2} = 15$ κιλά λάδι το καθένα, οπότε το μισθωμένο κτήμα θα παράγει συνολικά $120 \cdot 15 = 1800$ κιλά λάδι και ο ιδιοκτήτης του θα πάρει $1800 \cdot \frac{10}{100} = 180$ κιλά λάδι.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Αν $x+y=3\cdot(-2)^2$ και $y-w=\left[\left(-\dfrac{3}{5}\right)^4\right]^6\cdot\left[\left(-\dfrac{3}{5}\right)^6\right]^{-4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $A=7x+10y-3w-87$.

Λύση

Έχουμε $x+y=3\cdot(-2)^2=3\cdot 4=12$ και

$$y-w=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^4\right]^6\cdot\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^6\right]^{-4}=\left(-\frac{3}{5}\right)^{24}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{-24}=\left(-\frac{3}{5}\right)^{24}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^{24}.$$

$$=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\right]^{24}=1^{24}=1.$$

Άρα είναι:

$$A=7x+10y-3w-87=7x+7y+3y-3w-87$$
$$=7(x+y)+3(y-w)-87=7\cdot 12+3\cdot 1-87=84+3-87=0.$$

2. Να βρείτε έναν τετραψήφιο φυσικό αριθμό, αν γνωρίζετε ότι ισχύουν όλα τα παρακάτω:

(α) Το ψηφίο των μονάδων του είναι πολλαπλάσιο του 4,
(β) Το ψηφίο των δεκάδων του είναι το μισό του ψηφίου των μονάδων του,
(γ) Το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι διαιρέτης του 5 ,
(δ) Το ψηφίο των χιλιάδων του είναι ίσο με το ψηφίο των εκατοντάδων του μειωμένο κατά 1.

Λύση

Έστω $\overline{xyzw}=1000\cdot x+100\cdot y+10\cdot z+w$ ο ζητούμενος τετραψήφιος φυσικός αριθμός. Τότε, σύμφωνα με το **(α)** θα είναι $w=0$ ή 4 ή 8, οπότε σύμφωνα με το **(β)** θα είναι $z=0$ ή 2 ή 4, αντίστοιχα. Επίσης, σύμφωνα με το **(γ)** θα είναι $y=1$ ή 5.

Έτσι οι δυνατές μορφές του αριθμού είναι:

$$\overline{x100},\ \overline{x124},\ \overline{x148},\ \overline{x500},\ \overline{x524},\ \overline{x548}.$$

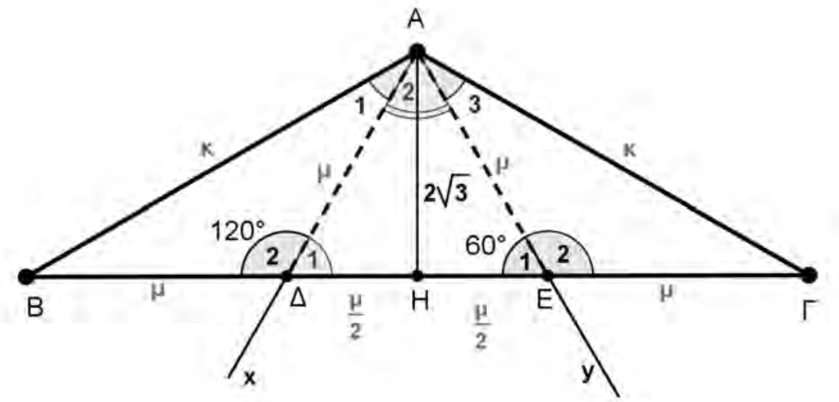
Λαμβάνοντας υπόψη και το (δ) καταλήγουμε στους αριθμούς $4500,\ 4524,\ 4548$, αφού το πρώτο ψηφίο τετραψήφιου φυσικού αριθμού δεν μπορεί να είναι το 0.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=120^0$. Στο εσωτερικό της γωνίας Α φέρουμε ημιευθείες Ax και Ay κάθετες στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα, που τέμνουν την πλευρά ΒΓ στα σημεία Δ και Ε , αντίστοιχα. Αν $A\hat{\Delta}B=120^0$, $A\hat{E}\Delta=60^0$ και το ύψος AH έχει μήκος $2\sqrt{3}$ μονάδες μήκους, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.
β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
γ. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ.

Λύση

α. Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\Delta}_2 = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = 120^\circ$, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}_1 = 60^\circ$. Από τα δεδομένα όμως έχουμε ότι $\hat{\mathrm{E}}_1 = 60^\circ$. Άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.



Σχήμα 2

β. Εφόσον οι ημιευθείες ΑΔ (Αx) και ΑΕ (Αy) είναι κάθετες προς τις ΑΓ και ΑΒ, θα ισχύει: $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_3 = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma - 90^\circ = 120^0 - 90^\circ = 30^\circ$.

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν: $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{AE}$ (από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΔΕ), $\hat{\Delta}_2 = \hat{\mathrm{E}}_2 = 120^\circ$ και $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_3 = 30^\circ$. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΕ είναι ίσα και συνεπώς $\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma$.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΔΓ που έχουν $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = 60^\circ = \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$, οπότε θα είναι $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 30^0$, δηλαδή ΑΒΓ ισοσκελές.

γ. Έστω μ το μήκος της πλευράς του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΔΕ και κ το μήκος των ίσων πλευρών του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΔ έχουμε:

$$\mathrm{A}\Delta^2 = \mathrm{AH}^2 + \Delta\mathrm{H}^2 \text{ δηλαδή } \mu^2 = \frac{\mu^2}{4} + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{3\mu^2}{4} = 12 \Leftrightarrow \mu = 4.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΒ έχουμε:

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{HB}^2, \text{ δηλαδή } \kappa^2 = \left(\frac{3\mu}{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow \kappa^2 = 48 \Leftrightarrow \kappa = 4\sqrt{3}.$$

Η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι $12 + 8\sqrt{3}$.

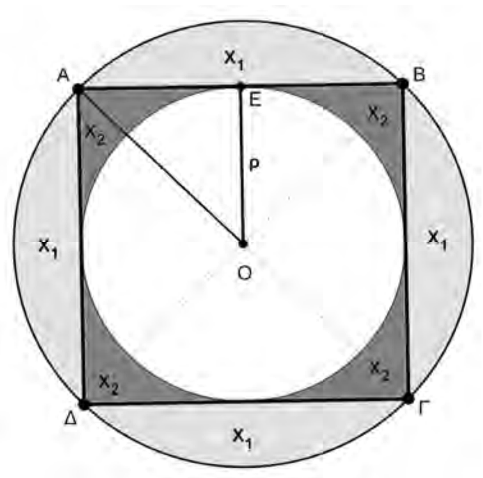
Η περίμετρος του τριγώνου ΑΔΕ είναι 12, οπότε ο λόγος του θα είναι $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

4. Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά 2ρ. Ονομάζουμε X_1 το χωρίο που αποτελείται από τα τέσσερα κυκλικά τμήματα του κύκλου $\mathrm{C}(\mathrm{O},\mathrm{OA})$ που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ. Επίσης ονομάζουμε X_2 το χωρίο που βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου $\mathrm{C}(\mathrm{O},\rho)$ και εσωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

α. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου $\Delta(\mathrm{O},\rho,\mathrm{OA})$ που ορίζεται από τους κύκλους $\mathrm{C}(\mathrm{O},\rho)$ και $\mathrm{C}(\mathrm{O},\mathrm{OA})$.

β. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)$ και $\mathrm{E}(\mathrm{X}_2)$ των χωρίων X_1 και X_2, αντίστοιχα έχουν λόγο $\frac{E(X_1)}{E(X_2)}$ μεγαλύτερο του $\frac{13}{5}$.

γ. Να προσδιορίσετε την ακτίνα x του κύκλου $C(O,x)$ που χωρίζει τον κυκλικό δακτύλιο $\Delta(O,\rho,OA)$ σε δύο κυκλικούς δακτύλιους ίσου εμβαδού.



Σχήμα 3

Λύση

(α) Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΕ με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος λαμβάνουμε $OA^2=\rho^2+\rho^2 \Leftrightarrow OA^2=2\rho^2 \Leftrightarrow OA=\rho\sqrt{2}$, οπότε είναι

$$E(\Delta(O,\rho,OA))=\pi\left(\rho\sqrt{2}\right)^2-\pi\rho^2=2\pi\rho^2-\pi\rho^2=\pi\rho^2.$$

(β) Το εμβαδόν του χωρίου X_1 προκύπτει από το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου κέντρου Ο και ακτίνας $\rho\sqrt{2}$, αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τετράγωνο ΑΒΓΔ.

Άρα είναι

$$E(X_1)=\pi\left(\rho\sqrt{2}\right)^2-(2\rho)^2=2\pi\rho^2-4\rho^2=(2\pi-4)\rho^2.$$

Το εμβαδόν του χωρίου X_2 προκύπτει από το εμβαδόν του τετράγωνο ΑΒΓΔ , αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του κυκλικό δίσκου κέντρου Ο και ακτίνας ρ, δηλαδή

$$E(X_2)=(2\rho)^2-\pi\rho^2=4\rho^2-\pi\rho^2=(4-\pi)\rho^2.$$

Άρα είναι $\frac{E(X_1)}{E(X_2)}=\frac{2\pi-4}{4-\pi}$ και ισχύει ότι:

$$\frac{E(X_1)}{E(X_2)}=\frac{2\pi-4}{4-\pi}>\frac{13}{5}\Leftrightarrow 5(2\pi-4)>13(4-\pi)\Leftrightarrow 23\pi>72\Leftrightarrow \pi>\frac{72}{23}\cong 3{,}1304,$$

το οποίο είναι αληθές, αφού είναι $\pi\cong 3{,}14$.

(γ) Θα πρέπει να είναι $\rho<x<\rho\sqrt{2}$ και τα εμβαδά των δύο κυκλικών δακτύλιων που ορίζονται να είναι ίσα, δηλαδή

$$\pi\left[\left(\rho\sqrt{2}\right)^2-x^2\right]=\pi\left(x^2-\rho^2\right)\Leftrightarrow 2\rho^2-x^2=x^2-\rho^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2=3\rho^2\Leftrightarrow x^2=\frac{3\rho^2}{2}\Leftrightarrow x=\rho\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους που είναι λύσεις του συστήματος εξίσωσης-ανίσωσης

$$x^2-5x=14,\quad \frac{x-1}{2}+\frac{x^2-1}{4}<\frac{x(x-1)}{4}.$$

Λύση

Η εξίσωση $x^2-5x=14$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x(x-5)=14$. Επειδή ζητάμε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης, συμπεραίνουμε ότι ο x πρέπει να είναι διαιρέτης του 14. Επομένως θα είναι $x\in\{\pm1,\pm2,\pm7,\pm14\}$. Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι ακέραιοι 7 και -2.

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να γράψουμε την εξίσωση στη μορφή τριωνύμου

$$x^2-5x-14=0,\ \text{με}\ \alpha=1,\ \beta=-5,\gamma=-14,$$

οπότε είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=81$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x=7$ ή $x=-2$.

Στη συνέχεια επιλύουμε την ανίσωση του συστήματος

$$\frac{x-1}{2}+\frac{x^2-1}{4}<\frac{x(x-1)}{4}\Leftrightarrow 2x-2+x^2-1<x^2-x\Leftrightarrow 3x<3\Leftrightarrow x<1.$$

Επομένως η ζητούμενη ακέραια λύση του συστήματος είναι η $x=-2$.

2. Αν οι α,β,γ είναι πραγματικοί αριθμοί, με κατάλληλο χωρισμό των όρων της σε ομάδες, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A=\alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta^3\gamma^2-\beta^4\gamma^2-\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^4.$$

Λύση

$$\begin{aligned}A&=\alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta^3\gamma^2-\beta^4\gamma^2-\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^4\\
&=\left(\alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2\right)-\left(\alpha^2\beta^2\gamma^2+2\alpha\beta^3\gamma^2+\beta^4\gamma^2\right)-\left(\alpha^2\gamma^2-\beta^2\gamma^4\right)\\
&=\alpha^2\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right)-\beta^2\gamma^2\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right)-\gamma^2\left(\alpha^2-\beta^2\gamma^2\right)\\
&=\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right)\left(\alpha^2-\beta^2\gamma^2\right)-\gamma^2\left(\alpha^2-\beta^2\gamma^2\right)\\
&=\left(\alpha^2-\beta^2\gamma^2\right)\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2\right)=\left[\alpha^2-(\beta\gamma)^2\right]\left[(\alpha+\beta)^2-\gamma^2\right]\\
&=(\alpha+\beta\gamma)(\alpha-\beta\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma).\end{aligned}$$

3. Να λύσετε το σύστημα:

$$\frac{x}{2}-1=\frac{4}{y}\ ,\quad \frac{x-1}{2}-\frac{2}{3y}=\frac{5}{3}+\frac{x}{3}.$$

Λύση

Αν θέσουμε $\frac{1}{y}=w$ και απαλείψουμε παρονομαστές, το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x-8w=2 \\ x-4w=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+8w \\ x=13+4w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+8w \\ 2+8w=13+4w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+8w \\ 8w-4w=13-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2+8w \\ 4w=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+8\cdot\dfrac{11}{4} \\ w=\dfrac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+2\cdot 11 \\ w=\dfrac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=24 \\ w=\dfrac{11}{4} \end{cases}.$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y) = \left(24, \dfrac{4}{11}\right)$

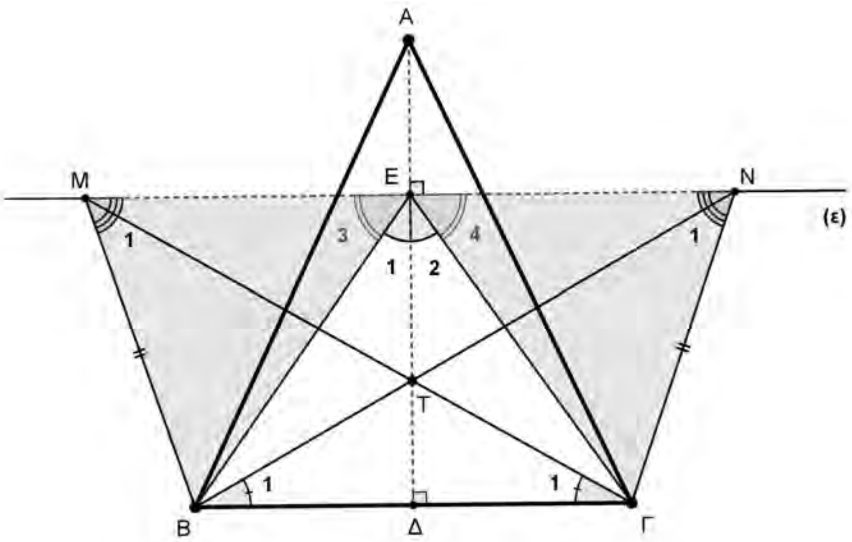
4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$ και το ύψος του $A\Delta$. Από τυχόν σημείο E του ύψους $A\Delta$ θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη στη $B\Gamma$. Πάνω στην ευθεία (ε) θεωρούμε δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία M, N έτσι ώστε $EM = EN$ και $MB < M\Gamma$. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $M\Gamma$ και NB τέμνονται πάνω στο ύψος $A\Delta$.

Λύση

Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα διότι έχουν τις υποτείνουσες $(AB = A\Gamma)$ και δύο οξείες γωνίες $(\hat{B} = \hat{\Gamma})$ ίσες. Άρα $\Delta B = \Delta\Gamma$, δηλαδή το Δ είναι μέσο της $B\Gamma$.

Τα τρίγωνα τώρα $E\Delta B$ και $E\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες ($E\Delta$ κοινή και από τη προηγούμενη ισότητα $\Delta B = \Delta\Gamma$). Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ και $EB = E\Gamma$.

Από την τελευταία ισότητα γωνιών, προκύπτει $\hat{E}_3 = \hat{E}_4$ γιατί οι γωνίες $\hat{E}_3, \hat{E}_4$ είναι συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{E}_1, \hat{E}_2$.



Σχήμα 4

Τα τρίγωνα EMB και $EN\Gamma$ είναι ίσα γιατί έχουν:

1. $EM = EN$ (από τα δεδομένα της άσκησης).

2. $EB = E\Gamma$ (από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων $E\Delta B$ και $E\Delta\Gamma$).

3. $\hat{E}_3 = \hat{E}_4$ (συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{E}_1, \hat{E}_2$).

Άρα θα έχουν $MB = N\Gamma$ και $E\hat{M}B = E\hat{N}\Gamma$.

Τα τρίγωνα MNB και $MN\Gamma$ είναι ίσα διότι έχουν:

1. $MN = MN$ (η πλευρά MN είναι κοινή).

2. $MB = N\Gamma$ (από την ισότητα των τριγώνων EMB και $EN\Gamma$).

3. $E\hat{M}B = E\hat{N}\Gamma$ (από την ισότητα των τριγώνων EMB και $EN\Gamma$).

Άρα θα έχουν και $M\Gamma = NB$.

Τα τρίγωνα τέλος $MB\Gamma$ και $NB\Gamma$ είναι ίσα γιατί έχουν:

1. $B\Gamma = B\Gamma$ (η πλευρά $B\Gamma$ είναι κοινή)

2. $MB = N\Gamma$ (από την ισότητα των τριγώνων EMB και $EN\Gamma$)

3. $M\hat{B}\Gamma = M\hat{B}E + E\hat{B}\Gamma = N\hat{\Gamma}E + E\hat{\Gamma}B = N\hat{\Gamma}B$

Άρα θα έχουν και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

Αν τώρα συμβολίσουμε με T το σημείο τομής των $M\Gamma$ και NB, σε συνδυασμό με την ισότητα $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$, συμπεραίνουμε ότι η $T\Delta$ είναι το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $TB\Gamma$, δηλαδή η $T\Delta$ είναι κάθετη προς τη $B\Gamma$ στο σημείο Δ. Άρα το σημείο T, θα ανήκει στο ύψος $A\Delta$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύουν οι ισότητες

$$\sqrt{x^2 - y - z} = x - 2$$
$$\sqrt{y^2 - z - x} = y - 2$$
$$\sqrt{z^2 - x - y} = z - 2,$$

να αποδείξετε ότι $x + y + z = 6$ και να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z.

Λύση

Από τις δεδομένες ισότητες προκύπτει ότι πρέπει να αληθεύουν οι περιορισμοί: $x \geq 2,\ y \geq 2$ και $z \geq 2$, αλλά και οι περιορισμοί $x^2 \geq y + z,\ y^2 \geq z + x$ και $z^2 \geq x + y$. Στη συνέχεια με ύψωση στο τετράγωνο των δύο μελών των δεδομένων εξισώσεων λαμβάνουμε

$$\left\{\begin{matrix} x^2 - y - z = x^2 - 4x + 4 \\ y^2 - z - x = y^2 - 4y + 4 \\ z^2 - x - y = z^2 - 4z + 4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 4x - y - z = 4 \\ -x + 4y - z = 4 \\ -x - y + 4z = 4 \end{matrix}\right\}, \qquad (1)$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε: $x + y + z = 6$.

Οι αριθμοί x, y, z προκύπτουν από τις εξισώσεις του συστήματος (1), αν τις γράψουμε στη μορφή

$$\left\{\begin{matrix} 5x - (x + y + z) = 4 \\ 5y - (x + y + z) = 4 \\ 5z - (x + y + z) = 4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 5x - 6 = 4 \\ 5y - 6 = 4 \\ 5z - 6 = 4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{matrix}\right\}.$$

Διαφορετικά, αν υποθέσουμε ότι μία τουλάχιστον από τις ανισότητες $x \geq 2,\ y \geq 2$ και $z \geq 2$ αληθεύει μόνον ως γνήσια ανισότητα, έστω $x > 2$, τότε με πρόσθεση αυτών κατά μέλη προκύπτει ότι $x + y + z > 6$, που είναι άτοπο. Άρα θα είναι $x = y = z = 2$.

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ και οι κύκλοι $c_1(Α, ΑΒ)$ (με κέντρο το σημείο $Α$ και ακτίνα $R_1 = ΑΒ$) και $c_2(Α, ΑΓ)$ (με κέντρο το σημείο $Α$ και ακτίνα $R_2 = ΑΓ$). Ο κύκλος $c_1(Α, ΑΒ)$ τέμνει την ευθεία $ΒΓ$ στο σημείο $Ε$ και την ευθεία $ΑΒ$ στο σημείο $Δ$. Ο κύκλος $c_2(Α, ΑΓ)$ τέμνει την ευθεία $ΒΓ$ στο σημείο $Κ$ και την ευθεία $ΑΓ$ στο σημείο $Ν$.

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΔΕΚΝ$ είναι ορθογώνιο.

β. Αν το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $ΓΑ = ΓΒ$ και $\hat{Γ} = 30^{o}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΔΕΚΝ$ είναι τετράγωνο.

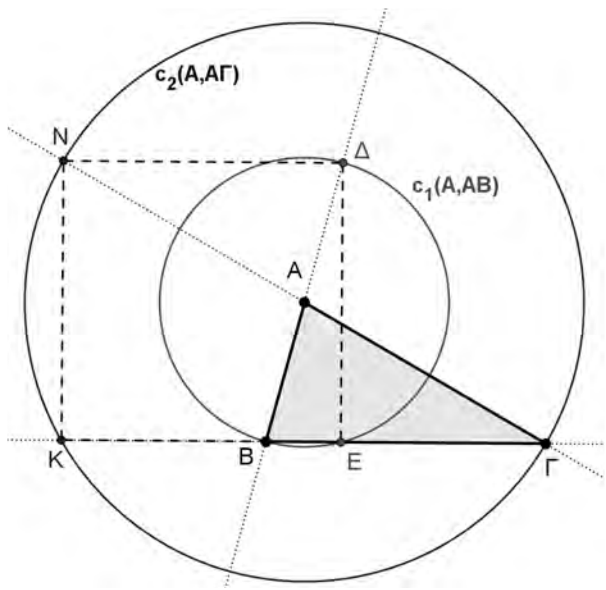
Λύση

α. Η $\mathrm{B\Delta}$ (από την κατασκευή) είναι διάμετρος του κύκλου $c_1(\mathrm{A},\mathrm{AB})$, οπότε A είναι το μέσο του $\mathrm{B\Delta}$ και $\mathrm{B\hat{E}\Delta} = 90^o$.
Η $\Gamma\mathrm{N}$ (από την κατασκευή) είναι διάμετρος του κύκλου $c_2(\mathrm{A},\mathrm{A}\Gamma)$, οπότε A είναι το μέσο του $\Gamma\mathrm{N}$ και $\Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{N} = 90^o$.

Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $\mathrm{N\Delta\Gamma B}$ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι διαγώνιες του διχοτομούνται, οπότε $\mathrm{N\Delta} = //\, \mathrm{B\Gamma}$.

Από την ισότητα $\mathrm{B\hat{E}\Delta} = \Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{N} = 90^o$ προκύπτει ότι οι ευθείες NK και $\mathrm{\Delta E}$ είναι κάθετες προς την ευθεία ΒΓ, οπότε θα είναι $\mathrm{NK}//\mathrm{\Delta E}$.

Από τις προηγούμενες παραλληλίες συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $\mathrm{\Delta EKN}$ είναι παραλληλόγραμμο και από την ισότητα $\mathrm{B\hat{E}\Delta} = \Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{N} = 90^o$ καταλήγουμε στο ότι το τετράπλευρο $\mathrm{\Delta EKN}$ είναι ορθογώνιο.



Σχήμα 5

.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{NK}\Gamma$ ισχύει $\hat{\Gamma} = 30^o$, οπότε η κάθετη πλευρά απέναντι από τη γωνία Γ θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Άρα θα έχουμε

$$\mathrm{KN} = \frac{\mathrm{N}\Gamma}{2} = \mathrm{A}\Gamma = \mathrm{B}\Gamma,$$

οπότε, λόγω της ισότητας ΝΔ = ΒΓ, συμπεραίνουμε ότι ΚΝ = ΝΔ, δηλαδή δύο διαδοχικές πλευρές του ορθογώνιου ΔΕΚΝ είναι ίσες, οπότε αυτό είναι τετράγωνο.

3. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $x + y = 4$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(2x+1)^2}{x} + \frac{(2y+1)^2}{y} \geq 25.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση
Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{4x^2+4x+1}{x}+\frac{4y^2+4y+1}{y}\geq 25$$

$$\text{ή αρκεί: } 4(x+y)+8+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 25$$

$$\text{ή αρκεί: } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 1.$$

Η τελευταία ανισότητα μπορεί να προκύψει με διάφορους τρόπους. Ένας από αυτούς είναι μέσω της σχέσης

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 4,$$

αν θέσουμε $x+y=4$, η οποία αληθεύει γιατί

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=2+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geq 2+2\cdot\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=4.$$

Η ισότητα ισχύει για $x=y=2$.

Διαφορετικά, αρκεί να γράψουμε

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 1\Leftrightarrow\frac{x+y}{xy}\geq 1\Leftrightarrow xy\leq 4\Leftrightarrow x(4-x)\leq 4\Leftrightarrow x^2-4x+4\geq 0$$

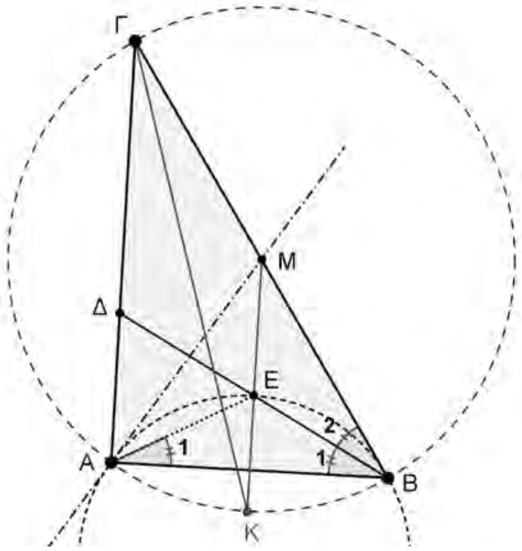
$$\Leftrightarrow (x-2)^2\geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

Στην τελευταία σχέση η ισότητα ισχύει για $x=y=2$, οπότε και η ζητούμενη σχέση αληθεύει ως ισότητα για $x=y=2$.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$) και έστω Ε το μέσο της διχοτόμου ΒΔ. Η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΕΒ στο σημείο Α τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΕ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

Επειδή Ε είναι το μέσο της υποτείνουσας ΒΔ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ, θα ισχύει:



Σχήμα 6

$EA = EB$. Άρα το σημείο E ανήκει στη μεσοκάθετη της πλευράς AB και $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$.

Επειδή η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, θα ισχύει $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$ και αφού $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$, καταλήγουμε στην ισότητα $\hat{A}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$. Άρα η ΓB είναι εφαπτόμενη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου AEB και κατά συνέπεια $MA = MB$, δηλαδή το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετη της πλευράς AB.

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε ως εξής:

Οι γωνίες $M\hat{A}E$ και $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$ είναι και οι δύο οξείες και η $M\hat{A}E$ είναι γωνία χορδής – εφαπτομένης, ενώ η $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο AE του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου AEB. Επομένως θα είναι $M\hat{A}E = \frac{\hat{B}}{2}$, οπότε $M\hat{A}B = \hat{B}$ και το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές με $MA = MB$, δηλαδή το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετη της πλευράς AB.

Το σημείο M είναι το μέσο της υποτείνουσας $B\Gamma$, οπότε είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

Τελικά η ME είναι η μεσοκάθετη της πλευράς AB, οπότε θα διέρχεται από το μέσο K του τόξου AB, από το οποίο διέρχεται και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$\left(2x^2+3x+1\right)^3-\left(x^2+3x+2\right)^3=7\left(x^2-1\right)^3.$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Αν θέσουμε $a=2x^2+3x+1,\ b=x^2+3x+2$, τότε $a-b=x^2-1$ και η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned}a^3-b^3=7(a-b)^3 &\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=7(a-b)^3\\ &\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2-7a^2+14ab-7b^2\right)=0\\ &\Leftrightarrow -(a-b)\left(6a^2-15ab+6b^2\right)=0\\ &\Leftrightarrow a-b=0 \text{ ή } 2a^2-5ab+2b^2=0\\ &\Leftrightarrow a=b \text{ ή } a=2b \text{ ή } 2a=b\\ &\Leftrightarrow x^2-1=0 \text{ ή } -3x-3=0 \text{ ή } 3x^2+3x=0\\ &\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1 \text{ ή } x=0 \text{ ή } x=-1\\ &\Leftrightarrow x=-1 \text{ (τριπλή ρίζα) ή } x=0 \text{ ή } x=1.\end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος

Παρατηρούμε ότι και στους τρεις όρους των δύο μελών της εξίσωσης υπάρχει ο κοινός παράγοντας $(x+1)^3$, οπότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$(x+1)^3\left[(2x+1)^3-(x+2)^3-7(x-1)^3\right]=0 \Leftrightarrow x=-1 (\text{τριπλή ρίζα})$$

$$\text{ή } 8x^3+12x^2+6x+1-x^3-6x^2-12x-8-7x^3+21x^2-21x+7=0$$

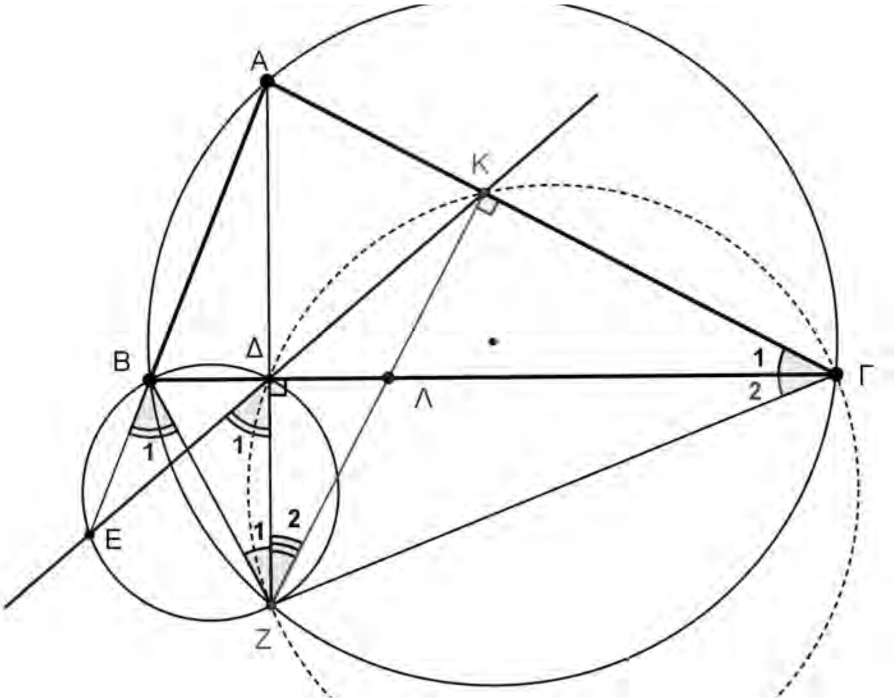
$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow x=-1 (\text{τριπλή ρίζα}) \text{ ή } 27x^2-27x=0\\ &\Leftrightarrow x=-1 (\text{τριπλή ρίζα}) \text{ ή } x=0 \text{ ή } x=1.\end{aligned}$$

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Το ύψος του ΑΔ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο Ζ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΔΖ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ε. Αν η ευθεία ΕΔ τέμνει την ευθεία ΑΓ στο Κ και η ευθεία ΖΚ την ΒΓ στο σημείο Λ, να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΛ.

Λύση

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΖΓ έχουμε: $\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1+\hat{\Gamma}_2$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΔΖΕ έχουμε: $\hat{B}_1=\hat{\Delta}_1$.



Σχήμα 7

Από τις δύο προηγούμενες ισότητες γωνιών προκύπτει $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2$, οπότε το τετράπλευρο ΔΚΓΖ είναι εγγράψιμο. Άρα $\hat{\Gamma}_1 = \hat{Z}_2$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΖΓ έχουμε: $\hat{Z}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

Από τις δύο τελευταίες ισότητες έχουμε: $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$, δηλαδή στο τρίγωνο ΒΖΛ η ΖΔ είναι ύψος και διχοτόμος.

3. Σε τουρνουά τένις συμμετέχουν 2^m, όπου m θετικός ακέραιος, αθλητές οι οποίοι έχουν βαθμολογηθεί και καταταγεί ανάλογα με την γενικότερη επίδοση τους. Το τουρνουά διεξάγεται σε “γύρους”. Στον πρώτο “γύρο” ο πρώτος αθλητής αγωνίζεται με τον τελευταίο αθλητή, ο δεύτερος αγωνίζεται με τον προτελευταίο και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να αγωνιστούν όλοι οι αθλητές. Οι νικητές του πρώτου “γύρου” κατατάσσονται ξανά και συμμετέχουν στον δεύτερο “γύρο” ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με αυτή του πρώτου “γύρου”. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να ανακηρυχτεί ο πρωταθλητής. Σε κάθε νικητή του πρώτου γύρου δίνονται 10 βαθμοί, σε κάθε νικητή του δεύτερου γύρου δίνονται 20 βαθμοί, σε κάθε νικητή του τρίτου γύρου δίνονται 30 βαθμοί κλπ.

α. Αν ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι το συνολικό πλήθος των αγώνων είναι πολλαπλάσιο του 7.

β. Αν ο πρωταθλητής συγκέντρωσε συνολικά 210 βαθμούς, να βρεθεί ο αριθμός των αθλητών που συμμετείχαν.

Λύση

Από την ανάλυση των κανόνων διεξαγωγής του τουρνουά μπορούμε να συμπεράνουμε τα παρακάτω:

Στο 1^o γύρο συμμετέχουν 2^m αθλητές, γίνονται 2^{m-1} αγώνες και ανακηρύσσονται 2^{m-1} νικητές.

Στο $2^{ο}$ γύρο συμμετέχουν 2^{m-1} αθλητές, γίνονται 2^{m-2} αγώνες και ανακηρύσσονται 2^{m-2} νικητές.

Στο $3^{ο}$ γύρο συμμετέχουν 2^{m-2} αθλητές, γίνονται 2^{m-3} αγώνες και ανακηρύσσονται 2^{m-3} νικητές και ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία στο $m^{ο}$ γύρο βρίσκουμε ότι συμμετέχουν $2^{m-m+1}=2^1=2$ αθλητές, γίνεται $2^{m-m}=2^0=1$ αγώνας και ανακηρύσσεται $2^{m-m}=2^0=1$ νικητής.

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι:

Συνολικά γίνονται m "γύροι" και $2^{m-1}+2^{m-2}+2^{m-3}+\cdots+2+1=2^m-1$ αγώνες.

Στους υπολογισμούς χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$\alpha^n-1=(\alpha-1)(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}+\cdots+\alpha+1).$$

α. Αν τώρα ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3, τότε $m=3k$, όπου k θετικός ακέραιος, και το συνολικό πλήθος των αγώνων γράφεται:

$$2^m-1=2^{3k}-1=\left(2^3\right)^k-1=8^k-1=(8-1)(8^{k-1}+8^{k-2}+\cdots+1)=7n,$$

όπου n θετικός ακέραιος.

β. Ο πρωταθλητής έχει παίξει και στους m γύρους, οπότε οι βαθμοί που θα συγκεντρώσει είναι:

$$10+20+30+\cdots+(m\cdot 10)=10(1+2+3+\cdots+m)=10\cdot\frac{m(m+1)}{2}=5m(m+1).$$

Άρα προκύπτει η εξίσωση:

$$5m(m+1)=210 \Leftrightarrow m(m+1)=42 \Leftrightarrow m=6,$$

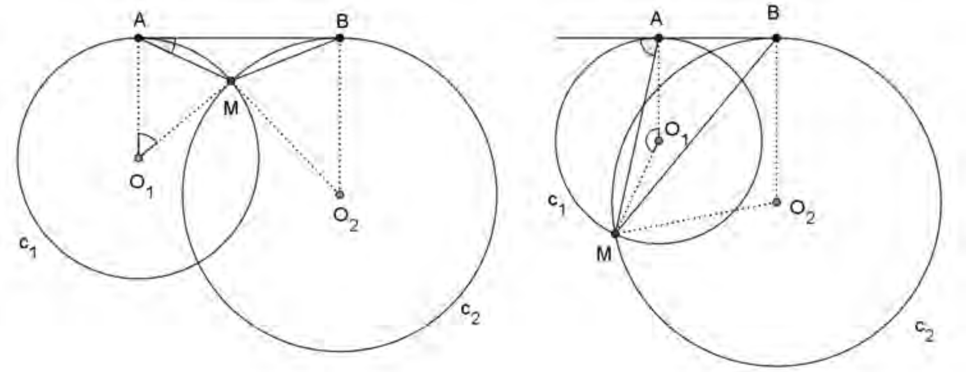
δηλαδή συμμετείχαν $2^6=64$ αθλητές.

4. Μια ευθεία εφάπτεται των κύκλων $c_1=(O_1,r_1)$ και $c_2=(O_2,r_2)$ στα διακεκριμένα σημεία A και B αντιστοίχως. Αν το M είναι κοινό σημείο των c_1, c_2 και ισχύει $r_1<r_2$, να αποδείξετε ότι $MA<MB$.

Λύση

Είναι $MA=2r_1\cdot ημ\left(\frac{M\hat{O}_1A}{2}\right)$ και $MB=2r_2\cdot ημ\left(\frac{M\hat{O}_2B}{2}\right)$, οπότε

$$\frac{MA}{MB}=\frac{r_1\cdot ημ\left(\frac{M\hat{O}_1A}{2}\right)}{r_2\cdot ημ\left(\frac{M\hat{O}_2B}{2}\right)}. \tag{1}$$



Σχήμα 8

Η γωνία $\frac{M\hat{O}_1A}{2}$ ισούται πάντοτε με μια από τις δύο γωνίες υπό της χορδής MA και της εφαπτομένης AB, και επειδή αυτές οι δύο είναι παραπληρωματικές μεταξύ τους, τα ημίτονα και των τριών γωνιών είναι ίσα. Καθώς $M\hat{A}B$ είναι μια από τις γωνίες υπό της χορδής MA και της εφαπτομένης AB θα έχουμε $\eta\mu\left(\frac{M\hat{O}_1A}{2}\right) = \eta\mu(M\hat{A}B)$. Ομοίως, ισχύει ότι $\eta\mu\left(\frac{M\hat{O}_1A}{2}\right) = \eta\mu(M\hat{B}A)$ και η σχέση (1) γράφεται

$$\frac{MA}{MB} = \frac{r_1 \cdot \eta\mu(M\hat{A}B)}{r_2 \cdot \eta\mu(M\hat{B}A)} \qquad (2)$$

Από το θεώρημα ημιτόνων στο τρίγωνο MAB έχουμε $\frac{\eta\mu(M\hat{A}B)}{\eta\mu(M\hat{B}A)} = \frac{MB}{MA}$, οπότε η σχέση (2) δίνει

$$\frac{MA}{MB} = \frac{r_1 \cdot MB}{r_2 \cdot MA} \Rightarrow \left(\frac{MA}{MB}\right)^2 = \frac{r_1}{r_2} < 1 \Rightarrow MA < MB.$$

Σημείωση

Η προηγούμενη λύση αφορά τεμνόμενους κύκλους, αλλά και κύκλους εφαπτόμενους εξωτερικά.

Τα σημεία A, B, M πάντοτε δημιουργούν τρίγωνο, αφού τα A, B είναι διακεκριμένα από την υπόθεση, και το M δεν μπορεί να ταυτιστεί με κανένα από τα A, B (αφού σε διαφορετική περίπτωση η ευθεία AB θα είχε με κάποιον από τους δοσμένους κύκλους δύο τουλάχιστον κοινά σημεία και δεν θα ήταν εφαπτομένη του).

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Νοεμβρίου 2011

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{7}+1-\frac{1}{14}\right):\frac{17}{2}-\frac{1}{7}+5\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\cdot 2-1\right).$$

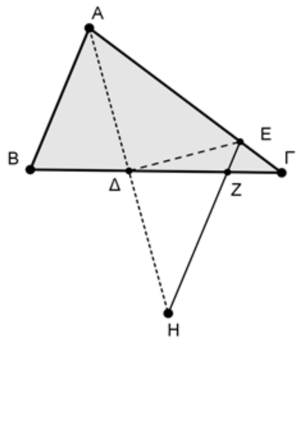
Πρόβλημα 2
Αν ο ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης:

$$\mathrm{B}=\frac{2}{\nu-\frac{1}{5}}:\frac{\nu-\frac{\nu}{2}}{9}.$$

Πρόβλημα 3
Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3 , 9 , 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό γ ως μειωτέο και τον αριθμό α ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί α , β και γ.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}$ και η διχοτόμος του $\mathrm{A\Delta}$. Προεκτείνουμε τη διχοτόμο ΑΔ κατά το ευθύγραμμο τμήμα ΔΗ έτσι ώστε ΑΔ = ΔΗ. Από το σημείο Η φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ζ.

1. Να αποδείξετε ότι : $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=90^\circ$.
2. Να βρείτε τη γωνία $\mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, αν γνωρίζετε ότι : $\hat{\mathrm{B}}-\hat{\Gamma}=20^0$.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$ και $\gamma = 10^{-1} \cdot 1000$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \le 2 \quad \text{και} \quad \frac{\frac{x}{2} - 3}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x .$$

Πρόβλημα 3

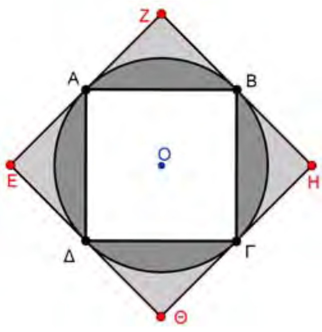
Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνεται ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$, όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία (δ) με εξίσωση $y = 2\lambda x$ και περνάει από το σημείο $\mathrm{K}(2,8)$.

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ.

(β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία $\Lambda(-4,-4)$ και $\mathrm{M}(-1,2)$ ανήκουν στην ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου $C(\mathrm{O}, \rho)$ στα σημεία Α, Β, Γ και Δ.



(α) Να βρείτε το άθροισμα Σ_1 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O}, \rho)$ και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

(β) Να βρείτε το άθροισμα Σ_2 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου ΕΖΗΘ και εξωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O}, \rho)$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3}$. (Θεωρείστε ότι $\pi = 3{,}1415$).

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”

19 Νοεμβρίου 2011

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος:
$$\left\{\begin{array}{l}(x-10)(x^2-7x+10)=0\\ \dfrac{x^2+1}{2}+\dfrac{2x-1}{5}<\dfrac{x(x+1)}{2}\end{array}\right\}.$$

Πρόβλημα 2
Να απλοποιηθεί η παράσταση:
$$\mathrm{A}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}-\frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)}$$

Πρόβλημα 3
(α) Αν κ ακέραιος, να λύσετε την εξίσωση:
$$\frac{\kappa x}{2}+\frac{x}{4}=\kappa(x+2)-\frac{3(\kappa x-1)}{4}.$$
(β) Για ποιες τιμές του ακέραιου κ η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις;

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$). Κύκλος με κέντρο την κορυφή Α και ακτίνα $\rho<\mathrm{AB}$ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Δ, αντίστοιχα. Οι ευθείες ΒΔ, ΓΕ τέμνουν για δεύτερη φορά το κύκλο στα σημεία Κ, Ν αντίστοιχα. Αν Τ είναι το σημείο τομής των ΒΔ, ΓΕ και S το σημείο τομής των ΔΝ, ΕΚ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, S και Τ βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση:
$$\mathrm{K}(x)=\frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2},\ \ x\neq\pm\sqrt{2}.$$
(β) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:
$$\mathrm{A}=\frac{2012\cdot4019\cdot2009+2006}{2010^2-2},$$
χωρίς την εκτέλεση των σημειούμενων πράξεων.

Πρόβλημα 2
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{c^2},$$
με άγνωστο το x, έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, για όλες τις τιμές των παραμέτρων $a,b,c\in\mathbb{R}$, $c\neq0$.

Πρόβλημα 3
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:
$$y=x^3+2x-2,\ z=y^3+2y-2,\ x=z^3+2z-2.$$

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{B\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\mathrm{A}}$, $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$, τέμνουν το κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$ στα σημεία Δ, E και Z αντίστοιχα. Από το σημείο Z, θεωρούμε παράλληλη στην $\mathrm{A\Gamma}$, που τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο M. Από το σημείο E, θεωρούμε παράλληλη στην AB, που τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τετράπλευρα BMOZ και $\mathrm{\Gamma NOE}$ είναι εγγράψιμα σε κύκλους, έστω (c_1) και (c_2), αντίστοιχα.
β) Το δεύτερο κοινό σημείο, έστω K, των κύκλων (c_1) και (c_2) ανήκει στο κύκλο με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα $\Delta\mathrm{I}$, όπου I το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$\left(x^2+3x+2\right)^4+\left(x^2+x-2\right)^4=16\left(x+2\right)^4.$$

Πρόβλημα 2
Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R},$, αν το σύστημα

$$\left\{\alpha\left(x^2+y^2\right)+2x+y=\lambda, \qquad 2x-y=-\lambda\right\} \qquad (\Sigma)$$

έχει λύση στο $\mathbb{R}$, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 3
Η ακολουθία $a_n, n=0,1,2,\ldots$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία $d_n=a_n-a_{n-1}$, με $n=1,2,.3,\ldots$. είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega=a_1-a_0$.

1. Να προσδιορίσετε, συναρτήσει των a_0,ω και n τον γενικό όρο a_n και το άθροισμα $S_{n+1}=a_0+a_1+\cdots+a_n$.
2. Αν είναι $a_0=1$ και $a_1=7$, να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο n για τον οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις: $a_n>10^3$ και $S_{n+1}\le 8\cdot 10^3$.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{B\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) και Δ τυχόν σημείο της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Σ, τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$ στο σημείο K και τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο M. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο T, τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο Λ και τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία $\mathrm{A,I,\Lambda,M}$ και $\mathrm{A,I,K,N}$, όπου I το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, είναι ομοκυκλικά σε δύο διαφορετικούς κύκλους, έστω (c_1) και (c_2), αντίστοιχα.

β) Αν η $\mathrm{A\Delta}$ ταυτιστεί με το ύψος του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ που αντιστοιχεί στη κορυφή A, τότε οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Νοεμβρίου 2011

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{7}+1-\frac{1}{14}\right):\frac{17}{2}-\frac{1}{7}+5\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\cdot 2-1\right)$$

Λύση

$$\mathrm{A}=\left(\frac{4}{14}+\frac{14}{14}-\frac{1}{14}\right)\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{14}{3}-1\right)$$

$$=\frac{17}{14}\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{9}{6}+\frac{28}{6}-\frac{6}{6}\right)=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\frac{31}{6}=0.$$

Πρόβλημα 2

Αν ο ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης:

$$\mathrm{B}=\frac{2}{\nu-\frac{1}{5}}:\frac{\nu-\frac{\nu}{2}}{9}.$$

Λύση

Επειδή το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό και ο αριθμός ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός, έπεται ότι οι δυνατές τιμές του ν είναι $\nu=2$ ή $\nu=5$.

- Για $\nu=2$, έχουμε: $\mathrm{B}=\frac{2}{2-\frac{1}{5}}:\frac{2-\frac{2}{2}}{9}=\frac{2}{\frac{9}{5}}:\frac{2-1}{9}=\frac{10}{9}:\frac{1}{9}=\frac{10}{9}\cdot 9=10$.
- Για $\nu=5$, έχουμε: $\mathrm{B}=\frac{2}{5-\frac{1}{5}}:\frac{5-\frac{5}{2}}{9}=\frac{2}{\frac{24}{5}}:\frac{\frac{5}{2}}{9}=\frac{10}{24}:\frac{5}{18}=\frac{10}{24}\cdot\frac{18}{5}=\frac{180}{120}=\frac{3}{2}$.

Πρόβλημα 3

Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3 , 9 , 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό γ ως μειωτέο και τον αριθμό α ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί α , β και γ.

Λύση

Από την πρώτη υπόθεση του προβλήματος έχουμε ότι: $\frac{\alpha}{3}=\frac{\beta}{9}=\frac{\gamma}{11}=\omega$, οπότε θα είναι $\alpha=3\omega,\ \beta=9\omega$ και $\gamma=11\omega.$ Έτσι από τη δεύτερη υπόθεση του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\gamma-\alpha=56 \Leftrightarrow 11\omega-3\omega=56 \Leftrightarrow 8\omega=56 \Leftrightarrow \omega=7\,.$$

Άρα είναι: $\alpha=3\cdot 7=21,\ \beta=9\cdot 7=63$ και $\gamma=11\cdot 7=77.$

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}$ και η διχοτόμος του $\mathrm{A\Delta}$. Προεκτείνουμε τη διχοτόμο ΑΔ κατά το ευθύγραμμο τμήμα ΔΗ έτσι ώστε ΑΔ = ΔΗ. Από το σημείο Η φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ζ.

1. Να αποδείξετε ότι : $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=90^\circ$.
2. Να βρείτε τη γωνία $\mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, αν γνωρίζετε ότι : $\hat{\mathrm{B}}-\hat{\Gamma}=20^0$.

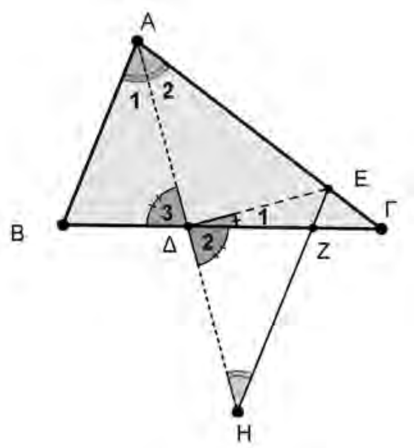
Λύση

1. Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$, θα ισχύει: $\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{A}}_2=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}$.

Από την παραλληλία των ΑΒ και ΖΗ, συμπεραίνουμε ότι $\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{H}}$ (εντός εναλλάξ).

Άρα θα ισχύει $\hat{\mathrm{A}}_2=\hat{\mathrm{H}}$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΗ είναι ισοσκελές.

Το Δ είναι το μέσο της βάσης ΑΗ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΗ, οπότε η διάμεσος ΕΔ θα είναι και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΗ, δηλαδή θα είναι $\mathrm{E\Delta}\perp\mathrm{AH}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=90^\circ$



Σχήμα 1

2. Επειδή $\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}=\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=90^\circ$, θα ισχύει:

$$\hat{\mathrm{E}}_1=90^\circ-\hat{\Delta}_2=90^\circ-\hat{\Delta}_3.$$

Η $\hat{\Delta}_3$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ, δηλαδή παραπληρωματική της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}_3=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}+\hat{\Gamma}$. Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών έχουμε:

$$\hat{\mathrm{E}}_1=90^\circ-\hat{\Delta}_2=90^\circ-\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}-\hat{\Gamma}=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}+\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}-\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}-\hat{\Gamma}=\frac{\hat{\mathrm{B}}-\hat{\Gamma}}{2}=\frac{20^o}{2}=10^o.$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$ και $10^{-1} \cdot 1000$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$$

Λύση

Έχουμε:

$\alpha = 10^{-1} : 10^{-3} = 10^{-1+3} = 10^{2}$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7} = 10^{-5+7} = 10^{2}$ και $\gamma = 10^{-1} \cdot 1000 = 10^{-1} \cdot 10^{3} = 10^{2}$.

Άρα η παράσταση γίνεται:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{6 \cdot 10^{2} \cdot 10^{2} \cdot 10^{2}}{10^{2} \cdot 10^{2} + 10^{2} \cdot 10^{2} + 10^{2} \cdot 10^{2}} \right)^{-2} = \left(\frac{6 \cdot 10^{2+2+2}}{10^{2+2} + 10^{2+2} + 10^{2+2}} \right)^{-2} = \left(\frac{6 \cdot 10^{6}}{3 \cdot 10^{4}} \right)^{-2}$$

$$= \left(2 \cdot 10^{6-4} \right)^{-2} = \left(2 \cdot 10^{2} \right)^{-2} = \frac{1}{\left(2 \cdot 10^{2} \right)^{2}} = \frac{1}{2^{2} \cdot 10^{2}} = \frac{1}{4 \cdot 100} = \frac{1}{400}$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 2 \quad \text{και} \quad \frac{\frac{x}{2} - 3}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x .$$

Λύση

Λύνουμε καθεμία από τις ανισώσεις. Έχουμε:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 2 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{x}{2} - 4 \cdot \frac{x-5}{4} \leq 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 2x - (x-5) \leq 8 \Leftrightarrow 2x - x + 5 \leq 8 \Leftrightarrow x \leq 3 .$$

$$\frac{\frac{x}{2} - 3}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x \Leftrightarrow \frac{\frac{x}{2} - \frac{6}{2}}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x \Leftrightarrow \frac{\frac{x-6}{2}}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-6}{8} - \frac{2x-9}{8} \leq x \Leftrightarrow 8 \cdot \frac{x-6}{8} - 8 \cdot \frac{2x-9}{8} \leq 8 \cdot x \Leftrightarrow x - 6 - (2x-9) \leq 8x$$

$$\Leftrightarrow x - 6 - 2x + 9 \leq 8x \Leftrightarrow 3 \leq 9x \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}.$$

Επομένως οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν όταν $\frac{1}{3} \leq x \leq 3$, οπότε οι ακέραιοι που συναληθεύουν τις δύο ανισώσεις είναι οι 1,2 και 3.

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνεται ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$, όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία (δ) με εξίσωση $y = 2\lambda x$ και περνάει από το σημείο $\mathrm{K}(2,8)$.

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ.

(β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία $\Lambda(-4,-4)$ και $\mathrm{M}(-1,2)$ ανήκουν στην ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Λύση

(α) Επειδή είναι $(\varepsilon)\,||\,(\delta)$, οι δύο ευθείες θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, οπότε προκύπτει η εξίσωση $3\lambda-1=2\lambda \Leftrightarrow \lambda=1$. Έτσι η εξίσωση της ευθείας (ε) γίνεται $y=2x+2\mu$. Επιπλέον, από την υπόθεση, το σημείο $\mathrm{K}(2,8)$ ανήκει στην ευθεία (ε), οπότε θα ισχύει: $8=2\cdot 2+2\mu \Leftrightarrow 2\mu=4 \Leftrightarrow \mu=2$. Άρα έχουμε:

$$\lambda=1,\ \mu=2 \quad \text{και} \quad (\varepsilon):\ y=2x+4\,.$$

(β) Επειδή ισχύουν $2\cdot(-4)+4=-4$ και $2\cdot(-1)+4=2$, τα σημεία $\Lambda(-4,-4)$ και $\mathrm{M}(-1,2)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας (ε), οπότε αυτά είναι σημεία της ευθείας (ε). Επιπλέον, παρατηρούμε οι αποστάσεις του σημείου Μ από τα σημεία Κ και Λ είναι ίσες. Πράγματι, έχουμε

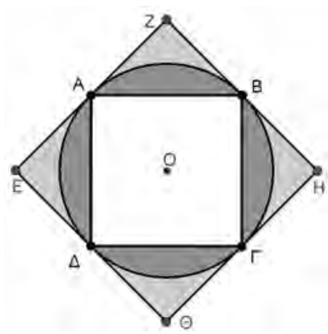
$$\mathrm{MK}=\sqrt{(2+1)^2+(8-2)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$$

$$\mathrm{M\Lambda}=\sqrt{(-4+1)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$$

Επομένως το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ στα σημεία Α, Β, Γ και Δ.



(α) Να βρείτε το άθροισμα Σ_1 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

(β) Να βρείτε το άθροισμα Σ_2 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου ΕΖΗΘ και εξωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\Sigma_1}{\Sigma_2}<\dfrac{4}{3}$. (Θεωρείστε ότι $\pi=3{,}1415$).

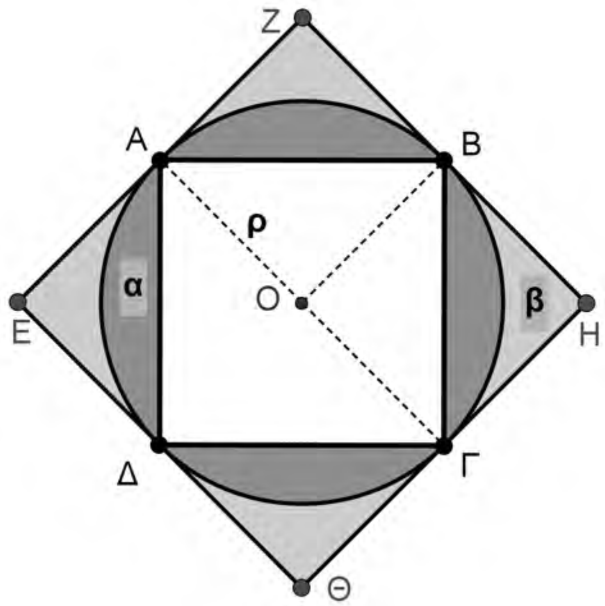
Λύση

1. Επειδή είναι ΟΑ = ΟΒ, $\mathrm{OA}\perp\mathrm{EZ}$ και $\mathrm{OB}\perp\mathrm{ZH}$, έπεται ότι το τετράπλευρο ΟΑΖΒ είναι τετράγωνο, οπότε το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο στο Ο. Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΒ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{AB}^2=\rho^2+\rho^2 \Leftrightarrow \mathrm{AB}^2=2\rho^2 \Leftrightarrow \mathrm{AB}=\rho\sqrt{2}\,.$$

Άρα το εμβαδόν του τετραγώνου είναι: $2\rho^2$. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $\pi\rho^2$, οπότε το άθροισμα Σ_1, θα είναι:

$$\Sigma_1=\pi\rho^2-2\rho^2=(\pi-2)\rho^2$$



Σχήμα 2

2. Επειδή είναι $ΟΑ \perp ΕΖ$ και $ΟΓ \perp ΗΘ$, έπεται ότι η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου $C(\mathrm{O}, \rho)$. Άρα το τετράπλευρο ΑΓΗΖ είναι ορθογώνιο, οπότε $ΖΗ = 2\rho$. Επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ είναι ίσο με $4\rho^2$. Άρα έχουμε:

$$\Sigma_2 = 4\rho^2 - \pi\rho^2 = (4-\pi)\rho^2.$$

3. Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:

$$\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{(\pi-2)\rho^2}{(4-\pi)\rho^2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(\pi-2) < 4(4-\pi) \Leftrightarrow 3\pi - 6 < 16 - 4\pi$$

$$\Leftrightarrow 7\pi < 22 \Leftrightarrow \pi < \frac{22}{7} = 3{,}1428...., \text{ που ισχύει.}$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\left\{\begin{array}{l}(x-10)\left(x^2-7x+10\right)=0\\ \dfrac{x^2+1}{2}+\dfrac{2x-1}{5}<\dfrac{x(x+1)}{2}\end{array}\right\}$$

Λύση

Έχουμε

$$(x-10)\left(x^2-7x+10\right)=0 \Leftrightarrow x-10=0 \text{ ή } x^2-7x+10=0$$

$$\Leftrightarrow x=10 \text{ ή } x^2-7x+10=0.$$

Η εξίσωση $x^2-7x+10=0$, έχει το πρώτο μέλος της τριώνυμο με $\alpha=1,\ \beta=-7,$ $\gamma=10$, οπότε είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=9$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x=2$ ή $x=5$.

Διαφορετικά μπορούμε να πούμε ότι η εξίσωση $x^2-7x+10=0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x(x-7)=-10$. Επειδή ζητάμε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης, συμπεραίνουμε ότι ο x πρέπει να είναι διαιρέτης του 10. Επομένως θα είναι $x\in\{\pm1,\pm2,\pm5,\pm10\}$. Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι ακέραιοι 2 και 5.

Στη συνέχεια επιλύουμε την ανίσωση του συστήματος

$$\frac{x^2+1}{2}+\frac{2x-1}{5}<\frac{x(x+1)}{2} \Leftrightarrow 5x^2+5+4x-2<5x^2+5x \Leftrightarrow x>3.$$

Επομένως οι ζητούμενες ακέραιες λύσεις του συστήματος είναι: $x=5$ ή $x=10$.

2. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\mathrm{A}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}-\frac{2\left(1+x^3\right)+(1+x)^3}{3\left(x^2+1\right)}.$$

Λύση

Αν θέσουμε

$$\mathrm{B}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2} \text{ και } \Gamma(x)=\frac{2\left(1+x^3\right)+(1+x)^3}{3\left(x^2+1\right)},$$

τότε η παράσταση $\mathrm{A}(x)$ είναι ίση με τη διαφορά $\mathrm{B}(x)-\Gamma(x)$. Έχουμε:

$$\mathrm{B}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}=\frac{1+x^4+1+3x+3x^2+x^3+x\left(1+3x+3x^2+x^3\right)}{1+x^2+1+2x+x^2}$$

$$=\frac{2x^4+4x^3+6x^2+4x+2}{2+2x+2x^2}=\frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}{1+x+x^2}=\frac{x^4+2x^3+x^2+2x^2+2x+1}{1+x+x^2}$$

$$=\frac{\left(x^2+x\right)^2+2\left(x^2+x\right)+1}{1+x+x^2}=\frac{\left(x^2+x+1\right)^2}{x^2+x+1}=x^2+x+1.$$

$$\Gamma(x)=\frac{2\left(1+x^3\right)+\left(1+x\right)^3}{3\left(x^2+1\right)}=\frac{3+3x^3+3x^2+3x}{3\left(x^2+1\right)}=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}$$
$$=\frac{x^2\left(x+1\right)+\left(x+1\right)}{x^2+1}=\frac{\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=x+1.$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{A}(x)=\mathrm{B}(x)-\Gamma(x)=x^2+x+1-\left(x+1\right)=x^2.$$

3. **(α)** Αν κ ακέραιος, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa x}{2}+\frac{x}{4}=\kappa\left(x+2\right)-\frac{3\left(\kappa x-1\right)}{4}.$$

(β) Για ποιες τιμές του ακέραιου κ η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις;

Λύση

(α) Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$2\kappa x+x=4\kappa\left(x+2\right)-3\left(\kappa x-1\right)\Leftrightarrow 2\kappa x+x=4\kappa x+8\kappa-3\kappa x+3\Leftrightarrow \kappa x+x=8\kappa+3$$
$$\Leftrightarrow\left(\kappa+1\right)x=8\kappa+3. \qquad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

1. Αν $\kappa=-1$, τότε η εξίσωση γίνεται $0\cdot x=-5$ και είναι αδύνατη.

2. Αν $\kappa\in\mathbb{Z}-\{-1\}$, δηλαδή, αν ο κ είναι ακέραιος διαφορετικός από το -1, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x=\dfrac{8\kappa+3}{\kappa+1}$.

(β) Η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις, όταν είναι

$$x=\frac{8\kappa+3}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{8\kappa+8-5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{8\left(\kappa+1\right)-5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}$$
$$x=8-\frac{5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \kappa+1\in\{-1,1,-5,5\}\Leftrightarrow\kappa\in\{-2,0,-6,4\}.$$

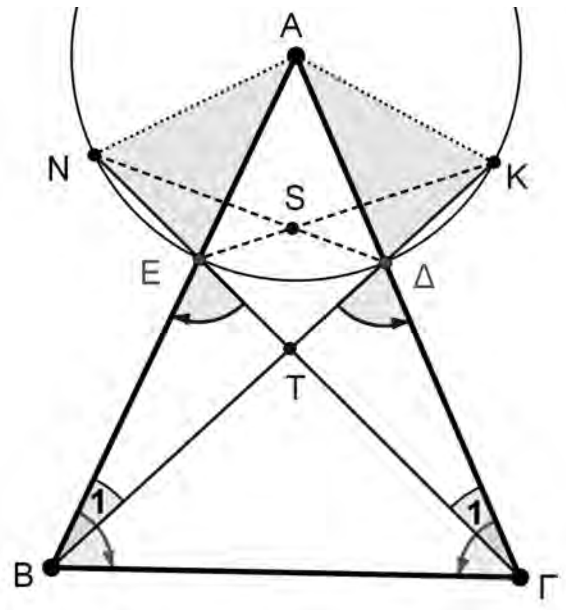
Όλες οι τιμές που βρήκαμε για το κ είναι δεκτές, αφού είναι διαφορετικές του -1.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ ($\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$). Κύκλος με κέντρο την κορυφή A και ακτίνα $\rho<\mathrm{AB}$ τέμνει τις πλευρές AB και $\mathrm{A\Gamma}$ στα σημεία E και Δ, αντίστοιχα. Οι ευθείες $\mathrm{B\Delta}$, $\mathrm{\Gamma E}$ τέμνουν για δεύτερη φορά το κύκλο στα σημεία K, N αντίστοιχα. Αν T είναι το σημείο τομής των $\mathrm{B\Delta}$, $\mathrm{\Gamma E}$ και S το σημείο τομής των $\Delta\mathrm{N}$, EK, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, S και T βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Λύση

Τα τρίγωνα $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{AE\Gamma}$ είναι ίσα γιατί έχουν: (α) $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{AE}$, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, (β) $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ (πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$) και (γ) η γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ είναι κοινή για τα δύο τρίγωνα.



Σχήμα 3

Από την ισότητα των τριγώνων $A\Delta B$ και $AE\Gamma$, προκύπτουν οι ισότητες:

- $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και κατά συνέπεια:

$$B\hat{T}\Gamma = \Gamma\hat{T}B. \qquad (1)$$

- $A\hat{\Delta}B = A\hat{E}\Gamma$ και κατά συνέπεια ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών

$$B\hat{E}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma \qquad (2)$$

- $$\Delta B = \Delta\Gamma. \qquad (3)$$

Από την ισότητα (1) των γωνιών $B\hat{T}\Gamma = \Gamma\hat{T}B$ προκύπτει ότι το τρίγωνο $BT\Gamma$ είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια το σημείο T θα ανήκει στη μεσοκάθετη της $B\Gamma$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $BT\Gamma$ έχουμε: $TB = T\Gamma$ και σε συνδυασμό με την ισότητα (3) συμπεραίνουμε: $TE = T\Delta$.

Από την ισότητα (2) των γωνιών $B\hat{E}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma$, προκύπτει η ισότητα τω ισοσκελών τριγώνων $A\Delta K$ και AEN. Άρα $\Delta K = EN$ και επειδή $TE = T\Delta$, καταλήγουμε $TK = TN$.

Από τις ισότητες $TE = T\Delta$ και $TK = TN$ συμπεραίνουμε την ισότητα των τριγώνων ETK και ΔTN.

Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει η ισότητα των τριγώνων $SEN = S\Delta K$ και στη συνέχεια η ισότητα $SAE = SAK$, οπότε το σημείο S ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\mathrm{K}(x)=\frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2},\ x\neq\pm\sqrt{2}.$$

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{2012\cdot 4019\cdot 2009+2006}{2010^2-2}.$$

χωρίς την εκτέλεση των σημειούμενων πράξεων.

Λύση

(α) Εκτελούμε τις πράξεις και παραγοντοποιούμε τον αριθμητή της παράστασης:

$$\frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2}=\frac{(x+2)(2x^2-3x+1)+x-4}{x^2-2}$$
$$=\frac{2x^3-3x^2+x+4x^2-6x+2+x-4}{x^2-2}=\frac{2x^3+x^2-4x-2}{x^2-2}$$
$$=\frac{2x(x^2-2)+x^2-2}{x^2-2}=\frac{(x^2-2)(2x+1)}{x^2-2}=2x+1.$$

(β) Για $x=2010$ η προηγούμενη παράσταση γίνεται ίση με την Α, οπότε θα έχουμε:

$$\mathrm{A}=\mathrm{K}(2010)=2\cdot 2010+1=4021.$$

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{c^2},$$

με άγνωστο το x, έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, για όλες τις τιμές των παραμέτρων $a,b,c\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$.

Λύση

Για $a=b$ η εξίσωση γίνεται: $\dfrac{2}{x-a}=\dfrac{1}{c^2}\Leftrightarrow x=a+2c^2$.

Έστω $a\neq b.$ Τότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με

$$(x-a)(x-b)=c^2(x-a+x-b),\ \text{με}\ x\neq a\ \text{και}\ x\neq b$$

$$\Leftrightarrow x^2-(a+b+2c^2)x+ab+(a+b)c^2=0,\ \text{με}\ x\neq a\ \text{και}\ x\neq b \qquad (1)$$

Η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι

$$\Delta=(a+b+2c^2)^2-4ab-4(a+b)c^2=(a+b)^2-4ab+4c^4=(a-b)^2+4c^4>0,$$

οπότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$ που δίνονται από τις ισότητες

$$x_{1,2}=\frac{a+b+2c^2\pm\sqrt{(a-b)^2+4c^4}}{2}. \qquad (2)$$

Οι δύο ρίζες είναι δεκτές, αν τα a και b δεν είναι ρίζες της εξίσωσης (1). Για $x=a$ η εξίσωση γίνεται: $(a-a)(x-b)=c^2(a-a+x-b)\Leftrightarrow 0=c^2(a-b)$, που είναι άτοπο, αφού είναι $c \neq 0$ και έχουμε υποθέσει ότι $a \neq b$. Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο για $x = b$. Επομένως, για $a \neq b$, η δεδομένη εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$ που δίνονται από τις ισότητες (2).

Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$y = x^3 + 2x - 2,\ z = y^3 + 2y - 2,\ x = z^3 + 2z - 2 .$$

Λύση

Με αφαίρεση κατά μέλη των εξισώσεων του συστήματος λαμβάνουμε:

$$y - z = (x - y)\left(x^2 + xy + y^2 + 2\right) \qquad (1)$$

$$z - x = (y - z)\left(y^2 + yz + z^2 + 2\right) \qquad (2)$$

Επειδή είναι $x^2 + xy + y^2 + 2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2 > 0$ και ομοίως προκύπτει ότι $y^2 + yz + z^2 + 2 = \left(y + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3z^2}{4} + 2 > 0$, αν υποθέσουμε ότι είναι $x > y$, τότε από την (1) λαμβάνουμε ότι $y > z$. Στη συνέχεια από τη σχέση (2) λαμβάνουμε $z > x$.

Έτσι έχουμε $x > y > z > x$, άτοπο.

Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο, αν υποθέσουμε ότι $x < y$. Επομένως έχουμε $x = y,$ οπότε θα είναι και $y = z$. Τότε από τις αρχικές εξισώσεις έχουμε:

$$x = x^3 + 2x - 2 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)\left(x^2 + x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

αφού το τριώνυμο $x^2 + x + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -7 < 0$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{B\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\mathrm{A}}$, $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$, τέμνουν το κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$ στα σημεία Δ, E και Z αντίστοιχα. Από το σημείο Z, θεωρούμε παράλληλη στην $\mathrm{A\Gamma}$, που τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο M. Από το σημείο E, θεωρούμε παράλληλη στην AB, που τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι:

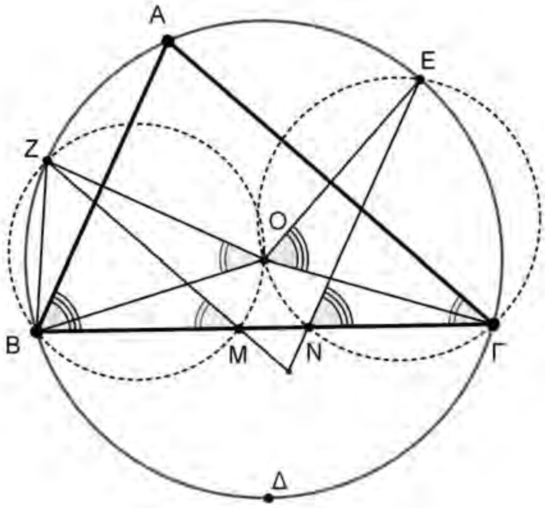
α) Τα τετράπλευρα BMOZ και $\mathrm{\Gamma NOE}$ είναι εγγράψιμα σε κύκλους, έστω (c_1) και (c_2), αντίστοιχα.

β) Το δεύτερο κοινό σημείο (έστω K) των κύκλων (c_1) και (c_2) ανήκει στο κύκλο με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα $\Delta\mathrm{I}$, όπου I το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$.

Λύση

α) Εφόσον η ZM είναι παράλληλη στην $\mathrm{A\Gamma}$, θα ισχύει: $\mathrm{Z\hat{M}B} = \mathrm{A\hat{\Gamma}B} = \hat{\Gamma}$.

Η γωνία $\mathrm{Z\hat{O}B}$ είναι επίκεντρη στον κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ και βαίνει στο τόξο ZB (που είναι το μισό του τόξου AB). Άρα $\mathrm{Z\hat{O}B} = \hat{\Gamma}$. Άρα είναι $\mathrm{Z\hat{M}B} = \mathrm{Z\hat{O}B} = \hat{\Gamma}$, οπότε το τετράπλευρο BMOZ είναι εγγράψιμο.



Σχήμα 4

Ομοίως προκύπτει ότι $\text{Ε}\hat{\text{Ν}}\Gamma = \text{Ε}\hat{\text{Ο}}\Gamma = \hat{\text{Β}}$ και ότι το τετράπλευρο ΓΝΟΕ είναι εγγράψιμο.

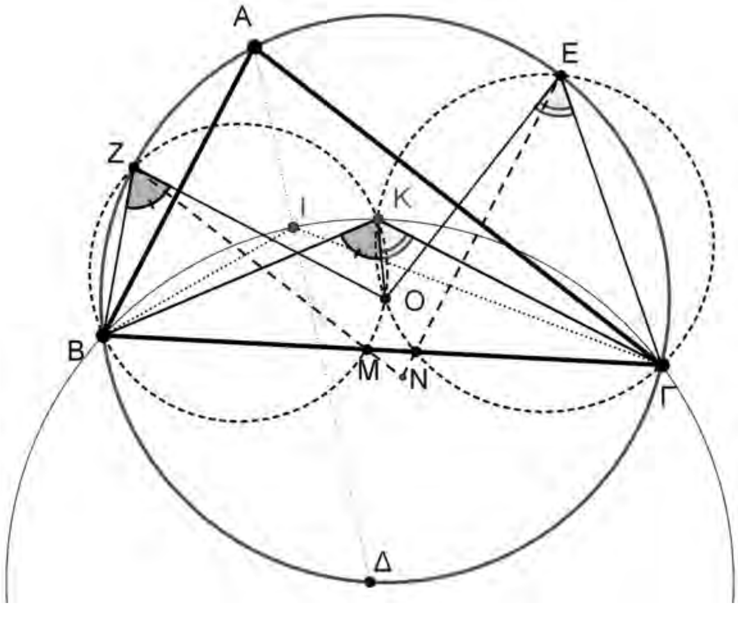
β) Επειδή το σημείο Ι είναι το έκκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\Delta\hat{\text{Ι}}\text{Β} = \Delta\hat{\text{Β}}\text{Ι} = \frac{\hat{\text{Α}} + \hat{\text{Β}}}{2} \text{ και } \Delta\hat{\text{Ι}}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}\text{Ι} = \frac{\hat{\text{Α}} + \hat{\Gamma}}{2}.$$

Από τις προηγούμενες ισότητες προκύπτει ότι $\Delta\text{Β} = \Delta\text{Ι} = \Delta\Gamma$ και επίσης εύκολα προκύπτει ότι: $\text{Β}\hat{\text{Ι}}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{\text{Α}}}{2}$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα σημεία Β, Ι, Κ, Γ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ότι

$$\text{Β}\hat{\text{Κ}}\Gamma = \hat{\text{Α}} + \frac{\hat{\text{Β}}+\hat{\Gamma}}{2} = \text{Β}\hat{\text{Ι}}\Gamma.$$



Σχήμα 5

Το τρίγωνο ΟΒΖ είναι ισοσκελές $(\mathrm{OB} = \mathrm{OZ} = R)$, με $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{Z} = \hat{\Gamma}$. Άρα $\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{O} = 90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$. Το τρίγωνο ΟΓΕ είναι ισοσκελές $(\mathrm{O}\Gamma = \mathrm{OE} = R)$, με $\Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{E} = \hat{\mathrm{B}}$. Άρα $\Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{O} = 90^o - \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$. Έτσι ισχύουν διαδοχικά οι ισότητες:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma = \mathrm{O}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B} + \mathrm{O}\hat{\mathrm{K}}\Gamma = \mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{O} + \Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{O} = 90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2} + 90^o - \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$$

$$= 180^o - \left(90^\circ - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\Gamma .$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$\left(x^2+3x+2\right)^4+\left(x^2+x-2\right)^4=16\left(x+2\right)^4.$$

Λύση (1ος τρόπος)

Παρατηρούμε ότι τα τριώνυμα x^2+3x+2 και x^2+x-2 έχουν παράγοντα το $x+2$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\left(x+2\right)^4\left[\left(x+1\right)^4+\left(x-1\right)^4-16\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+2\right)^4=0 \text{ ή } \left(x+1\right)^4+\left(x-1\right)^4-16=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } 2x^4+12x^2-14=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x^4+6x^2-7=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x^2=1 \text{ ή } x^2=-7 \text{ (αδύνατη)}$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x=1 \text{ ή } x=-1.$$

2ος τρόπος

Αν θέσουμε $a=x^2+3x+2,\ b=x^2+x-2$, τότε $a-b=2x+4$ και η εξίσωση γίνεται:

$$a^4+b^4=\left(a-b\right)^4 \Leftrightarrow a^4+b^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$$

$$\Leftrightarrow -ab\left(2a^2-3ab+2b^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a=0 \text{ ή } b=0 \text{ ή } 2a^2-3ab+2b^2=0$$

$$\Leftrightarrow a=0 \text{ ή } b=0 \text{ ή } a=b=0,$$

αφού η εξίσωση $2a^2-3ab+2b^2=0$, αν $ab\neq 0$, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$2u^2-3u+2=0,\ u=\frac{a}{b},$$

η οποία δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$. Άρα έχουμε:

$$a=0 \text{ ή } b=0 \text{ ή } a=b=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \text{ ή } x^2+x-2=0 \text{ ή } x^2+3x+2=x^2+x-2=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=-2 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-2 \text{ ή } x=-2 \text{ (διπλή)}$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4)}$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R},$, αν το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c}\alpha\left(x^2+y^2\right)+2x+y=\lambda\\ 2x-y=-\lambda\end{array}\right\}, \qquad (\Sigma)$$

έχει λύση στο $\mathbb{R}$, δια κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$.

Λύση

Έχουμε

$$\left.\begin{cases}\alpha\left(x^2+y^2\right)+2x+y=\lambda\\ 2x-y=-\lambda\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\alpha\left(x^2+\left(2x+\lambda\right)^2\right)+2x+2x+\lambda=\lambda\\ y=2x+\lambda\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{cases}5\alpha x^2+4\left(\alpha\lambda+1\right)x+\alpha\lambda^2=0 & (1)\\ y=2x+\lambda & (2)\end{cases}\right\}$$

Αν ήταν $\alpha\neq 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα

$$\Delta=16\left(\alpha\lambda+1\right)^2-20\alpha^2\lambda^2=4\left(-\alpha^2\lambda^2+8\alpha\lambda+4\right)$$

Επειδή το σύστημα έχει λύση στο $\mathbb{R}$ για κάθε τιμή της παραμέτρου λ, έπεται ότι θα είναι:

$$\Delta\geq 0\Leftrightarrow -\alpha^2\lambda^2+8\alpha\lambda+4\geq 0. \qquad (3)$$

Όμως , το τριώνυμο $-\alpha^2\lambda^2+8\alpha\lambda+4$ έχει διακρίνουσα $\Delta'=80\alpha^2>0$, οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες ετερόσημες, έστω $\lambda_1<0<\lambda_2$ (αφού είναι $\lambda_1\lambda_2=-\dfrac{4}{\alpha^2}<0$).

Επομένως θα έχουμε $-\alpha^2\lambda^2+8\alpha\lambda+4<0$, για $\lambda<\lambda_1$ ή $\lambda>\lambda_2$, άτοπο.

Για $\alpha=0$ η εξίσωση (1) έχει τη λύση $x=0$, οπότε προκύπτει ότι $y=\lambda$ και το σύστημα έχει τη λύση $\left(x,y\right)=\left(0,\lambda\right)$. Άρα είναι $\alpha=0$.

Πρόβλημα 3

Η ακολουθία $a_n, n=0,1,2,\ldots$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία $d_n=a_n-a_{n-1}$, με $n=1,2,.3,\ldots.$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega=a_1-a_0$.

1. Να προσδιορίσετε, συναρτήσει των a_0,ω και n τον γενικό όρο a_n και το άθροισμα $S_{n+1}=a_0+a_1+\cdots+a_n$.
2. Αν είναι $a_0=1$ και $a_1=7$, να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο n για τον οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις: $a_n>10^3$ και $S_{n+1}\leq 8\cdot 10^3$.

Λύση

1. Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε:

$$d_1=\omega,\ d_n=d_1+\left(n-1\right)\omega=n\omega, n=2,3,\ldots.$$

οπότε θα είναι:

$$d_1+d_2+\ldots+d_n=\left(a_1-a_0\right)+\left(a_2-a_1\right)+\ldots+\left(a_n-a_{n-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \omega+2\omega+\ldots+n\omega=a_n-a_0\Leftrightarrow a_n=a_0+\left(1+2+\ldots+n\right)\omega$$

$$\Leftrightarrow a_n=a_0+\frac{n\left(n+1\right)}{2}\omega.$$

Για το άθροισμα S_{n+1} έχουμε:

$$S_{n+1} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = (n+1)a_0 + \left(\frac{1\cdot 2}{2} + \frac{2\cdot 3}{2} + \ldots + \frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)\omega$$

$$= (n+1)a_0 + \frac{1}{2}\left((1^2+1) + (2^2+2) + \ldots + (n^2+n)\right)\omega = (n+1)a_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$

$$= (n+1)a_0 + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\omega + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)\omega = (n+1)a_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right)\omega$$

$$= (n+1)a_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right)\omega = (n+1)a_0 + \frac{n(n+1)(n+2)}{6}\omega.$$

2. Αν είναι $a_0 = 1$ και $a_1 = 7$, τότε έχουμε $\omega = 6$ και

$$a_n = 1 + 3n(n+1),\ S_{n+1} = n+1+n(n+1)(n+2) = (n+1)\left[1+n(n+2)\right] = (n+1)^3.$$

Έτσι έχουμε να λύσουμε το σύστημα των ανισώσεων:

$$a_n > 10^3 \text{ και } S_{n+1} \le 8\cdot 10^3 \Leftrightarrow a_n = 1+3n(n+1) > 10^3,\ S_{n+1} = (n+1)^3 \le 8\cdot 10^3 \Leftrightarrow$$

$$n(n+1) > 333,\ n+1 \le 2\cdot 10 \Leftrightarrow n > 18,\ n \le 19 \Leftrightarrow n = 18 \text{ ή } n = 19.$$

αφού είναι $17\cdot 18 = 306, 18\cdot 19 = 342$.

Άρα ο ζητούμενος ελάχιστος θετικός ακέραιος n είναι ο 18.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{B\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) και Δ τυχόν σημείο της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Σ, τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$ στο σημείο K και τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο M. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο T, τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο Λ και τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία $\mathrm{A,I,\Lambda,M}$ και $\mathrm{A,I,K,N}$ είναι ομοκυκλικά σε δύο διαφορετικούς κύκλους (έστω) (c_1) και (c_2) αντίστοιχα, όπου I το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$.

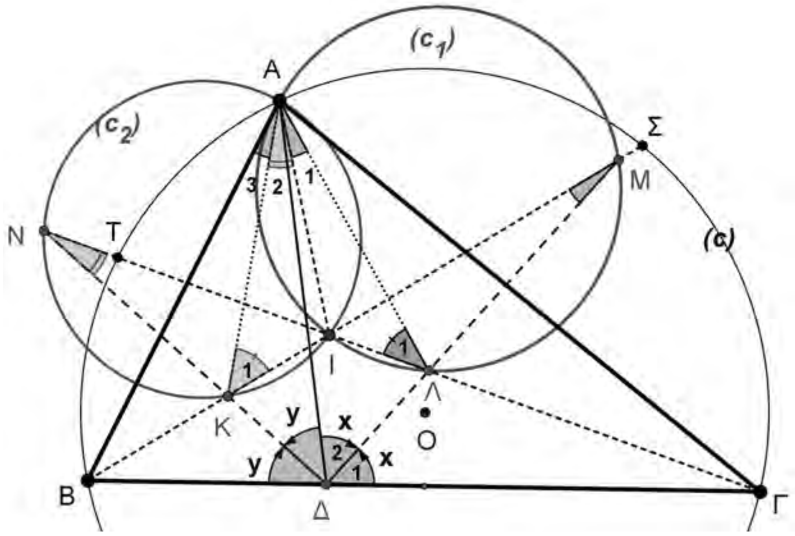
β) Αν η $\mathrm{A\Delta}$ ταυτιστεί με το ύψος του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, που αντιστοιχεί στη κορυφή A τότε οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Λύση

α) Από την κατασκευή των διχοτόμων συμπεραίνουμε ότι τα σημεία K, Λ είναι τα έκκεντρα των τριγώνων $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{A\Delta\Gamma}$ αντίστοιχα.

Ισχύει τώρα η ισότητα των γωνιών:

$$\hat{\mathrm{A}}_1 = \mathrm{I}\hat{\mathrm{A}}\Gamma - \Lambda\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} - \frac{\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma}{2} = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} - \frac{180^0 - 2\hat{x} - \hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} - 90^o + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \hat{x} = \hat{x} - \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$$



Σχήμα 6

Από το τρίγωνο $M\Delta B$ έχουμε: $\hat{x}=\hat{M}+\frac{\hat{B}}{2}\Leftrightarrow \hat{M}=\hat{x}-\frac{\hat{B}}{2}$, δηλαδή $\hat{A}_1=\hat{M}=\hat{x}-\frac{\hat{B}}{2}$.

Άρα το τετράπλευρο $AI\Lambda M$ είναι εγγράψιμο.

Ισχύει επίσης η ισότητα των γωνιών:

$$\hat{A}_2=I\hat{A}B-K\hat{A}B=\frac{\hat{A}}{2}-\frac{\Delta\hat{A}B}{2}=\frac{\hat{A}}{2}-\frac{180^0-2\hat{y}-\hat{B}}{2}=\frac{\hat{A}}{2}-90^o+\frac{\hat{B}}{2}+\hat{y}=\hat{y}-\frac{\hat{\Gamma}}{2}.$$

Από το τρίγωνο $N\Delta\Gamma$ έχουμε: $\hat{y}=\hat{N}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}\Leftrightarrow \hat{N}=\hat{y}-\frac{\hat{\Gamma}}{2}$, δηλαδή $\hat{A}_2=\hat{N}=\hat{y}-\frac{\hat{\Gamma}}{2}$.

Άρα το τετράπλευρο $AIKN$ είναι εγγράψιμο.

β) Εφόσον I είναι το έκκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$A\hat{I}B=\hat{\Gamma}+\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=90^o+\frac{\hat{\Gamma}}{2} \text{ και } A\hat{I}\Gamma=\hat{B}+\frac{\hat{A}+\hat{\Gamma}}{2}=90^o+\frac{\hat{B}}{2}.$$

Από το τρίγωνο AIK έχουμε:

$$\hat{K}_1=180^o-A\hat{I}B-\hat{A}_2=180^o-90^o-\frac{\hat{\Gamma}}{2}-\hat{N}=90^o-\frac{\hat{\Gamma}}{2}-\hat{y}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}=90^o-\hat{y}.$$

Από το τρίγωνο $AI\Lambda$ έχουμε:

$$\hat{\Lambda}_1=180^o-A\hat{I}\Gamma-\hat{A}_1=180^o-90^o-\frac{\hat{B}}{2}-\hat{M}=90^o-\frac{\hat{B}}{2}-\hat{x}+\frac{\hat{B}}{2}=90^o-\hat{x}.$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $A\Delta\perp B\Gamma$ τότε $\hat{x}=\hat{y}=45^o$, οπότε $\hat{K}_1=\hat{\Lambda}_1$.

Άρα οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι (οι ίσες γωνίες $\hat{K}_1,\hat{\Lambda}_1$ βαίνουν στη κοινή χορδή AI).

Παρατηρήσεις

α) Τα κέντρα των κύκλων (c_1) και (c_2) βρίσκονται επάνω στην ΣT.

β) Το σημείο A είναι το σημείο Miquel του πλήρους τετραπλεύρου $\Delta KI\Lambda MN$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
20 Οκτωβρίου 2012

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(18-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{3+\frac{6}{11}}\right)$$

Πρόβλημα 2
Αν ο κ είναι πρώτος θετικός ακέραιος και διαιρέτης του μέγιστου κοινού διαιρέτη των ακεραίων 12, 30 και 54, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του κ και της παράστασης:

$$\mathrm{B}=\frac{2-\frac{\kappa}{2}}{\kappa-\frac{1}{2}}:\frac{\frac{3-\kappa}{2}}{\kappa}$$

Πρόβλημα 3
Ένας ελαιοπαραγωγός έχει παραγωγή λαδιού 800 κιλά. Για την καλλιέργεια του ελαιώνα του ξόδεψε 407 ευρώ και για τη συγκομιδή του καρπού από τις ελιές του ξόδεψε 1050 ευρώ. Η τιμή πώλησης του λαδιού είναι 2,5 ευρώ το κιλό και κατά την πώληση του λαδιού υπάρχουν κρατήσεις σε ποσοστό 6% πάνω στην τιμή πώλησης.
(α) Να βρείτε πόσα κιλά λάδι πρέπει να πωλήσει ο παραγωγός για να καλύψει τα έξοδά του.
(β) Αν επιπλέον το ελαιοτριβείο (εργοστάσιο που παράγεται το λάδι) κρατάει για την αμοιβή του το 8% του παραγόμενου λαδιού, να βρείτε πόσα κιλά λάδι θα μείνουν στον παραγωγό μετά την πώληση λαδιού για την κάλυψη των εξόδων του.

Πρόβλημα 4
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=60^\circ$ και $\mathrm{A\Gamma}=\frac{3}{2}\cdot\mathrm{AB}$. Παίρνουμε σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{AE}=\mathrm{AB}$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ στο σημείο Δ, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
20 Οκτωβρίου 2012

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{K} = \frac{x^2 \cdot y^4 \cdot z^6 \cdot 2^{182}}{3\cdot\left(13\cdot 2^2 \cdot 3^3 + 4^2 \cdot 9^3\right)^{-1}}, \text{ αν είναι } x = 2^{-10}, y = 4^{-8}, z = 8^{-6},$$

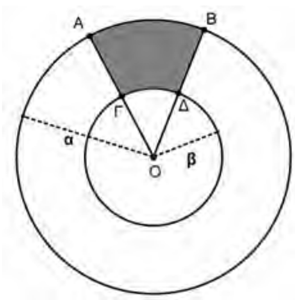
και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Πρόβλημα 2
Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης

$$4x - 5\alpha + 2 < \alpha\left(x-3\right) + 2\left(\alpha - 1\right).$$

Πρόβλημα 3
Αν το εμβαδόν Ε του χωρίου ΑΒΔΓ του διπλανού σχήματος ισούται με το $\frac{1}{12}$ του εμβαδού του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους (O,α) και (O,β), $0<\beta<\alpha$, να βρείτε τη γωνία $\omega = \mathrm{A\hat{O}B}$ και την τιμή της παράστασης:

$$\Sigma = \left(2\eta\mu^2\omega - \frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega\right)^3.$$



Πρόβλημα 4
Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $\mathrm{A\Delta} = \alpha$ cm και $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Delta}$. Η κάθετη από την κορυφή Β προς τη διαγώνιο ΑΓ την τέμνει στο σημείο Ε. Αν ισχύει ότι $\mathrm{E\Gamma} = 2\cdot\mathrm{AE}$, να βρείτε:

- **(i)** το μήκος της πλευράς ΑΒ.
- **(ii)** Το εμβαδόν του κύκλου που περνάει και από τις τέσσερις κορυφές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
20 Οκτωβρίου 2012

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να βρεθούν οι ακέραιοι x που είναι ρίζες της εξίσωσης $x(x-2)=24$ και το τετράγωνό τους δεν είναι μεγαλύτερο του 25.

Πρόβλημα 2
Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\mathrm{K}(\alpha,\beta)=\frac{\alpha^3+\beta^3-\alpha^2+\beta^2+(\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-2\beta)}{(\alpha+\beta)^2-\alpha-\beta},$$

αν $\alpha+\beta\neq 0$ και $\alpha+\beta\neq 1$.

Πρόβλημα 3
Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+2\lambda x+\lambda^2-1=0.$$

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες μεγαλύτερες του -5 και μικρότερες του 2 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ίσο με 20.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΒΓ}=\alpha$ και $\text{ΑΒ}=\text{ΑΓ}=2\alpha$. Η παράλληλη ευθεία από την κορυφή Γ προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την ευθεία της διχοτόμου ΒΔ στο σημείο Ε. Η ευθεία ΑΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
20 Οκτωβρίου 2012

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha \neq 0$ και $-1 < \alpha < 1$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} - 1 + \alpha,$$

όπου

$$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}, \quad \mathrm{B} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}.$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται η εξίσωση :

$$x^2 - 2\kappa x - 1 + \kappa^2 = 0.$$

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου κ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες στο διάστημα $(0,5)$ με άθροισμα τέταρτων δυνάμεων ίσο με 82.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς ακέραιους x, y και z για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+3} = \frac{y}{2012y+5} = \frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των x, y και z είναι διαιρέτης του 747.

Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος $c(O,R)$, τυχούσα χορδή του AB (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου AB. Οι κύκλοι $c_1(A, AM)$ και $c_2(B, BM)$ τέμνουν το κύκλο $c(O,R)$ στα σημεία K και N, αντίστοιχα. Οι κύκλοι $c_1(A, AM)$ και $c_2(B, BM)$ τέμνονται στο σημείο T. Να αποδείξετε ότι το σημείο T είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου KMN.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
20 Οκτωβρίου 2012

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους θετικούς ακέραιους την εξίσωση

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+4+\cdots+x}=\frac{2011}{2013}.$$

Πρόβλημα 2
Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=ax^2+bx+c$ και $g(x)=cx+b$, όπου $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, να βρείτε τη συνθήκη που ισχύει μεταξύ των παραμέτρων a,b,c καθώς και το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων.

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x,y και z για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+y}=\frac{y}{2012y+z}=\frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των x,y και z ισούται με 147.

Πρόβλημα 4
Δίνεται κύκλος $c(O,R)$, τυχούσα χορδή του BC (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου BC. Οι κύκλοι $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ τέμνουν το κύκλο $c(O,R)$ στα σημεία K, N, αντίστοιχα, και οι κύκλοι $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ τέμνονται στα σημεία A και M. Η παράλληλος από το σημείο M προς την BC τέμνει τους κύκλους $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ στα σημεία T, S, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες AM, KT, NS περνάνε από το ίδιο σημείο.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
20 Οκτωβρίου 2012

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(18-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{3+\frac{6}{11}}\right).$$

Λύση

$$\mathrm{A}=\left(18-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{3+\frac{6}{11}}\right)=\frac{88}{5}\cdot\frac{5}{44}-\frac{39}{5}\cdot\frac{5}{39}=2-1=1.$$

Πρόβλημα 2
Αν ο κ είναι πρώτος θετικός ακέραιος και διαιρέτης του μέγιστου κοινού διαιρέτη των ακεραίων 12, 30 και 54, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του κ και της παράστασης:

$$\mathrm{B}=\frac{2-\frac{\kappa}{2}}{\kappa-\frac{1}{2}}:\frac{\frac{3-\kappa}{2}}{\kappa}.$$

Λύση
Είναι $\text{ΜΚΔ}(12,30,54)=6$. Οι θετικοί διαιρέτες του 6 είναι οι 1, 2, 3, 6 και από αυτούς πρώτοι είναι οι 2 και 3. Άρα έχουμε $\kappa=2$ ή $\kappa=3$.

Για $\kappa=2$ έχουμε: $\mathrm{B}=\dfrac{2-\frac{2}{2}}{2-\frac{1}{2}}:\dfrac{\frac{3-2}{2}}{2}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}:\dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{1}=\dfrac{8}{3}.$

Για $\kappa = 3$ ο διαιρέτης $\dfrac{\frac{3-\kappa}{2}}{\kappa}$ της παράστασης Β γίνεται $\dfrac{\frac{3-3}{2}}{3} = \dfrac{0}{3} = 0$, ενώ ο διαιρετέος γίνεται $\dfrac{2-\frac{3}{2}}{3-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{1}{5} \neq 0$, οπότε η παράσταση Β δεν ορίζεται.

Πρόβλημα 3

Ένας ελαιοπαραγωγός έχει παραγωγή λαδιού 800 κιλά. Για την καλλιέργεια του ελαιώνα του ξόδεψε 407 ευρώ και για τη συγκομιδή του καρπού από τις ελιές του ξόδεψε 1050 ευρώ. Η τιμή πώλησης του λαδιού είναι 2,5 ευρώ το κιλό και κατά την πώληση του λαδιού υπάρχουν κρατήσεις σε ποσοστό 6% πάνω στην τιμή πώλησης.

(α) Να βρείτε πόσα κιλά λάδι πρέπει να πωλήσει ο παραγωγός για να καλύψει τα έξοδά του.

(β) Αν επιπλέον το ελαιοτριβείο (εργοστάσιο που παράγεται το λάδι) κρατάει για την αμοιβή του το 8% του παραγόμενου λαδιού, να βρείτε πόσα κιλά λάδι θα μείνουν στον παραγωγό μετά την πώληση λαδιού για την κάλυψη των εξόδων του.

Λύση

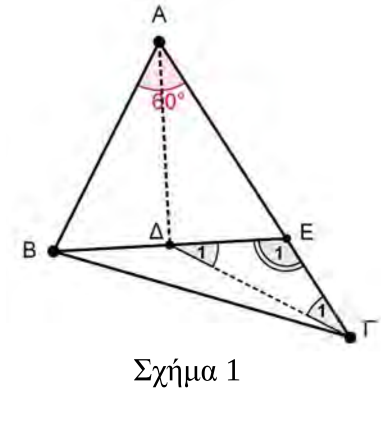
(α) Κατά την πώληση του λαδιού οι κρατήσεις είναι $2,5 \cdot \dfrac{6}{100} = 0,15$ ευρώ, οπότε η καθαρή τιμή πώλησης είναι $2,5 - 0,15 = 2,35$ ευρώ. Τα έξοδα του παραγωγού είναι $1050 + 407 = 1457$ ευρώ, οπότε ο παραγωγός πρέπει να πωλήσει $1457 : 2,35 = 620$ κιλά λάδι.

(β) Το ελαιοτριβείο θα κρατήσει $800 \cdot \dfrac{8}{100} = 64$ κιλά λάδι, οπότε θα μείνουν στον παραγωγό $800 - (620 + 64) = 116$ κιλά λάδι.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 60^\circ$ και $ΑΓ = \dfrac{3}{2} \cdot ΑΒ$. Παίρνουμε σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $ΑΕ = ΑΒ$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ στο σημείο Δ, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.

Λύση



Σχήμα 1

Για συντομία, θα συμβολίσουμε με α το μήκος του τμήματος AB, δηλαδή: $AB=\alpha$.
Εφόσον $A\Gamma=\frac{3}{2}AB=\frac{3}{2}\alpha$ και $AE=AB=\alpha$, έχουμε:

$$E\Gamma=A\Gamma-AE=\frac{3}{2}\alpha-\alpha=\frac{\alpha}{2}.$$

Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές ($AB=AE$) και η γωνία του $\hat{A}$ είναι 60^o, οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και η διχοτόμος του $A\Delta$ είναι και διάμεσος.

Άρα είναι $\Delta E=\frac{\alpha}{2}$ και το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές, αφού $E\Gamma=E\Gamma=\frac{\alpha}{2}$.

Η γωνία $\hat{E}_1$ είναι εξωτερική του ισόπλευρου τριγώνου ABE. Άρα έχουμε

$$\hat{E}_1=180^\circ-A\hat{E}B=180^\circ-60^\circ=120^\circ,$$

οπότε : $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Delta}_1=\frac{180^\circ-120^\circ}{2}=30^o$.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K=\frac{x^2\cdot y^4\cdot z^6\cdot 2^{182}}{3\cdot\left(13\cdot 2^2\cdot 3^3+4^2\cdot 9^3\right)^{-1}},\ \text{αν είναι } x=2^{-10},\ y=4^{-8},\ z=8^{-6}$$

και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Λύση
Έχουμε:

$$x=2^{-10},\ y=4^{-8}=\left(2^2\right)^{-8}=2^{-16},\ z=8^{-6}=\left(2^3\right)^{-6}=2^{-18}.$$

Ο αριθμητής του κλάσματος γίνεται:

$$\begin{aligned}A=x^2\cdot y^4\cdot z^6\cdot 2^{182}&=\left(2^{-10}\right)^2\cdot\left(2^{-16}\right)^4\cdot\left(2^{-18}\right)^6\cdot 2^{182}\\&=2^{-20}\cdot 2^{-64}\cdot 2^{-108}\cdot 2^{182}=2^{-10}.\end{aligned}$$

Ο παρανομαστής του κλάσματος γίνεται:

$$\begin{aligned}\Pi&=3\cdot\left(13\cdot 2^2\cdot 3^3+4^2\cdot 9^3\right)^{-1}=3\cdot\left(13\cdot 2^2\cdot 3^3+2^4\cdot 3^6\right)^{-1}=3\cdot\left[2^2\cdot 3^3\left(13+2^2\cdot 3^3\right)\right]^{-1}\\&=3\cdot\left(2^2\cdot 3^3\cdot 121\right)^{-1}=3\cdot 2^{-2}\cdot 3^{-3}\cdot 121^{-1}=2^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 11^{-2}.\end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$K=\frac{2^{-10}}{2^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 121^{-1}}=\frac{3^2\cdot 121}{2^8}=\frac{3^2\cdot 11^2}{2^8}=\left(\frac{33}{2^4}\right)^2=\left(\frac{33}{16}\right)^2.$$

Πρόβλημα 2
Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης

$$4x-5\alpha+2<\alpha\left(x-3\right)+2\left(\alpha-1\right).$$

Λύση
Ο αριθμός 3 είναι λύση της δεδομένης ανίσωσης, αν ισχύει ότι

$$4\cdot 3-5\alpha+2<\alpha(3-3)+2(\alpha-1)\Leftrightarrow 12-5\alpha+2<2\alpha-2\Leftrightarrow 16<7\alpha\Leftrightarrow \alpha>\frac{16}{7}.$$

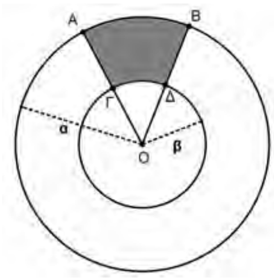
Ο αριθμός -3 είναι λύση της δεδομένης ανίσωσης, αν ισχύει ότι

$$4\cdot(-3)-5\alpha+2<\alpha(-3-3)+2(\alpha-1)\Leftrightarrow -12-5\alpha+2<-6\alpha+2\alpha-2$$
$$\Leftrightarrow -8<\alpha\Leftrightarrow \alpha>-8.$$

Επομένως οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης , όταν συναληθεύουν οι ανισώσεις $\alpha>\frac{16}{7}$ και $\alpha>-8$, δηλαδή όταν $\alpha>\frac{16}{7}$.

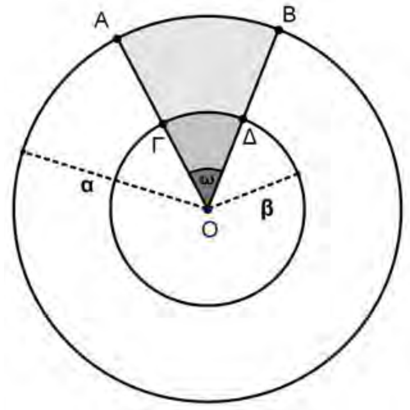
Πρόβλημα 3

Αν το εμβαδόν Ε του χωρίου ΑΒΔΓ του διπλανού σχήματος ισούται με το $\frac{1}{12}$ του εμβαδού του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους (O,α) και (O,β), $0<\beta<\alpha$, να βρείτε τη γωνία $\omega=\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$ και την τιμή της παράστασης:



$$\Sigma=\left(2\eta\mu^2\omega-\frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega\right)^3.$$

Λύση



Σχήμα 2

Το εμβαδόν του χωρίου ΑΒΔΓ ισούται με τη διαφορά των εμβαδών των κυκλικών τομέων $\left(\mathrm{O},\widehat{\mathrm{AB}}\right)$ και $\left(\mathrm{O},\widehat{\Gamma\Delta}\right)$, δηλαδή είναι

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB\Delta\Gamma})=\pi\alpha^2\cdot\frac{\omega}{2\pi}-\pi\beta^2\cdot\frac{\omega}{2\pi}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)\omega}{2}.$$

Το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους (O,α) και (O,β), $0<\beta<\alpha$, ισούται με $\mathrm{E}(\mathrm{O},\beta,\alpha)=\pi(\alpha^2-\beta^2)$, οπότε, σύμφωνα με την υπόθεση, έχουμε:

$$\frac{\mathrm{E}(\mathrm{AB\Delta\Gamma})}{\mathrm{E}(\mathrm{O},\beta,\alpha)}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow\frac{(\alpha^2-\beta^2)\omega}{2\pi(\alpha^2-\beta^2)}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow\omega=\frac{\pi}{6}.$$

Επειδή είναι $\eta\mu\omega=\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu 2\omega=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, έχουμε

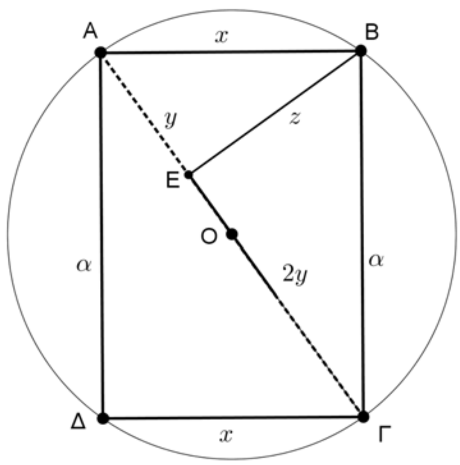
$$\Sigma = \left(2\eta\mu^2\omega - \frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega\right)^3 = \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right)^3 = \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{512}.$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $ΑΔ = \alpha$ cm και $ΑΒ < ΑΔ$. Η κάθετη από την κορυφή Β προς τη διαγώνιο ΑΓ την τέμνει στο σημείο Ε. Αν ισχύει ότι $ΕΓ = 2\cdot ΑΕ$, να βρείτε:

- **(i)** το μήκος της πλευράς ΑΒ
- **(ii)** Το εμβαδόν του κύκλου που περνάει και από τις τέσσερις κορυφές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

Λύση



Σχήμα 3

(i) Έστω $ΑΒ = ΓΔ = x$, $ΑΕ = y$, $ΕΓ = 2y$ και $ΒΖ = z$.

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνα ΑΒΕ έχουμε:

$$x^2 = y^2 + z^2 \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2. \qquad (1)$$

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνα ΒΓΕ έχουμε:

$$\alpha^2 = 4y^2 + z^2 \Rightarrow z^2 = \alpha^2 - 4y^2. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\alpha^2 - 4y^2 = x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 = \alpha^2 - 3y^2 \qquad (3)$$

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$9y^2 = x^2 + \alpha^2 \Rightarrow x^2 = 9y^2 - \alpha^2. \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$9y^2 - \alpha^2 = \alpha^2 - 3y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{\alpha^2}{6} \Rightarrow y = \frac{\alpha\sqrt{6}}{6},$$

οπότε λαμβάνουμε και

$$x^2 = \alpha^2 - 3\left(\frac{\alpha\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \alpha^2 - 3\cdot\frac{\alpha^2}{6} = \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow x = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

(ii) Διάμετρος του κύκλου είναι η $ΑΓ = 3y$, οπότε η ακτίνα του είναι $R = \frac{3}{2}y = \frac{\alpha\sqrt{6}}{4}$. Το εμβαδό του κύκλου είναι $E = \pi R^2 = \pi\cdot\frac{6\alpha^2}{16} = \frac{3\pi\alpha^2}{8}$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρεθούν οι ακέραιοι x που είναι ρίζες της εξίσωσης $x(x-2)=24$ και το τετράγωνό τους δεν είναι μεγαλύτερο του 25.

Λύση

Η εξίσωση $x(x-2)=24 \Leftrightarrow x^2-2x-24=0$ είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα $\Delta=100$, οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες

$$x=\frac{2\pm 10}{2} \Leftrightarrow x=6 \text{ ή } x=-4.$$

Δεκτή είναι η ρίζα $x=-4$, γιατί $(-4)^2=16<25$, ενώ $6^2=36>25$.

Πρόβλημα 2

Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\mathrm{K}(\alpha,\beta)=\frac{\alpha^3+\beta^3-\alpha^2+\beta^2+\left(\alpha\beta+\beta^2\right)(\alpha-2\beta)}{(\alpha+\beta)^2-\alpha-\beta},$$

αν $\alpha+\beta\neq 0$ και $\alpha+\beta\neq 1$.

Λύση

Ο αριθμητής της παράστασης γράφεται:

$$\begin{aligned}
&\alpha^3+\beta^3-\alpha^2+\beta^2+\left(\alpha\beta+\beta^2\right)(\alpha-2\beta)\\
&=\alpha^3+\beta^3-\left(\alpha^2-\beta^2\right)+\beta(\alpha+\beta)(\alpha-2\beta)\\
&=(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)-(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+\beta(\alpha+\beta)(\alpha-2\beta)\\
&=(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2-\alpha+\beta+\beta\alpha-2\beta^2\right)\\
&=(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\beta^2-\alpha+\beta\right)\\
&=(\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)\right]\\
&=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1).
\end{aligned}$$

Ο παρανομαστής της παράστασης γράφεται:

$$(\alpha+\beta)^2-\alpha-\beta=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)$$

Άρα, αφού $\alpha+\beta\neq 0$ και $\alpha+\beta\neq 1$, έχουμε

$$\mathrm{K}(\alpha,\beta)=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}=\alpha-\beta.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται η εξίσωση $x^2+2\lambda x+\lambda^2-1=0$. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες μεγαλύτερες του -5 και μικρότερες του 2 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ίσο με 20.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$$\Delta=4\lambda^2-4\left(\lambda^2-1\right)=4,$$

οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες $x_1 = -\lambda + 1$ και $x_2 = -\lambda - 1$.

Οι δύο ρίζες ανήκουν στο διάστημα $(-5, 2)$, όταν

$$-5 < -\lambda + 1 < 2 \text{ και } -5 < -\lambda - 1 < 2 \Leftrightarrow -6 < -\lambda < 1 \text{ και } -4 < -\lambda < 3$$

$$\Leftrightarrow -1 < \lambda < 6 \text{ και } -3 < \lambda < 4 \Leftrightarrow -1 < \lambda < 4.$$

Επιπλέον, έχουμε

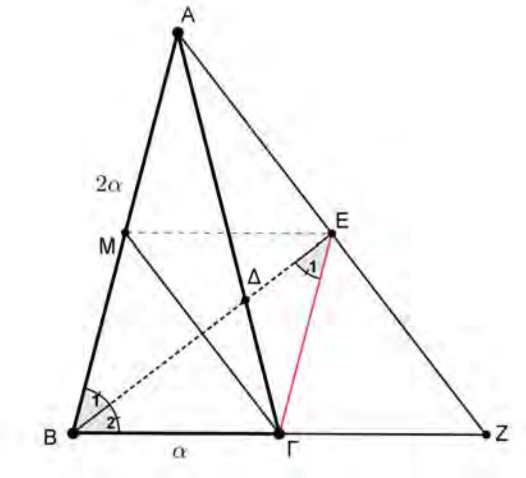
$$(-\lambda + 1)^2 + (-\lambda - 1)^2 = 20 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 2 = 20 \Leftrightarrow \lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda = -3 \text{ ή } \lambda = 3,$$

Επομένως, αφού πρέπει $-1 < \lambda < 4$ το ζητούμενο ισχύει για $\lambda = 3$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ = \alpha$ και $ΑΒ = ΑΓ = 2\alpha$. Η παράλληλη ευθεία από την κορυφή Γ προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την ευθεία της διχοτόμου ΒΔ στο σημείο Ε. Η ευθεία ΑΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

Λύση



Σχήμα 4

Επειδή $ΕΓ // ΑΒ$, θα ισχύει $\hat{Β}_1 = \hat{Ε}_1$ και αφού η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Β}$, θα είναι $\hat{Β}_1 = \hat{Β}_2$. Επομένως έχουμε $\hat{Β}_2 = \hat{Ε}_1$ και κατά συνέπεια το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές, δηλαδή: $ΒΓ = ΓΕ = \alpha$.

Στη συνέχεια μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους.

1^{ος} τρόπος. Λόγω της παραλληλίας των ΕΓ, ΑΒ θεωρούμε τα όμοια τρίγωνα ΕΓΖ και ΑΒΖ, από τα οποία λαμβάνουμε:

$$\frac{ΓΖ}{ΒΖ} = \frac{ΕΓ}{ΑΒ} = \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow ΒΖ = 2 \cdot ΓΖ$$

Επομένως το σημείο Γ είναι το μέσο της ΒΖ, δηλαδή $ΒΖ = 2 \cdot ΒΓ = 2\alpha$. Επειδή είναι και $ΑΒ = 2\alpha$ το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

2^{ος} τρόπος. Θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ. Τότε το τετράπλευρο ΒΓΕΜ είναι ρόμβος, διότι: έχει $ΒΜ = // ΓΕ = \alpha$ (οπότε ΒΓΕΜ παραλληλόγραμμο) και $ΒΓ = ΓΕ = \alpha$ (δύο διαδοχικές πλευρές ίσες). Άρα $ΜΕ = ΒΖ$ και κατά συνέπεια το Ε είναι μέσο του ΑΖ. Επομένως στο τρίγωνο ΑΒΖ, η ΒΕ είναι διχοτόμος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\kappa\ \alpha \neq 0$ και $-1 < \alpha < 1$ να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\mathrm{K} = \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} - 1 + \alpha$,

όπου

$$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}},\ \mathrm{B} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\ .$$

Λύση

Από τις υποθέσεις έχουμε ότι $1+\alpha > 0$ και $1-\alpha > 0$, οπότε

$$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} = \frac{1+\alpha+1-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$

$$\mathrm{B} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} = \frac{1+\alpha-(1-\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} - 1 + \alpha = \frac{1}{\alpha} - 1 + \alpha = \frac{1-\alpha+\alpha^2}{\alpha}.$$

Επειδή είναι $1-\alpha+\alpha^2 = \left(\alpha - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$, για όλες τις τιμές του α, έπεται ότι η παράσταση Κ έχει το πρόσημο του α, δηλαδή θετικό, αν $0 < \alpha < 1$ και αρνητικό, αν $-1 < \alpha < 0$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται η εξίσωση :

$$x^2 - 2\kappa x - 1 + \kappa^2 = 0.$$

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου κ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες στο διάστημα $(0,5)$ με άθροισμα τέταρτων δυνάμεων ίσο με 82.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 4\kappa^2 - 4\left(-1+\kappa^2\right) = 4,$$

οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες $x_1 = \kappa + 1$ και $x_2 = \kappa - 1$.

Οι δύο ρίζες ανήκουν στο διάστημα $(0,5)$, όταν

$$0 < \kappa + 1 < 5 \text{ και } 0 < \kappa - 1 < 5 \Leftrightarrow -1 < \kappa < 4 \text{ και } 1 < \kappa < 6 \Leftrightarrow 1 < \kappa < 4.$$

Επιπλέον, έχουμε

$$(\kappa+1)^4 + (\kappa-1)^4 = 82 \Leftrightarrow 2\kappa^4 + 12\kappa^2 + 2 = 82 \Leftrightarrow \kappa^4 + 6\kappa^2 - 40 = 0,$$

από την οποία λαμβάνουμε

$$\kappa^2 = 4 \text{ ή } \kappa^2 = -10 \text{ (αδύνατη)} \Leftrightarrow \kappa = 2 \text{ ή } \kappa = -2.$$

Επομένως για $\kappa = 2$ ισχύει το ζητούμενο, αφού η τιμή $\kappa = -2$ απορρίπτεται λόγω της σχέσης $1 < \kappa < 4$.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς ακέραιους x, y και z για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+3}=\frac{y}{2012y+5}=\frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των x, y και z είναι διαιρέτης του 747.

Λύση

Από το δεδομένο σύστημα έχουμε

$$\frac{2012x+3}{x}=\frac{2012y+5}{y}=\frac{2012z+7}{z}$$

$$\Leftrightarrow 2012+\frac{3}{x}=2012+\frac{5}{y}=2012+\frac{7}{z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{5}{y}=\frac{7}{z}$$

οπότε, αν θέσουμε $\frac{3}{x}=\frac{5}{y}=\frac{7}{z}=\frac{1}{\lambda}$ έπεται ότι: $x=3\lambda,\ y=5\lambda,\ z=7\lambda$.

Επειδή το άθροισμα των τετραγώνων των x, y και z είναι διαιρέτης του 747 θα έχουμε

$$x^2+y^2+z^2=83\lambda^2 \,|\, 747 \Rightarrow \frac{747}{83\lambda^2}=\kappa\in\mathbb{Z} \Rightarrow \frac{9}{\lambda^2}=\kappa\in\mathbb{Z},$$

Επομένως οι μοναδικές αποδεκτές τιμές για το λ^2 είναι οι 1, 3 και 9.

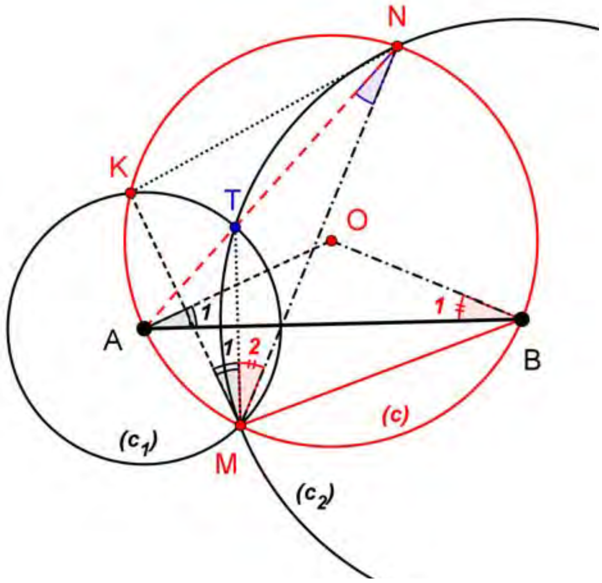
- Για $\lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=\pm 1$ έπεται ότι $(x,y,z)=(3,5,7)$ ή $(x,y,z)=(-3,-5,-7)$.
- Για $\lambda^2=3 \Leftrightarrow \lambda=\pm\sqrt{3}$ προκύπτουν για τα x, y, z μη ακέραιες τιμές, άτοπο.
- Για $\lambda^2=9 \Leftrightarrow \lambda=\pm 3$ έπεται ότι $(x,y,z)=(9,15,21)$ ή $(x,y,z)=(-9,-15,-21)$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος $c(O,R)$, τυχούσα χορδή του AB (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου AB. Οι κύκλοι $c_1(A,AM)$ και $c_2(B,BM)$ τέμνουν το κύκλο $c(O,R)$ στα σημεία K και N αντίστοιχα. Οι κύκλοι $c_1(A,AM)$ και $c_2(B,BM)$ τέμνονται στο σημείο T. Να αποδείξετε ότι το σημείο T είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου KMN.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι η διάκεντρος τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους.



Σχήμα 5

Η KM είναι κοινή χορδή των κύκλων $c(O,R)$ και $c_1(A,AM)$. Άρα

η OA είναι μεσοκάθετη της KM. (1)

Η MT είναι κοινή χορδή των κύκλων $c_1(A,AM)$ και $c_2(B,BM)$. Άρα

η AB είναι μεσοκάθετη της MT. (2)

Η MN είναι κοινή χορδή των κύκλων $c(O,R)$ και $c_2(B,BM)$. Άρα

η OB είναι μεσοκάθετη της MN. (3)

Από τις καθετότητες (1) και (2), προκύπτει η ισότητα γωνιών:

$\hat{A}_1 = \hat{M}_1$ (γιατί έχουν πλευρές κάθετες).

Από τις καθετότητες (2) και (3), προκύπτει η ισότητα γωνιών:

$\hat{B}_1 = \hat{M}_2$ (γιατί έχουν πλευρές κάθετες)

και τελικά από το ισοσκελές τρίγωνο OAB, έχουμε:

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 .$$

Οι τρεις τελευταίες ισότητες γωνιών μας οδηγούν στην ισότητα: $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$.

Η γωνία $A\hat{N}M$ και $A\hat{B}M$ είναι ίσες, διότι είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(O,R)$ και βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{AM}$.

Η γωνία $T\hat{N}M$ είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο $c_2(B,BM)$, οπότε θα ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας $T\hat{B}M$, δηλαδή: $T\hat{N}M = A\hat{B}M$

Άρα $A\hat{N}M = T\hat{N}M$ και κατά συνέπεια τα σημεία A, T, N είναι συνευθειακά.

Ισχύει τώρα η ισότητα $A\hat{N}K = A\hat{N}M$ (διότι είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(O,R)$ και βαίνουν στα ίσα τόξα AM και AK). Επομένως η NA είναι διχοτόμος της γωνίας $K\hat{N}M$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους θετικούς ακέραιους την εξίσωση

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+4+\cdots+x}=\frac{2011}{2013}.$$

Λύση

Επειδή $1+2+3+...+x=\frac{x(x+1)}{2}$, για κάθε θετικό ακέραιο x, η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{2}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{2}{x(x+1)}=\frac{2011}{2013}$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{2011}{2013}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{2}{x+1}=\frac{2011}{2013}\Leftrightarrow\frac{2}{x+1}=\frac{2}{2013}\Leftrightarrow x=2012.$$

Πρόβλημα 2

Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=ax^2+bx+c$ και $g(x)=cx+b$, όπου $a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$, διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, να βρείτε τη συνθήκη που ισχύει μεταξύ των παραμέτρων a,b,c καθώς και το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων.

Λύση

Από την υπόθεση έπεται ότι η εξίσωση

$$ax^2+bx+c=cx+b\Leftrightarrow ax^2+(b-c)x+(c-b)=0$$

έχει μοναδική λύση. Επομένως η διακρίνουσά της ισούται με 0, δηλαδή

$$\Delta=(b-c)^2+4a(b-c)=0\Leftrightarrow(b-c)(b-c+4a)=0\Leftrightarrow c-b=4a,$$

αφού $b\neq c$.

Όταν $c-b=4a$ η εξίσωση γίνεται:

$$ax^2-4ax+4a=0\Leftrightarrow a\left(x^2-4x+4\right)=0\Leftrightarrow x^2-4x+4=0\Leftrightarrow x=2.$$

Άρα το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων είναι το $\mathrm{M}(2,2c+b)$.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x,y και z για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+y}=\frac{y}{2012y+z}=\frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των x,y και z ισούται με 147.

Λύση

Από το δεδομένο σύστημα έχουμε

$$\frac{2012x+y}{x}=\frac{2012y+z}{y}=\frac{2012z+7}{z}$$

$$\Leftrightarrow 2012+\frac{y}{x}=2012+\frac{z}{y}=2012+\frac{7}{z}\Leftrightarrow \frac{y}{x}=\frac{z}{y}=\frac{7}{z}$$

οπότε, αν θέσουμε $\frac{y}{x}=\frac{z}{y}=\frac{7}{z}=\frac{1}{\lambda}$ έπεται ότι: $x=7\lambda^3,\ y=7\lambda^2,\ z=7\lambda$.

Επειδή το άθροισμα των τετραγώνων των x, y και z ισούται με 147 θα έχουμε

$$x^2+y^2+z^2=147\Leftrightarrow 49\lambda^6+49\lambda^4+49\lambda^2=147$$

$$\Leftrightarrow \lambda^6+\lambda^4+\lambda^2=3\Leftrightarrow \lambda^6-1+\lambda^4-1+\lambda^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda^2-1\right)\left(\lambda^4+\lambda^2+1+\lambda^2+1+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda^2-1\right)\left(\lambda^4+2\lambda^2+3\right)=0\Leftrightarrow \lambda=-1 \text{ ή } \lambda=1,$$

αφού η εξίσωση $\lambda^4+2\lambda^2+3=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=-8<0$.

Επομένως οι ζητούμενες τριάδες ακεραίων είναι:

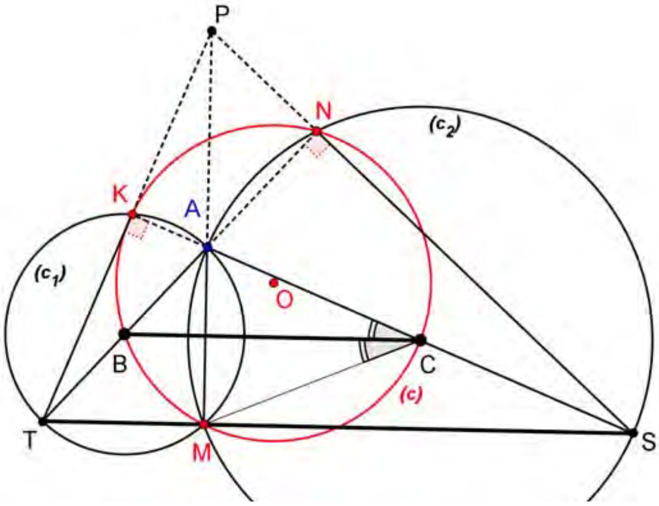
$$(x,y,z)=(7,7,7) \text{ ή } (x,y,z)=(-7,-7,-7)$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος $c(O,R)$, τυχούσα χορδή του BC (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου BC. Οι κύκλοι $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ τέμνουν το κύκλο $c(O,R)$ στα σημεία K, N, αντίστοιχα, και οι κύκλοι $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ τέμνονται στα σημεία A και M. Η παράλληλος από το σημείο M προς την BC τέμνει τους κύκλους $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ στα σημεία T, S αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες AM, KT, NS περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση

Θα αποδείξουμε, πρώτα, ότι τα σημεία K, A, C, S και N, A, B, T είναι συνευθειακά.



Σχήμα 6

Η AM είναι η κοινή χορδή των κύκλων $c_1(B,BM)$ και $c_2(C,CM)$.

Άρα η διάκεντρός τους BC είναι μεσοκάθετη της AM.

Η BC όμως είναι παράλληλη με την TS (από την κατασκευή του σχήματος). Άρα η TS είναι κάθετος με την AM ($AM \perp TS$). Δηλαδή $A\hat{M}T = A\hat{M}S = 90^o$.
Από την τελευταία ισότητα γωνιών προκύπτει ότι τα σημεία A,T και A,S είναι αντιδιαμετρικά στους κύκλους $c_1(B,BM)$ και $c_2(C,CM)$ αντίστοιχα.
Επομένως, τα σημεία A,C,S και A,B,T είναι συνευθειακά.
Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι τα σημεία K,A,C και N,A,B είναι συνευθειακά.
Στον κύκλο $c(O,R)$, το σημείο B είναι μέσο του τόξου KM (διότι BM, BK είναι ακτίνες του κύκλου $c_1(B,BM)$). Άρα οι εγγεγραμμένες στα τόξα BM και BK γωνίες, θα είναι ίσες μεταξύ τους. Επομένως

$$K\hat{C}B = M\hat{C}B \qquad (1).$$

Εφόσον η διάκεντρος BC είναι μεσοκάθετη της AM, τα τρίγωνα ABC και MBC είναι ίσα, οπότε :

$$A\hat{C}B = M\hat{C}B \qquad (2).$$

Από τις ισότητες των γωνιών (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $K\hat{C}B = A\hat{C}B$ και κατά συνέπεια τα σημεία K,A,C είναι συνευθειακά.
Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία N,A,B είναι επίσης συνευθειακά.
Από τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα $AMTK$ και $AMSN$ συμπεραίνουμε ότι:

$$A\hat{K}T = A\hat{N}S = 90^o.$$

Επομένως προκύπτουν οι καθετότητες $TK \perp KS$ και $TN \perp NS$.
Σε συνδυασμό τώρα με την καθετότητα $AM \perp TS$, συμπεραίνουμε ότι τα AM, KT, NS είναι ύψη του τριγώνου ATS, οπότε θα συγκλίνουν στο ορθόκεντρό του.

Παρατηρήσεις

Έστω P το ορθόκεντρο του τριγώνου ATS. Τότε τα σημεία P,A,T,S αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα και κατά συνέπεια το σημείο A είναι ορθόκεντρο του τριγώνου PTS.

Το τρίγωνο KMN είναι ορθικό του τριγώνου PTS και κατά συνέπεια το σημείο A είναι έκκεντρο του τριγώνου KMN.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Οκτωβρίου 2013

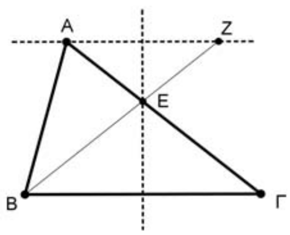
Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 32 - 12 : 4 + 53 + 3 \cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9} \quad .$$

Πρόβλημα 2
Ένας οικογενειάρχης πήρε από την τράπεζα ένα ποσό χρημάτων. Από αυτά ξόδεψε το 20% για την αγορά ενός φορητού ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στη συνέχεια, από τα χρήματα που του έμειναν ξόδεψε το 15% για αγορά τροφίμων της οικογένειας. Αν του έμειναν τελικά 1360 ευρώ, να βρείτε:
(α) Πόσα χρήματα πήρε από την τράπεζα ο οικογενειάρχης.
(β) Πόσα χρήματα στοίχισαν τα τρόφιμα.
(γ) Ποιο ποσοστό των χρημάτων που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε συνολικά.

Πρόβλημα 3
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η γωνιά $\hat{B}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και η ευθεία ΒΕ τέμνει την ευθεία ε, που περνάει από το σημείο Α και είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:



(α) $AZ = AB$, **(β)** $A\hat{E}B = \hat{B}$.

Πρόβλημα 4
Ο λόγος δυο φυσικών αριθμών είναι $\frac{7}{5}$. Διαιρώντας τον μεγαλύτερο αριθμό με το 18, το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με 8, ενώ διαιρώντας τον μικρότερο αριθμό με το 12 το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με 9. Αν γνωρίζετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του μεγαλύτερου αριθμού με το 18 είναι πενταπλάσιο του υπόλοιπου της διαίρεσης του μικρότερου αριθμού με το 12, να βρείτε τους δυο αριθμούς.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"

19 Οκτωβρίου 2013

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο πραγματικός αριθμός α είναι η μικρότερη δεκαδική προσέγγιση δέκατου του άρρητου αριθμού $\sqrt{5}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = 3\cdot(3\alpha - 4{,}6) - 2\cdot(\alpha - 0{,}2).$$

Πρόβλημα 2

Αν ο θετικός ακέραιος β ικανοποιεί τις ανισώσεις

$$-4 < 1 - 2\beta < 5,$$

να λύσετε ως προς άγνωστο x την ανίσωση:

$$2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < \frac{x}{\beta} \quad .$$

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς χΟψ μια ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία 45° και επίσης διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(2,-6)$. Το σημείο Α ανήκει στον άξονα $\chi'\chi$ και στην ευθεία (ε), ενώ το σημείο Β ανήκει στον άξονα $\psi'\psi$ και στην ευθεία (ε).

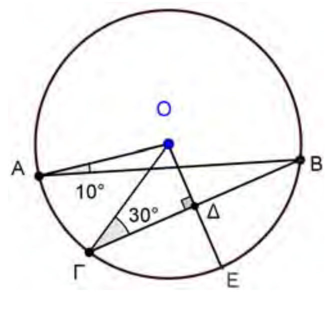
(α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α , Β και το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ .

(γ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΜ.

Πρόβλημα 4

Σε κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ (κέντρου Ο και ακτίνας R) δίνονται σημεία Α, Γ και Β τέτοια ώστε $\mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = 10^\circ$ και $\mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = 30^\circ$. Τα σημεία Α και Γ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΟΒ. Από το σημείο Ο φέρουμε ευθεία κάθετη προς τη χορδή ΓΒ που την τέμνει στο σημείο Δ, ενώ τέμνει τον κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ στο σημείο Ε.



(α) Βρείτε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ και το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{A}\Gamma}$ σε μοίρες.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΟΒΕΓ είναι ρόμβος και να υπολογίσετε το εμβαδό του.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Οκτωβρίου 2013

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν τα συστήματα

$$(\Sigma_1)\left\{\begin{matrix}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}\\[2mm] \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{1}{2}\end{matrix}\right\} \quad \text{και} \quad (\Sigma_2)\ \left\{\begin{matrix}\alpha x+\beta y\ \ =4\\ 2\alpha x+3\beta y=-8\end{matrix}\right\}$$

έχουν την ίδια λύση (x,y), να βρείτε την τιμή των παραμέτρων α και β.

Πρόβλημα 2
Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y και z ισχύει ότι:

$$z=2(x+y) \qquad \text{και} \qquad z=3(x-y).$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $y<x<z$.
(β) Να βρείτε την τριάδα (x,y,z) για την οποία: $x^2+y^2+z^2=680$.

Πρόβλημα 3
Να βρεθούν οι ακέραιοι x για τους οποίους οι αριθμοί $A=8x+1$ και $B=2x-3$ είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα ακεραίων.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}}=20^0$. Θεωρούμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{B\Gamma}$. Από το σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ τέτοιο ώστε $\mathrm{AE}\parallel\mathrm{B\Gamma}$, $\mathrm{AE}=\mathrm{AB}$ και με τα σημεία Ε και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΒΑΕΖ. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Οκτωβρίου 2013

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι:
$$\frac{9x^2+3x+1}{x}-\frac{27x}{9x^2+3x+1}\geq 6.$$
Για ποιες τιμές του x ισχύει η ισότητα;

Πρόβλημα 2
Να υπολογιστούν οι ακέραιοι συντελεστές α,β,γ της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$, αν αυτή έχει ρίζες $x_1=1$ και $x_2=\beta$.

Πρόβλημα 3
Να βρείτε όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες η αριθμητική τιμή του κλάσματος
$$\frac{2x^2+x-4}{x^2-x+2}$$
είναι θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB<A\Gamma<B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R). Ο κύκλος $C_B(B,AB)$ (με κέντρο B και ακτίνα AB), τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο K και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο Λ. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma,A\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$), τέμνει την AB στο σημείο M και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζουν τα σημεία K,Λ,M,N είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Οκτωβρίου 2013

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση
$$2x^2-5x-2x\sqrt{x^2-5x}=1.$$

Πρόβλημα 2
Αν α,β ακέραιοι και ο αριθμός $\mathrm{A}=\alpha^2+2\beta$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{B}=\alpha^2+\beta$ ισούται με το άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

Πρόβλημα 3
Βρείτε για ποιες τιμές της πραγματικής παραμέτρου a η εξίσωση
$$4x^4+(8+4a)x^3+\left(a^2+8a+4\right)x^2+\left(a^3+8\right)x+a^2=0$$
έχει όλες τις ρίζες της πραγματικούς αριθμούς.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB<A\Gamma<B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή A και είναι παράλληλη στη πλευρά $B\Gamma$. Ο κύκλος $C_B(B,AB)$ (με κέντρο B και ακτίνα AB), τέμνει την (ε) στο σημείο K και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο Λ. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma,A\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$), τέμνει την (ε) στο σημείο N και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο M. Οι κύκλοι $C_B(B,AB)$, $C_\Gamma(\Gamma,A\Gamma)$ τέμνονται στο σημείο T και η (ε) τέμνει τον $C(O,R)$ στο σημείο Σ.
(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ,Λ,N,T είναι συνευθειακά.
(β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $T\Sigma,K\Gamma,NB$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Οκτωβρίου 2013

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 32 - 12 : 4 + 53 + 3 \cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9} \quad .$$

Λύση

$$A = 32 - 12 : 4 + 53 + 3 \cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9} = 32 - 3 + 53 + 12 + \frac{16}{9} \cdot 8 - \frac{74}{9}$$

$$= 32 - 3 + 53 + 12 + \frac{128}{9} - \frac{74}{9} = 94 + \frac{54}{9} = 94 + 6 = 100.$$

Πρόβλημα 2
Ένας οικογενειάρχης πήρε από την τράπεζα ένα ποσόν χρημάτων. Από αυτά ξόδεψε το 20% για την αγορά ενός φορητού ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στη συνέχεια, από τα χρήματα που του έμειναν ξόδεψε το 15% για αγορά τροφίμων της οικογένειας. Αν του έμειναν τελικά 1360 ευρώ, να βρείτε:
(α) Πόσα χρήματα πήρε από την τράπεζα ο οικογενειάρχης.
(β) Πόσα χρήματα στοίχισαν τα τρόφιμα.
(γ) Ποιο ποσοστό των χρημάτων που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε συνολικά.

Λύση
(α) Μετά την αγορά τροφίμων έμειναν στον οικογενειάρχη 1360 ευρώ. Αυτά τα χρήματα αποτελούν το 85% των χρημάτων που του έμειναν μετά την αγορά του υπολογιστή. Άρα το 85% αντιστοιχεί σε ποσόν 1360 ευρώ, οπότε το ποσόν που του έμεινε μετά την αγορά του υπολογιστή είναι

$$1360 \cdot \frac{100}{85} = \frac{16 \cdot 100}{1} = 1600 \text{ ευρώ}.$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος:
το $(100-20)\% = 80\%$ του ποσού που πήρε αντιστοιχούν σε $1600\,\text{ευρώ}$.
Άρα τα χρήματα που πήρε από την τράπεζα είναι:

$$1600 \cdot \frac{100}{80} = 2000 \text{ ευρώ}.$$

(β) Τα τρόφιμα στοίχισαν το 15% των χρημάτων που έμειναν μετά την αγορά του υπολογιστή, δηλαδή

$$1600 \cdot \frac{15}{100} = 240 \text{ ευρώ.}$$

Το ποσό αυτό μπορεί να βρεθεί και με την αφαίρεση: $1600 - 1360 = 240$.

(γ) Ο οικογενειάρχης από τα 2000 ευρώ που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε $2000 - 1360 = 640$ ευρώ, δηλαδή ποσοστιαία επί τις εκατό

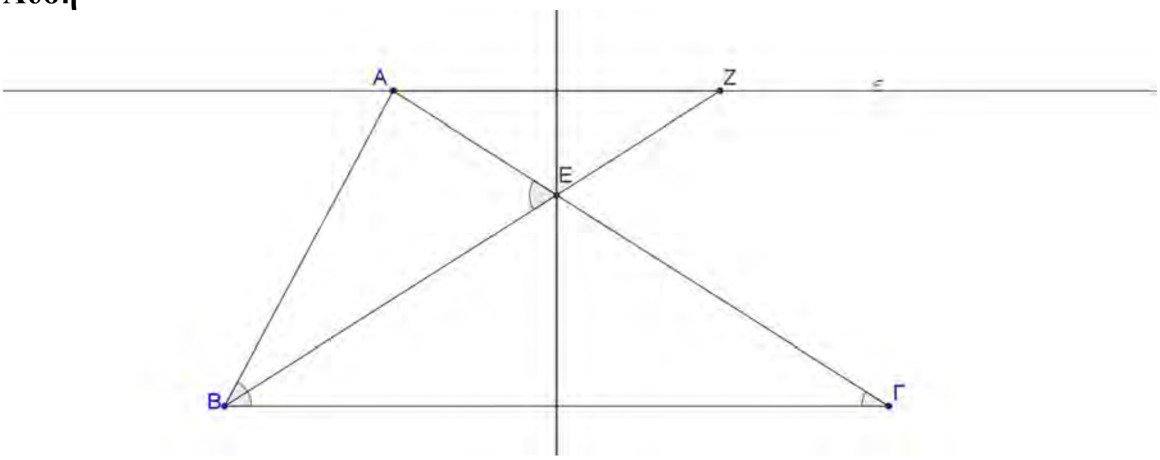
$$\frac{640}{2000} \cdot 100 = \frac{64}{2} = 32.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η γωνία $\hat{\mathrm{B}}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και η ευθεία ΒΕ τέμνει την ευθεία ε, που περνάει από το σημείο Α και είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{AZ} = \mathrm{AB}$, **(β)** $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = \hat{\mathrm{B}}$.

Λύση



Σχήμα 1

(α) Επειδή το σημείο Ε ανήκει στη μεσοκάθετη της ΒΓ έπεται ότι $\mathrm{EB} = \mathrm{E}\Gamma$, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{EB}\Gamma$ προκύπτει $\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \hat{\Gamma}$. Επειδή $\mathrm{AZ} \parallel \mathrm{B}\Gamma$ έπεται ότι: $\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}$ (εντός εναλλάξ γωνίες). Από τη σχέση της υπόθεσης $\hat{\mathrm{B}} = 2 \cdot \hat{\Gamma}$, έχουμε:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \hat{\Gamma} = \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z}.$$

Άρα το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΖ.

(β) Η γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΕΒΓ, οπότε

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Gamma + \hat{\Gamma} = 2 \cdot \hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{B}}.$$

Πρόβλημα 4

Ο λόγος δυο φυσικών αριθμών είναι $\frac{7}{5}$. Διαιρώντας τον μεγαλύτερο αριθμό με το 18, το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με τον αριθμό 8, ενώ διαιρώντας τον μικρότερο αριθμό με το 12 το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με τον αριθμό 9. Αν γνωρίζετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του μεγαλύτερου αριθμού με το 18 είναι πενταπλάσιο του υπόλοιπου της διαίρεσης του μικρότερου αριθμού με το 12, να βρείτε τους δυο αριθμούς.

Λύση (1ος τρόπος)

Έστω α, β οι δυο φυσικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$, Τότε θα είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5}$ και επιπλέον

$$\alpha = 18 \cdot 8 + 5\upsilon \text{ και } \beta = 12 \cdot 9 + \upsilon.$$

Επομένως, έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow 5\alpha = 7\beta \text{ (ιδιότητα ίσων κλασμάτων), οπότε έχουμε:}$$

$$5 \cdot (144 + 5\upsilon) = 7 \cdot (108 + \upsilon) \Leftrightarrow \text{ (από επιμεριστική ιδιότητα)}$$

$$720 + 25\upsilon = 756 + 7\upsilon \Leftrightarrow 18\upsilon = 36 \Leftrightarrow \upsilon = 2, \text{ οπότε θα είναι } \alpha = 154 \text{ και } \beta = 110.$$

2ος τρόπος.

Έχουμε: $\alpha = 18 \cdot 8 + \upsilon_1$, με $\upsilon_1 = 0,1,2,...,17$ και $\beta = 12 \cdot 9 + \upsilon_2$, με $\upsilon_2 = 0,1,2,...,11$.

Τα ζεύγη για τα οποία μπορεί να ισχύει η ισότητα $\upsilon_1 = 5\upsilon_2$ είναι τα :

$$(\upsilon_1, \upsilon_2) = \{(0,0), (5,1), (10,2), (15,3)\}$$

και από αυτά μόνο το ζεύγος $(10,2)$ μας δίνει $\alpha = 154$ και $\beta = 110$ και το κλάσμα $\frac{154}{110}$ που είναι ισοδύναμο με το $\frac{7}{5}$.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο πραγματικός αριθμός α είναι η μικρότερη δεκαδική προσέγγιση δέκατου του άρρητου αριθμού $\sqrt{5}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = 3 \cdot (3\alpha - 4,6) - 2 \cdot (\alpha - 0,2).$$

Λύση

Έχουμε: $4 < 5$, οπότε $\sqrt{4} < \sqrt{5} \Rightarrow 2 < \sqrt{5}$. Είναι

$2,1^2 = 4,41,\ 2,2^2 = 4,84$ *και* $2,3^2 = 5,29$, οπότε η ζητούμενη τιμή του α είναι $\alpha = 2,2$.

Με αντικατάσταση βρίσκουμε: $\mathrm{A} = 2$

Πρόβλημα 2

Αν ο θετικός ακέραιος β ικανοποιεί τις ανισώσεις

$$-4 < 1 - 2\beta < 5,$$

να λύσετε ως προς άγνωστο x την ανίσωση:

$$2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < \frac{x}{\beta}.$$

Λύση

Έχουμε $-4 < 1 - 2\beta < 5 \Leftrightarrow -5 < -2\beta < 4 \Leftrightarrow -\frac{4}{2} < \frac{-2\beta}{-2} < \frac{-5}{-2} \Leftrightarrow -2 < \beta < \frac{5}{2}$. Επειδή ο β είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι $\beta = 1$ ή $\beta = 2$.

- Για $\beta = 1$ η ανίσωση γίνεται: $2(x+1)-\frac{3}{2}(x+1)<x \Leftrightarrow \frac{x+1}{2}<x \Leftrightarrow x>1.$
- Για $\beta = 2$ η ανίσωση γίνεται:

  $2(x+1)-\frac{3}{2}(x+1)<\frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2}<\frac{x}{2} \Leftrightarrow 0\cdot x<-1$, η οποία είναι αδύνατη.

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς χΟψ μια ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία 45° και επίσης διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(2,-6)$. Το σημείο Α ανήκει στον άξονα $\chi'\chi$ και στην ευθεία (ε), ενώ το σημείο Β ανήκει στον άξονα $\psi'\psi$ και στην ευθεία (ε).

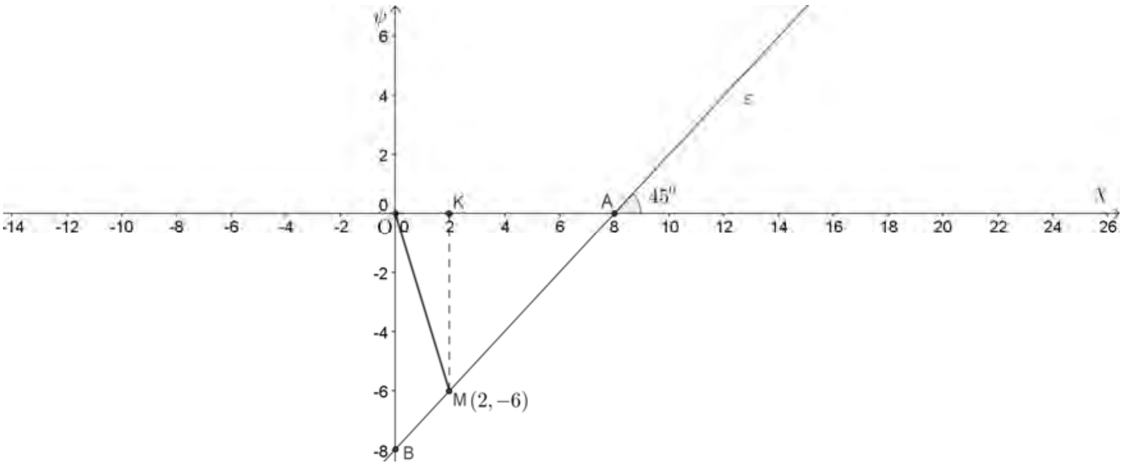
(α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α , Β και το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ .

(γ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΜ.

Λύση

α) Η ζητούμενη εξίσωση έχει τη μορφή $\psi = \alpha\chi + \beta$, όπου $\alpha = \varepsilon\varphi 45^{\circ} = 1$. Επειδή η ευθεία περνάει από το σημείο $\mathrm{M}(2,-6)$ έχουμε ότι $-6 = 2+\beta \Leftrightarrow \beta = -8$. Άρα η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι : $\psi = \chi - 8$



Σχήμα 2

β) Τα σημεία τομής με τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$ είναι τα $\mathrm{A}(8,0)$ και $\mathrm{B}(0,-8)$. Άρα έχουμε

$$(\mathrm{OAB}) = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{OA}\cdot \mathrm{OB} = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8 = 32 \text{ τετρ. μονάδες}$$

γ) Αν Κ είναι το σημείο με συντεταγμένες $(2,0)$, τότε το τρίγωνο ΚΜΑ είναι ορθογώνιο στο Κ και οι κάθετες πλευρές του έχουν μήκη $\mathrm{KM}=6$ και $\mathrm{KA}=6$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε

$$\mathrm{AM} = \sqrt{\mathrm{KM}^2+\mathrm{KA}^2} = \sqrt{6^2+6^2} = \sqrt{36\cdot 2} = 6\sqrt{2}.$$

Ομοίως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΒ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{AB} = \sqrt{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2} = \sqrt{8^2+8^2} = \sqrt{64\cdot 2} = 8\sqrt{2}.$$

Επειδή τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΑΒ έχουν κοινό ύψος από την κορυφή Ο, έστω υ, έχουμε:

$$\frac{(\mathrm{OAM})}{(\mathrm{OAB})}=\frac{\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AM}\cdot \upsilon}{\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \upsilon}=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}=\frac{6\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}=\frac{3}{4}\Rightarrow$$

$$(\mathrm{OAM})=\frac{3}{4}(\mathrm{OAB})=\frac{3}{4}\cdot 32=24 \text{ τετρ. μονάδες.}$$

Παρατήρηση:

Το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΜ, μπορούμε να το υπολογίσουμε, παρατηρώντας ότι η ΚΜ είναι ύψος του τριγώνου ΟΑΜ (έχει μήκος 6) και η ΟΑ βάση με μήκος 8.

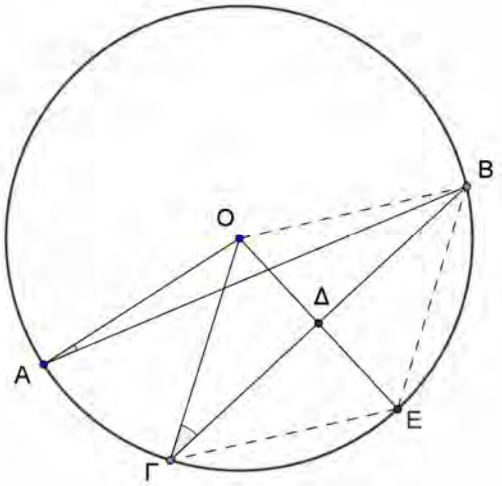
Άρα $(\mathrm{OAM})=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24$.

6. Σε κύκλο $c(\mathrm{O},R)$ (κέντρου Ο και ακτίνας R) δίνονται σημεία Α, Γ και Β τέτοια ώστε $\mathrm{O\hat{A}B}=10^\circ$ και $\mathrm{O\hat{\Gamma}B}=30^\circ$. Τα σημεία Α και Γ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΟΒ. Από το σημείο Ο φέρουμε ευθεία κάθετη προς τη χορδή ΓΒ που την τέμνει στο σημείο Δ, ενώ τέμνει τον κύκλο $c(\mathrm{O},R)$ στο σημείο Ε.

(α) Βρείτε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$ και το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$ σε μοίρες.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΟΒΕΓ είναι ρόμβος και να υπολογίσετε το εμβαδό του.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Επειδή το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές $(\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=R)$, έπεται ότι:

$$\mathrm{O\hat{B}A}=\mathrm{O\hat{A}B}=10^\circ.$$

Επειδή το τρίγωνο ΟΓΒ είναι ισοσκελές $(\mathrm{O\Gamma}=\mathrm{OB}=R)$, έπεται ότι:

$$\mathrm{O\hat{\Gamma}B}=\mathrm{O\hat{B}\Gamma}=30^\circ.$$

Άρα έχουμε: $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}=\mathrm{O\hat{B}\Gamma}-\mathrm{O\hat{B}A}=30^\circ-10^\circ=20^\circ$ και $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}=40^\circ$.

(β) Το ύψος του τριγώνου ΟΓΒ είναι και διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{\Gamma\hat{O}B}$, οπότε $\mathrm{\Gamma\hat{O}\Delta}=90^\circ-\mathrm{O\hat{\Gamma}\Delta}=90^\circ-30^\circ=60^\circ$, οπότε θα είναι και $\mathrm{\Gamma\hat{O}E}=60^\circ$. Άρα το τρίγωνο ΟΓΕ είναι ισόπλευρο, οπότε $\mathrm{\Gamma E}=\mathrm{O\Gamma}=R$. Επειδή η ευθεία ΟΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΓΒ θα είναι $\mathrm{EB} = \Gamma\mathrm{E} = R$, οπότε το τετράπλευρο ΟΒΕΓ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες , δηλαδή είναι ρόμβος.

Επιπλέον, έχουμε $\mathrm{O}\Delta = \mathrm{O}\Gamma \cdot \eta\mu 30^\circ = R \cdot \frac{1}{2} = \frac{R}{2}$, οπότε $(\mathrm{OBE}\Gamma) = R \cdot \frac{R}{2} = \frac{R^2}{2}$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν τα συστήματα

$$(\Sigma_1)\ \begin{Bmatrix} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \quad \text{και } (\Sigma_2)\ \begin{Bmatrix} \alpha x + \beta y \ = 4 \\ 2\alpha x + 3\beta y = -8 \end{Bmatrix}$$

έχουν την ίδια λύση (x, y), να βρείτε την τιμή των παραμέτρων α και β.

Λύση

Αν θέσουμε $\frac{1}{x} = \varphi$ και $\frac{1}{y} = \omega$, το σύστημα (Σ_1) γίνεται:

$$\begin{Bmatrix} \varphi + \omega = \frac{1}{4} \\ 3\varphi + 4\omega = \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \varphi = \frac{1}{4} - \omega \\ 3\left(\frac{1}{4} - \omega\right) + 4\omega = \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \varphi = \frac{1}{4} - \omega \\ \omega = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \varphi = \frac{1}{2} \\ \omega = -\frac{1}{4} \end{Bmatrix},$$

οπότε το σύστημα (Σ_1) έχει τη λύση: $(x, y) = \left(\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\omega}\right) = (2, -4)$.

Όμως από την υπόθεση την ίδια λύση έχει και το σύστημα (Σ_2), οπότε θα έχουμε;

$$\begin{Bmatrix} 2\alpha - 4\beta \ = 4 \\ 4\alpha - 12\beta = -8 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha - 2\beta \ = 2 \\ \alpha - 3\beta = -2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha - 2\beta \ = 2 \\ -\beta = -4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha \ = 10 \\ \beta = 4 \end{Bmatrix}.$$

Πρόβλημα 2

Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y και z ισχύει ότι:

$$z = 2(x + y) \qquad \text{και} \qquad z = 3(x - y).$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $y < x < z$.

(β) Να βρείτε την τριάδα (x, y, z) για την οποία: $x^2 + y^2 + z^2 = 680$.

Λύση

(α) Επειδή $z = 3(x - y) > 0 \Rightarrow x - y > 0$, έπεται ότι $x > y$.

Επίσης από τις δεδομένες ισότητες έχουμε:

$$z = 2(x + y) = 3(x - y) \Leftrightarrow 2x + 2y = 3x - 3y \Leftrightarrow x = 5y,$$

οπότε προκύπτει: $z = 2x + 2y = 12y$, οπότε $z - x = 12y - 5y = 7y > 0$, οπότε $z > x$.

Άρα έχουμε: $z > x > y \Leftrightarrow y < x < z$.

(β) Από τις προηγούμενες σχέσεις, δεδομένου ότι είναι $y > 0$, έχουμε:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 680 \Leftrightarrow 25y^2 + y^2 + 144y^2 = 680 \Leftrightarrow 170y^2 = 680 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = 2.$$

Άρα είναι: $(x, y, z) = (10, 2, 24)$.

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν οι ακέραιοι x για τους οποίους οι αριθμοί $A=8x+1$ και $B=2x-3$ είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα ακεραίων.

Λύση

Έστω $A=8x+1=\alpha^2$ και $B=2x-3=\beta^2$. Τότε λαμβάνουμε ότι:

$$x=\frac{\alpha^2-1}{8}=\frac{\beta^2+3}{2} \qquad (1)$$

και

$$\alpha^2-4\beta^2=13\,. \qquad (2)$$

Από τη σχέση 92) έχουμε:

$$\alpha^2-4\beta^2=13 \Leftrightarrow (\alpha+2\beta)(\alpha-2\beta)=13$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\alpha+2\beta=13\\ \alpha-2\beta=1\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix}\alpha+2\beta=-13\\ \alpha-2\beta=-1\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix}\alpha+2\beta=1\\ \alpha-2\beta=13\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix}\alpha+2\beta=-1\\ \alpha-2\beta=-13\end{matrix}\right\}$$

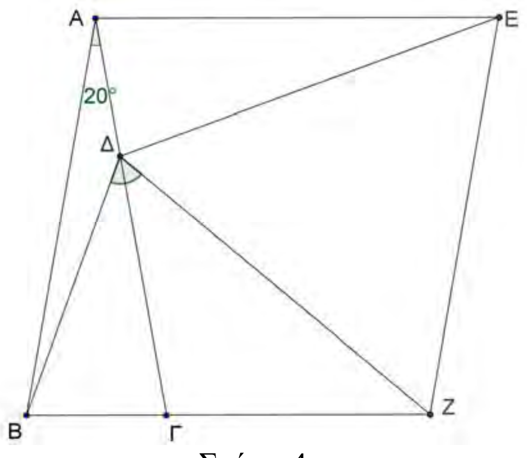
$$\Leftrightarrow (\alpha,\beta)=(7,3) \text{ ή } (\alpha,\beta)=(-7,-3) \text{ ή } (\alpha,\beta)=(7,-3) \text{ ή } (\alpha,\beta)=(-7,3).$$

Από όλα τα παραπάνω ζεύγη, από τις σχέσεις (1) προκύπτει ότι: $x=6$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}}=20^0$. Θεωρούμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{B\Gamma}$. Από το σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ τέτοιο ώστε $\mathrm{AE}\parallel\mathrm{B\Gamma}$, $\mathrm{AE}=\mathrm{AB}$ και με τα σημεία Ε και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΒΑΕΖ. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{B\hat{\Delta}Z}$.

Λύση



Σχήμα 4

Επειδή είναι $\hat{\mathrm{A}}=20^\circ$ και $\mathrm{AE}\parallel\mathrm{B\Gamma}$ έχουμε ότι:

$$\mathrm{E\hat{A}\Delta}=\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=\frac{180^\circ-20^\circ}{2}=80^\circ.$$

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΑΔ είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία $(\mathrm{AB}=\mathrm{EA},\ \mathrm{B\Gamma}=\mathrm{A\Delta})$ και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες $\left(\mathrm{A\hat{B}\Gamma}=\mathrm{E\hat{A}\Delta}=80^\circ\right)$.

Επομένως , έχουμε: $E\Delta = A\Gamma = AB$, $A\hat{E}\Delta = 20^\circ$.
Επειδή το παραλληλόγραμμο ΒΑΕΖ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες $(AE = AB)$, είναι ρόμβος, οπότε $EZ = AB = E\Delta$, δηλαδή το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισοσκελές. Επιπλέον, ισχύει: $A\hat{E}Z = \hat{B} = 80^\circ$. Επομένως $\Delta\hat{E}Z = A\hat{E}Z - A\hat{E}\Delta = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισόπλευρο.
Τότε είναι: $B\hat{Z}\Delta = B\hat{Z}E - \Delta\hat{Z}E = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο $BZ\Delta$ $(ZB = AB = Z\Delta)$ προκύπτει ότι: $B\hat{\Delta}Z = \dfrac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι:
$$\frac{9x^2+3x+1}{x} - \frac{27x}{9x^2+3x+1} \geq 6.$$
Για ποιες τιμές του x ισχύει η ισότητα;

Λύση
Επειδή είναι $x > 0$ θα είναι και $9x^2+3x+1 > 0$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι:
$$\left(9x^2+3x+1\right)^2 - 27x^2 \geq 6x\left(9x^2+3x+1\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(9x^2+3x+1\right)^2 - 6x\left(9x^2+3x+1\right) - 27x^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \left(9x^2+3x+1\right)\left(9x^2-3x+1\right) - 27x^2 \geq 0.$$
$$\Leftrightarrow \left(9x^2+1\right)^2 - 9x^2 - 27x^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \left(9x^2+1\right)^2 - 36x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(9x^2-1\right)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$
Η ισότητα ισχύει όταν $9x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$, αφού $x > 0$.

Πρόβλημα 2
Να υπολογιστούν οι ακέραιοι συντελεστές α, β, γ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, αν αυτή έχει ρίζες $x_1 = 1$ και $x_2 = \beta$.

Λύση
Αφού οι αριθμοί 1 και β είναι ρίζες της εξίσωσης, έχουμε:
$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \qquad (1)$$
$$\alpha\beta^2 + \beta^2 + \gamma = 0. \qquad (2)$$
Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε
$$\alpha\left(\beta^2-1\right) + \beta(\beta-1) = 0 \Leftrightarrow (\beta-1)(\alpha\beta+\alpha+\beta) = 0 \Leftrightarrow \beta = 1 \text{ ή } \alpha\beta+\alpha+\beta = 0.$$
Αν υποθέσουμε ότι είναι $\beta = 1$, τότε $\alpha + \gamma = -1$ και $\alpha + \gamma = 0$, αδύνατο.
Άρα είναι $\beta \neq 1$, οπότε θα είναι:
$$\alpha\beta + \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\beta}{\beta+1} = -1 + \frac{1}{\beta+1}.$$

Επειδή $\alpha \in \mathbb{Z}$ πρέπει: $\dfrac{1}{\beta+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \beta \in \{-2, 0\}$. Επομένως, έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\beta = 0$, οπότε έχουμε: $\alpha + \gamma = 0$ και $\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = \gamma = 0$, το οποίο απορρίπτεται αφού από την υπόθεση έχουμε $\alpha \neq 0$.
- $\beta = -2$, οπότε έχουμε $\alpha + \gamma = 2$ και $4\alpha + \gamma = -4 \Leftrightarrow \alpha = -2,\ \gamma = 4$. Επομένως προκύπτει η τριάδα συντελεστών $(\alpha, \beta, \gamma) = (-2, -2, 4)$.

Πρόβλημα 3
Να βρείτε όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες αριθμητική τιμή του κλάσματος

$$\frac{2x^2 + x - 4}{x^2 - x + 2}$$

είναι θετικός ακέραιος.

Λύση
Θέλουμε να βρούμε για ποιους θετικούς ακεραίους λ έχει λύση ως προς x η εξίσωση

$$\frac{2x^2 + x - 4}{x^2 - x + 2} = \lambda \Leftrightarrow (2-\lambda)x^2 + (1+\lambda)x - 2(2+\lambda) = 0.$$

Αν $\lambda = 2$ προκύπτει από την εξίσωση η λύση $x = \dfrac{8}{3}$.

Αν $\lambda \neq 2$, τότε η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει λύση ως προς x, αν, και μόνον αν, η διακρίνουσά της είναι μη αρνητική. Έχουμε

$$\Delta = (\lambda+1)^2 + 8(4 - \lambda^2) = -7\lambda^2 + 2\lambda + 33 = (-\lambda^2 + 2\lambda) + (33 - 6\lambda^2),$$

Παρατηρούμε ότι για $\lambda \geq 3$ και οι δύο παρενθέσεις είναι αρνητικές, οπότε $\Delta < 0$. Επομένως, αφού ο λ είναι θετικός ακέραιος, διάφορος του 2, έπεται ότι: $\lambda = 1$. Τότε η εξίσωση γίνεται $x^2 + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{7}$.

Άρα για $x = \dfrac{8}{3}$ το κλάσμα παίρνει την ακέραια τιμή 2 και για $x = -1 \pm \sqrt{7}$ παίρνει την ακέραια τιμή 1.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R). Ο κύκλος $C_B(B,AB)$ (με κέντρο B και ακτίνα AB), τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο K και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο Λ. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma, A\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$), τέμνει την AB στο σημείο M και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζουν τα σημεία K, Λ, M, N είναι ισοσκελές τραπέζιο.

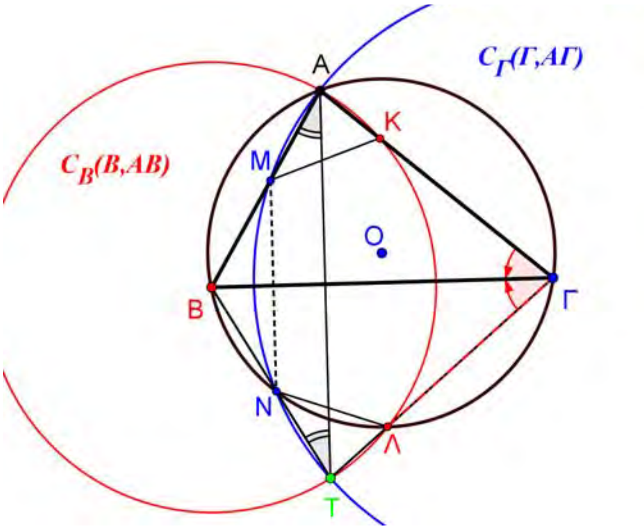
Λύση
Έστω T το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων C_A και C_B. Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία T, Λ, Γ είναι συνευθειακά.
Οι χορδές BA και $B\Lambda$ του κύκλου C είναι ίσες μεταξύ τους, διότι είναι ακτίνες του κύκλου C_A, οπότε οι εγγεγραμμένες (στο κύκλο C) γωνίες που βαίνουν στα αντίστοιχα τόξα, θα είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή

$$B\hat{\Gamma}A = B\hat{\Gamma}\Lambda = \hat{\Gamma} \qquad (1).$$

Η $B\Gamma$ είναι διάκεντρος των κύκλων C_B και C_Γ, οπότε θα είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής AT και θα διχοτομεί τη γωνία $A\hat{\Gamma}T$, δηλαδή

$$B\hat{\Gamma}A = B\hat{\Gamma}T = \hat{\Gamma} \qquad (2).$$

Άρα τα σημεία T, Λ, Γ είναι συνευθειακά.



Σχήμα 5

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία T, N, B είναι συνευθειακά.

Το τρίγωνο BAT είναι ισοσκελές ($BA = BT$). Άρα $M\hat{A}T = N\hat{T}A$, οπότε τα αντίστοιχα τόξα AN και MT (του κύκλου C_Γ) είναι ίσα μεταξύ τους.

Από την ισότητα των τόξων $AN = AM + MN$ και $MT = TN + MN$, προκύπτει η ισότητα των τόξων AM και TN. Άρα το τετράπλευρο $MATN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $MN \parallel AT$.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι το τετράπλευρο $KAT\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $K\Lambda \parallel AT$. Άρα $MN \parallel K\Lambda$ και κατά συνέπεια το $MK\Lambda N$ είναι τραπέζιο και η $B\Gamma$ είναι κοινή μεσοκάθετη των παράλληλων πλευρών του.

Τα τρίγωνα AKM και $T\Lambda N$ είναι ίσα. Άρα το $MK\Lambda N$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$2x^2 - 5x - 2x\sqrt{x^2 - 5x} = 1.$$

Λύση

Περιορισμός: $x^2 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-5) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ ή $x \geq 5$. Η εξίσωση, για $x \leq 0$ ή $x \geq 5$, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2 + \left(x^2 - 5x\right) - 2x\sqrt{x^2 - 5x} = 1 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{x^2 - 5x}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 5x} = 1 \ (\mathrm{E}_1) \text{ ή } x - \sqrt{x^2 - 5x} = -1 \ (\mathrm{E}_2)$$

- $(\mathrm{E}_1): x - \sqrt{x^2 - 5x} = 1 \ \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x^2 - 5x}, x \in (-\infty, 0] \cup [5, +\infty),\ x \geq 1$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1=x^2-5x,\ \text{με } x\geq 5 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3},\ x\geq 5,\ \text{απορρίπτεται.}$$

- $(\mathrm{E}_2): x-\sqrt{x^2-5x}=-1 \ \Leftrightarrow x+1=\sqrt{x^2-5x}, x\in(-\infty,0]\cup[5,+\infty),\ x\geq -1$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1=x^2-5x,\ \text{με } -1\leq x\leq 0 \text{ ή } x\geq 5$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{7},\ -1\leq x\leq 0 \text{ ή } x\geq 5 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{7}.$$

Πρόβλημα 2

Αν α,β ακέραιοι και ο αριθμός $\mathrm{A}=\alpha^2+2\beta$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{B}=\alpha^2+\beta$ ισούται με το άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

Λύση

Έστω ότι $\mathrm{A}=\alpha^2+2\beta=x^2$, όπου $x\in\mathbb{Z}$. Τότε $\beta=\dfrac{x^2-\alpha^2}{2}$. Επειδή $\beta\in\mathbb{Z}$, πρέπει ο αριθμητής $x^2-\alpha^2$ να είναι άρτιος ακέραιος, το οποίο συμβαίνει μόνον όταν οι ακέραιοι α και x είναι ή και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί.
Έτσι έχουμε

$$\alpha^2+\beta=\alpha^2+\frac{x^2-\alpha^2}{2}=\frac{x^2+\alpha^2}{2}=\frac{(x+\alpha)^2+(x-\alpha)^2}{4}=\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)^2,$$

όπου οι αριθμοί $\dfrac{x+\alpha}{2}$ και $\dfrac{x-\alpha}{2}$ είναι ακέραιοι, αφού οι ακέραιοι α και x είναι ή και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί.

Πρόβλημα 3

Βρείτε για ποιες τιμές της πραγματικής παραμέτρου a η εξίσωση

$$4x^4+(8+4a)x^3+\left(a^2+8a+4\right)x^2+\left(a^3+8\right)x+a^2=0$$

έχει όλες τις ρίζες της πραγματικούς αριθμούς.

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned}
&4x^4+(8+4a)x^3+\left(a^2+8a+4\right)x^2+\left(a^3+8\right)x+a^2\\
&=\left(4x^4+8x^3+a^2x^2\right)+\left(4ax^3+8ax^2+a^3x\right)+\left(4x^2+8x+a^2\right)\\
&=x^2\left(4x^2+8x+a^2\right)+ax\left(4x^2+8x+a^2\right)+\left(4x^2+8x+a^2\right)\\
&=\left(4x^2+8x+a^2\right)\left(x^2+ax+1\right).
\end{aligned}$$

Επομένως, η εξίσωση έχει όλες τις ρίζες της πραγματικούς αριθμούς, αν, και μόνον αν, και τα δύο τριώνυμα x^2+ax+1 και $4x^2+8x+a^2$ έχουν πραγματικές ρίζες

$$\Leftrightarrow a^2-4\geq 0 \ \text{ και } 64-16a^2\geq 0 \Leftrightarrow a^2-4\geq 0 \text{ και } a^2-4\leq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2=4 \Leftrightarrow a=-2 \text{ ή } a=2.$$

Πρόβλημα 4

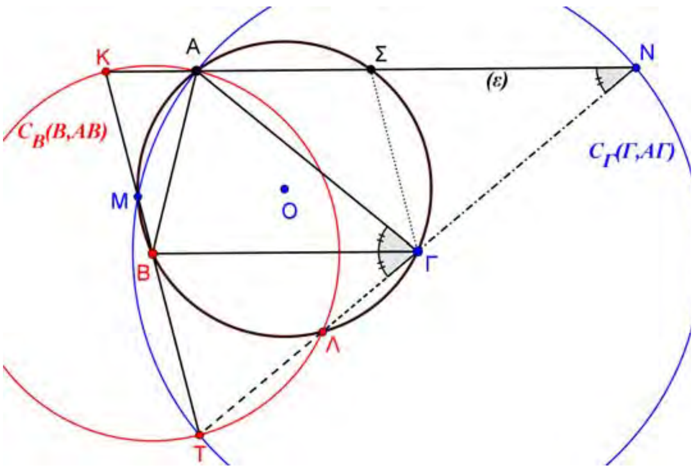
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή A και είναι παράλληλη στη πλευρά $B\Gamma$. Ο κύκλος $C_B(B,AB)$ (με κέντρο B και ακτίνα AB), τέμνει την (ε) στο σημείο K και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο Λ. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma,A\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$), τέμνει την (ε) στο σημείο N και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο M. Οι κύκλοι $C_B(B,AB)$, $C_\Gamma(\Gamma,A\Gamma)$ τέμνονται στο σημείο T και η (ε) τέμνει τον $C(O,R)$ στο σημείο Σ.

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ,Λ,N,T είναι συνευθειακά.

(β) Να αποδείξετε ότι οι $T\Sigma, K\Gamma, NB$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση

(α) Το τρίγωνο ΓAN είναι ισοσκελές ($\Gamma A = \Gamma N$ ως ακτίνες του κύκλου C_Γ). Άρα $A\hat{N}\Gamma = N\hat{A}\Gamma$.



Σχήμα 6

Από την παραλληλία $(\varepsilon) // B\Gamma$ (με τέμνουσα την ΑΓ) έχουμε: $N\hat{A}\Gamma = A\hat{\Gamma}B = \hat{\Gamma}$.

Από τις προηγούμενες ισότητες γωνιών, προκύπτει: $A\hat{N}\Gamma = \hat{\Gamma} \quad (1)$.

Από την ισότητα των χορδών AB και $B\Lambda$ του κύκλου $C(O,R)$ (οι χορδές AB και $B\Lambda$ είναι ακτίνες του κύκλου C_B) έχουμε: $A\hat{\Gamma}B = B\hat{\Gamma}\Lambda = \hat{\Gamma} \quad (2)$.

Από τις σχέσεις *(1)* και *(2)* συμπεραίνουμε ότι: $A\hat{N}\Gamma = B\hat{\Gamma}\Lambda = \hat{\Gamma}$, δηλαδή τα σημεία Γ, N, Λ είναι συνευθειακά.

Η διάκεντρος $B\Gamma$ (των κύκλων C_B και C_Γ) είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους AT. Άρα $A\hat{\Gamma}B = B\hat{\Gamma}T = \hat{\Gamma}$. Από την ισότητα των γωνιών $B\hat{\Gamma}T$ και $B\hat{\Gamma}\Lambda$, προκύπτει ότι τα σημεία Γ, T, Λ είναι συνευθειακά, οπότε σε συνδυασμό με το προηγούμενο συμπέρασμα έπεται ότι τα σημεία Γ,Λ,N,T είναι συνευθειακά.

(β) Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία B,K,M,T είναι συνευθειακά, οπότε τα σημεία B και Γ είναι μέσα των πλευρών TK και TN, αντίστοιχα, του τριγώνου TKN.

Θα αποδείξουμε ότι το σημείο Σ είναι το μέσο της πλευράς KN (οπότε οι $T\Sigma, K\Gamma, NB$ θα συντρέχουν στο βαρύκεντρο του τριγώνου TKN).

Πράγματι, το τετράπλευρο $ΑΒΓΣ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο εγγεγραμμένο στον κύκλο $C(O,R)$, οπότε ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$Γ\hat{Σ}Ν = Κ\hat{Α}Β$ (από το ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΣ$)

$Κ\hat{Α}Β = Β\hat{Κ}Α$ (από το ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΚ$).

Άρα η $ΣΓ$ είναι παράλληλη προς την $ΚΒ$, δηλαδή το $Σ$ είναι το μέσο της $ΚΝ$.

Παρατήρηση

Δεν είναι απαραίτητο (για την απόδειξη του δευτέρου ερωτήματος) να αποδείξουμε ότι το σημείο $Λ$ ανήκει στην ίδια ευθεία με τα σημεία $Γ,Ν,Τ$.

Χρειάζεται όμως για να αποδείξουμε ότι και $ΑΤ,ΝΜ,ΚΛ$ συντρέχουν και να συμπεράνουμε ότι τα σημεία ο κύκλος $C(O,R)$ είναι ο κύκλος Euler του τριγώνου $ΤΚΝ$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{A}=\frac{13}{9}-\frac{74}{9}\cdot\frac{3}{37}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}:8$

Πρόβλημα 2
Ένας έμπορος συλλεκτικών αντικειμένων αγόρασε δύο παλαιά ραδιόφωνα Α κα Β αντί 200 ευρώ και στη συνέχεια τα πούλησε με συνολικό κέρδος 40% πάνω στην τιμή της αγοράς τους. Αν το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε με κέρδος 25% και το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε με κέρδος 50%, πάνω στην τιμή της αγοράς τους, να βρείτε πόσο πλήρωσε ο έμπορος για να αγοράσει το καθένα από τα ραδιόφωνα Α και Β.

Πρόλημα 3
Χωρίς την εκτέλεση των διαιρέσεων αριθμητή με παρανομαστή, να βρείτε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο από τους παρακάτω αριθμούς:

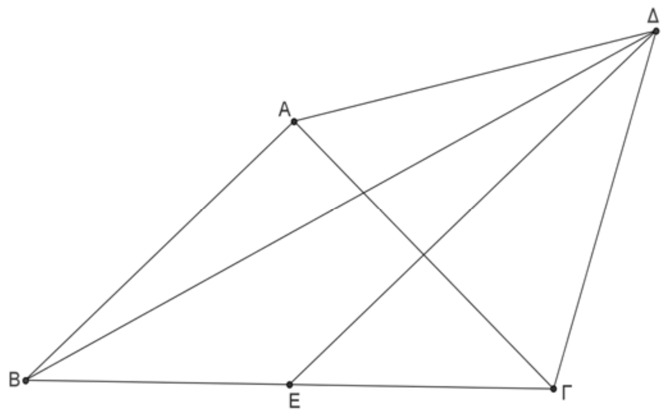
$$\frac{1003}{2015},\frac{1007}{2019},\frac{1009}{2021},\frac{997}{2009},\frac{1011}{2023},\frac{999}{2011},\frac{1001}{2013},\frac{1005}{2017}.$$

Πρόβλημα 4

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\hat{\mathrm{A}}=90^\circ$ και $\mathrm{AB}=\mathrm{A}\Gamma$. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο και το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευρά ΒΓ.

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

(β) Βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{E}$.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=\dfrac{x^4-1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)}-\dfrac{6}{13}$, αν $x=\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$.

Πρόβλημα 2

Το πλήθος των μαθητών σε ένα Γυμνάσιο είναι τουλάχιστον 170 και το πολύ 230. Αν γνωρίζουμε ότι ακριβώς το 4% των μαθητών παίζουν βιολί και ότι το $\dfrac{1}{3}$ από αυτούς που παίζουν βιολί, παίζει και πιάνο, να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ πλευράς α. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ κατά τμήμα $\Gamma\Delta=\dfrac{\alpha}{2}$ και στη συνέχεια προεκτείνουμε την πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$ κατά τμήμα $\Gamma\mathrm{Z}=\mathrm{A}\Delta$. Αν $\mathrm{E}\left(\mathrm{AB}\Delta\right)$ και $\mathrm{E}\left(\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z}\right)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{AB}\Delta$ και του τετραπλεύρου $\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z}$, αντίστοιχα, να βρείτε το λόγο $\dfrac{\mathrm{E}\left(\mathrm{AB}\Delta\right)}{\mathrm{E}\left(\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z}\right)}$.

Πρόβλημα 4

Ένα διαμάντι Δ κόβεται σε δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2 με βάρη $\beta\left(\Delta_1\right)$ και $\beta\left(\Delta_2\right)$, αντίστοιχα, και λόγο βαρών $\dfrac{\beta\left(\Delta_1\right)}{\beta\left(\Delta_2\right)}=\dfrac{3}{7}$. Δίνεται ότι η αξία ενός διαμαντιού είναι ευθέως ανάλογη προς το τετράγωνο του βάρους του.
Να προσδιορίσετε πόσο επί τις εκατό μειώθηκε η αξία του διαμαντιού Δ μετά την κοπή του στα δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να βρείτε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{2015^3+2013^3}{2014^2+4029^2}+\frac{2016^3+2012^3-18\cdot 2014}{2014^2+4027^2}-\frac{4\cdot 2014\cdot\left(2014^2+3\right)\left(5\cdot 2014^2+1\right)}{\left(5\cdot 2014^2+1\right)^2-\left(4\cdot 2014\right)^2}$$

.

Πρόβλημα 2
Ένα βιβλίο μαθηματικών κυκλοφορεί σε 2 τόμους Α και Β. 100 αντίτυπα του τόμου Α και 120 αντίτυπα του τόμου Β κοστίζουν συνολικά 4000 ευρώ. Ένα βιβλιοπωλείο πούλησε 50 αντίτυπα του τόμου Α με έκπτωση 10% και 60 αντίτυπα του τόμου Β με έκπτωση 20% και εισέπραξε συνολικά 1680 ευρώ. Να προσδιορίσετε την τιμή πώλησης του ενός βιβλίου από κάθε τόμο.

Πρόβλημα 3
Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\left(x^2+y^2+xy\right)^2 \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=2\left[\left(x^2+y^2+2xy\right)^2+x^4+y^4\right],$$

όπου x, y είναι ρητοί.

(α) Να γράψετε την παράσταση Α ως πολυώνυμο των μεταβλητών x, y διατεταγμένο ως προς τις φθίνουσες δυνάμεις του x.

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{\mathrm{B}}$ είναι ρητός, για οποιαδήποτε τιμή των ρητών αριθμών x, y.

Πρόβλημα 4
Θεωρούμε τετράπλευρο $ABCD$ με τη γωνία $\hat{A}=100^o$ και $\hat{D}=40^o$. Αν DB είναι διχοτόμος της γωνίας $C\hat{D}A$ και $DB=DC$, να υπολογισθεί το μέτρο της γωνίας $C\hat{A}B$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Έστω k ένας ακέραιος και x ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

$$\mathrm{A} = \frac{x^k + 1}{x^{k+1} + 1} \quad \text{και} \quad \mathrm{B} = \frac{x^{k+1} + 1}{x^{k+2} + 1}.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη ακεραίων (x, y) που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$2x^2 - 10xy + 13y^2 + 2|x - y| = 5$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $\mathrm{AB} < \mathrm{AC} < \mathrm{BC}$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) (με κέντρο O και ακτίνα R) και έστω D, E τα αντιδιαμετρικά σημεία των B, C, αντίστοιχα (ως προς τον κύκλο (c)). Ο κύκλος (c_1) (με κέντρο A και ακτίνα AE), τέμνει την AC στο σημείο K. Ο κύκλος (c_2) (με κέντρο A και ακτίνα AD), τέμνει την προέκταση της AB (προς το μέρος του A) στο σημείο L. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες EK και DL τέμνονται επάνω στο κύκλο (c).

Πρόβλημα 4

Σε έναν διαγωνισμό που η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 100 έλαβαν μέρος x μαθητές. Οκτώ μαθητές πήραν βαθμό 100, ενώ όλοι οι υπόλοιποι πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 70. Αν ο μέσος όρος των βαθμών των μαθητών ήταν 78, να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του πλήθους των μαθητών.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
1 Νοεμβρίου 2014

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = x^2 - (3\alpha - 5)x + 186,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες η παραβολή τέμνει τον άξονα των x σε δύο σημεία διαφορετικά μεταξύ τους με ακέραιες συντεταγμένες.

Πρόβλημα 2
Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα :

$$\left\{\begin{matrix} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{matrix}\right\}$$

Πρόβλημα 3
Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ (με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{B\Gamma}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$. Η διχοτόμος $\mathrm{B\Delta}$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο $C(O,R)$, στο σημείο Z. Έστω E τυχόν σημείο του τμήματος $\Delta\Gamma$. Η ευθεία BE τέμνει τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο H. Οι ευθείες $\mathrm{A\Gamma}$ και ZH τέμνονται στο σημείο Θ. Επίσης, η ευθεία ZE τέμνει τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο K. Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα $\mathrm{B\Delta H\Theta}$, $\mathrm{B\Delta EK}$ και $\mathrm{\Delta Z\Theta K}$ είναι εγγράψιμα.

Πρόβλημα 4
Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς n, που έχουν ακριβώς τέσσερις θετικούς διαιρέτες $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ και ικανοποιούν τη σχέση:

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640.$$

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{A}=\frac{13}{9}-\frac{74}{9}\cdot\frac{3}{37}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}:8$

Λύση

$$\mathrm{A}=\frac{13}{9}-\frac{74}{9}\cdot\frac{3}{37}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}:8=\frac{13}{9}-\frac{74\cdot 3}{9\cdot 37}+\left(\frac{4}{3}\right)^{2}:8$$
$$=\frac{13}{9}-\frac{2}{3}+\frac{16}{9}:8=\frac{13}{9}-\frac{2}{3}+\frac{16:8}{9}=\frac{13}{9}-\frac{6}{9}+\frac{2}{9}=\frac{9}{9}=1.$$

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος συλλεκτικών αντικειμένων αγόρασε δύο παλαιά ραδιόφωνα Α κα Β αντί 200 ευρώ και στη συνέχεια τα πούλησε με συνολικό κέρδος 40% πάνω στην τιμή της αγοράς τους. Αν το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε με κέρδος 25% και το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε με κέρδος 50%, πάνω στην τιμή της αγοράς τους, να βρείτε πόσο πλήρωσε ο έμπορος για να αγοράσει το καθένα από τα ραδιόφωνα Α και Β.

Λύση

Έστω ότι ο έμπορος αγόρασε x ευρώ το ραδιόφωνο Α. Τότε η τιμή αγοράς του ραδιοφώνου Β ήταν $200-x$ ευρώ. Τότε το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε $x+\frac{25x}{100}=\frac{125x}{100}$ ευρώ, ενώ το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε $\left(200-x\right)\cdot\frac{150}{100}$ ευρώ. Συνολικά τα δύο ραδιόφωνα πουλήθηκαν $200\cdot\frac{140}{100}$ ευρώ, δηλαδή 280 ευρώ.

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{125x}{100}+\left(200-x\right)\cdot\frac{150}{100}=200\cdot\frac{140}{100}\Leftrightarrow 12,5x-15x+3000=2800$$
$$\Leftrightarrow 2,5x=200\Leftrightarrow x=80.$$

Άρα ο έμπορος αγόρασε 80 ευρώ το ραδιόφωνο Α και $200-80=120$ ευρώ το ραδιόφωνο Β.

Πρόβλημα 3

Χωρίς την εκτέλεση διαιρέσεων αριθμητή με παρανομαστή, να βρείτε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο από τους παρακάτω αριθμούς:

$$\frac{1003}{2015}, \frac{1007}{2019}, \frac{1009}{2021}, \frac{997}{2009}, \frac{1011}{2023}, \frac{999}{2011}, \frac{1001}{2013}, \frac{1005}{2017}.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα δεδομένα κλάσματα την ίδια διαφορά:

(Παρανομαστής) - (Αριθμητής) = 1012.

Έτσι γράφουμε:

$$\frac{1003}{2015}=1-\frac{1012}{2015}, \frac{1007}{2019}=1-\frac{1012}{2019}, \frac{1009}{2021}=1-\frac{1012}{2021}, \frac{997}{2009}=1-\frac{1012}{2009}$$

$$\frac{1011}{2023}=1-\frac{1012}{2023}, \frac{999}{2011}=1-\frac{1012}{2011}, \frac{1001}{2013}=1-\frac{1012}{2013}, \frac{1005}{2017}=1-\frac{1012}{2017}$$

Γνωρίζουμε ότι μεταξύ ρητών αριθμών με τον ίδιο αριθμητή, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μικρότερο παρανομαστή, οπότε έχουμε:

$$\frac{2012}{2009}>\frac{2012}{2011}>\frac{2012}{2013}>\frac{2012}{2015}>\frac{2012}{2017}>\frac{2012}{2019}>\frac{2012}{2021}>\frac{2012}{2023}$$

Άρα έχουμε:

$$1-\frac{2012}{2009}<1-\frac{2012}{2011}<1-\frac{2012}{2013}<1-\frac{2012}{2015}<1-\frac{2012}{2017}<1-\frac{2012}{2019}<1-\frac{2012}{2021}<1-\frac{2012}{2023},$$

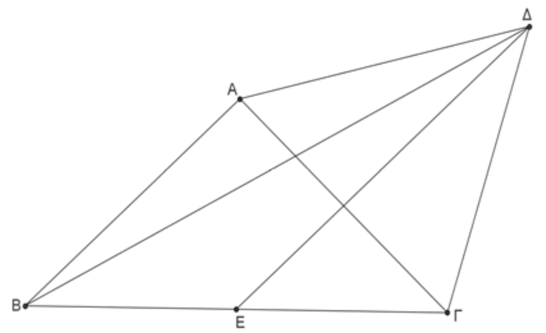
οπότε ο αριθμός $\frac{1011}{2023}$ είναι ο μεγαλύτερος από τους δεδομένους ρητούς αριθμούς, ενώ ο $\frac{997}{2009}$ είναι ο μικρότερος.

Πρόβλημα 4

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\hat{A}=90^\circ$ και $AB=A\Gamma$. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο και το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευρά ΒΓ.

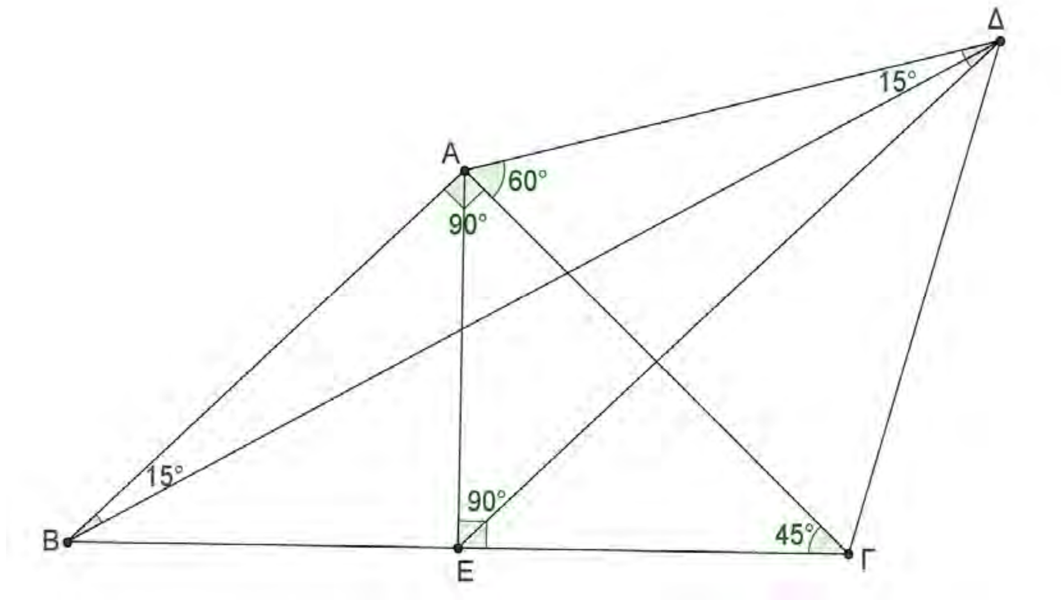
(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

(β) Βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $B\hat{\Delta}E$.



Σχήμα 1

Λύση



Σχήμα 2

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές θα έχει $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$ και η διάμεσός του ΑΕ είναι και ύψος του, οπότε το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο στο Ε με μία γωνία του 45°. Επομένως θα έχει $\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 180^\circ - \left(90^\circ + 45^\circ\right) = 45^\circ$, οπότε αυτό είναι ισοσκελές με $\mathrm{EA} = \mathrm{E}\Gamma$.

Επιπλέον, από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε ότι: $\Delta\mathrm{A} = \Delta\Gamma$. Επομένως τα σημεία Δ και Ε ισαπέχουν από τα άκρα Α και Γ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ, οπότε η ευθεία ΔΕ είναι η μεσοκάθετη του ΑΓ.

(β) Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ λαμβάνουμε τις ισότητες $\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma = \mathrm{A}\Delta$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές. Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 60^\circ$, οπότε $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma + \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$. Επειδή ΑΒΔ ισοσκελές τρίγωνο έπεται ότι:

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ .$$

Επειδή οι ευθείες ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλες, ως κάθετες προς την ίδια ευθεία ΑΓ, που τις τέμνει η ευθεία ΒΔ, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες του ίσες, οπότε:

$$\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = 15^\circ$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = \dfrac{x^4 - 1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)} - \dfrac{6}{13}$, αν $x = \left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$.

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{A} = \frac{x^4 - 1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)} - \frac{6}{13} = \frac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)} - \frac{6}{13} = \frac{x^2-1}{x^2-3} - \frac{6}{13},$$

οπότε για $x=\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}=\left(-\frac{4}{3}\right)^{2}=\frac{16}{9}$ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{A}=\frac{x^2-1}{x^2-3}-\frac{6}{13}=\frac{\left(\frac{16}{9}\right)^2-1}{\left(\frac{16}{9}\right)^2-3}-\frac{6}{13}=\frac{\frac{256}{81}-1}{\frac{256}{81}-3}-\frac{6}{13}=\frac{175}{13}-\frac{6}{13}=\frac{169}{13}=13.$$

Πρόβλημα 2

Το πλήθος των μαθητών σε ένα Γυμνάσιο είναι τουλάχιστον 170 και το πολύ 230. Αν γνωρίζουμε ότι ακριβώς το 4% των μαθητών παίζουν βιολί και ότι το $\frac{1}{3}$ από αυτούς που παίζουν βιολί, παίζει και πιάνο, να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου.

Λύση

Έστω n το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου. Τότε το πλήθος των μαθητών που παίζει βιολί είναι $\frac{4n}{100}$. Το πλήθος των μαθητών που παίζει και βιολί και πιάνο είναι

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{4n}{100}=\frac{4n}{300}=\frac{n}{75}.$$

Επειδή ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου είναι θετικός ακέραιος, πρέπει ο αριθμητής n να είναι πολλαπλάσιο του παρανομαστή, δηλαδή πρέπει $n=75k$, όπου k θετικός ακέραιος.. Έτσι, από την υπόθεση $170\le n\le 230$, έχουμε:

$$170\le n=75k\le 230 \Leftrightarrow \frac{170}{75}\le k\le\frac{230}{75}\Leftrightarrow 2+\frac{20}{75}\le k\le 3+\frac{5}{75}\Leftrightarrow k=3.$$

Επομένως έχουμε $n=75\cdot 3=225$ μαθητές.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ πλευρά α. Προεκτείνουμε την πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta=\frac{\alpha}{2}$ και στη συνέχεια προεκτείνουμε την πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$ κατά τμήμα $\Gamma\mathrm{Z}=\mathrm{A}\Delta$. Αν $\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta)$ και $\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z})$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{AB}\Delta$ και του τετραπλεύρου $\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z}$, αντίστοιχα, να βρείτε το λόγο $\frac{\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta)}{\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z})}$.

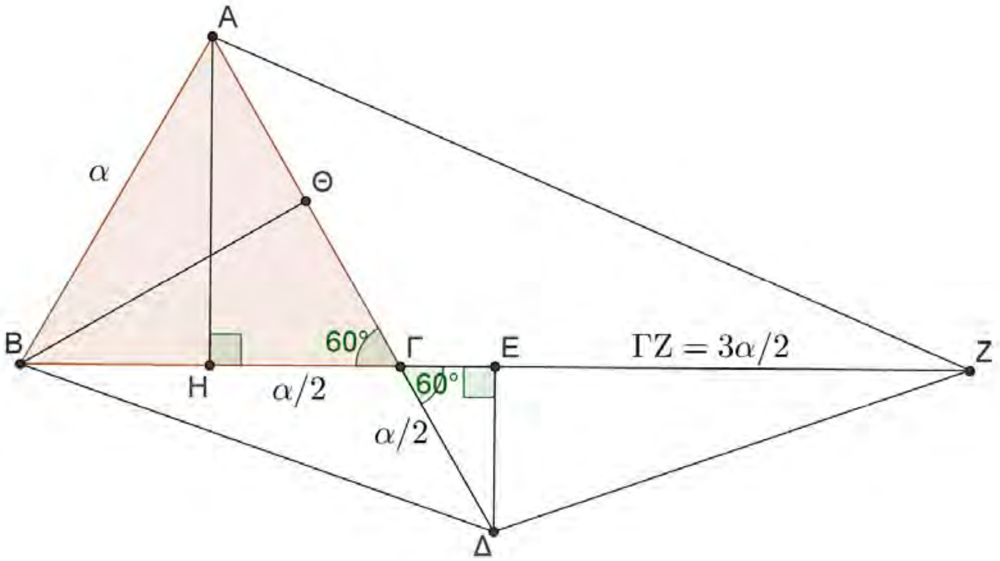
Λύση

Το τρίγωνο $\mathrm{AB}\Delta$ έχει βάση $\mathrm{A}\Delta=\frac{3\alpha}{2}$ και ύψος

$$\mathrm{B}\Theta=\mathrm{AH}=\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3\alpha^2}{4}}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα είναι:

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta)=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{A}\Delta\cdot\mathrm{B}\Theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}.$$



Σχήμα 3

Για το τετράπλευρο ΑΒΔΖ έχουμε: $\mathrm{E}(\mathrm{AB\Delta Z}) = \mathrm{E}(\mathrm{ABZ}) + \mathrm{E}(\mathrm{B\Delta Z})$.

Στο τρίγωνο ΑΒΖ έχουμε βάση $\mathrm{BZ} = \alpha + \frac{3\alpha}{2} = \frac{5\alpha}{2}$ και ύψος $\mathrm{AH} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, οπότε έχει εμβαδό

$$\mathrm{E}(\mathrm{ABZ}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8}.$$

Στο τρίγωνο ΒΔΖ έχουμε βάση $\mathrm{BZ} = \frac{5\alpha}{2}$ και ύψος ΔΕ το οποίο μπορεί να υπολογιστεί από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΓ και ΓΕΔ ως εξής:

$$\frac{\mathrm{E\Delta}}{\mathrm{AH}} = \frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{A\Gamma}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{E\Delta}}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\alpha} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathrm{E\Delta} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.$$

Διαφορετικά, μπορούμε να έχουμε: $\mathrm{E\Delta} = \Gamma\Delta\,\eta\mu 60^\circ = \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}$.

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{E}(\mathrm{B\Delta Z}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16}.$$

Επομένως έχουμε:

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB\Delta Z}) = \mathrm{E}(\mathrm{ABZ}) + \mathrm{E}(\mathrm{B\Delta Z}) = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8} + \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16} = \frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16},$$

οπότε θα είναι

$$\frac{\mathrm{E}(\mathrm{AB\Delta})}{\mathrm{E}(\mathrm{AB\Delta Z})} = \frac{\frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}}{\frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16}} = \frac{6\sqrt{3}\alpha^2}{15\sqrt{3}\alpha^2} = \frac{2}{5}.$$

Πρόβλημα 4

Ένα διαμάντι Δ κόβεται σε δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2 με βάρη $\beta(\Delta_1)$ και $\beta(\Delta_2)$, αντίστοιχα, και λόγο βαρών $\dfrac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)}=\dfrac{3}{7}$. Δίνεται ότι η αξία ενός διαμαντιού είναι ευθέως ανάλογη προς το τετράγωνο του βάρους του.

Να προσδιορίσετε πόσο επί τις εκατό μειώθηκε η αξία του διαμαντιού Δ μετά την κοπή του στα δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2.

Λύση

Έστω $\alpha(\Delta)$, $\alpha(\Delta_1)$ και $\alpha(\Delta_2)$ η αξία των διαμαντιών Δ, Δ_1 και Δ_2, αντίστοιχα. Τότε έχουμε

$$\frac{\alpha(\Delta)}{\beta(\Delta)^2}=\frac{\alpha(\Delta_1)}{\beta(\Delta_1)^2}=\frac{\alpha(\Delta_2)}{\beta(\Delta_2)^2}=\lambda$$

$$\Rightarrow \alpha(\Delta)=\lambda\beta(\Delta)^2,\ \alpha(\Delta_1)=\lambda\beta(\Delta_1)^2,\ \alpha(\Delta_2)=\lambda\beta(\Delta_2)^2$$

Άρα έχουμε

$$\frac{\alpha(\Delta_1)+\alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)}=\frac{\lambda\beta(\Delta_1)^2+\lambda\beta(\Delta_2)^2}{\lambda\beta(\Delta)^2}=\frac{\beta(\Delta_1)^2+\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2}=\frac{\beta(\Delta_1)^2}{\beta(\Delta)^2}+\frac{\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} \quad (1)$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε:

$$\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)}=\frac{3}{7}\Rightarrow\frac{\beta(\Delta_1)}{3}=\frac{\beta(\Delta_2)}{7}=\frac{\beta(\Delta_1)+\beta(\Delta_2)}{3+7}=\frac{\beta(\Delta)}{10}$$

$$\Rightarrow\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)}=\frac{3}{10},\ \frac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)}=\frac{7}{10} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\frac{\alpha(\Delta_1)+\alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)}=\frac{\beta(\Delta_1)^2}{\beta(\Delta)^2}+\frac{\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2}=\left(\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)}\right)^2+\left(\frac{\beta(\Delta)}{\beta(\Delta)}\right)^2=\frac{9}{100}+\frac{49}{100}=\frac{58}{100}.$$

Επομένως η αξία των δύο κομματιών του διαμαντιού ισούται με το 58% της αρχικής αξίας του, δηλαδή η αξία του μειώθηκε κατά 100-58 = 42%.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{2015^3+2013^3}{2014^2+4029^2}+\frac{2016^3+2012^3-18\cdot 2014}{2014^2+4027^2}-\frac{4\cdot 2014\cdot\left(2014^2+3\right)\left(5\cdot 2014^2+1\right)}{\left(5\cdot 2014^2+1\right)^2-\left(4\cdot 2014\right)^2}.$$

Λύση

Επειδή οι εμφανιζόμενες πράξεις είναι πολλές και χρονοβόρες, προσπαθούμε με κατάλληλη αντικατάσταση, να μετασχηματίσουμε την αριθμητική παράσταση σε αλγεβρική. Η παράσταση που προκύπτει μετά την απλοποίησή της οδηγεί τελικά σε απλό υπολογισμό της δεδομένης αριθμητικής παράστασης. Έτσι, αν θέσουμε $x=2014$, η παράσταση γίνεται:

$$\mathrm{A}=\frac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x^2+(2x+1)^2}+\frac{(x+2)^3+(x-2)^3-18x}{x^2+(2x-1)^2}-\frac{4x\left(x^2+3\right)\left(5x^2+1\right)}{\left(5x^2+1\right)^2-(4x)^2}$$

$$=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{5x^2+4x+1}+\frac{2x\left(x^2+3\right)}{5x^2-4x+1}-\frac{4x\left(x^2+3\right)\left(5x^2+1\right)}{\left(5x^2+4x+1\right)\left(5x^2-4x+1\right)}$$

$$=2x\left(x^2+3\right)\left[\frac{1}{5x^2+4x+1}+\frac{1}{5x^2-4x+1}-\frac{2\left(5x^2+1\right)}{\left(5x^2+4x+1\right)\left(5x^2-4x+1\right)}\right]$$

$$=2x\left(x^2+3\right)\left(\frac{5x^2-4x+1+5x^2+4x+1-10x^2-2}{\left(5x^2+4x+1\right)\left(5x^2-4x+1\right)}\right)=2x\left(x^2+3\right)\cdot 0=0.$$

Άρα είναι

$$\mathrm{A}=\frac{2015^3+2013^3}{2014^2+4029^2}+\frac{2016^3-2012^3-18\cdot 2014}{2014^2+4027^2}-\frac{4\cdot 2014\cdot\left(2014^2+3\right)\left(5\cdot 2014^2+1\right)}{\left(5\cdot 2014^2+1\right)^2-(4\cdot 2014)^2}=0$$

Πρόβλημα 2

Ένα βιβλίο μαθηματικών κυκλοφορεί σε 2 τόμους Α και Β. 100 αντίτυπα του τόμου Α και 120 αντίτυπα του τόμου Β κοστίζουν συνολικά 4000 ευρώ. Ένα βιβλιοπωλείο πούλησε 50 αντίτυπα του τόμου Α με έκπτωση 10% και 60 αντίτυπα του τόμου Β με έκπτωση 20% και εισέπραξε συνολικά 1680 ευρώ. Να προσδιορίσετε την τιμή πώλησης του ενός βιβλίου από κάθε τόμο.

Λύση

Έστω ότι η τιμή πώλησης του τόμου Α είναι x ευρώ και τόμου Β είναι y ευρώ. Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$100x+120y=4000 \Leftrightarrow 5x+6y=200 \qquad (1)$$

$$50\cdot\frac{90x}{100}+60\cdot\frac{80y}{100}=1680 \Leftrightarrow 45x+48y=1680 \qquad (2)$$

Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\left\{\begin{matrix}5x+6y=200\\45x+48y=1680\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}45x+54y=1800\\45x+48y=1680\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}6y=120\\45x+48y=1680\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}y=20\\x=\dfrac{1680-48y}{45}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}y=20\\x=16\end{matrix}\right\}.$$

Άρα η τιμή πώλησης του τόμου Α ήταν 16 ευρώ και του τόμου Β ήταν 20 ευρώ.

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\left(x^2+y^2+xy\right)^2 \quad\text{και}\quad \mathrm{B}=2\left[\left(x^2+y^2+2xy\right)^2+x^4+y^4\right],$$

όπου x, y είναι ρητοί.

(α) Να γράψετε την παράσταση Α ως πολυώνυμο των μεταβλητών x, y διατεταγμένο ως προς τις φθίνουσες δυνάμεις του x.

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{\mathrm{B}}$ είναι ρητός για οποιαδήποτε τιμή των ρητών αριθμών x, y.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{A} &= \left(x^2+y^2+xy\right)^2 = \left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2+xy\right)\\ &= x^4+y^4+x^2y^2+2x^2y^2+2x^3y+2xy^3\\ &= x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4.\end{aligned}$$

Διαφορετικά μπορούμε να έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathrm{A} &= \left(x^2+y^2+xy\right)^2 = \left(x^2+y^2\right)^2+\left(xy\right)^2+2\left(x^2+y^2\right)xy\\ &= x^4+y^4+2x^2y^2+x^2y^2+2x^3y+2xy^3\\ &= x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4.\end{aligned}$$

(β) Έχουμε, όπως στο προηγούμενο ερώτημα, ότι:

$$\left(x^2+y^2+2xy\right)^2 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{B} &= 2\left[\left(x^2+y^2+2xy\right)^2+x^4+y^4\right] = 2\left[x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4+x^4+y^4\right]\\ &= 2\left[2x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+2y^4\right] = 4\left(x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4\right)\\ &= 4\left(x^2+y^2+xy\right)^2,\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α)

Άρα έχουμε

$$\sqrt{\mathrm{B}} = \left|2\left(x^2+xy+y^2\right)\right| = 2\left(x^2+xy+y^2\right)\in\mathbb{Q},$$

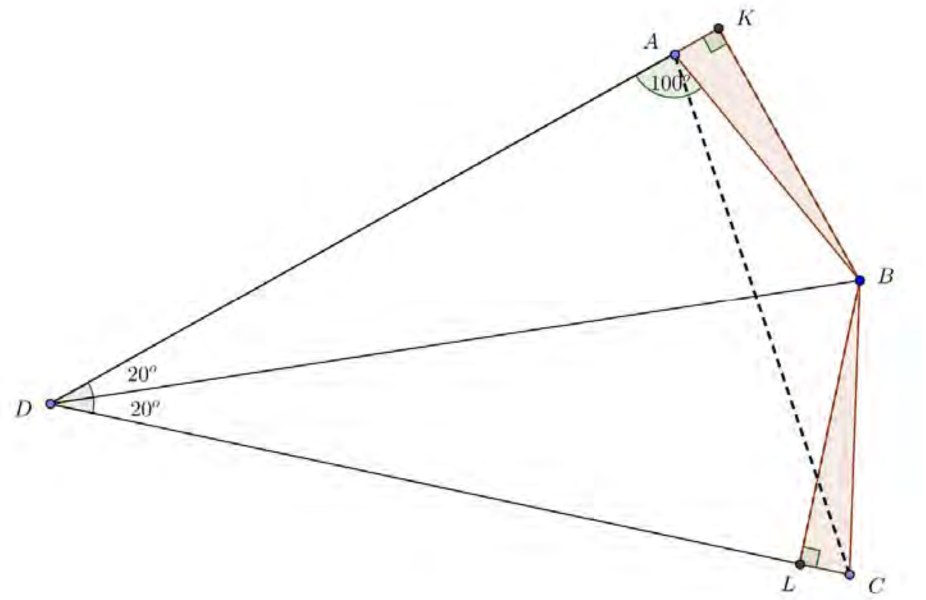
αφού οι αριθμοί x, y είναι ρητοί και $x^2+xy+y^2 = \left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}\geq 0.$

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τετράπλευρο $ABCD$ με τη γωνία $\hat{A}=100^\circ$ και $\hat{D}=40^\circ$. Αν DB είναι διχοτόμος της γωνίας $C\hat{D}A$ και $DB=DC$, να υπολογισθεί το μέτρο της γωνίας $C\hat{A}B$.

Λύση

Εφόσον η DB είναι διχοτόμος της γωνίας $C\hat{D}A$, θα έχουμε ότι $C\hat{D}B = B\hat{D}A = 20^\circ$ και από το ισοσκελές τρίγωνο DBC θα έχουμε ότι $D\hat{B}C = D\hat{C}B = 80^\circ$ και επιπλέον έχουμε ότι $D\hat{B}A = 180^\circ - \left(100^\circ+20^\circ\right) = 60^\circ$. Αν τώρα φέρουμε τις προβολές BK και BL, αφού το B είναι σημείο της διχοτόμου, θα έχουμε ότι $BK = BL$ και $B\hat{A}K = 80^\circ$, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα BAK και BLC είναι ίσα, που σημαίνει ότι $BA = BC$. Επομένως, από το ισοσκελές τρίγωνο BAC παίρνουμε ότι: $C\hat{A}B = 20^\circ$.



Σχήμα 4

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Έστω k ένας ακέραιος και x ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

$$\mathrm{A}=\frac{x^k+1}{x^{k+1}+1} \text{ και } \mathrm{B}=\frac{x^{k+1}+1}{x^{k+2}+1}.$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Θεωρούμε τη διαφορά των δύο αριθμών και έχουμε:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\frac{x^k+1}{x^{k+1}+1}-\frac{x^{k+1}+1}{x^{k+2}+1}=\frac{\left(x^k+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)-\left(x^{k+1}+1\right)^2}{\left(x^{k+1}+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)}$$

$$=\frac{x^{k+2}+x^k+1-2x^{k+1}-1}{\left(x^{k+1}+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)}=\frac{x^{k+2}+x^k-2x^{k+1}}{\left(x^{k+1}+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)}=\frac{x^k\left(x-1\right)^2}{\left(x^{k+1}+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)},$$

οπότε, αφού $x>0$ και k ακέραιος, έχουμε:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\left\{\begin{array}{l} 0, \quad \text{αν } x=1 \\ >0, \text{ αν } 0<x\neq 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}=\mathrm{B}, \quad \text{αν } x=1 \\ \mathrm{A}>\mathrm{B}, \text{αν } 0<x\neq 1 \end{array}\right\}.$$

2^{ος} τρόπος

Έχουμε ότι

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{(x^k+1)(x^{k+2}+1)}{(x^{k+1}+1)^2}=\frac{x^{2k+2}+x^k+x^{k+2}+1}{(x^{k+1}+1)^2}$$

$$=1+\frac{x^{k+2}+x^k-2x^{k+1}}{(x^{k+1}+1)^2}=1+\frac{x^k(x-1)^2}{(x^{k+1}+1)^2}\geq 1.$$

Η ισότητα στην τελευταία ισχύει, αν, και μόνο αν, $x=1$.

Επομένως έχουμε ότι:

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}, \text{ αν } x=1 \text{ και } \mathrm{A}>\mathrm{B}, \text{ αν } 0<x\neq 1.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη ακεραίων (x, y) που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$2x^2 - 10xy + 13y^2 + 2|x - y| = 5$$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$2x^2 - 10xy + 13y^2 = 5 - 2|x - y| \qquad (1)$$

Η παράσταση του πρώτου μέλους γράφεται:

$$2x^2 - 10xy + 13y^2 = 2\left(x^2 - 5xy + \frac{25y^2}{4}\right) + 13y^2 - \frac{25y^2}{2} = 2\left(x - \frac{5y}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{2} \geq 0,$$

όπου η ισότητα ισχύει αν, και μόνον αν: $x - \frac{5y}{2} = y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

Επομένως για το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (1) πρέπει να ισχύει:

$$5 - 2|x - y| \geq 0 \Leftrightarrow |x - y| \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow |x - y| \in \{0, 1, 2\},$$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

1. $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$. Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$2x^2 - 10x^2 + 13x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1,$$

οπότε προκύπτουν οι λύσεις: $(x, y) = (-1, -1)$ ή $(x, y) = (1, 1)$.

2. $|x - y| = 1 \Leftrightarrow x - y = 1$ ή $x - y = -1 \Leftrightarrow x = y + 1$ ή $x = y - 1$.

Για $x = y \pm 1$ η εξίσωση γίνεται: $2(y \pm 1)^2 - 10(y \pm 1)y + 13y^2 = 3$

$\Leftrightarrow 5y^2 \mp 6y - 1 = 0$, η οποία δεν έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι $\Delta = 56$

3. $|x - y| = 2 \Leftrightarrow x - y = 2$ ή $x - y = -2 \Leftrightarrow x = y + 2$ ή $x = y - 2$.

Για $x = y + 2$ η εξίσωση γίνεται: $2(y + 2)^2 - 10(y + 2)y + 13y^2 = 1$

$\Leftrightarrow 5y^2 - 12y + 7 = 0$, η οποία έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι $\Delta = 4$ και έχει ρίζες $y = \frac{12 \pm 2}{10} \Leftrightarrow y = 1$ ή $y = \frac{7}{5}$.

Άρα προκύπτει η λύση $(x, y) = (3, 1)$

Για $x = y - 2$ η εξίσωση γίνεται: $2(y - 2)^2 - 10(y - 2)y + 13y^2 = 1$

$\Leftrightarrow 5y^2 + 12y + 7 = 0$, η οποία έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι $\Delta = 4$ και έχει ρίζες $y = \frac{-12 \pm 2}{10} \Leftrightarrow y = -1$ ή $y = -\frac{7}{5}$.

Άρα προκύπτει η λύση $(x, y) = (-3, -1)$.

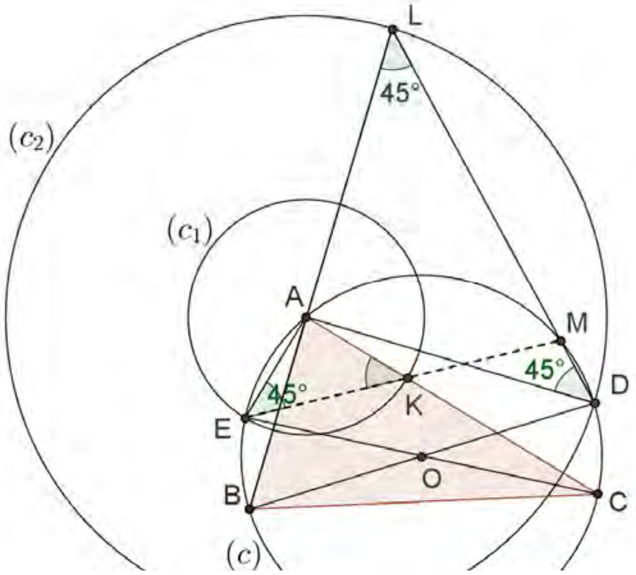
Επομένως η εξίσωση έχει τις λύσεις: $(-1, -1)$, $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(-3, -1)$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB < AC < BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) (με κέντρο O και ακτίνα R) και έστω D, E τα αντιδιαμετρικά σημεία των B, C, αντίστοιχα (ως προς τον κύκλο (c)). Ο κύκλος (c_1) (με κέντρο A και ακτίνα AE), τέμνει την AC στο σημείο K. Ο κύκλος (c_2) (με κέντρο A και ακτίνα AD), τέμνει την προέκταση της AB (προς το μέρος του A) στο σημείο L. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες EK και DL τέμνονται πάνω στο κύκλο (c).

Λύση
Έστω M το σημείο τομής της DL με τον κύκλο (c) θα αποδείξουμε ότι τα σημεία E, K, M βρίσκονται επάνω στον ίδια ευθεία.
Η γωνία $E\hat{A}C$ είναι ορθή, διότι βαίνει στη διάμετρο EC του κύκλου (c). Το τρίγωνο AEK είναι ισοσκελές (διότι AE, AK είναι ακτίνες του κύκλου (c_1)). Άρα:

$$A\hat{E}K = A\hat{K}E = 45^\circ. \qquad (1)$$



Σχήμα 5

Η γωνία $B\hat{A}D$ είναι ορθή, γιατί βαίνει στη διάμετρο BD του κύκλου (c), οπότε και η γωνία $D\hat{A}L$ είναι ορθή. Το τρίγωνο ADL είναι ισοσκελές (διότι AD, AL είναι ακτίνες του κύκλου (c_2)). Άρα έχουμε

$$A\hat{D}L = A\hat{L}D = 45^\circ. \qquad (2)$$

Οι γωνίες $A\hat{D}M$=$A\hat{D}L$ και $A\hat{E}M$ είναι ίσες, γιατί είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο (c) και βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{AM}$, δηλαδή

$$A\hat{E}M = A\hat{D}L \qquad (3)$$

Άρα από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει η ισότητα $A\hat{E}K = A\hat{E}M = 45^\circ$, οπότε τα σημεία E, K, M είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 4
Σε έναν διαγωνισμό που η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 100 έλαβαν μέρος x μαθητές. Οκτώ μαθητές πήραν βαθμό 100, ενώ όλοι οι υπόλοιποι πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 70. Αν ο μέσος όρος των βαθμών των μαθητών ήταν 78, να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του πλήθους των μαθητών.

Λύση

Για το άθροισμα των βαθμών όλων των μαθητών έχουμε τη σχέση

$$\Sigma_x \geq 8\cdot 100+\left(x-8\right)\cdot 70 \Leftrightarrow \Sigma_x \geq 70x+240, \qquad (1)$$

οπότε για το μέσο όρο των βαθμών έχουμε:

$$\text{Μ.Ο.}=\frac{\Sigma_x}{x}\geq \frac{70x+240}{x}=70+\frac{240}{x}\ . \qquad (2)$$

Έχοντας υπόψη ότι ο μέσος όρος της βαθμολογίας των μαθητών είναι 78, αν υποθέσουμε ότι ισχύει $x<30$, τότε από τη σχέση (2) λαμβάνουμε:

$$\text{Μ.Ο.}=\frac{\Sigma_x}{x}\geq 70+\frac{240}{x}>70+\frac{240}{30}=78, \qquad (3)$$

που είναι αντίθετο προς την υπόθεση ότι ο μέσος όρος των βαθμών είναι 78.
Επομένως δεν είναι δυνατόν να ισχύει ότι $x<30,$ οπότε πρέπει να είναι $x\geq 30$.

Παρατηρούμε ότι για $x=30$, έχουμε την περίπτωση

$$\text{Μ.Ο.}=\frac{\Sigma_{30}}{30}=\frac{8\cdot 100+\left(30-8\right)\cdot 70}{30}=\frac{30\cdot 70+8\cdot 30}{30}=70+8=78,$$

οπότε η **ελάχιστη δυνατή τιμή** του x είναι 30.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y=x^2-\left(3\alpha-5\right)x+186,\ \alpha\in\mathbb{Z}$. Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες η παραβολή τέμνει τον άξονα των x σε δύο σημεία διαφορετικά μεταξύ τους με ακέραιες συντεταγμένες.

Λύση

Τα σημεία τομής της παραβολής $y=x^2-\left(3\alpha-5\right)x+186,\ \alpha\in\mathbb{Z}$ με τον άξονα των x είναι της μορφής $\mathrm{A}_1\left(x_1,0\right)$ και $\mathrm{A}_2\left(x_2,0\right),$ όπου x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2-\left(3\alpha-5\right)x+186=0,\ \alpha\in\mathbb{Z}.$$

Άρα έχουμε:

$$x_1+x_2=3a-5, \qquad (1)$$
$$x_1x_2=186 \qquad (2)^{\cdot}$$

Επειδή πρέπει οι ρίζες x_1 και x_2 να είναι ακέραιοι αριθμοί, σύμφωνα με την υπόθεση διαφορετικοί μεταξύ τους, έστω $|x_1|<|x_2|$, από την εξίσωση (2), έχουμε ότι οι x_1, x_2 πρέπει να είναι ομόσημοι ακέραιοι, με γινόμενο $186=2\cdot 3\cdot 31$. Άρα έχουμε τα εξής δυνατά ζεύγη:

$$\left(x_1,x_2\right)\in\left\{\left(1,186\right),\left(2,93\right),\left(3,62\right),\left(6,31\right),\left(-1,-186\right),\left(-2,-93\right),\left(-3,-62\right),\left(-6,-31\right)\right\}$$

Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι: $\alpha=\dfrac{x_1+x_2+5}{3}$, οπότε οι δυνατές τιμές για την παράμετρο $\alpha\in\mathbb{Z}$ είναι οι εξής: 64, 14 , -30, -20 .

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα :

$$\left.\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=91 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases}\right\}$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Προσθέτοντας και αφαιρώντας το x^2y^2 η πρώτη εξίσωση γίνεται:

$$x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2=\left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2=\left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2-xy\right)$$

Επομένως, έχουμε $x^2+y^2-xy=\dfrac{91}{13}=7$. Προσθέτοντας τώρα αυτή και τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος, βρίσκουμε ότι: $2\left(x^2+y^2\right)=20 \Leftrightarrow x^2+y^2=10$, οπότε $xy=3$ από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος. Έτσι καταλήγουμε στο ισοδύναμο σύστημα:

$$\left.\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ 2xy=6 \end{cases}\right\},$$

από το οποίο με πρόσθεση και αφαίρεση των δύο εξισώσεων κατά μέλη, λαμβάνουμε

$$\left.\begin{cases} x^2+y^2+2xy=16 \\ x^2+y^2+2xy=4 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} (x+y)^2=16 \\ (x-y)^2=4 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x+y=\pm 4 \\ x-y=\pm 2 \end{cases}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}\right\} \text{ ή } \left.\begin{cases} x+y=-4 \\ x-y=2 \end{cases}\right\} \text{ ή } \left.\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=-2 \end{cases}\right\} \text{ ή } \left.\begin{cases} x+y=-4 \\ x-y=-2 \end{cases}\right\}$$

$$\Leftrightarrow (x,y)=(3,1) \text{ ή } (x,y)=(-1,-3) \text{ ή } (x,y)=(1,\,3) \text{ ή } (x,y)=(-3,-1).$$

2^{ος} τρόπος

Έχουμε

$$\left.\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=91 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)^2-(xy)^2=91 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases}\right\},$$

οπότε, αν θέσουμε $\varphi=x^2+y^2$ και $\omega=xy$, λαμβάνουμε το σύστημα

$$\left.\begin{cases} \varphi^2-\omega^2=91 \\ \varphi+\omega=13 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} (\varphi+\omega)(\varphi-\omega)=91 \\ \varphi+\omega=13 \end{cases}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} \varphi-\omega=7 \\ \varphi+\omega=13 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} \varphi=10 \\ \omega=3 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \end{cases}\right\}.$$

Στη συνέχεια εργαζόμαστε, όπως στον πρώτο τρόπο.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB<A\Gamma<B\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$. Η διχοτόμος $B\Delta$ τέμνει τον κύκλο $C(O,R)$, στο σημείο Z. Έστω E τυχόν σημείο του τμήματος $\Delta\Gamma$. Η ευθεία BE τέμνει τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο H. Οι ευθείες $A\Gamma$ και ZH τέμνονται στο σημείο Θ. Επίσης, η ευθεία ZE τέμνει τον κύκλο στο σημείο K. Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα $B\Delta H\Theta$, $B\Delta EK$ και $\Delta Z\Theta K$ είναι εγγράψιμα.

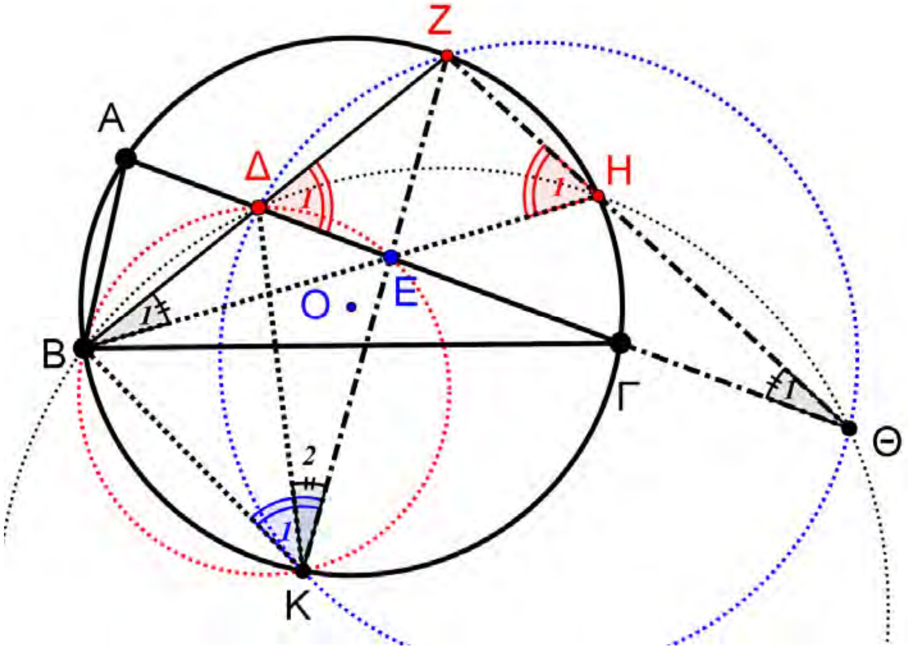
Λύση

Η γωνία $\hat{H}_1$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο $C(O,R)$ και βαίνει στο τόξο BZ. Άρα:

$$\hat{H}_1 = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{B}}{2}.$$

Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου $A\Delta Z$. Άρα:

$$\hat{\Delta}_1 = \Delta\hat{A}Z + A\hat{Z}B = \frac{\hat{B}}{2} + \hat{\Gamma}.$$



Σχήμα 6

Από την ισότητα των γωνιών $\hat{H}_1 = \hat{\Delta}_1$, προκύπτει η ισότητα των παραπληρωματικών τους γωνιών και από εκεί ότι **το τετράπλευρο $B\Delta H\Theta$ είναι εγγράψιμο.**

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $BKHZ$ έχουμε: $\hat{H}_1 = \hat{K}_1$, η οποία σε συνδυασμό με την ισότητα $\hat{H}_1 = \hat{\Delta}_1$, μας δίνει **την εγγραψιμότητα του τετραπλεύρου $B\Delta EK$.**

Από το εγγράψιμο $B\Delta EK$ έχουμε: $\hat{K}_2 = \hat{B}_1$. Από το εγγράψιμο $B\Delta H\Theta$ έχουμε: $\hat{\Theta}_1 = \hat{B}_1$. Άρα είναι: $\hat{K}_2 = \hat{\Theta}_1$.

Επομένως και **το τετράπλευρο $\Delta Z\Theta K$ είναι εγγράψιμο.**

Πρόβλημα 4

Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς n, που έχουν ακριβώς τέσσερις θετικούς διαιρέτες $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ και ικανοποιούν τη σχέση:

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640.$$

Λύση

Για τους τέσσερις διαιρέτες ισχύουν οι σχέσεις

$$d_1 = 1,\ d_4 = n \text{ και } d_2 \cdot d_3 = n.$$

Επομένως, έχουμε

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640 \Leftrightarrow 1 + d_2 + d_3 + d_2 d_3 = 640$$
$$\Leftrightarrow (1+d_2)(1+d_3) = 640 \Leftrightarrow (1+d_2)(1+d_3) = 2^7 \cdot 5$$

Αλλά $1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4 \Rightarrow 2 < 1 + d_2 < 1 + d_3$ και επειδή οι d_2 και d_3 είναι ακέραιοι αριθμοί, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $1 + d_2 = 4, 1 + d_3 = 160 \Leftrightarrow d_2 = 3, d_3 = 159 = 3 \cdot 53$, απορρίπτονται, αφού ο $n = 3 \cdot 159$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1 + d_2 = 5, 1 + d_3 = 128 \Leftrightarrow d_2 = 4, d_3 = 127$, απορρίπτονται, αφού ο $n = 4 \cdot 127$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1 + d_2 = 8, 1 + d_3 = 80 \Leftrightarrow d_2 = 7, d_3 = 79$, οπότε είναι $n = 7 \cdot 79 = 553$
- $1 + d_2 = 10, 1 + d_3 = 64 \Leftrightarrow d_2 = 9, d_3 = 63$, απορρίπτονται, αφού ο $n = 9 \cdot 63$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1 + d_2 = 16, 1 + d_3 = 40 \Leftrightarrow d_2 = 15, d_3 = 39$, απορρίπτονται, αφού ο $n = 15 \cdot 39$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1 + d_2 = 20, 1 + d_3 = 32 \Leftrightarrow d_2 = 19, d_3 = 31$, οπότε είναι $n = 19 \cdot 31 = 589$

Τελικά, οι αριθμοί που ικανοποιούν τις αρχικές υποθέσεις είναι οι 553 και 589.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

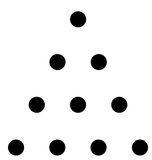
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Οι αριθμοί α και β είναι ακέραιοι και ισχύει $\boldsymbol{\alpha + \beta = 1000}$. Είναι δυνατόν να ισχύει $\boldsymbol{3\alpha + 5\beta = 3005}$; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

2. Σε ένα δοχείο υπάρχουν 6 λευκά, 9 κίτρινα, 12 κόκκινα και 15 πράσινα σφαιρίδια. Να προσδιορισθεί ο ελάχιστος αριθμός σφαιριδίων που πρέπει να πάρουμε τυχαία έτσι ώστε να εξασφαλισθεί η παρουσία στο δείγμα τουλάχιστον
   Α) 3 λευκών
   Β) 5 κίτρινων
   Γ) 6 κόκκινων
   Δ) 10 πράσινων σφαιριδίων
   (τέσσερα διαφορετικά ερωτήματα).

3. Δέκα σημεία είναι τοποθετημένα σε σχήμα ισοπλεύρου τριγώνου όπως στο σχήμα



   Να διαγραφεί ο ελάχιστος αριθμός σημείων έτσι ώστε τα υπόλοιπα να μη σχηματίζουν κανένα ισόπλευρο τρίγωνο.

4. Ποιος από τους αριθμούς

$$A = \frac{1}{99}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{99}\right)$$

και

$$B = \frac{1}{100}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100}\right)$$

είναι μεγαλύτερος και γιατί;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να λυθεί η εξίσωση $\mathbf{x + 2x + 3x + \ldots + 100x = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 101}$.

2. Ποιο από τα κλάσματα

$$\kappa = \frac{33333333331}{33333333334}$$

και

$$\lambda = \frac{22222222221}{22222222223}$$

είναι μεγαλύτερο και γιατί;

3. Δίνεται τραπέζιο **ΑΒΓΔ**, όπου **ΑΔ = α, ΒΓ = β, ΑΒ = α + β** και η πλευρά ΑΒ είναι κάθετος προς τις πλευρές ΒΓ και ΑΔ. Να υπολογισθεί η απόσταση της κορυφής Α από το μέσο της πλευράς ΓΔ συναρτήσει των α και β.

4. Αν οι αριθμοί α, β, γ, δ και ε είναι διαφορετικοί και καθένας παίρνει μια από τις τιμές 1, 2, 3, 4 και 5, είναι δυνατόν να έχουμε τη σχέση

$$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \delta)(\delta + \varepsilon)(\varepsilon + \alpha)=(\alpha +\gamma)(\gamma + \varepsilon)(\varepsilon +\beta)(\beta +\delta)(\delta + \alpha);$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”

ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Έστω ότι οι ακέραιοι αριθμοί α και $\alpha + 2$ είναι πρώτοι με $\alpha > 3$. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\alpha + 4$ είναι σύνθετος.

2. Οι αριθμοί α και β είναι θετικοί και ισχύει $\alpha + \beta = \lambda$. Να δεχθεί ότι

$$\frac{4}{3\lambda} \leq \frac{1}{\alpha+\lambda} + \frac{1}{\beta+\lambda} < \frac{3}{2\lambda}.$$

3. Έστω ΑΒΓ ένα σκαληνό τρίγωνο. Πόσα σημεία Δ υπάρχουν στο επίπεδο του τριγώνου τέτοια ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ, Δ να έχει άξονα συμμετρίας διαφορετικό από πλευρά του τριγώνου;

4. Έστω Α και Β δύο μη κενά και ξένα μεταξύ τους σύνολα των οποίων η ένωση είναι το σύνολο {1, 2, 3, 4, 5}. Να αποδειχθεί ότι ένα τουλάχιστον από τα Α και Β περιέχει τουλάχιστον τη διαφορά δύο στοιχείων του.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$66^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

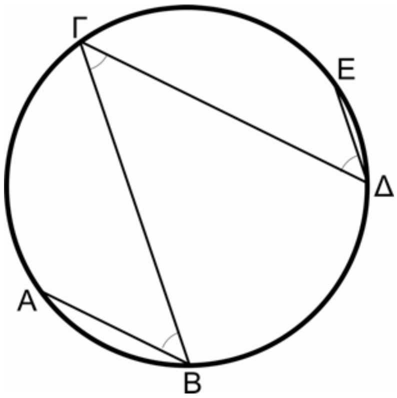
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Υπάρχει θετικός ακέραιος ν τέτοιος ώστε:
   Α) Ο **3ν** είναι τέλειος κύβος, ο **4ν** τέλεια τέταρτη δύναμη και ο **5ν** τέλεια πέμπτη δύναμη;
   Β) Ο **3ν** είναι τέλειος κύβος, ο **4ν** τέλεια τέταρτη δύναμη, ο **5ν** τέλεια πέμπτη δύναμη και ο **6ν** τέλεια έκτη δύναμη;

2. Να βρεθούν πραγματικοί αριθμοί *x, y, z, w* για τους οποίους ισχύει
$$\sqrt{x-y}+\sqrt{y-z}+\sqrt{z-w}+\sqrt{x+w}=x+2.$$

3. Οι κορυφές Α, Β, Γ, Δ, Ε μιας τεθλασμένης γραμμής βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο όπως στο σχήμα και οι γωνίες **ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ** έχουν μέτρο **45^0**. Να αποδειχτεί ότι
$$\mathbf{AB^2 + \Gamma\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Delta E^2.}$$



4. Μια πραγματική συνάρτηση f είναι ορισμένη στο **R** και για κάθε $x \in R$ ισχύει
$$f(x+1)f(x)+f(x+1)+1=f(x).$$
Να δεχθεί ότι για κάθε $x \in R$ ισχύουν:
1) $f(x) \neq -1$, **2)** $f(x) \neq 0$, **3)** $f(x+4)=f(x)$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Για μια συνάρτηση $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ ισχύει

$$f(f(x)) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1,$$

για κάθε $x \in \mathrm{R}$.

Α) Να βρεθεί το $f(1)$.

Β) Να εξετασθεί αν η συνάρτηση

$$g(x) = x^3 + x^2 f(x) - 2xf^2(x) + 3$$

είναι 1-1.

2. Έστω α, β θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε

$$\frac{\alpha}{\beta} < \sqrt{5}.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$\sqrt{5} - \frac{\alpha}{\beta} > \frac{1}{4\alpha\beta}.$$

3. Έστω ΑΒΓΔ κυρτό τετράπλευρο τέτοιο ώστε **ΑΔ = ΒΓ**, ΑΔ μη παράλληλη προς τη ΒΓ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο Ρ διάφορο του Ο τέτοιο ώστε ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΡΒΔ και ΡΑΓ να ισούται με το τετράγωνο του λόγου των πλευρών ΡΒ και ΡΑ αντίστοιχα.

4. Έστω $\mathbf{2\nu > \kappa}$ και έστω ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}$ αφήνουν διαφορετικά υπόλοιπα όταν διαιρεθούν δια του $\boldsymbol{\kappa}$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε ακέραιο αριθμό $\boldsymbol{\lambda}$ υπάρχουν δείκτες $\mathbf{i, j}$ από το σύνολο $\mathbf{\{1, 2, \ldots, \nu\}}$ τέτοιοι ώστε

$$\boldsymbol{\kappa \mid \alpha_i + \alpha_j - \lambda}.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Αδύνατο (άρτια – περιττά).

2. **Α)** 3 + 9 + 12 + 15 = 39,
   Β) 5 + 6 + 12 + 15 = 38,
   Γ) 6 + 6 + 9 + 15 = 36,
   Δ) 10 + 6 + 9 + 12 = 37.

3. Διαγραφή πρώτης σειράς (1 σφαιρίδιο), του μεσαίου της τρίτης σειράς και των δύο μεσαίων της τέταρτης σειράς.

4. Έστω

$$\Gamma = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{99}$$

Τότε

$$A = \Gamma/99,$$

$$B = \Gamma/100 + 1/10000$$

και

$$A - B = (\Gamma - 1)/9900 + 1/990000 > 0.$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. $x = 10$

2. Έστω $\alpha = 33333333334$ και $\beta = 22222222223$. Τότε $\kappa = 1 – 3/\alpha$ και $\lambda = 1 – 2/\beta$ και $\kappa – \lambda = 2/\beta – 3/\alpha = (2\alpha – 3\beta)/\alpha\beta = - 1/\alpha\beta$. Άρα $\kappa < \lambda$.

3. $(\alpha + \beta)/\sqrt{2}$.

4. Αν ήταν δυνατόν, τότε ο αριθμός $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \delta)(\delta + \varepsilon)(\varepsilon + \alpha)(\alpha +\gamma)(\gamma + \varepsilon)(\varepsilon +\beta)(\beta +\delta)(\delta + \alpha)$ θα ήταν τέλειο τετράγωνο.

   Λόγω συμμετρίας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, $\delta = 4$, $\varepsilon = 5$, οπότε το γινόμενο αυτό παίρνει την τιμή $2^7 3^5 5^2 7^2$ που δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Ένας από τους αριθμούς α, α +1, α + 2 διαιρείται με τον 3 και αυτός πρέπει να είναι ο α + 1. Άρα ο αριθμός α + 4 = α + 1 + 3 διαιρείται με τον 3.

2. Έχουμε

$$\frac{1}{\alpha+\lambda}+\frac{1}{\beta+\lambda}=\frac{3\lambda}{\alpha\beta+2\lambda^2}.$$

   Η πρώτη ανισότητα είναι ισοδύναμη με

$$4\alpha\beta \le (\alpha+\beta)^2,$$

   και η δεύτερη με

$$3\alpha\beta > 0.$$

3. Το Δ πρέπει να είναι συμμετρικό κορυφής του τριγώνου ως προς τη μεσοκάθετο της απέναντι πλευράς. Άρα υπάρχουν 3 τέτοια σημεία.

4. Έστω ότι κανένα από τα δύο σύνολα δεν περιέχει τη διαφορά δύο στοιχείων του. Τότε προφανώς το 2 δεν μπορεί να ανήκει στο ίδιο σύνολο με το 1 ούτε με το 4 γιατί 2 – 1 = 1 και 4 – 2 = 2. Έστω λοιπόν $2 \in A$, οπότε $1 \in B$ και $4 \in B$.
   Επειδή 4 – 1 = 3, έπεται ότι $3 \notin B$ και επομένως $3 \in A$. Επειδή 5 – 2 = 3, έπεται ότι $5 \notin A$ και επειδή 5 – 1 = 4, έπεται $5 \notin B$. Άτοπο επειδή $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. **Α)** Ναι, π.χ. $\nu = 2^{30}3^{30}5^{24}$.

   Β) Όχι., διότι, αν υπήρχε, τότε $2|\nu$. Έστω α ο μεγαλύτερος εκθέτης τέτοιος ώστε $2^{\alpha}|\nu$.

   Τότε $4|\alpha +2$ (λόγω του ότι ο 4ν είναι τέλεια τετάρτη δύναμη) και $2|\alpha + 1$ (λόγω του ότι ο 6ν είναι τέλεια έκτη δύναμη) και άρα $2|1$, δηλ. άτοπο.

2. Η σχέση είναι ισοδύναμη με

$$(\sqrt{x-y}-1)^2 + (\sqrt{y-z}-1)^2 + (\sqrt{z-w}-1)^2 + (\sqrt{x+w}-1)^2 = 0$$

   και άρα $x = 2, y = 1, z = 0, w = -1$.

3. Προφανώς ΑΒ||ΓΔ και ΒΓ||ΔΕ και άρα ΑΓ = ΒΔ = ΕΓ. Επίσης έχουμε ΒΓ = ΑΔ, ΔΓ = ΒΕ και <ΑΒΕ = <ΑΔΕ = 90^0. Άρα

$$ΑΒ^2 + ΓΔ^2 = ΑΒ^2 + ΓΔ^2 = ΑΕ^2 = ΑΔ^2 + ΔΕ^2 = ΒΓ^2 + ΔΕ^2.$$

4. 1) Αν f(a) = -1, τότε 2 = 0. 2) Αν f(β) = 0, τότε f(β + 1) = -1. Άτοπο λόγω 1).

   3) Έχουμε f(x + 1) = (f(x) – 1)/(f(x) + 1), f(x + 2) = -1/f(x) και επομένως

$$f(x + 4) = -1/f(x + 2) = f(x).$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Ισχύει f(f(1)) = 1 και επομένως $f(1) = f(f(f(1))) = (f(1))^3 - 2(f(1))^2 + 3f(1) - 1$. Λύνοντας ως προς f(1) έχουμε f(1) = 1. Επίσης, g(0) = g(1) = 3.

2. Έχουμε

$$\sqrt{5} - \alpha/\beta = (\beta\sqrt{5} - a)/\beta = (5\beta^2 - a^2)/\beta(\beta\sqrt{5} + a) \geq 1/\beta(\beta\sqrt{5} + a) > 1/4\alpha\beta$$

αν $3\alpha > \beta\sqrt{5}$. Αν $3\alpha < \beta\sqrt{5}$, τότε

$$\sqrt{5} - \alpha/\beta > \sqrt{5} - \sqrt{5}/3 = 2\sqrt{5}/3 > 1 > 1/4\alpha\beta.$$

3. Θεωρούμε τους περιγεγραμμένους K_1 και K_2 στα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ με διαφορετικά σημεία τομής Ο και Ρ λογω του ότι η πλευρά ΑΔ δεν είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ. Λόγω του ότι οι γωνίες ΑΟΔ και ΒΟΓ είναι ίσες ως κατά κορυφήν καθώς και οι πλευρές ΑΔ , ΒΓ από την υπόθεση, οι κύκλοι K_1 και K_2 είναι ίσοι και τα τρίγωνα ΡΒΔ, ΡΑΓ όμοια.

4. Οι αριθμοί $\lambda - \alpha_1$, $\lambda - \alpha_2$, …, $\lambda - \alpha_\nu$ αφήνουν διαφορετικά υπόλοιπα όταν διαιρεθούν δια του κ. Ο μέγιστος αριθμός αυτών των υπολοίπων είναι κ. Επειδή $2\nu > \kappa$, δύο από τους 2ν αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \lambda - \alpha_1, \lambda - \alpha_2, \ldots, \lambda - \alpha_\nu$ θα αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν δια του κ και δεν μπορούν να ανήκουν στο ίδιο σύνολο $\{\lambda - \alpha_1, \lambda - \alpha_2, \ldots, \lambda - \alpha_\nu\}$ ή $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$, δηλ. ο ένας θα είναι κάποιος α_i και ο άλλος κάποιος $\lambda - \alpha_j$. Η διαφορά τους διαιρείται με τον κ.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς ν που είναι τέτοιοι ώστε ο αριθμός $\dfrac{42}{2\nu+1}$ να είναι ακέραιος.

2. Θεωρούμε οξεία γωνία $\widehat{\mathrm{AOB}}$ και την προέκταση ΟΓ της πλευράς ΟΑ. Στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ΑΓ και περιέχει το σημείο Β, φέρουμε ευθεία $\mathrm{O\Delta} \perp \mathrm{OA}$ και ευθεία $\mathrm{OE} \perp \mathrm{OB}$. Αν είναι $\widehat{\mathrm{\Gamma OE}} = 4\widehat{\mathrm{AOB}}$, να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\mathrm{AOB}}$.

3. Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $(\gamma-\delta)(\gamma+\delta)\neq 0$ και

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma-\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta},$$

να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ισούται με 0.

4. Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής $xyzxyz$, όπου x, y, z είναι ψηφία με $x \neq 0$ διαιρείται με τους αριθμούς 7, 11 και 13.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνεται ο αριθμός $A = 2^{92} \cdot 5^{90} \cdot 3^4 \cdot 7^2$**.** Να βρείτε σε πόσα μηδενικά λήγει ο Α και ποιο είναι το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του.

2. Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς x, y, z που είναι τέτοιοι ώστε:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{6}{z}.$$

3. Έστω Μ σημείο της βάσης ΒΓ ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ=6. Αν είναι $\text{ΜΚ} \perp \text{ΑΒ}$, $\text{ΜΛ} \perp \text{ΑΓ}$ και $\text{Κ}_1\text{Λ}_1$ είναι η προβολή του ΚΛ στη ΒΓ, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου $\text{ΚΚ}_1\text{Λ}_1\text{Λ}$.

4. Οι 15 μαθητές μιας τάξης έχουν συνολικά στις τσάντες τους 115 τετράδια. Αν κάθε μαθητής έχει ένα τουλάχιστον τετράδιο, να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον μαθητές έχουν τον ίδιο αριθμό τετραδίων.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ με $\alpha < \beta < \gamma < \delta < \varepsilon$ και η παράσταση

$$\mathrm{K} = \frac{\alpha|\delta-\gamma| + \alpha|\delta-\varepsilon| + \varepsilon|\beta-\alpha| + \varepsilon|\beta-\gamma|}{|\beta-\alpha| + |\beta-\gamma| + |\delta-\gamma| + |\delta-\varepsilon|}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι: $\beta < \mathrm{K} < \delta$.

(ii) Αν είναι

$$x = (\alpha+\beta)(\gamma+\delta),\ y = (\alpha+\gamma)(\beta+\delta),\ z = (\alpha+\delta)(\beta+\gamma),$$

να συγκρίνετε τους αριθμούς x, y, z.

2. Στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ υπάρχει σημείο Μ τέτοιο ώστε $\widehat{\mathrm{MB\Gamma}} = \widehat{\mathrm{M\Gamma B}}$ και πάνω στις ΜΒ και ΜΓ υπάρχουν σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΔ=ΑΕ και $\widehat{\mathrm{MA\Delta}} = \widehat{\mathrm{MAE}}$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

3. Αν είναι $x, y > 0$ και $x^3 + y^2 \leq 64$, να αποδείξετε ότι:

$$x^4 + y^3 < 512.$$

4. Έχουμε κέρματα και χαρτονομίσματα των 1, 10 και 100 ευρώ. Είναι δυνατόν με 1000 ακριβώς από αυτά να σχηματίσουμε το ποσό των 50000 ευρώ;

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δίνεται ότι το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=x^3+\kappa x+\lambda$ με $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ έχει τις πραγματικές ρίζες x_1, x_2, και x_3 που ανά δύο είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Να εκφράσετε την παράσταση

$$\Gamma=\left(1-x_1^2\right)\left(1-x_2^2\right)\left(1-x_3^2\right)$$

συναρτήσει των κ,λ.

2. Θεωρούμε τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=90^\circ$ και προεκτείνουμε τη χορδή ΑΒ κατά ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ=ΑΒ. Ονομάζουμε Δ το σημείο επαφής της εφαπτομένης του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ από το Γ και Κ το ίχνος της κάθετης από το Α προς τη ΒΔ. Να αποδείξετε ότι: ΚΒ= 2ΚΑ.

3. Αν α,β είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta}}\geq\alpha^\alpha\beta^\beta .$$

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΓ και ΑΒ που τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Κ και Λ, αντίστοιχα. Αν είναι ΜΚ= x, ΜΛ= y, να βρείτε το ελάχιστο της παράστασης

$$S=x^2+y^2$$

και τη θέση του σημείου Μ για την οποία λαμβάνεται αυτό.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν $\log_{150} 2 = x,\ \log_{150} 3 = y$ τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$A = 50^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}$$

2. Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \kappa x + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει τις πραγματικές ρίζες x_1, x_2, και x_3 που ανά δύο είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Να εκφράσετε την παράσταση

$$\Gamma = \left(1 + x_1^2\right)\left(1 + x_2^2\right)\left(1 + x_3^2\right)$$

συναρτήσει των κ, λ .

3. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση:

$$\sqrt[3]{\frac{3x-1}{2}} = \frac{2x^3+1}{3}.$$

4. Αν Ι είναι το έγκεντρο τριγώνου $AB\Gamma$ με $B\Gamma=2$ και $\widehat{BA\Gamma} = 60^\circ$, να αποδείξετε ότι:

$$IA + IB + I\Gamma \le 2\sqrt{3}.$$

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Οι λύσεις είναι **ενδεικτικές** και όχι μοναδικές. Οποιαδήποτε μαθηματικώς σωστή λύση είναι αποδεκτή ανεξάρτητα από τα χρησιμοποιούμενα εργαλεία, π.χ. η Αναλυτική Γεωμετρία και ο Απειροστικός Λογισμός μπορούν να χρησιμοποιηθούν από μαθητές οποιασδήποτε τάξης.

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

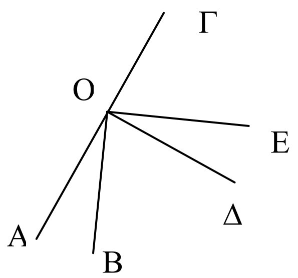
1. $\dfrac{42}{2\nu+1}\in\mathbb{Z}$ με $\nu\in\mathbb{N}\Rightarrow 2\nu+1\in\Delta_{42}=\{1,2,3,6,7,14,21,42\}$.

Επειδή ο $2\nu+1$ είναι περιττός έπεται ότι:

$$2\nu+1=1 \text{ ή } 2\nu+1=3 \text{ ή } 2\nu+1=7 \text{ ή } 2\nu+1=21$$
$$\Leftrightarrow \nu=0 \text{ ή } \nu=1 \text{ ή } \nu=3 \text{ ή } \nu=10.$$

2. Αν θέσουμε $\widehat{\mathrm{AOB}}=\omega$, τότε από την υπόθεση του προβλήματος έχουμε:

$$4\omega+90^\circ+\omega=180^\circ \Leftrightarrow 5\omega=90^\circ$$
$$\Leftrightarrow \omega=18^\circ$$



3. Από τις υποθέσεις έχουμε

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma-\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta}\Rightarrow\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}-\frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma-\delta}-\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$$
$$\Rightarrow\frac{2\beta}{\gamma+\delta}=\frac{2\beta}{\gamma-\delta}\Rightarrow 2\beta\left(\gamma-\delta-\gamma-\delta\right)=0$$
$$\Rightarrow -2\beta\delta=0\Rightarrow\beta\delta=0\Rightarrow\beta=0 \text{ ή } \delta=0.$$

4. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathrm{N} = \overline{xyzxyz} &= 100000x + 10000y + 1000z + 100x + 10y + z \\ &= 100100x + 10010y + 1001z \\ &= 1001 \cdot (100x + 10y + z) \\ &= 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{xyz}. \end{aligned}$$

Άρα οι αριθμοί 7,11 και 13 διαιρούν τον αριθμό Ν.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Έχουμε

$$\mathrm{A} = (2 \cdot 5)^{90} \cdot 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 = 10^{90} \cdot 4 \cdot 81 \cdot 49 = 15876 \cdot 10^{90}.$$

Άρα ο Α λήγει σε 90 μηδενικά και το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του είναι το 6.

2. Έχουμε

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{6}{z} \Leftrightarrow 4x = 3y \text{ και } xz = 18 \Leftrightarrow y = \frac{4x}{3} \text{ και } xz = 18.$$

Επειδή οι αριθμοί x, z είναι φυσικοί έχουμε

$$xz = 18 \Leftrightarrow (x, z) = (1,18) \text{ ή } (2,9) \text{ ή } (3,6) \text{ ή } (6,3) \text{ ή } (9,2) \text{ ή } (18,1),$$

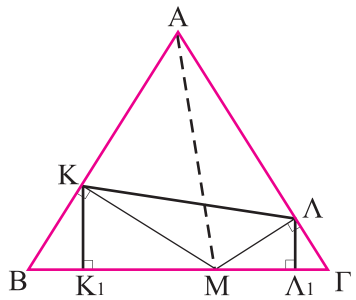
οπότε, από την ισότητα $y = \dfrac{4x}{3}$ προκύπτει ότι :

$$(x, y, z) = (3,4,6) \text{ ή } (6,8,3) \text{ ή } (9,12,2) \text{ ή } (18,24,1).$$

3. Έχουμε

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = (\mathrm{ABM}) + (\mathrm{A\Gamma M}) \Leftrightarrow \frac{36\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \mathrm{MK} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \mathrm{MK} \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{MK} + \mathrm{M\Lambda} = 3\sqrt{3} \quad (1)$$



Από τα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{KK_1M}$ και $\mathrm{\Lambda\Lambda_1M}$ γεωμετρικά ή τριγωνομετρικά έχουμε

$$\mathrm{KK_1} = \frac{1}{2}\mathrm{MK}, \quad \mathrm{\Lambda\Lambda_1} = \frac{1}{2}\mathrm{M\Lambda} \text{ και}$$

$$\mathrm{MK_1} = \mathrm{MK}\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \mathrm{M\Lambda_1} = \mathrm{M\Lambda}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Οπότε } \mathrm{K_1\Lambda_1} = \mathrm{MK_1} + \mathrm{M\Lambda_1} = (\mathrm{MK} + \mathrm{M\Lambda})\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}.$$

και $\mathrm{KK}_1 + \Lambda\Lambda_1 = \frac{1}{2}(MK + M\Lambda) = \frac{1}{2}3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Άρα είναι $(\mathrm{KK}_1\Lambda\Lambda_1) = \frac{1}{2}(\mathrm{KK}_1 + \Lambda\Lambda_1)\mathrm{K}_1\Lambda_1 = \frac{27\sqrt{3}}{8}$.

4. Αν υποθέσουμε ότι όλοι οι μαθητές έχουν διαφορετικό αριθμό τετραδίων, τότε ο ελάχιστος αριθμός τετραδίων που μπορούν να έχουν όλοι μαζί είναι

$$1 + 2 + \cdots + 15 = 120 > 115.$$

Άρα δεν είναι δυνατόν να έχουν όλοι οι μαθητές διαφορετικό αριθμό τετραδίων, οπότε δύο τουλάχιστον θα έχουν τον ίδιο αριθμό τετραδίων.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. (i) Λαμβάνοντας υπόψη τις ανισότητες $\alpha < \beta < \gamma < \delta < \varepsilon$ εύκολα βρίσκουμε ότι $\mathrm{K} = \gamma$, οπότε $\beta < \mathrm{K} < \delta$.

(ii) Έχουμε

$$x - y = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - (\alpha + \gamma)(\beta + \delta) = \alpha\gamma + \beta\delta - \alpha\beta - \gamma\delta$$
$$= \alpha(\gamma - \beta) + \delta(\beta - \gamma) = (\gamma - \beta)(\alpha - \delta) < 0.$$

Άρα είναι $x - y < 0$ δηλαδή $x < y$.

Ομοίως λαμβάνουμε $y - z = (\delta - \gamma)(\alpha - \beta) < 0$.

2. Επειδή είναι $\widehat{\mathrm{M}\mathrm{B}\Gamma} = \widehat{\mathrm{M}\Gamma\mathrm{B}}$, το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές με

$$\mathrm{MB} = \mathrm{M}\Gamma. \qquad (1)$$

Επιπλέον, τα τρίγωνα ΜΑΔ και ΜΑΕ είναι ίσα γιατί έχουν:

ΑΜ κοινή πλευρά, ΑΔ = ΑΕ, $\widehat{\mathrm{MA}\Delta} = \widehat{\mathrm{MAE}}$.

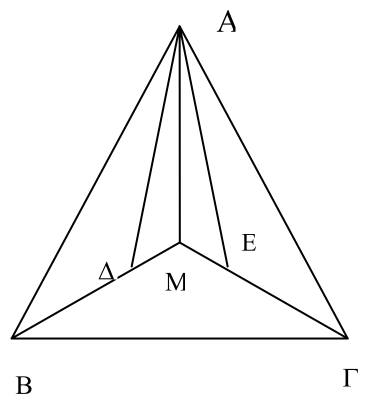
Άρα θα έχουν και

$$\widehat{\mathrm{AM}\Delta} = \widehat{\mathrm{AME}}. \qquad (2)$$

Λόγω των (1) και (2) τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΑΓ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

$$\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma,$$

δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



3. Επειδή είναι $x, y > 0$ έχουμε

$$x^3 + y^2 \le 64 \Rightarrow x^3 < 64 \text{ και } y^2 < 64 \Rightarrow x < 4 \text{ και } y < 8 \Rightarrow x^4 < 4x^3 \text{ και } y^3 < 8y^2,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$x^4 + y^3 < 4x^3 + 8y^2 < 8(x^3 + y^2) \le 8 \cdot 64 = 512.$$

4. Αν υποθέσουμε ότι παίρνουμε x κέρματα του ενός ευρώ, y χαρτονομίσματα των 10 ευρώ και z χαρτονομίσματα των 100 ευρώ, τότε θα έχουμε τις ισότητες

$$x + 10y + 100z = 50000 \quad \text{και} \quad x + y + z = 1000, \qquad (1)$$

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$9y+99z=49000 \Rightarrow 9\cdot\left(y+11z\right)=49000 \Rightarrow 9\left|49000\right.,$$

που είναι άτοπο, γιατί το άθροισμα των ψηφίων του 49000 είναι ο αριθμός 13 που δεν διαιρείται με το 9.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

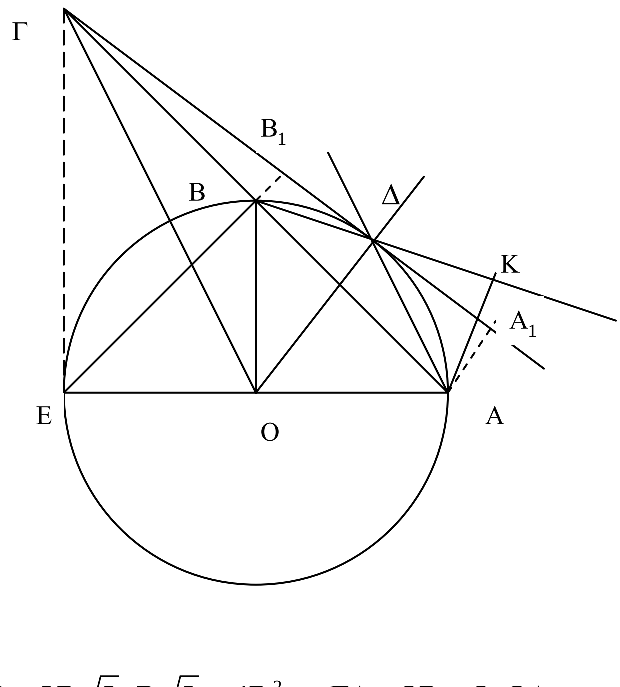
1. Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$\mathrm{P}\left(x\right)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right). \qquad (1)$$

Η παράσταση Κ γράφεται:

$$\begin{aligned}\mathrm{K}\left(x_1,x_2,x_3\right)&=\left(1-x_1\right)\left(1+x_1\right)\left(1-x_2\right)\left(1+x_2\right)\left(1-x_3\right)\left(1+x_3\right)\\&=\left(1-x_1\right)\left(1-x_2\right)\left(1-x_3\right)\left(1+x_1\right)\left(1+x_2\right)\left(1+x_3\right)\\&=\mathrm{P}\left(1\right)\left[-\left(-1-x_1\right)\left(-1-x_2\right)\left(-1-x_3\right)\right]\\&=-\mathrm{P}\left(1\right)\mathrm{P}\left(-1\right)=-\left(1+\kappa+\lambda\right)\left(-1-\kappa+\lambda\right)=\left(1+\kappa\right)^2-\lambda^2.\end{aligned}$$

2.



1^{ος} Τρόπος

Έχουμε: $\Gamma\Delta^2=\Gamma\mathrm{A}\cdot\Gamma\mathrm{B}=2\mathrm{R}\sqrt{2}\cdot\mathrm{R}\sqrt{2}=4\mathrm{R}^2 \Rightarrow \Gamma\Delta=2\mathrm{R}=2\cdot\mathrm{O}\Delta.$

Επειδή επιπλέον $\mathrm{O}\hat{\Delta}\Gamma=90^o$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overset{\Delta}{\mathrm{O}\Gamma\Delta}\approx\overset{\Delta}{\mathrm{AKB}}$ ή ισοδύναμα αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\mathrm{O}\hat{\Gamma}\Delta=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}.$

Πράγματι αν Ε είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του Α ως προς τον κύκλο Ο, τότε:

$$\mathrm{OB}\parallel \mathrm{E}\Gamma \Rightarrow \mathrm{E}\Gamma\perp\mathrm{OE}\Rightarrow \mathrm{O}\Delta\Gamma\mathrm{E}\ \text{εγγεγραμμένο τετράπλευρο}$$

$$\Rightarrow \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E}=\Delta\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A}\Rightarrow 2\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{O}=2\cdot\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$$

$$\Rightarrow \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{O}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$$

2^{ος} Τρόπος

Έστω Ε το αντιδιαμετρικό σημείο του Α ως προς τον κύκλο κέντρου Ο

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΔΒΕ έπεται ότι $\widehat{\mathrm{K\Delta A}} = \widehat{\mathrm{AEB}} = 45^\circ$, οπότε και το τρίγωνο ΑΔΚ είναι ορθογώνιο ισοσκελές. Άρα είναι

$$\mathrm{KA} = \mathrm{K\Delta} = \frac{\mathrm{A\Delta}\sqrt{2}}{2}. \qquad (1)$$

Επιπλέον, αν είναι $\mathrm{AA_1} \perp \Gamma\Delta$, $\mathrm{BB_1} \perp \Gamma\Delta$ και $\mathrm{OA} = R$, τότε με χρήση του τύπου της απόστασης σημείου κύκλου από εφαπτομένη του, λαμβάνουμε

$$\left(\frac{\Delta\mathrm{A}}{\Delta\mathrm{B}}\right)^2 = \frac{\Delta\mathrm{A}^2 / 2R}{\Delta\mathrm{B}^2 / 2R} = \frac{\mathrm{AA_1}}{\mathrm{BB_1}} = \frac{\Gamma\mathrm{A}}{\Gamma\mathrm{B}} = 2. \qquad (2)$$

Από τη (2) έπεται ότι $\Delta\mathrm{B} = \frac{\mathrm{A\Delta}\sqrt{2}}{2}$, οπότε από την (1) έπεται ότι ΔΒ = ΚΔ = ΚΑ και

$$\mathrm{KB} = \mathrm{K\Delta} + \Delta\mathrm{B} = 2\cdot \mathrm{KA}.$$

3. Από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε

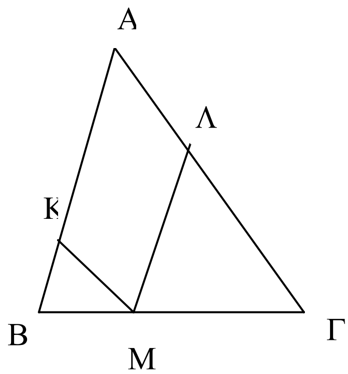
$$\frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha+\beta} = \frac{\overbrace{\alpha^3+\alpha^3+\cdots+\alpha^3}^{\alpha-\text{φορές}} + \overbrace{\beta^3+\beta^3+\cdots\beta^3}^{\beta-\text{φορές}}}{\alpha+\beta} \geq \sqrt[\alpha+\beta]{\left(\alpha^3\right)^\alpha \left(\beta^3\right)^\beta} = \sqrt[\alpha+\beta]{\left(\alpha^\alpha \beta^\beta\right)^3},$$

από την οποία έπεται το ζητούμενο.

4. Έστω ότι είναι $\mathrm{MB} = \kappa$ και $\mathrm{M\Gamma} = \lambda$, οπότε θα είναι $\kappa + \lambda = \alpha$.

Τότε θα έχουμε

$$\frac{x}{\kappa} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ και } \frac{y}{\lambda} = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow x = \frac{\beta\kappa}{\alpha} \text{ και } y = \frac{\gamma\lambda}{\alpha}.$$



Άρα η παράσταση S γίνεται

$$S = x^2 + y^2 = \frac{\beta^2\kappa^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2\lambda^2}{\alpha^2} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{\beta^2\kappa^2 + \gamma^2(\alpha-\kappa)^2}{\alpha^2}$$

$$= \left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}\right)\kappa^2 - \frac{2\gamma^2}{\alpha}\kappa + \gamma^2 = f(\kappa).$$

Άρα η παράσταση S είναι τριώνυμο ως προς κ με συντελεστή του κ^2 τον

$\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2} > 0$, οπότε η παράσταση έχει ελάχιστο για $\kappa = -\frac{-2\gamma^2 / \alpha}{2\left(\beta^2+\gamma^2\right) / \alpha^2} = \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$.

Τότε είναι $\lambda = \alpha - \kappa = \frac{\alpha\beta^2}{\beta^2+\gamma^2}$, οπότε το σημείο Μ στο οπο0ίο λαμβάνεται το ελάχιστο της παράστασης S χωρίζει την πλευρά ΒΓ σε λόγο $\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{M\Gamma}} = \frac{\gamma^2}{\beta^2}$.

Η τιμή του ελάχιστου είναι

$$f\left(\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}\right)=\left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}\right)^2-\frac{2\gamma^2}{\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}\right)+\gamma^2=\frac{\beta^2\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}.$$

2^{ος} τρόπος

Μέσω της σχέσης (1) θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε ως εξής:

$$S\cdot\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right)=\left(\frac{\beta^2\kappa^2}{\alpha^2}+\frac{\gamma^2\lambda^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\geq(\kappa+\lambda)^2=\alpha^2\Rightarrow S\geq\frac{\beta^2\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$$

οπότε έχουμε: $S\min=\dfrac{\beta^2\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$.

Η ισότητα ισχύει όταν $\dfrac{\frac{\beta\kappa}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\beta}}=\dfrac{\frac{\gamma\lambda}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\gamma}}$ ή $\dfrac{\kappa}{\lambda}=\dfrac{\gamma^2}{\beta^2}$, δηλαδή όταν το σημείο Μ χωρίζει τη ΒΓ σε λόγο $\dfrac{\gamma^2}{\beta^2}$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. $150^x=2,\ 150^y=3$

$$A=\left(\frac{150}{3}\right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}=\left(\frac{150}{150^y}\right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}=\left(150^{1-y}\right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}=150^{\frac{1-x-y}{2}}$$

$$=\left(150^{1-y}\right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}=150^{\frac{1-x-y}{2}}=\sqrt{150^{1-x-y}}=\sqrt{\frac{150}{150^{x+y}}}=\sqrt{\frac{150}{150^x\cdot150^y}}=$$

$$=\sqrt{\frac{150}{2\cdot3}}=\sqrt{25}=5.$$

2^{ος} τρόπος

$$\log_{150}A=\frac{1-x-y}{2(1-y)}=\log_{150}50=\frac{\log_{150}\left(\frac{150}{6}\right)}{2\log_{150}\left(\frac{150}{3}\right)}\log_{150}50=\frac{1}{2}\log_{150}25=\log_{150}5.$$

Άρα Α=5.

2. Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).\qquad(1)$$

Η παράσταση Κ γράφεται:

$$\begin{aligned}K(x_1,x_2,x_3)&=(i-x_1)(-i-x_1)(i-x_2)(-i-x_2)(i-x_3)(-i-x_3)\\&=(i-x_1)(i-x_2)(i-x_3)(-i-x_1)(-i-x_2)(-i-x_3)\\&=P(1)P(-1)=(-i+\kappa i+\lambda)(i-\kappa i+\lambda)=\lambda^2+(\kappa-1)^2.\end{aligned}$$

3. Η συνάρτηση $h(x)=\frac{2x^2+1}{3}$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα αντιστρέφεται και

$$h^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{\frac{3x-1}{2}}, & x\geq\frac{1}{3}\\ -\sqrt[3]{\frac{1-3x}{2}}, & x<\frac{1}{3}\end{cases}$$

Άρα $(1)\Leftrightarrow h^{-1}(x)=h(x)$ με $x\geq\frac{1}{3}$.

Αφού f γνησίως αύξουσα, τα κοινά σημεία των $G_{h^{-1}}$, G_h θα βρίσκονται στη πρώτη διχοτόμο y=x.

Έχουμε: $\left.\begin{matrix}y=h(x)\\ y=x\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=\frac{2x^3+1}{3}\\ y=x\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x=\frac{2x^3+1}{3}\\ y=x\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$

$\left.\begin{matrix}2x^3-3x+1=0\\ y=x\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x\in\left\{1,\frac{\sqrt{3}-1}{2},-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right\}\\ y=x\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x\in\left\{1,\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right\}\\ y=x\end{matrix}\right\}$ αφού $x\geq\frac{1}{3}$.

Άρα $(1)\Leftrightarrow x\in\left\{1,\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right\}$.

2^{ος} τρόπος

$$\left.\begin{matrix}y=h(x)\\ y=h^{-1}(x)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=h(x)\\ x=h(y)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=\frac{2x^3+1}{3}\\ x=\frac{2y^3+1}{3}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=\frac{2x^3+1}{3} & (2)\\ x-y=\frac{2}{3}\left(y^3-x^3\right) & (3)\end{matrix}\right\}$$

$(3)\Leftrightarrow x=y$ ή $2x^2+2yx+2y^2+3=0$ $\qquad(4)\Leftrightarrow x=y$ αφού η (4) έχει $\Delta=-\left(12y^2+24\right)<0,\ \forall y\in\mathbb{R}$ κ.λπ.

4. Θεωρούμε τον περιγεγραμένο κύκλο $C_1(K,R)$ του $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$ και τον συμμετρικό του $C_2(\Lambda,R)$ ως προς τη ΒΓ. Τότε το Λ θα είναι μέσο του μικρού τόξου ΒΓ.

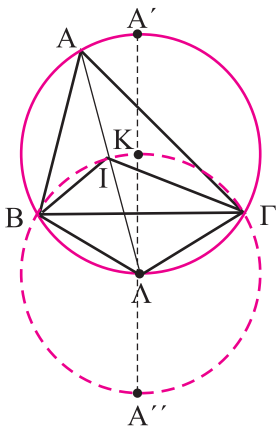
Έστω A' το αντιδιαμετρικό του Α στον C_1 και A'' το αντιδιαμετρικό του Κ στον C_2.

Το τρίγωνο $BA''\Gamma$ είναι ισόπλευρο οπότε $IA''=IB+I\Gamma$. Επίσης $B\hat{I}\Gamma=B\hat{K}\Gamma=120^o$.

Επομένως $IA+IB+I\Gamma=IA+IA''$.

Αλλά $IA''\leq KA''=2R$ (R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου) και $IA=A\Lambda-R<A'\Lambda-R=KA'=R$.

Άρα $IA+IB+I\Gamma\leq 3R=3\frac{2\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$, αφού ΒΓ=2 $\Rightarrow R=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



2^{ος} τρόπος

Έστω ΙΑ=x, ΙΒ=y, ΙΓ=ω

Τότε $\frac{\hat{A}}{2}=30^o \Rightarrow x=2\rho$

$B\hat{I}\Gamma=120^o \Rightarrow y^2+\omega^2+y\omega=4 \Rightarrow (y+\omega)^2-y\omega=4 \Rightarrow (y+\omega)^2=4+y\omega \Rightarrow$

$y+\omega=\sqrt{4+y\omega}=\sqrt{4+\lambda}$ με λ=yω.

Εξάλλου $(I B\Gamma)=\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot 2=\rho$

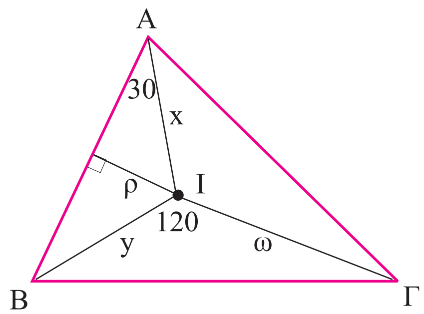
$(I B\Gamma)=\frac{1}{2}y\omega\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\lambda\sqrt{3}}{4}$, οπότε $\rho=\frac{\lambda\sqrt{3}}{4}$.

Αρκεί λοιπόν $\frac{\lambda\sqrt{3}}{2}+\sqrt{4+\lambda}\le 2\sqrt{3}$, ή $\lambda\sqrt{3}+2\sqrt{4+\lambda}\le 4\sqrt{3}$.

Όμως $R\sqrt{3}=2 \Rightarrow R=\frac{2}{\sqrt{3}}$ και $R>\rho \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}>\frac{2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 8>3\lambda \Rightarrow \frac{8}{3}>\lambda \Rightarrow 4>\frac{8}{3}>\lambda$.

Οπότε αρκεί $2\sqrt{4+\lambda}\le\sqrt{3}(4-\lambda)$, ή $4(4+\lambda)\le 2(4-\lambda)^2$, ή $3\lambda^2-28\lambda+32\ge 0$

που ισχύει αφού Δ=–188.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

Αθήνα, 19 Ιανουαρίου 2008

Αγαπητοί μαθητές,

Σας καλωσορίζουμε στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (ΕΜΕ) "**ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ**". Σήμερα δεν δίνετε τις συνηθισμένες εξετάσεις. Συμμετέχετε σε έναν αγώνα του πνεύματος. Και μόνο η απόφασή σας για συμμετοχή είναι μια επιτυχία. Με την ευκαιρία αυτής μας της επικοινωνίας θα θέλαμε να σας πληροφορήσουμε για τα εξής :

Στα περιοδικά της ΕΜΕ **Ευκλείδης Α΄** και **Ευκλείδης Β΄** δημοσιεύονται εκτός των άλλων θεμάτων ανά τάξη και θέματα με τις λύσεις τους από Διεθνείς Μαθηματικούς Διαγωνισμούς.

Επίσης έχουν εκδοθεί βιβλία της ΕΜΕ με τα θέματα των Διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων, Βαλκανιάδων, Θεωρίας αριθμών και τα βιβλία με τα Θέματα των Ελληνικών Διαγωνισμών 1997-2007.

Για το νέο έτος το Δ.Σ. της ΕΜΕ σας εύχεται ολόψυχα καλή χρονιά, προσωπική και οικογενειακή ευτυχία.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΓΙΑ ΤΟ Δ.Σ.
ΤΗΣ Ε.Μ.Ε.

Ο Πρόεδρος
Καθηγητής Νικόλαος Αλεξανδρής

Ο Γενικός Γραμματέας
Ιωάννης Τυρλής

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1.

Αν ισχύει ότι $8x+10y=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=2008-4\left(4x+5y\right)-48x-60y.$$

Πρόβλημα 2.

Σε μία ατελή διαίρεση ενός τριψήφιου φυσικού αριθμού a με τον αριθμό 5, το πηλίκο είναι μεγαλύτερο κατά 5 του εξαπλάσιου του υπολοίπου. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του a;

Πρόβλημα 3

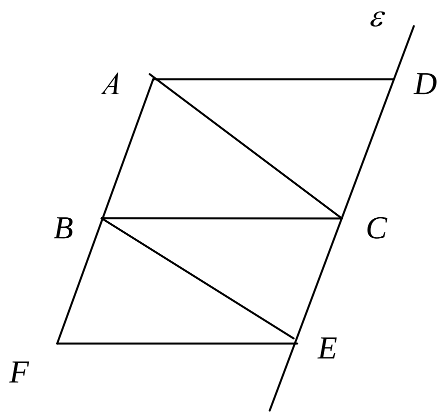
Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τρίγωνο ABC και ευθεία ε που περνάει από το C παράλληλη προς την πλευρά AB. Επιπλέον, δίνεται ότι

$$CD=CE=AB.$$

Στην προέκταση της AB προς το B παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $BF=AB$.

α) Να βρεθούν τα τρίγωνα που υπάρχουν στο σχήμα και έχουν ίσο εμβαδόν.
(Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας).

β) Τι μέρος του εμβαδού του σχήματος $AFED$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου ABC;



Πρόβλημα 4

(α) Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος θετικός ακέραιος της μορφής $\mathrm{A}=ababab$, όπου a,b ψηφία, διαιρείται με το 3.

(β) Να προσδιορίσετε τους εξαψήφιους θετικούς ακέραιους της μορφής $\mathrm{A}=ababab$, όπου a,b ψηφία, οι οποίοι διαιρούνται με το 5 και το 9.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $12b+26a=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{5}{12}-\left(24b+52a\right)^{-2}-\left(72b+156a\right)^{-1}.$$

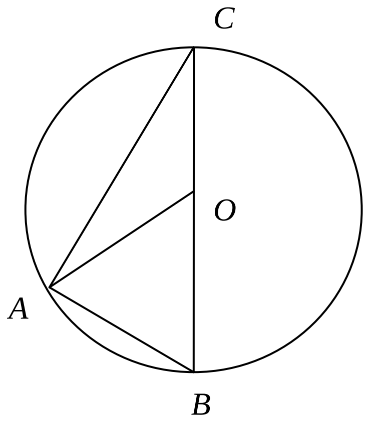
Πρόβλημα 2

Τρία σχολεία νοίκιασαν ένα αθλητικό κέντρο για τις ανάγκες του μαθήματος της Γυμναστικής και θα πληρώνουν 3000 ευρώ μηνιαίως. Τα χρήματα που θα πληρώνει κάθε σχολείο είναι ανάλογα προς τον αριθμό των ημερών που θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο. Το πρώτο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 12 μέρες το μήνα, το δεύτερο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 10 μέρες το μήνα και το τρίτο σχολείο κατά το $\frac{1}{2}$ των ημερών του πρώτου σχολείου συν 2 μέρες ακόμα.

Πόσο θα κοστίσουν σε κάθε σχολείο οι τρεις πρώτοι μήνες;

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα BC είναι διάμετρος του κύκλου και επιπλέον $AB=2\sqrt{7}$ και $AC=6$.



α) Να βρεθεί το μήκος της διαμέτρου του κύκλου.

β) Να βρεθεί το μήκος της διαμέσου και του ύψους του τριγώνου ABC που αντιστοιχούν στην πλευρά BC.

γ) Αν E είναι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και E_x είναι το εμβαδόν του μέρους της επιφάνειας του κυκλικού δίσκου που βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου ABC, να αποδείξετε ότι

$$\frac{E_x}{E}>\frac{2}{3}.$$

Πρόβλημα 4

Έστω ο τριψήφιος θετικός ακέραιος αριθμός $\mathrm{A}=abc$, όπου a,b,c ψηφία με $a>0$. Αν εναλλάξουμε το πρώτο με το τρίτο ψηφίο του, τότε προκύπτει ο ακέραιος Β που είναι μικρότερος από τον Α κατά 396. Επιπλέον, αν από τον Α αφαιρέσουμε 41 ο αριθμός που προκύπτει ισούται με 50 φορές το άθροισμα των ψηφίων του Α. Να προσδιορίσετε τον αριθμό Α.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1
(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\mathrm{K} = (x+y)^3 - (x-y)^3 - 6x^2y - y^3$$

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$\mathrm{A} = 200004^3 - 199996^3 - 24 \cdot 200000^2 - 64$$

είναι κύβος ακεραίου.

Πρόβλημα 2
Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a, b ισχύει ότι

$$a^2 + b^2 - 2a = 2b + ab - 4,$$

να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης

$$(2x-a)^3 - (x-b)^3 - x^3 = 0.$$

.

Πρόβλημα 3
Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{AB} = 2\alpha$ και $\mathrm{A\Delta} = \alpha$. Να αποδείξετε ότι το μέσον Μ της πλευράς ΑΒ έχει την ιδιότητα:
το άθροισμα $\Delta\mathrm{M} + \mathrm{M\Gamma}$ είναι το ελάχιστο δυνατό για τις διάφορες θέσεις του σημείου Μ πάνω στην ευθεία ΑΒ.

Πρόβλημα 4
Αν οι αριθμοί x, y, z είναι τέτοιοι ώστε $x > 0, y+1 > 0, z+2 > 0$ και $x+y+z = 3$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1} + \frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3} + \frac{x(z+2)}{x+z+2} \leq 3.$$

Για ποιες τιμές των x, y, z ισχύει η ισότητα;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1
Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^2+2=3\sqrt{3x-2}.$$

Πρόβλημα 2
Σε ένα "τουρνουά" ποδοσφαίρου συμμετέχουν n ομάδες οι οποίες θα παίξουν όλες μεταξύ τους μία μόνο φορά. Για τη νίκη μιας ομάδας δίνονται 3 βαθμοί, για την ισοπαλία 2 βαθμοί και για την ήττα 1 βαθμό. Αν στο τέλος του "τουρνουά" ο συνολικός αριθμός των βαθμών που συγκέντρωσαν όλες οι ομάδες είναι 364, να βρεθεί ο αριθμός n των ομάδων που συμμετείχαν.

Πρόβλημα 3
Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z+13=0,$$

τότε να προσδιορίσετε το μέγιστο θετικό αριθμό m που είναι τέτοιος ώστε:

$$x+y+z+m\le 0.$$

Πρόβλημα 4.
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$, $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ και $\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma}=2\alpha$.

(i) Να αποδείξετε ότι: $\Delta\mathrm{A}+\mathrm{A}\Gamma<\Delta\mathrm{B}+\mathrm{B}\Gamma$.

(ii) Να βρείτε σημείο Μ πάνω στην ευθεία ΑΒ για το οποίο το άθροισμα $\Delta\mathrm{M}+\mathrm{M}\Gamma$ είναι το ελάχιστο δυνατό.

(iii) Για το σημείο Μ που θα βρείτε, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΜΓ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Αν ο z είναι μιγαδικός με $\mathrm{Re}(z) \neq 0$, $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ και

$$\frac{6z^4+5z^2+6}{3z^4+z^2+3} \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι: $|z|=1$.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε το σύστημα

$$\left\{\begin{aligned} x^3+3xy+y^3 &= 1 \\ x^3-x^2 &= y^3-y^2 \end{aligned}\right\} \qquad (\Sigma)$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται η ακολουθία α_ν με $\nu \in \mathbb{N}^*$, για την οποία ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 2\nu+1, \text{ για κάθε } \nu \in \mathbb{N}^* .$$

Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της ακολουθίας είναι επίσης όρος της ακολουθίας.

Πρόβλημα 4

. Έστω Σ εσωτερικό σημείο οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Οι ευθείες ΑΣ, ΒΣ και ΓΣ τέμνουν τις πλευρές ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ στα σημεία A', B' και Γ' αντίστοιχα, ώστε $\Sigma\mathrm{A}' \leq \mathrm{A}\Sigma$, $\Sigma\mathrm{B}' \leq \mathrm{B}\Sigma$ και $\Sigma\Gamma' \leq \Gamma\Sigma$.

Αν θέσουμε $x = (\Sigma\mathrm{AB})$, $y = (\Sigma\mathrm{B}\Gamma)$ και $z = (\Sigma\mathrm{A}\Gamma)$,να αποδείξετε ότι:

$$x^4+y^4+z^4 \leq 2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2 .$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΔΥΚΛΔΙΓΗΣ 2008
ΛΥΣΔΙΣ ΘΔΜΑΤΩΝ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αλ ηζρύεη όηη $8x+10y=1$, λα βξείηε ηελ ηηκή ηεο παξάζηαζεο
$$\mathrm{A}=2008-4\left(4x+5y\right)-48x-60y.$$

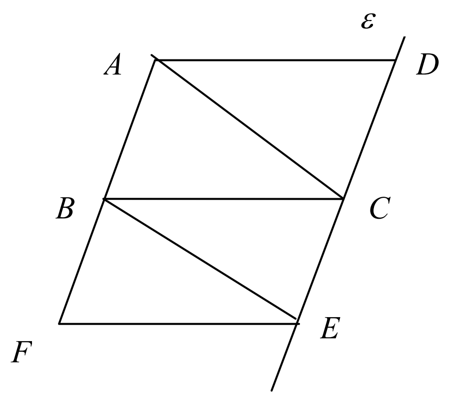
Λύση (1$^{\text{ος}}$ τρόπος)
$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=2008-4\left(4x+5y\right)-48x-60y\\ &=2008-2\cdot2\cdot\left(4x+5y\right)-6\cdot\left(8x+10y\right)\\ &=2008-2\cdot\left(8x+10y\right)-6\cdot\left(8x+10y\right)=2008-2\cdot1-6\cdot1=2000.\end{aligned}$$
(2$^{\text{ος}}$ τρόπος)
$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=2008-4\left(4x+5y\right)-48x-60y\\ &=2008-16x-20y-48x-60y\\ &=2008-64x-80y=2008-8\left(8x+10y\right)=2008-8\cdot1=2000.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2
Σε κία αηειή δηαίξεζε ελόο ηξηςήθηνπ θπζηθνύ αξηζκνύ a κε ηνλ αξηζκό 5, ην πειίθν είλαη κεγαιύηεξν θαηά 5 ηνπ εμαπιαζίνπ ηνπ ππνινίπνπ. Πνηεο είλαη νη δπλαηέο ηηκέο ηνπ αξηζκνύ a ;

Λύση
Αλ π είλαη ην πειίθν θαη υ είλαη ην ππόινηπν ηεο δηαίξεζεο, ηόηε ζύκθσλα κε ηελ ππόζεζε ηνπ πξνβιήκαηνο έρνπκε $\pi=6\upsilon+5$ θαη
$$a=5\left(6\upsilon+5\right)+\upsilon,\ \upsilon\in\{1,2,3,4\}\Leftrightarrow a=31\upsilon+25,\ \upsilon\in\{1,2,3,4\}.$$
Η ηηκή $\upsilon=0$ απνθιείεηαη γηαηί ε δηαίξεζε είλαη αηειήο.
- Γηα $\upsilon=1$, ιακβάλνπκε $a=31\cdot1+25=56$.
- Γηα $\upsilon=2$, ιακβάλνπκε $a=31\cdot2+25=87$.
- Γηα $\upsilon=3$, ιακβάλνπκε $a=31\cdot3+25=118$
- Γηα $\upsilon=4$, ιακβάλνπκε $a=31\cdot4+25=149$.

Άξα νη δπλαηέο ηηκέο ηνπ ηξηςήθηνπ αξηζκνύ a είλαη: $a=118$ ή $a=149$.

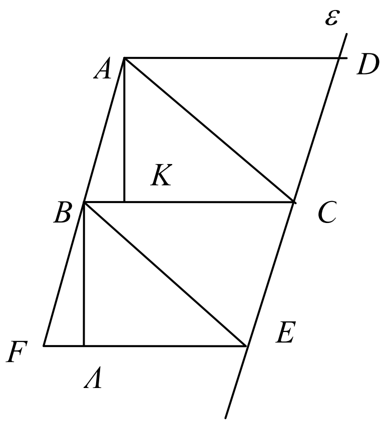
Πρόβλημα 3
Γίλεηαη ην ηξίγσλν ABC θαη ε επζεία ε πνπ πεξλάεη από ην C θαη είλαη παξάιιειε πξνο ηελ πιεπξά AB. Δπηπιένλ δίλεηαη όηη
$$CD=CE=AB.$$
Σηελ πξνέθηαζε ηεο AB πξνο ην B παίξλνπκε επζύγξακκν ηκήκα $BF=AB$.
α) Να βξεζνύλ ηα ηξίγσλα πνπ ππάξρνπλ ζην ζρήκα θαη έρνπλ ίζν εκβαδόλ.
Να δηθαηνινγήζεηε πιήξσο ηελ απάληεζή ζαο.



β) Τη κέξνο ηνπ εκβαδνύ ηνπ ζρήκαηνο $AFED$ είλαη ην εκβαδόλ ηνπ ηξηγώλνπ ABC;

Λύση

α) Τα ηεηξάπιεπξα $ABCD$ θαη $BFEC$ έρνπλ ηηο απέλαληη πιεπξέο ηνπο παξάιιειεο, νπόηε είλαη παξαιιειόγξακκα. Άξα ζα έρνπλ ηηο απέλαληη πιεπξέο ηνπο ίζεο, δειαδή είλαη $AD = BC = FE$. Έηζη ηα ηξίγσλα ABC, BFE, BEC θαη ACD έρνπλ ίζεο βάζεηο



Τα ηξίγσλα ABC θαη ACD έρνπλ πξνο ηηο ίζεο βάζεηο ηνπο ύςε ίζα πξνο ην ύςνο ηνπ παξαιιεινγξάκκνπ $ABCD$ σο πξνο ηε βάζε BC. Οκνίσο ηα ύςε ησλ ηξηγώλσλ BFE, BEC πξνο ηηο ίζεο βάζεηο ηνπο είλαη ίζα. Δπηπιένλ, αλ $AK \perp BC$ θαη $B\Lambda \perp FE$, ηόηε ηα ηξίγσλα ABK θαη $BF\Lambda$ είλαη ίζα, αθνύ είλαη νξζνγώληα πνπ έρνπλ ίζεο ππνηείλνπζεο θαη $A\hat{B}K = B\hat{F}\Lambda$ (εληόο εθηόο θαη επί ηα απηά ησλ παξαιιήισλ BC, EF κε ηέκλνπζα ηε BF). Άξα ζα έρνπλ θαη $AK = B\Lambda$. Δπνκέλσο ηα ηξίγσλα ABC, BFE, BEC θαη ACD έρνπλ ίζα ύςε πξνο ηηο ίζεο βάζεηο ηνπο, νπόηε ζα έρνπλ θαη ίζα εκβαδά.

(β) Δπεηδή $\mathrm{E}_{AFED} = \mathrm{E}_{ABC} + \mathrm{E}_{ACD} + \mathrm{E}_{BFE} + \mathrm{E}_{BEC} = 4\mathrm{E}_{ABC}$ έπεηαη όηη

$$\frac{\mathrm{E}_{ABC}}{\mathrm{E}_{AFED}} = \frac{\mathrm{E}_{ABC}}{4\mathrm{E}_{ABC}} = \frac{1}{4}.$$

Πρόβλημα 4

(α) Να απνδείμεηε όηη θάζε εμαςήθην ζεηηθό αθέξαην ηεο κνξθήο $\mathrm{A} = ababab$, όπνπ a, b ςεθία, δηαηξείηαη κε ην 3.

(β) Να πξνζδηνξίζεηε ηνπο εμαςήθηνπο ζεηηθνύο αθέξαηνπο ηεο κνξθήο $\mathrm{A} = ababab$, όπνπ a, b ςεθία, νη νπνίνη δηαηξνύληαη κε ην 5 θαη ην 9.

Λύση

(α) Τν άζξνηζκα ησλ ςεθίσλ ηνπ αξηζκνύ A είλαη ν αξηζκόο

$$\Sigma(\mathrm{A}) = a + b + a + b + a + b = 3 \cdot a + 3 \cdot b = 3 \cdot (a + b),$$

πνπ είλαη πνιιαπιάζην ηνπ 3, νπόηε ν αξηζκόο A δηαηξείηαη κε ην 3.

(β) Γηα λα δηαηξείηαη ν αξηζκόο A κε ην 5, πξέπεη θαη αξθεί ην ηειεπηαίν ςεθίν ηνπ b λα είλαη 0 ή 5. Έηζη δηαθξίλνπκε ηηο πεξηπηώζεηο

- Αλ $b=0$, ηόηε $\Sigma(\mathrm{A})=3\cdot(a+0)=3\cdot a$. Δπνκέλσο ν αξηζκόο Α δηαηξείηαη κε ην 9, όηαλ ν $3\cdot a$ είλαη πνιιαπιάζην ηνπ 9. Δπεηδή ν a είλαη ςεθίν κεγαιύηεξν ηνπ 0, απηό ζπκβαίλεη όηαλ $a\in\{3,6,9\}$, νπόηε πξνθύπηνπλ νη αξηζκνί $\mathrm{A}=303030$ ή Α=606060 ή 909090.
- Αλ $b=5$, ηόηε ην άζξνηζκα ησλ ςεθίσλ ηνπ Α είλαη $\Sigma(\mathrm{A})=3\cdot(a+5)$ θαη είλαη πνιιαπιάζην ηνπ 9, όηαλ $a+5\in\{3,6,9,12\}$, νπόηε αθνύ $1\le a\le 9$ έπεηαη όηη $a\in\{1,4,7\}$. Έηζη πξνθύπηνπλ νη αξηζκνί Α=151515 ή Α=454545 ή Α=757575.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Αλ ηζρύεη όηη $12b+26a=1$, λα βξείηε ηελ ηηκή ηεο παξάζηαζεο
$$\mathrm{A}=\frac{5}{12}-(24b+52a)^{-2}-(72b+156a)^{-1}.$$

Λύση
$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\frac{5}{12}-(24b+52a)^{-2}-(72b+156a)^{-1}\\&=\frac{5}{12}-\left[2\cdot(12b+26a)\right]^{-2}-\left[6(12b+26a)\right]^{-1}\\&=\frac{5}{12}-(2\cdot 1)^{-2}-(6\cdot 1)^{-1}=\frac{5}{12}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}-\frac{1}{6}=\frac{5}{12}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=0.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2.
Τξία ζρνιεία λνίθηαζαλ έλα αζιεηηθό θέληξν γηα ηηο αλάγθεο ηνπ καζήκαηνο ηεο Γπκλαζηηθήο θαη ζα πιεξώζνπλ 3000 επξώ κεληαίσο. Τα ρξήκαηα πνπ ζα πιεξώλεη θάζε ζρνιείν είλαη αλάινγα πξνο ηνλ αξηζκό ησλ κεζώλ πνπ ζα ρξεζηκνπνηεί ην αζιεηηθό θέληξν. Τν πξώην ζρνιείν ζα ρξεζηκνπνηεί ην αζιεηηθό θέληξν 12 κέξεο ην κήλα, ην δεύηεξν ζρνιείν ζα ρξεζηκνπνηεί ην αζιεηηθό θέληξν 10 κέξεο ην κήλα θαη ην ηξίην ζρνιείν θαηά ην $\frac{1}{2}$ ησλ εκεξώλ ηνπ πξώηνπ ζρνιείνπ ζπλ 2 κέξεο αθόκα. Πόζν ζα θνζηίζνπλ ζε θάζε ζρνιείν νη ηξεηο αξηζκώ ηνπ κήλεο;

Λύση
Τν ηξίην ζρνιείν ζα ρξεζηκνπνηεί ην αζιεηηθό θέληξν γηα $\frac{1}{2}\cdot 12+2=8$ εκέξεο.
Αλ x,y θαη z είλαη ην κεληαίν θόζηνο γηα ην πξώην, δεύηεξν θαη ηξίην ζρνιείν, αληίζηνηρα, ηόηε
$$\frac{x}{12}=\frac{y}{10}=\frac{z}{8}=\lambda,$$
νπόηε ιακβάλνπκε $x=12\lambda,\ y=10\lambda,\ z=8\lambda$ θαη έρνπκε
$$x+y+z=3000\Leftrightarrow 12\lambda+10\lambda+8\lambda=3000\Rightarrow\lambda=100.$$
Άξα έρνπκε:

$\frac{x}{12} = 100 \Rightarrow x = 12 \cdot 100 = 1200$ επξώ ην κήλα , ζα πι εξώλεη ην πξώην ζρνι είν, νπόηε γηα ηνπο ηξεηο κήλεο ζα πι εξώζ εη 3600 επξώ.

$\frac{y}{10} = 100 \Rightarrow y = 12 \cdot 100 = 1000$ επξώ ην κήλα , ζα πι εξώλεη ην δεύηεξν ζρνι είν, νπόηε γηα ηνπο ηξεηο κήλεο ζα πι εξώζ εη 3000 επξώ.

$\frac{z}{8} = 100 \Rightarrow z = 8 \cdot 100 = 800$ επξώ ην κήλα, ζα πι εξώλεη ην ηξίην ζρνι είν, νπόηε γηα ηνπο ηξεηο κήλεο ζα πι εξώζ εη 2400 επξώ.

Πρόβλημα 3

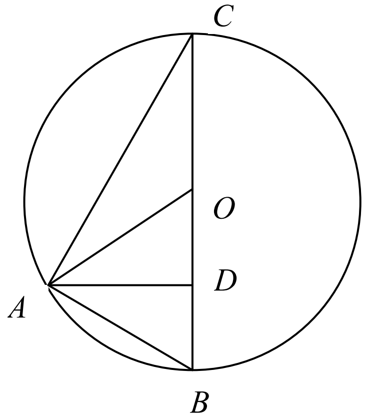
Σην δηπι αλό ζρήκα ην επζύγξακκν ηκήκα BC είλαη δηάκεηξνο ηνπ θύθι νπ θαη είλαη αθόκα $AB = 2\sqrt{7}$ θαη $AC = 6$.

α) Να βξεζεί ην κήθνο ηεο δηακέηξνπ ηνπ θύθι νπ.

β) Να βξεζεί ην κήθνο ηεο δηακέζνπ θαη ηνπ ύς νπο ηνπ ηξηγώλνπ ABC πνπ αληηζηνηρνύλ ζηελ πι εππξά BC .

γ) Αλ E είλαη ην εκβαδόλ ηνπ θπθι ηθνύ δίζθνπ θαη E_x είλαη ην εκβαδόλ ηνπ κέξνπο ηεο επηθάλεηαο ηνπ θπθι ηθνύ δίζθνπ πνπ βξίζθ εηαη εμσηεξηθά ηνπ ηξηγώλνπ ABC , λα απνδείμεηε όηη

$$\frac{E_x}{E} > \frac{2}{3}.$$



Λύση

α) Δπεηδή είλαη $\hat{A} = 90^\circ$, από ην Ππζαγόξεην ζεώξεκα έρνπκε:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + \left(2\sqrt{7}\right)^2 = 36 + 4 \cdot 7 = 64 .$$

Άξα είλαη $BC = 8$.

β) Η δηάκεζνο AO ηζνύηαη κε ηελ αθηίλα ηνπ θύθι νπ, νπόηε είλαη $AO = \frac{8}{2} = 4$.

Γηα ηελ εύξεζε ηνπ ύς νπο AD ρξεζηκνπνηνύκε ηνπο ηύπνπο γηα ην εκβαδόλ ηνπ νξζνγώληνπ ηξηγώλνπ ABC θαη έρνπκε:

$$\left(ABC\right) = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AD}{2} \Rightarrow 8 \cdot AD = 6 \cdot 2\sqrt{7} \Rightarrow AD = \frac{12\sqrt{7}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

γ) Έρνπκε $E = \pi R^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi.$

Η επηθάλεηα ηνπ θπθι ηθνύ δίζθνπ πνπ βξίζθ εηαη εμσηεξηθά ηνπ ηξηγώλνπ ABC έρεη εκβαδόλ $E_x = E - \left(ABC\right) = 16\pi - \frac{6 \cdot 2\sqrt{7}}{2} = 16\pi - 6\sqrt{7}$, νπόηε

$$\frac{E_x}{E} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{16\pi - 6\sqrt{7}}{16\pi} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow 48\pi - 18\sqrt{7} > 32\pi \Leftrightarrow 16\pi > 18\sqrt{7} .$$

$$\Leftrightarrow 8\pi > 9\sqrt{7} \Leftrightarrow 64\pi^2 > 81 \cdot 7 \Leftrightarrow \pi^2 > \frac{567}{64},$$

πνπ ηζρύεη, γηαηί είλαη $\pi^2 = 3{,}14^2 > 3^2 = 9$, ελώ $\frac{567}{64} < 9$.

Πρόβλημα 4

Έζησ ν ηξηςήθηνο ζεηηθόο αθέξαηνο αξηζκόο $\mathrm{A} = abc$, όπνπ a,b,c ςεθία κε $a \neq 0$. Αλ ελαιιάμνπκε ην πξώην κε ην ηξίην ςεθίν ηνπ, ηόηε πξνθύπηεη ν αθέξαηνο Β πνπ είλαη κηθξόηεξνο από ηνλ Α θαηά 396. Δπηπιένλ, αλ από ηνλ Α αθαηξέζνπκε 41 πξνθύπηεη αξηζκόο πνπ ηζνύηαη κε 50 θνξέο ην άζξνηζκα ησλ ςεθίσλ ηνπ Α. Να βξείηε ηνλ αξηζκό Α.

Λύση

Δίλαη $\mathrm{A} = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, νπόηε κεηά ηελ ελαιιαγή πξώηνπ θαη ηξίηνπ ςεθίνπ πξνθύπηεη ν αξηζκόο $\mathrm{B} = \overline{cba} = 100c + 10b + a$, νπόηε από ηα δεδνκέλα ηνπ πξνβιήκαηνο έρνπκε:

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = 396 \Leftrightarrow 99(a-c) = 396 \Leftrightarrow a - c = 4$$
$$\Leftrightarrow c = a - 4. \qquad (1)$$

Δπηπιένλ δίλεηαη όηη

$$\mathrm{A} - 41 = 50(a+b+c) \Leftrightarrow 100a + 10b + c - 41 = 50a + 50b + 50c$$
$$\Leftrightarrow 50a - 40b - 49c = 41,$$

νπόηε, ιόγσ ηεο (1), ιακβάλνπκε

$$50a - 40b - 49(a-4) = 41 \Leftrightarrow a = 40b - 155. \qquad (2)$$

Δπεηδή ν αθέξαηνο a είλαη ςεθίν κεγαιύηεξν ηνπ κεδελόο, έπεηαη όηη

$$1 \le a \le 9 \Leftrightarrow 1 \le 40b - 155 \le 9 \Leftrightarrow 156 \le 40b \le 164 \Leftrightarrow \frac{156}{40} \le b \le \frac{164}{40},$$

νπόηε ιακβάλνπκε $b = 4$. Έηζη από ηηο (1) θαη (2) πξνθύπηεη $a = 5$ θαη $c = 1$.

Άξα ν δεηνύκελνο αξηζκόο είλαη ν Α=541.

Α΄ ΛΥΚΔΙΟΥ

Πρόβλημα 1

(α) Να απινπνηήζεηε ηελ παξάζηαζε

$$\mathrm{K} = (x+y)^3 - (x-y)^3 - 6x^2y - y^3.$$

(β) Να απνδείμεηε όηη ν αξηζκόο

$$\mathrm{A} = 200004^3 - 199996^3 - 24 \cdot 200000^2 - 64$$

είλαη θύβνο αθεξαίνπ.

Λύση

(α) Έρνπκε

$$\begin{aligned}
\mathrm{K} &= (x+y)^3 - (x-y)^3 - 6x^2y - y^3 \\
&= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - \left(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3\right) - 6x^2y - y^3 \\
&= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3 - 6x^2y - y^3 \\
&= y^3.
\end{aligned}$$

(β) Έρνπκε

$$\mathrm{A} = 200004^3 - 199996^3 - 24 \cdot 200000^2 - 64$$
$$= (200000+4)^3 - (200000-4)^3 - 6 \cdot 200000^2 \cdot 4 - 4^3,$$

νπόηε, αλ ζέζνπκε $x = 200000$ θαη $y = 4$ ζηελ πξνεγνύκελε παξάζηαζε, απηή γίλεηαη $\mathrm{A} = y^3 = 4^3$.

Πρόβλημα 2
Αλ γηα ηνπο πξαγκαηηθνύο αξηζκνύο a,b ηζρύεη όηη

$$a^2 + b^2 - 2a = 2b + ab - 4,$$

λα βξεζνύλ νη ιύζεηο ηεο εμίζσζεο

$$(2x-a)^3 - (x-b)^3 - x^3 = 0 .$$

Λύση
Έρνπκε

$$a^2 + b^2 - 2a = 2b + ab - 4 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2^2 - ab - 2a - 2b = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-2)^2 + (2-a)^2\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow a - b = b - 2 = 2 - a = 0 \Leftrightarrow a = b = 2.$$

Τόηε ε εμίζσζε γίλεηαη

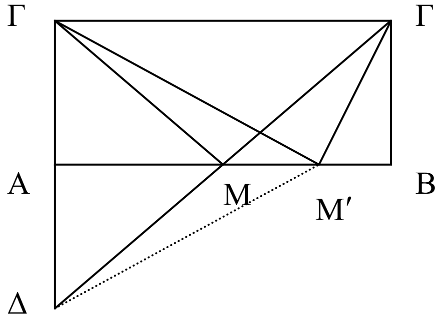
$$(2x-a)^3 - (x-b)^3 - x^3 = 0 \Leftrightarrow (2x-2)^3 - (x-2)^3 - x^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow (2x-2)^3 + (2-x)^3 + (-x)^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 3(2x-2)(2-x)(-x) = 0,$$

αθνύ ηζρύεη όηη $(2x-2)+(2-x)+(-x)=0,$ όπσο πξνθύπηεη άκεζα από ηελ ηαπηόηεηα ησλ θύβσλ. Η ηειεπηαία παξαγνληνπνίεζε κπνξεί επίζεο λα πξνθύςεη εύθνια , κεηά από πξάμεηο

Άξα ε εμίζσζε είλαη ηζνδύλακε κε ηελ

$$(2x-2)(2-x)(-x) = 0 \Leftrightarrow 2x-2=0 \text{ ή } 2-x=0 \text{ ή } -x=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=0.$$

Πρόβλημα 3
Γίλεηαη νξζνγώλην ΑΒΓΓ κε πιεπξέο $\mathrm{AB} = 2\alpha$ θαη $\mathrm{A\Delta} = \alpha$. Να απνδείμεηε όηη ην κέζνλ Μ ηεο πιεπξάο ΑΒ έρεη ηελ ηδηόηεηα :
ην άζξνηζκα $\Delta\mathrm{M} + \mathrm{M\Gamma}$ είλαη ην ειάρηζην δπλαηό γηα ηηο δηάθνξεο ζέζεηο ηνπ ζεκείνπ Μ πάλσ ζηελ επζεία ΑΒ.
Λύση



Τν ηξίγσλν ΜΒΓ είλαη νξζνγώλην ηζνζθειέο (ΜΒ = ΒΓ = α), νπόηε $B\hat{M}\Gamma = 45^\circ$. Δπεηδή είλαη

$$\Delta\hat{A}M + A\hat{M}\Gamma = 90^\circ + 180^\circ - A\hat{M}\Gamma = 225^\circ > 180^\circ,$$

ε πξνέθηαζε ηεο ΓΜ ηέκλεη ηελ πξνέθηαζε ηεο ΓΑ πξνο ην Α, έζησ ζην ζεκείν Δ. Τα ηξίγσλα ΜΒΓ θαη ΜΑΔ είλαη ίζα , γηαηί είλαη νξζνγώληα θαη έρνπλ $MA = MB$ θαη $A\hat{M}E = B\hat{M}\Gamma$ (σο θαηαθνξπθή). Άξα ζα έρνπλ θαη

$$AE = B\Gamma = A\Delta = \alpha.$$

Τόηε όκσο θαη ηα ηξίγσλα ΑΜΓ θαη ΑΜΔ είλαη ίζα, γηαηί είλαη νξζνγώληα ζην Α θαη έρνπλ ηελ πιεπξά ΑΜ θνηλή θαη ΑΔ= ΑΓ. Άξα ζα έρνπλ θαη ΓΜ = ΔΜ, νπόηε

$$\Delta M + M\Gamma = EM + M\Gamma = E\Gamma. \qquad (1)$$

Έζησ ηώξα ηπρόλ ζεκείν M' ηεο επζείαο ΑΒ δηαθνξεηηθό από ην ζεκείν Μ. Τόηε πξνθαλώο ηα νξζνγώληα ηξίγσλα $AM'\Delta$ θαη $AM'E$ είλαη ίζα , νπόηε ζα έρνπλ $AM' = EM'$ θαη

$$\Delta M' + M'\Gamma = EM' + M'\Gamma. \qquad (2)$$

Δπεηδή ε γξακκή $EM'\Gamma$ είλαη ηεζιαζκέλε, ελώ ε γξακκή $\Delta M\Gamma$ είλαη επζεία πνπ έρεη ηα ίδηα άθξα κε ηελ ηεζιαζκέλε $EM'\Gamma$, από ηηο (1) θαη (2) έπεηαη όηη

$$\Delta M + M\Gamma = E\Gamma < EM' + M'\Gamma = \Gamma M' + M'\Delta.$$

Πρόβλημα 4

Αλ νη αξηζκνί x, y, z είλαη ηέηνηνη ώζηε $x > 0, y+1 > 0, z+2 > 0$ θαη $x + y + z = 3$, λα απνδείμεηε όηη

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1} + \frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3} + \frac{x(z+2)}{x+z+2} \le 3.$$

Γηα πνηεο ηηκέο ησλ x, y, z ηζρύεη ε ηζόηεηα;

Λύση

Δπεηδή ηα θιάζκαηα ηνπ πξώηνπ κέινπο ηεο δεηνύκελεο αληζόηεηαο παξνπζηάδνπλ ζηνλ αξηζκεηή ην άζξνηζκα δύν ζεηηθώλ αξηζκώλ θαη ζηνλ παξαλνκαζηή ην γηλόκελό ηνπο, ζεσξνύκε ηε γλσζηή αληζόηεηα

$$(a+b)^2 \ge 4ab, \text{, γηα θάζε } a, b \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

ε νπνία αιεζεύεη, αθνύ είλαη ηζνδύλακε κε ηελ πξνθαλή αληζόηεηα $(a-b)^2 \ge 0$. Η ηζόηεηα αιεζεύεη όηαλ $a = b$. Γηα a, b ζεηηθνύο, από ηελ (1) ιακβάλνπκε

$$\frac{ab}{a+b} \le \frac{a+b}{4}, \qquad (2)$$

ελώ ε ηζόηεηα αιεζεύεη όηαλ $a = b$.

Από ηελ (2) γηα $a = x, b = y+1$ ιακβάλνπκε

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1} \le \frac{x+y+1}{4} \qquad (3)$$

θαη νκνίσο πξνθύπηνπλ νη αληζόηεηεο

$$\frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3} \le \frac{y+z+3}{4}, \qquad (4)$$

$$\frac{x(z+2)}{x+z+2} \le \frac{x+z+2}{4}. \qquad (5)$$

Με πξόζζεζε θαηά κέιε ησλ (3), (4) θαη (5) ιακβάλνπκε

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1}+\frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3}+\frac{x(z+2)}{x+z+2}\le\frac{2(x+y+z)+6}{4}$$
$$\frac{x(y+1)}{x+y+1}+\frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3}+\frac{x(z+2)}{x+z+2}\le\frac{2\cdot 3+6}{4}=3\,.$$

Η ηζόηεηα αιεζεύεη όηαλ $x=y+1=z+2$, νπόηε από ηελ ζρέζε $x+y+z=3$ πξνθύπηεη όηη $x+x-1+x-2=3 \Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=2$ θαη $y=1, z=0$.

Β΄ ΛΥΚΔΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να ιύζεηε ηελ εμίζσζε

$$x^2+2=3\sqrt{3x-2}\,.$$

Λύση (1ος τρόπος)

Θα αλαδεηήζνπκε ιύζεηο πνπ ηθαλνπνηνύλ ηελ αλίζσζε

$$3x-2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge\frac{2}{3}.$$

Δπεηδή θαη ηα δύν κέιε ηεο εμίζσζεο είλαη ζεηηθά, ε δεδνκέλε εμίζσζε είλαη ηζνδύλακε κε ηελ

$$\left(x^2+2\right)^2=9(3x-2) \Leftrightarrow x^4+4x^2-27x+22=0\,. \qquad (1)$$

Οη πηζαλέο αθέξαηεο ιύζεηο ηεο (1) είλαη νη: 1, -1, 2, -2, 11, -11, 22, -22.
Δύθνια δηαπηζηώλνπκε όηη ν αθέξαηνο 1 είλαη ξίδα ηεο εμίζσζεο θαη κέζσ ηνπ ζρήκαηνο Horner θαηαιήγνπκε ζηελ εμίζσζε

$$(x-1)\left(x^3+x^2+5x-22\right)=0.$$

Χξεζηκνπνηώληαο θαη πάιη ην ζρήκα Horner γηα $x=2$, γηα ην πνιπώλπκν $x^3+x^2+5x-22$ θαηαιήγνπκε ζηελ εμίζσζε

$$(x-1)(x+2)\left(x^2+3x+11\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x^2+3x+11=0$$
$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2,$$

αθνύ ην ηξηώλπκν $x^2+3x+11=0$ έρεη δηαθξίλνπζα $\Delta=-35<0$.

2ος τρόπος

Οκνίσο πξέπεη $x\ge\frac{2}{3}$. Χξεζηκνπνηνύκε ηνλ κεηαζρεκαηηζκό

$$y=\sqrt{3x-2},\ \text{γηα } x\ge\frac{2}{3}\,.$$

Τόηε ιακβάλνπκε

$$y\ge 0 \ \text{θαη}\ y^2=3x-2\ ,$$

ελώ ε δεδνκέλε εμίζσζε γίλεηαη

$$x^2+2=3y\,.$$

Έηζη έρνπκε ην ζύζηεκα

$$\left.\begin{cases}x^2=3y-2\\ y^2=3x-2\end{cases}\right\}\ \text{κε}\ x\ge\frac{2}{3}\ \text{θαη}\ y\ge 0\,.$$

Με αθαίξεζε ησλ δύν εμηζώζεσλ θαηά κέιε ιακβάλνπκε

$$x^2 - y^2 = 3(y-x) \Leftrightarrow (x-y)(x+y+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-y=0 \text{ ή } x+y+3=0 \Leftrightarrow x=y \text{ ή } x+y=-3.$$

Η εμίζσζε $x+y=-3$ είλαη αδύλαηε ιόγσ ησλ πεξηνξηζκώλ $x \geq \frac{2}{3}$ θαη $y \geq 0$.

Γηα $x=y$ έρνπκε ηελ εμίζσζε

$$x^2 = 3x-2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2.$$

Πρόβλημα 2

Σε έλα "ηνπξλνπά" πνδνζθαίξνπ ζπκκεηέρνπλ n νκάδεο νη νπνίεο ζα παίμνπλ όιεο κεηαμύ ηνπο κία θνξά. Γηα ηε λίθε κηαο νκάδαο δίλνληαη 3 βαζκνί, γηα ηελ ηζνπαιία 2 βαζκνί θαη γηα ηελ ήηηα 1 βαζκόο. Αλ ζην ηέινο ηνπ "ηνπξλνπά" ν ζπλνιηθόο αξηζκόο ησλ βαζκώλ πνπ ζπγθέληξσζαλ όιεο νη νκάδεο είλαη 364, λα βξεζεί ν αξηζκόο n ησλ νκάδσλ πνπ ζπκκεηείραλ.

Λύση

Έζησ όηη ζπκκεηέρνπλ n νκάδεο.

Η 1ε νκάδα παίδεη κε ηηο ππόινηπεο n-1 νκάδεο, νπόηε δηεμάγνληαη n-1 αγώλεο.

Η 2ε νκάδα παίδεη κε ηηο ππόινηπεο n-2 νκάδεο, νπόηε δηεμάγνληαη n-2 αγώλεο.

Η 3ε νκάδα παίδεη κε ηηο ππόινηπεο n-3 νκάδεο, νπόηε δηεμάγνληαη n-3 αγώλεο.

....

Η (n-1)ε νκάδα παίδεη κε ηελ ηειεπηαία 1 νκάδα , νπόηε δηεμάγεηαη 1 αγώλαο .

Άξα ν ζπλνιηθόο αξηζκόο ησλ αγώλσλ είλαη:

$$\Sigma = 1+2+3+\cdots+(n-1). \qquad (1)$$

Αλ γξάςνπκε ηηο ηζόηεηεο

$$\Sigma = 1 + 2 + ... + (n-2) + (n-1)$$

$$\Sigma = (n-1) + (n-2) + ... \quad 2 + 1$$

θαη ηηο πξνζζέζνπκε θαηά κέιε, ηόηε ιακβάλνπκε

$$2\Sigma = (n-1)\left[(n-1)+1\right] = (n-1)n \Rightarrow \Sigma = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Σε θάζε αγώλα ν ζπλνιηθόο αξηζκόο ησλ βαζκώλ πνπ δίλνληαη ζηηο δπν νκάδεο πνπ ζπκκεηέρνπλ (αλεμάξηεηα από ην απνηέιεζκα) είλαη 4. Άξα ν ζπλνιηθόο αξηζκόο ησλ αγώλσλ είλαη:

$$\frac{364}{4} = 91 \quad . \qquad (2)$$

Από ηηο ζρέζεηο (1) θαη (2) έρνπκε:

$$\frac{(n\text{-}1)n}{2} = 91 \Leftrightarrow \frac{(n\text{-}1)n}{2} = 7 \cdot 13 \Leftrightarrow \frac{(n\text{-}1)n}{2} = \frac{13 \cdot 14}{2} \Leftrightarrow n = 14.$$

Άξα ζπκκεηείραλ 14 νκάδεο.

Πρόβλημα 3.

Αλ γηα ηνπο πξαγκαηηθνύο αξηζκνύο x, y, z ηζρύεη

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z + 13 = 0,$$

λα πξνζδηνξίζεηε ηελ κέγηζηε ζεηηθό αξηζκό m πνπ είλαη ηέηνηνο ώζηε:

$$x+y+z+m \leq 0.$$

Λύση

Έρνπκε

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z+13=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2+4y+4+z^2+6z+9=1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=1$$

θαη ζέηνληαο $a=x+1$, $\beta=y+2$ θαη $\gamma=z+3$, έρνπκε ηειηθά

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

Ιζρύεη όκσο ε αληζόηεηα

$$3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\ge(\alpha+\beta+\gamma)^2,$$

πνπ είλαη ηζνδύλακε κε ηε γλσζηή αληζόηεηα $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\ge\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$.

Η ηζόηεηα ηζρύεη όηαλ $\alpha=\beta=\gamma$.

Δπνκέλσο έρνπκε

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2\le 3\cdot 1 \Leftrightarrow |\alpha+\beta+\gamma|\le\sqrt{3} \Leftrightarrow |x+y+z+6|\le\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\le x+y+z+6\le\sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3}-\sqrt{3}\le x+y+z+6-\sqrt{3}\le 0.$$

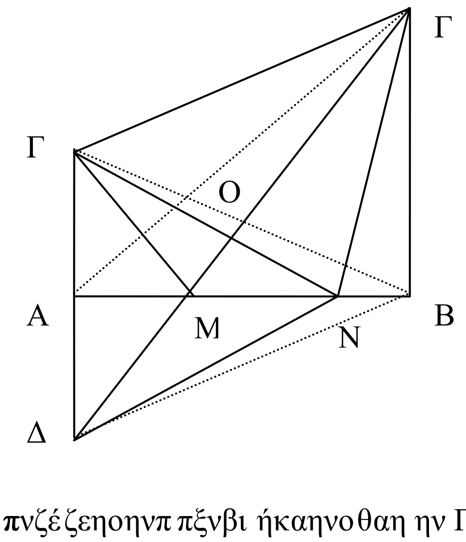
Δπεηδή ε ηζόηεηα ηζρύεη γηα $x+1=y+2=z+3=\frac{\sqrt{3}}{3}$, έπεηαη όηη ν δεηνύκελνο κέγηζηνο ζεηηθόο αξηζκόο είλαη ν $m=6-\sqrt{3}$.

Πρόβλημα 4

Γίλεηαη ηξαπέδην ΑΒΓΓ κε $\hat{A}=\hat{B}=90^\circ$, $A\Delta=\alpha$ θαη $AB=B\Gamma=2\alpha$.

- **(i)** Να απνδείμεηε όηη: $\Delta A+A\Gamma<\Delta B+B\Gamma$.
- **(ii)** Να βξείηε ζεκείν Μ πάλσ ζηελ επζεία ΑΒ γηα ην νπνίν ην άζξνηζκα $\Delta M+M\Gamma$ είλαη ην ειάρηζην δπλαηό.
- **(iii)** Γηα ην ζεκείν Μ πνπ ζα βξείηε, λα ππνινγίζεηε ην εκβαδόλ ηνπ ηξηγώλνπ ΓΜΓ.

Λύση



(i) Σύκθσλα κε ηηο ππνζέζεηο ηνπ πξνβιήκαηνο θαη ην Ππζαγόξεην ζεώξεκα έρνπκε

$\Delta A+A\Gamma=\alpha+2\alpha\sqrt{2}=\alpha\left(1+2\sqrt{2}\right)$, $\Delta B+B\Gamma=\alpha\sqrt{5}+2\alpha=\alpha\left(2+\sqrt{5}\right)$, νπόηε

$$\Delta A+A\Gamma<\Delta B+B\Gamma \Leftrightarrow \alpha\left(1+2\sqrt{2}\right)<\alpha\left(2+\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow 2\sqrt{2}<1+\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 8<6+2\sqrt{5} \Leftrightarrow 1<\sqrt{5},$$ πνπ ηζρύεη

(ii) Αλ Δ είλαη ην ζπκκεηξηθό ηνπ Γ σο πξνο ηελ επζεία ΑΒ θαη ην επζύγξακκν ηκήκα ΔΓ ηέκλεη ηελ επζεία ΑΒ ζην ζεκείν Μ, ηόηε $\Delta M = ME$ θαη

$$\Delta M + M\Gamma = EM + M\Gamma = E\Gamma . \qquad (1)$$

Σηε ζπλέρεηα ζεσξνύκε ηπρόλ ζεκείν Ν πάλσ ζηελ επζεία ΑΒ, δηαθνξεηηθό από ην Μ, νπόηε ζα ηζρύεη ΓΝ= ΝΔ θαη

$$\Delta N + N\Gamma = EN + N\Gamma \ . \qquad (2)$$

Δπεηδήε γξακκή ΔΜΓ είλαη επζεία, ελώ ε γξακκή ΔΝΓ έρεη ηα ίδηα άθξα κε ηελ ΔΜΓ θαη είλαη ηεζιαζκέλε, έπεηαη όηη

$$\Delta M + M\Gamma = E\Gamma < EN + N\Gamma = \Delta N + N\Gamma .$$

Άξα ην ζεκείν Μ είλαη ηδεηνύκελν ώζηε ην άζξνηζκα ΓΜ + ΜΓ λα είλαη ην ειάρηζην δπλαηό.

(iii) Δπεηδή είλαη $\Delta E = 2\alpha = B\Gamma$ θαη $\Delta E \perp AB,\ B\Gamma \perp AB \Rightarrow \Delta E \parallel B\Gamma$, ην ηεηξάπιεπξν ΓΔΒΓ είλαη παξαιιειόγξακκν. Αλ νη δηαγώληνη ηνπ ΓΔΒΓ ηέκλνληαη ζην Ο, ηόηε ην Ο είλαη ην κέζν ηεο ΓΒ θαη ε ΔΟ είλαη δηάκεζνο ηνπ ηξηγώλνπ ΓΔΒ. Δπίζεο ε ΑΒ είλαη δηάκεζνο ηνπ ηξηγώλνπ ΓΔΒ, αθνύ ηζρύεη ΑΓ =ΑΔ = α . Άξα ην ζεκείν ηνκήο Μ ησλ δύν δηακέζσλ ηνπ ηξηγώλνπ ΓΔΒ είλαη ην βαξύθεληξν ηνπ ηξηγώλνπ ΓΔΒ, νπόηε ζα ηζρύεη:

$$AM = \frac{AB}{3} = \frac{2\alpha}{3} .$$

Άξα έρνπκε:

$$(\Delta M\Gamma) = (\Delta E\Gamma) - (\Delta EM) = \frac{1}{2}\cdot 2\alpha \cdot 2\alpha - \frac{1}{2}\cdot 2\alpha \cdot \frac{2\alpha}{3} = \frac{4\alpha^2}{3}.$$

Γηαθνξεηηθά έρνπκε

$$MB = 2\alpha - \frac{2\alpha}{3} = \frac{4\alpha}{3} \text{ θαη}$$

$$\begin{aligned}(\Delta M\Gamma) &= (AB\Gamma\Delta) - (\Delta AM) - (MB\Gamma)\\ &= \frac{(\alpha + 2\alpha)\cdot 2\alpha}{2} - \frac{1}{2}\cdot \alpha \cdot \frac{2\alpha}{3} - \frac{1}{2}\cdot 2\alpha \cdot \frac{4\alpha}{3}\\ &= 3\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{3} - \frac{4\alpha^2}{3} = \frac{4\alpha^2}{3}.\end{aligned}$$

Γ΄ ΛΥΚΔΙΟΥ

Πρόβλημα 1 Δάλ ν z είλαη κηγαδηθόο κε $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z) \neq 0$ θαη

$$\frac{6z^4 + 5z^2 + 6}{3z^4 + z^2 + 3} \in \mathbb{R} ,$$

λα απνδείμεηε όηη $|z| = 1$.

Λύση (1ος τρόπος)

Αλ ζέζνπκε

$$w = \frac{6z^4 + 5z^2 + 6}{3z^4 + z^2 + 3},$$

ηόηε έρνπκε

$$w = \overline{w} \Leftrightarrow \frac{6z^4 + 5z^2 + 6}{3z^4 + z^2 + 3} = \frac{6\overline{z}^4 + 5\overline{z}^2 + 6}{3\overline{z}^4 + \overline{z}^2 + 3},$$

ε νπνία κεηά από ηηοπξάμεηοθαηι ακβάλνληαο πιός ε όηη $z\overline{z}=|z|^2$ θαηαι ήγεη ζηελ

ηζόηεηα $$\left(|z|^4-1\right)\left(z^2-\overline{z}^2\right)=0 \Rightarrow |z|=1,$$

αθνύ ι όγσ ηεο πιόζεζεο $\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)\neq 0$ έπεηαη όηη $z^2-\overline{z}^2\neq 0$.

($2^{ος}$ τρόπος)

Δθηει ώληαο ηε δηάξεζε έρνπκε,

$$\frac{6z^4+5z^2+6}{3z^4+z^2+3}=2+\frac{3z^2}{3z^4+z^2+3}\in\mathbb{R}$$

δει αδή ηζνδύλακα

$$\frac{3z^2}{3z^4+z^2+3}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{3z^4+z^2+3}{3z^2}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z^2+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z^2+\frac{1}{z^2}\in\mathbb{R}.$$

Άξα έρνπκε

$$z^2+\frac{1}{z^2}=\overline{z}^2+\frac{1}{\overline{z}^2}\Leftrightarrow z^2-\overline{z}^2-\left(\frac{1}{\overline{z}^2}-\frac{1}{z^2}\right)=0\Leftrightarrow\left(z^2-\overline{z}^2\right)\left(1-\frac{1}{|z|^4}\right)=0.$$

Όκσο, ι όγσ ηεο πιόζεζεο $\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)\neq 0$ έπεηαη όηη $z^2-\overline{z}^2\neq 0$, νπόηε ηει ηθά ι ακβάλνπκε $|z|^4=1\Rightarrow|z|=1$.

Πρόβλημα 2

Να ι ύζεηε ην ζύ ζηεκα

$$\left\{\begin{matrix} x^3+3xy+y^3=1 \\ x^3-x^2=y^3-y^2 \end{matrix}\right\} \qquad (\Sigma)$$

Λύση

Η εμίζσ ζε $x^3+3xy+y^3=1$ είλαη ηζνδύλακε κε ηελ εμίζσ ζε

$$x^3+y^3+(-1)^3=3xy(-1),$$

ε νπνία από ηελ ηαπηόηεηα ηνπ Euler είλαη ηζνδύλακε κε ηηο εμηζώζεηο

$$x+y-1=0 \text{ ή } x=y=-1.$$

Άξα έρνπκε

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} x+y=1 \\ x^3-x^2=y^3-y^2 \end{matrix}\right\}(\Sigma_1) \text{ ή } \left\{\begin{matrix} x=y=-1 \\ x^3-x^2=y^3-y^2 \end{matrix}\right\}(\Sigma_2).$$

Τν ζύ ζηεκα (Σ_2) έρεη ηει ύζε $(x,y)=(-1,-1)$, ελώ

$$(\Sigma_1)\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} x+y=1 \\ x^3-y^3-\left(x^2-y^2\right)=0 \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} x+y=1 \\ (x-y)\left(x^2+xy+y^2-x-y\right)=0 \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} x+y=1 \\ x-y=0 \end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix} x+y=1 \\ x^2+xy+y^2-x-y=0 \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\ (x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \text{ ή } \left\{\begin{matrix} x+y=1 \\ (x+y)^2-xy-(x+y)=0 \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\ (x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \text{ ή } \left\{\begin{matrix} x+y=1 \\ xy=0 \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \text{ ή } (x,y)=(1,0) \text{ ή } (x,y)=(0,1).$$

Πρόβλημα 3

Γίλεηαη εαθνινπζία α_{ν} κε $\nu \in \mathbb{N}^*$, γηαηελ νπνία ηζρύεη:

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_{\nu} = 2\nu + 1, \text{ γηαθάζε } \nu \in \mathbb{N}^* .$$

Να απνδείμεηε όηηηην γηλόκελν δύν νπνησλδήπνηε δηαδνρηθώλ όξσλ ηεο αθνινπζίαο είλαη επίζεο όξνο ηεο αθνινπζίαο.

Λύση

Δθαξκόδνληαο ηελ αλαδξνκηθή ζρέζε $\alpha_{\nu+1} - \alpha_{\nu} = 2\nu + 1$, γηα $\nu = 1, 2, \ldots, (\nu-1)$ έρνπκε:

$$\text{Γηα } \nu = 1 \text{ έρνπκε } \alpha_2 - \alpha_1 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$\text{Γηα } \nu = 2 \text{ έρνπκε } \alpha_3 - \alpha_2 = 2 \cdot 2 + 1$$

....

$$\text{Γηα } \nu - 1 \text{ έρνπκε: } \alpha_{\nu} - \alpha_{\nu-1} = 2(\nu-1) + 1.$$

Πξνζζέηνληαο θαηά κέιε ηηο παξαπάλσ ηζόηεηεο ιακβάλνπκε:

$$\alpha_{\nu} - \alpha_1 = 2\big(1 + 2 + 3 + \cdots + (\nu - 1)\big) + \nu - 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{\nu} - \alpha_1 = 2\frac{\nu(\nu-1)}{2} + \nu - 1 \Leftrightarrow \alpha_{\nu} - \alpha_1 = \nu(\nu-1) + \nu - 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{\nu} = \nu^2 - 1 + \alpha_1 . \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{\nu} = \nu^2 - \ell, \text{ όπνπ } \ell = 1 - a_1 . \qquad (2)$$

Γηα ην γηλόκελν δύν νπνησλδήπνηε δηαδνρηθώλ όξσλ ηεο αθνινπζίαο έρνπκε:

$$\alpha_m \cdot \alpha_{m+1} = \left(m^2 - \ell\right)\left((m+1)^2 - \ell\right) = \left(m^2 - \ell\right)\left((m^2 + 2m + 1 - \ell\right) =$$

$$= m^4 + 2m^3 + m^2 - \ell m^2 - \ell m^2 - 2\ell m - \ell + \ell^2 =$$

$$= \underbrace{m^4 + m^2 + \ell^2 + 2m^3 - 2\ell m^2 - 2\ell m} - \ell = \left(m^2 + m - \ell\right)^2 - \ell = \alpha_{m^2+m-\ell} .$$

Πρόβλημα 4

Έζησ Σ εζσηεξηθό ζεκείν νμπγσλίνπ ηξηγώλνπ $AB\Gamma$. Οη επζείεο $A\Sigma$, $B\Sigma$ θαη $\Gamma\Sigma$ ηέκλνπλ ηηο πιεπξέο $B\Gamma$, $A\Gamma$ θαη AB ζηα ζεκεία A', B' θαη Γ' αληίζηνηρα, ώζηε $\Sigma A' \leq A\Sigma$, $\Sigma B' \leq B\Sigma$ θαη $\Sigma\Gamma' \leq \Gamma\Sigma$.

Αλ ζέζνπκε $x = (\Sigma AB)$, $y = (\Sigma B\Gamma)$ θαη $z = (\Sigma A\Gamma)$, λα απνδείμεηε όηη:

$$x^4 + y^4 + z^4 \leq 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 .$$

Λύση

Από ην δεδνκέλν ζεκείν Σ ζεσξνύκε παξάιιειε πξνο ηε $B\Gamma$ πνπ ηέκλεη ην ύςνο $A\Delta$ ζην ζεκείν T. Τόηε πξνθαλώο $(\Sigma B\Gamma) = (TB\Gamma)$.

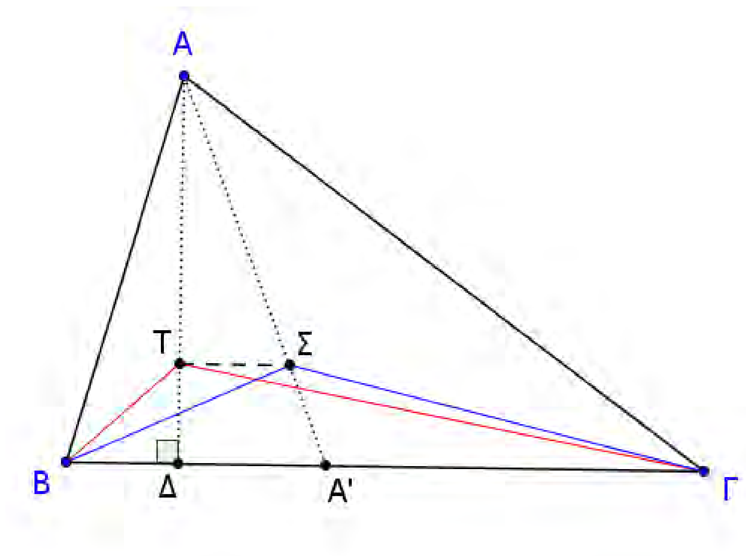
Από ηε ζρέζε $\Sigma A' \leq A\Sigma$ πξνθύπηεη πξνθαλώο

$$T\Delta \leq TA. \qquad (1)$$

Από ηε ζρέζε (1) έρνπκε:

$$T\Delta \cdot \Delta B \leq TA \cdot \Delta B \Longleftrightarrow \frac{1}{2} T\Delta \cdot \Delta B \leq \frac{1}{2} TA \cdot \Delta B \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (T\Gamma B) \leq (TAB). \qquad (2)$$



Από ηε ζρέζε (1) έρνπκε επίζεο:

$$TΔ\cdot ΔΓ \le TA\cdot ΔΓ \Leftrightarrow \frac{1}{2}TΔ\cdot ΔΓ \le \frac{1}{2}TA\cdot ΔΓ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\mathrm{TΔΓ}) \le (\mathrm{TAΓ}) \qquad (3)$$

Πξνζζέηνληαο ηηο ζρέζεηο (2) θαη (3) έρνπκε:

$$(TΔB)+(TΔΓ)\le(TAB)+(TAΓ)\Leftrightarrow(TBΓ)\le(TAB)+(TAΓ)$$

$$\Leftrightarrow (TBΓ)\le(ABΓ)-(TBΓ)$$

θαη ζε ζπλδπαζκό κε ηε ζρέζε $(ΣBΓ)=(TBΓ)$, παίξλνπκε ηειηθά :

$$(ΣBΓ)\le(ABΓ)-(ΣBΓ)\Leftrightarrow(ΣBΓ)\le(ΣAB)+(ΣAΓ).$$

Με όκνην ηξόπν απνδεηθλύνπκε όηη;

$$(ΣAB)\le(ΣBΓ)+(ΣAΓ) \text{ θαη } (ΣAΓ)\le(ΣAB)+(ΣBΓ).$$

Δπεηδή έρνπκε ζέζεη $x=(ΣAB)$, $y=(ΣBΓ)$ θαη $z=(ΣAΓ)$, από ηηο ηξεηο ηειεπηαίεο αληζώζεηο έρνπκε:

$$0<x\le y+z,\ 0<y\le x+z \text{ θαη } 0<z\le x+y. \qquad (4)$$

Αξθεί ηώξα λα απνδείμνπκε όηη:

$$x^4+y^4+z^4\le 2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2+2x^2z^2-(2xz)^2\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+z^2-y^2\right)^2-(2xz)^2\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+z^2+2xz-y^2\right)\cdot\left(x^2+z^2-2xz-y^2\right)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((x+z)^2-y^2\right)\cdot\left((x-z)^2-y^2\right)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\cdot(x+z-y)(x+y-z)\cdot(x-y-z)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\cdot(x+z-y)(x+y-z)\cdot(y+z-x)\ge 0,$$

πνπ ηζρύεη, ιόγσ ησλ ζρέζεσλ (4).

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

Αθήνα, 17 Ιανουαρίου 2009

Αγαπητοί μαθητές,

Σας καλωσορίζουμε στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (ΕΜΕ) "**ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ**". Σήμερα δεν δίνετε τις συνηθισμένες εξετάσεις. Συμμετέχετε σε έναν αγώνα του πνεύματος. Και μόνο η απόφασή σας για συμμετοχή και η πρόκρισή σας από τον προηγούμενο διαγωνισμό **ΘΑΛΗΣ**" είναι μια επιτυχία. Με την ευκαιρία αυτής μας της επικοινωνίας θα θέλαμε να σας πληροφορήσουμε για τα εξής :

Στα περιοδικά της ΕΜΕ **Ευκλείδης Α΄** και **Ευκλείδης Β΄** δημοσιεύονται εκτός των άλλων θεμάτων ανά τάξη και θέματα με τις λύσεις τους από Διεθνείς Μαθηματικούς Διαγωνισμούς.

Επίσης έχουν εκδοθεί βιβλία της ΕΜΕ με τα θέματα των Διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων (2 τεύχη), Βαλκανικών Μαθηματικών Ολυμπιάδων (1984-2008), Θεωρίας αριθμών και τα βιβλία με τα Θέματα των Ελληνικών Μαθηματικών Διαγωνισμών 1997-2007 σε 2 τεύχη.

Επιπλέον η ΕΜΕ μελετά τη διεξαγωγή Θερινού Σχολείου διάρκειας μιας εβδομάδας προς το τέλος Ιουλίου 2009. Τα μαθήματα θα επικεντρωθούν σε ειδικά Κεφάλαια της σχολικής ύλης και σε θέματα Μαθηματικών Ολυμπιάδων. Λεπτομέρειες θα ανακοινωθούν στον επόμενο διαγωνισμό και στην ιστοσελίδα της ΕΜΕ.

Για το νέο έτος το Δ.Σ. της ΕΜΕ σας εύχεται ολόψυχα καλή χρονιά, προσωπική και οικογενειακή ευτυχία.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΓΙΑ ΤΟ Δ.Σ.
ΤΗΣ Ε.Μ.Ε.

Ο Πρόεδρος
Καθηγητής Νικόλαος Αλεξανδρής

Ο Γενικός Γραμματέας
Ιωάννης Τυρλής

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

Αθήνα 17 Ιανουαρίου 2009

Προς τον

κ. ……………………………………………

Αγαπητέ/ή συνάδελφε,

Το Διοικητικό Συμβούλιο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και η Επιτροπή Διαγωνισμών σας **ευχαριστεί θερμά** για τη βοήθεια που προσφέρατε **εθελοντικά** στη διεξαγωγή του **69ου Πανελλήνιου Μαθητικού Διαγωνισμού στα Μαθηματικά** «**Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ**».

Για το Διοικητικό Συμβούλιο
της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ο Πρόεδρος	Ο Γενικός Γραμματέας
Καθηγητής Νικόλαος Αλεξανδρής	Ιωάννης Τυρλής

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $4x-5y=10$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\left(4x+5y\right)-36x+35y+\left(8:4-2\right)^2.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές $\mathrm{AB}=3x-2$, $\mathrm{B\Gamma}=x+12$ και $\Gamma\mathrm{A}=2x+8$, όπου $x\geq 2$. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Υπάρχει τιμή του x για την οποία το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές ΑΒ = ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ μήκους α και β, αντίστοιχα. Αν αυξήσουμε το μήκος α κατά 20% και το μήκος β κατά 30%, να βρεθεί πόσο επί τοις εκατό θα αυξηθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ($\mathrm{A\Gamma}>\mathrm{AB}$) με τη γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ διπλάσια της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ και τη γωνία $\hat{\mathrm{B}}$ μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{\Gamma}$ κατά είκοσι μοίρες. Δίνονται ακόμα το ύψος του AH και η διχοτόμος του $\mathrm{A\Delta}$.

(α) Αν $\mathrm{A}',\mathrm{B}',\Gamma'$ είναι τα συμμετρικά των κορυφών Α, Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ, ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία του ύψους AH, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABB' και $\mathrm{A\Gamma\Gamma}'$ είναι ισοσκελή και να βρείτε τις γωνίες τους.

(β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζεται από το ύψος ΑΗ και τη διχοτόμο ΑΔ.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $a+2b=\dfrac{1}{2}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\left(16a+32b\right)^{-2}-\left(32a+64b\right)^{-3}+\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}:3^4\right]^3.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2+4y^2=\frac{20}{3}xy,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{x+2y}{x-2y}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να βρείτε τους διψήφιους θετικούς ακέραιους $n=\overline{ab}=10a+b,$ όπου a,b ψηφία με $a\neq 0$, που έχουν την ιδιότητα:

Το γινόμενο των ψηφίων τους αυξημένο κατά το τετραπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων τους, ισούται με τον αριθμό.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε δύο χορδές ΑΒ και ΓΔ που είναι κάθετες μεταξύ τους και δεν περνάνε από το κέντρο του κύκλου. Οι δύο χορδές τέμνονται στο σημείο Κ, έτσι ώστε να είναι $\mathrm{AK}>\mathrm{KB}$. Έστω Μ το συμμετρικό του Β, ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΓΔ.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να απλοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση

$$\mathrm{A}=\frac{\left(x^2-\frac{1}{y^2}\right)^m\cdot\left(y+\frac{1}{x}\right)^{n-m}\cdot y^{m+n}}{\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)^n\cdot\left(x-\frac{1}{y}\right)^{m-n}\cdot x^{m+n}},$$

όπου m,n ακέραιοι και x,y πραγματικοί αριθμοί με $xy\neq 0,\ xy\neq 1$ και $xy\neq -1$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί α , β , αν γνωρίζετε ότι ισχύουν:

$$|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta| \quad \text{και} \quad \alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+2\alpha^2\beta^2-\alpha-\beta=37.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 3α. Πάνω στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ λαμβάνουμε σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $\mathrm{Ε\Gamma}=\mathrm{Ζ\Delta}=\alpha$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΖ και ΔΕ τέμνονται στο σημείο Κ. Αν η ευθεία ΑΚ τέμνει την ευθεία ΕΖ στο σημείο Λ, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{Α\Lambda}\perp\mathrm{ΕΖ}$. ***Μονάδες 3***

(β) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΛ συναρτήσει του α. ***Μονάδες 2***

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $\overline{abc}=100a+10b+c$, όπου a,b,c ψηφία με $a\neq 0$, ο οποίος ικανοποιεί την ισότητα:

$$\overline{abc}=\left(a+b^2+c^3\right)^2.$$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα

$$x^2 + 4y^2 = 4a^2$$
$$ax - y = 2a,$$

έχει μία μόνο λύση.

Για τις τιμές του a που θα βρείτε, να λύσετε το σύστημα.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Έστω $S_1 = x + y + z$ και $S_2 = xy + yz + zx$, όπου $x, y, z \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε να ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2\left(y+z\right) + y^2\left(z+x\right) + z^2\left(x+y\right) = 6.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $3xyz = S_1S_2 - 6$. ***Μονάδες 4***

(β) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z, αν είναι $S_1 = 3$ και $S_2 = 2$. ***Μονάδες 1***

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ$. Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου και $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3$ είναι τα κέντρα των εγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ , ΑΒΓ, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: $\mathrm{AK}_3 = \mathrm{K}_1\mathrm{K}_2$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4.

Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού k, $1 < k < 30$ και μη σταθερό πολυώνυμο $P\left(x\right)$ με πραγματικούς συντελεστές, έτσι ώστε να ισχύει:

$$\left(x-k\right)P\left(3x\right) = k\left(x-1\right)P\left(x\right),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου m για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = -3x + 6,\ g(x) = mx,\ m \in \mathbb{R}$, και τον άξονα των x ισούται με 3. ***Μονάδες 5***

Πρόβλημα 2

Έστω Η το ορθόκεντρο και Ο το περίκεντρο οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Έστω ακόμη Δ, Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία Δ_1, E_1 και Z_1 έτσι ώστε:

$$\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}\Delta},\ \overrightarrow{\mathrm{OE}_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OE}} \text{ και } \overrightarrow{\mathrm{OZ}_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}, \text{ με } \lambda > 1.$$

Ο κύκλος C_α που έχει κέντρο το σημείο Δ_1 και διέρχεται από το Η τέμνει την ευθεία ΒΓ στα σημεία A_1 και A_2. Όμοια, οι κύκλοι $C_\beta(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_1\mathrm{H})$ και $C_\gamma(\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_1\mathrm{H})$ ορίζουν τα σημεία B_1, B_2 και Γ_1, Γ_2 στις ευθείες ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \Gamma_1$ και Γ_2 είναι ομοκυκλικά.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε την τιμή του θετικού ακέραιου k και μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού n, έτσι ώστε να ισχύει:

$$(x-k)P(3x) = k(x-1)P(x),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ***Μονάδες 5***

Πρόβλημα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών, το σύνολο των πραγματικών αριθμών $(f(\mathbb{R}) = \mathbb{R})$. Αν για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση:

$$f\big(f(f(x)) - f(y)\big) = f(x) - f\big(f(y)\big),$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1.
Αν ισχύει ότι $4x-5y=10$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=(4x+5y)-36x+35y+(8:4-2)^2.$$

Λύση
Η παράσταση γίνεται:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=(4x+5y)-36x+35y+(8:4-2)^2\\&=4x+5y-36x+35y+(2-2)^2\\&=-32x+40y+0^2=-8(4x-5y)+0=-8\cdot 10=-80.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2
Τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές $\mathrm{AB}=3x-2$, $\mathrm{B\Gamma}=x+12$ και $\Gamma\mathrm{A}=2x+8$, $x\geq 2$. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Υπάρχει τιμή του x για την οποία το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο;

Λύση
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, αν ισχύει:

$$\begin{aligned}&\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma} \text{ ή } \mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma} \text{ ή } \mathrm{A\Gamma}=\mathrm{B\Gamma}\\&\Leftrightarrow 3x-2=x+12 \text{ ή } 3x-2=2x+8 \text{ ή } 2x+8=x+12\\&\Leftrightarrow 2x=14 \text{ ή } x=10 \text{ ή } x=4 \Leftrightarrow x=7 \text{ ή } x=10 \text{ ή } x=4.\end{aligned}$$

Από τη λύση των παραπάνω εξισώσεων διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει τιμή του x που να επαληθεύει την ισότητα $\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{A\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ δεν μπορεί να είναι ισόπλευρο.

Πρόβλημα 3
Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές ΑΒ = ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ μήκους α και β, αντίστοιχα. Αν αυξήσουμε το μήκος α κατά 20% και το μήκος β κατά 30%, να βρεθεί πόσο επί τοις εκατό θα αυξηθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου.

Λύση
Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $\mathrm{E}=\alpha\beta$. Μετά την αύξηση του μήκους των πλευρών του τα μήκη των πλευρών του νέου ορθογωνίου είναι:

$$\alpha' = \alpha + \frac{20\alpha}{100} = \alpha + \frac{2\alpha}{10} = \frac{12\alpha}{10} \text{ και } \beta' = \beta + \frac{30\beta}{100} = \beta + \frac{3\beta}{10} = \frac{13\beta}{10}.$$

Έτσι το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου θα είναι:

$$\mathrm{E}' = \frac{12\alpha}{10} \cdot \frac{13\beta}{10} = \frac{156\alpha\beta}{100} = \alpha\beta + \frac{56\alpha\beta}{100} = \mathrm{E} + \frac{56\alpha\beta}{100}$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}' - \mathrm{E} = \frac{56\mathrm{E}}{100} \Rightarrow \frac{\mathrm{E}' - \mathrm{E}}{\mathrm{E}} = \frac{56}{100}.$$

Άρα η αύξηση της τιμής του εμβαδού είναι 56% πάνω στην αρχική τιμή του.

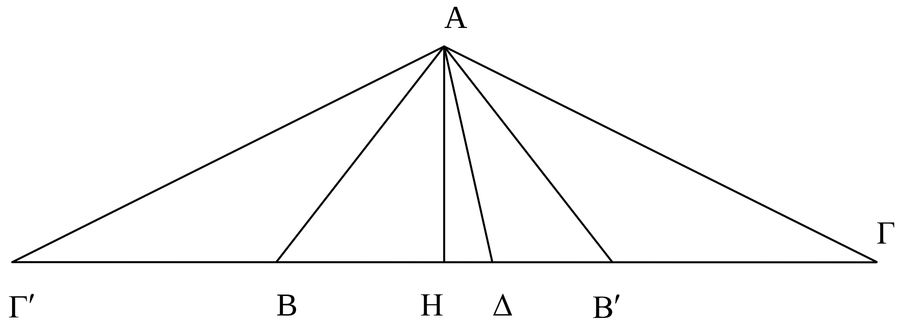
Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ($ΑΓ > ΑΒ$) με τη γωνία $\hat{Α}$ διπλάσια της γωνίας $\hat{Β}$ και τη γωνία $\hat{Β}$ μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{Γ}$ κατά είκοσι μοίρες. Δίνονται ακόμα το ύψος του $ΑΗ$ και η διχοτόμος του $ΑΔ$.

(α) Αν $Α', Β', Γ'$ είναι τα συμμετρικά των κορυφών Α, Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ, ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία του ύψους $ΑΗ$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΒ'$ και $ΑΓΓ'$ είναι ισοσκελή και να βρείτε τις γωνίες τους.

(β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζεται από το ύψος ΑΗ και τη διχοτόμο ΑΔ.

Λύση



(α) Από την υπόθεση έχουμε $\hat{Α} = 2\hat{Β}$ και $\hat{Γ} = \hat{Β} - 20^0$, οπότε από τη γνωστή ισότητα $\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^0$ λαμβάνουμε $2\hat{Β} + \hat{Β} + \hat{Β} - 20^0 = 180^0 \Leftrightarrow 4\hat{Β} = 200^0 \Leftrightarrow \hat{Β} = 50^0$.

Άρα έχουμε και $\hat{Α} = 100^0$ και $\hat{Γ} = 30^0$.

Λόγω συμμετρίας ως προς τον άξονα ΑΗ, τα τρίγωνα ΑΒΓ και $ΑΒ'Γ'$ είναι ίσα ($Α' \equiv Α$, αφού το σημείο Α ανήκει στον άξονα συμμετρίας), οπότε θα έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους ίσες, δηλαδή $ΑΒ = ΑΒ'$ και $ΑΓ = ΑΓ'$. Άρα τα τρίγωνα $ΑΒΒ'$ και $ΑΓΓ'$ είναι ισοσκελή.

Επιπλέον έχουμε

$$\hat{Β}' = Β = 50^0 \ , \ \hat{Γ}' = \hat{Γ} = 30^0,$$

$$Β\hat{Α}Β' = 180^0 - 2 \cdot 50^0 = 80^0 \text{ και } Γ'\hat{Α}Γ = 180^0 - 2 \cdot 30^0 = 120^0.$$

(β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΔ έχουμε την ισότητα:

$$Η\hat{Α}Δ = 90^\circ - Α\hat{Δ}Η \qquad (1)$$

Όμως από το τρίγωνο ΑΒΔ λαμβάνουμε την ισότητα:

$$Α\hat{Δ}Η = Α\hat{Δ}Β = 180^0 - \hat{Β} - Δ\hat{Α}Β = 180^0 - 50^0 - 50^0 = 80^0. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$Η\hat{Α}Δ = 90^\circ - 80^0 = 10^0.$$

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $a+2b=\frac{1}{2}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\left(16a+32b\right)^{-2}-\left(32a+64b\right)^{-3}+\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}:3^4\right]^3.$$

Λύση

Η παράσταση γίνεται

$$\mathrm{A}=\left(16a+32b\right)^{-2}-\left(32a+64b\right)^{-3}+\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}:3^4\right]^3$$

$$=\frac{1}{16^2\left(a+2b\right)^2}-\frac{1}{32^3\left(a+2b\right)^3}+\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{3^4}\right]^3$$

$$=\frac{1}{\left(2^4\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(2^5\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3}+\left[\frac{3^4}{2^4}\cdot\frac{1}{3^4}\right]^3$$

$$=\frac{1}{2^{8-2}}-\frac{1}{2^{15-3}}+\frac{1}{2^{4\cdot 3}}=\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{2^{12}}=\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}.$$

Πρόβλημα 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x,y ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2+4y^2=\frac{20}{3}xy,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{x+2y}{x-2y}.$$

Λύση

Από τη σχέση $x^2+4y^2=\frac{20}{3}xy$ λαμβάνουμε:

$$x^2+4y^2+2x\cdot 2y=\frac{20}{3}xy+4xy\Rightarrow\left(x+2y\right)^2=\frac{32}{3}xy,$$

$$x^2+4y^2-2x\cdot 2y=\frac{20}{3}xy-4xy\Rightarrow\left(x-2y\right)^2=\frac{8}{3}xy>0,$$

οπότε έχουμε:

$$\mathrm{A}^2=\frac{\left(x+2y\right)^2}{\left(x-2y\right)^2}=\frac{\frac{32}{3}xy}{\frac{8}{3}xy}=4\Leftrightarrow\mathrm{A}=2\text{ ή }\mathrm{A}=-2.$$

Δεύτερος τρόπος

Από τη σχέση $x^2+4y^2=\frac{20}{3}xy$ με διαίρεση των δύο μελών με y^2 και την αντικατάσταση $u=\frac{x}{y}$ λαμβάνουμε:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2+4-\frac{20}{3}\left(\frac{x}{y}\right)=0 \Leftrightarrow u^2-\frac{20}{3}u+4=0 \Leftrightarrow \left(u-\frac{10}{3}\right)^2-\frac{64}{9}=0$$

$$u-\frac{10}{3}=\frac{8}{3} \text{ ή } u-\frac{10}{3}=-\frac{8}{3} \Leftrightarrow u=6 \text{ ή } u=\frac{2}{3}.$$

Για $u=\frac{x}{y}=6$ λαμβάνουμε $x=6y$, οπότε : $\mathrm{A}=\frac{6y+2y}{6y-2y}=2.$

Για $u=\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$ λαμβάνουμε $3x=2y$, οπότε : $\mathrm{A}=\frac{x+3x}{x-3x}=-2.$

Πρόβλημα 3

Να βρείτε τους διψήφιους θετικούς ακέραιους $n=\overline{ab}=10a+b,$ όπου a,b ψηφία, $a\neq 0$,που έχουν την ιδιότητα:

Το γινόμενο των ψηφίων τους αυξημένο κατά το τετραπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων τους, ισούται με τον αριθμό.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε την εξίσωση:

$$ab+4(a+b)=10a+b,$$

όπου a,b ψηφία, $a\neq 0$. Ισοδύναμα έχουμε:

$$ab+4a+4b=10a+b \Leftrightarrow ab-6a+3b=0$$

$$\Leftrightarrow a(b-6)+3(b-6)=-18 \Leftrightarrow (a+3)(b-6)=-18$$

$$\Leftrightarrow (a+3)(6-b)=18.$$

Από την τελευταία εξίσωση, δεδομένου ότι $4\leq a+3\leq 12$, προκύπτει ότι:

$$(a+3,6-b)=(6,3) \text{ ή } (9,2)$$

$$\Leftrightarrow (a,b)=(3,3) \text{ ή } (6,4),$$

δηλαδή οι αριθμοί που ζητάμε είναι οι 33 και 64.

Πρόβλημα 4

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε δύο χορδές ΑΒ και ΓΔ που είναι κάθετες μεταξύ τους και δεν περνάνε από το κέντρο του κύκλου. Οι δύο χορδές τέμνονται στο σημείο Κ, έτσι ώστε να είναι $\mathrm{AK}>\mathrm{KB}$. Έστω Μ το συμμετρικό του Β ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΓΔ.

Λύση

Έστω ότι η ευθεία ΓΜ τέμνει την πλευρά ΑΔ στο σημείο Ε. Η ΓΕ είναι ύψος του τριγώνου ΑΓΔ, αν είναι $\Gamma\mathrm{E}\perp \mathrm{A}\Delta$ ή $\Gamma\hat{\mathrm{E}}\Delta=90^\circ$. Αρκεί να ισχύει: $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta+\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}=90^\circ$.

Όμως είναι

$$\mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta=\mathrm{K}\hat{\Gamma}\mathrm{B}, \qquad (1)$$

λόγω συμμετρίας ως προς την ευθεία ΓΔ.

Επίσης έχουμε

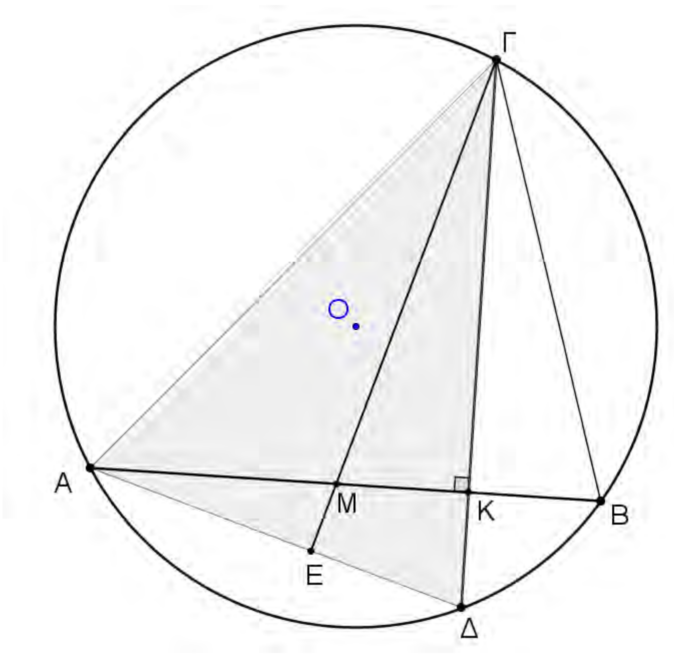
$$\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}=\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{A}=\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}=\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K},$$

αφού οι γωνίες $\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{A}$, $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}$ είναι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο του κύκλου. Άρα είναι

$$\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}=\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}, \qquad (2)$$

ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο του κύκλου.

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:



$$\mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta+\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E}=\mathrm{K}\hat{\Gamma}\mathrm{B}+\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}=180^0-\Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B}=180^0-90^\circ=90^\circ,$$

αφού οι γωνίες $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$ και $\mathrm{K}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$ είναι οι δύο οξείες γωνίες του ορθογώνιου τριγώνου ΓΚΒ. Επειδή οι δύο χορδές είναι κάθετες θα είναι και $\mathrm{AK}\perp\Gamma\Delta$, δηλαδή ΑΚ είναι επίσης ύψος του τριγώνου ΑΓΔ, οπότε το σημείο Μ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΓΔ.

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να απλοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση

$$\mathrm{A}=\frac{\left(x^2-\frac{1}{y^2}\right)^m\cdot\left(y+\frac{1}{x}\right)^{n-m}\cdot y^{m+n}}{\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)^n\cdot\left(x-\frac{1}{y}\right)^{m-n}\cdot x^{m+n}},$$

όπου m,n ακέραιοι και x,y πραγματικοί αριθμοί με $xy\neq 0,\ xy\neq 1$ και $xy\neq -1$.

Λύση

$$\mathrm{A}=\frac{\left(x^2-\frac{1}{y^2}\right)^m\cdot\left(y+\frac{1}{x}\right)^{n-m}\cdot y^{m+n}}{\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)^n\cdot\left(x-\frac{1}{y}\right)^{m-n}\cdot x^{m+n}}=\frac{\left(\frac{x^2y^2-1}{y^2}\right)^m\left(\frac{xy+1}{x}\right)^{n-m}\cdot y^{m+n}}{\left(\frac{x^2y^2-1}{x^2}\right)^n\left(\frac{xy-1}{y}\right)^{m-n}\cdot x^{m+n}}$$

$$=\frac{\left(x^2y^2-1\right)^{m-n}\cdot x^{2n}}{y^{2m}}\cdot\frac{(xy+1)^{n-m}\cdot y^{m-n}}{(xy-1)^{m-n}\cdot x^{n-m}}\cdot\frac{y^{m+n}}{x^{m+n}}$$

$$=\frac{(xy+1)^{m-n}(xy-1)^{m-n}\cdot(xy+1)^{n-m}}{(xy-1)^{m-n}}\cdot x^{2n-2n}\cdot y^{2m-2m}=1.$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί α, β αν γνωρίζετε ότι ισχύουν:

$$|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta| \text{ και } \alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+2\alpha^2\beta^2-\alpha-\beta=37.$$

Λύση

Από την ισότητα $|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta|\geq 0$ προκύπτει ότι:

$$|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow |\alpha-\beta|^2=\left(|\alpha|+|\beta|\right)^2$$

$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2$$

$$-\alpha\beta=|\alpha\beta| \Leftrightarrow (\alpha\geq 0 \text{ και } \beta\leq 0) \text{ ή } (\alpha\leq 0 \text{ και } \beta\geq 0).$$

Από τη δεύτερη ισότητα λαμβάνουμε:

$$\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+2\alpha^2\beta^2-\alpha-\beta=37 \Leftrightarrow \alpha^2\beta^2(\alpha+\beta+2)-(\alpha+\beta+2)=35$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta+2)\left(\alpha^2\beta^2-1\right)=35,$$

από την οποία έχουμε ότι ο $\alpha^2\beta^2-1$ είναι ένας από τους παράγοντες του 35, δηλαδή έχουμε:

$$\alpha^2\beta^2-1=\pm 1 \text{ ή } \alpha^2\beta^2-1=\pm 5 \text{ ή } \alpha^2\beta^2-1=\pm 7 \text{ ή } \alpha^2\beta^2-1=\pm 35$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta^2=2 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=0 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=6 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=-4 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=8$$

$$\text{ή } \alpha^2\beta^2=-6 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=36 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=-34.$$

Οι αποδεκτές περιπτώσεις, αφού $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ και $\alpha^2\beta^2\geq 0$, είναι οι:

- $\alpha^2\beta^2=0$, η οποία οδηγεί στις λύσεις $(\alpha,\beta)=(0,-37)$ ή $(\alpha,\beta)=(-37,0)$.
- $\alpha^2\beta^2=36 \Leftrightarrow \alpha\beta=-6$ (αφού α,β ετερόσημοι), η οποία οδηγεί στο σύστημα:

$$\left.\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\ \alpha\beta=-6\end{cases}\right\} \Leftrightarrow (\alpha,\beta)=(-3,2) \text{ ή } (\alpha,\beta)=(2,-3).$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 3α. Πάνω στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ λαμβάνουμε σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $ΕΓ=ΖΔ=\alpha$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΖ και ΔΕ τέμνονται στο σημείο Κ. Αν η ευθεία ΑΚ τέμνει την ευθεία ΕΖ στο σημείο Λ, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι: $ΑΛ\perp ΕΖ$

(β) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΛ συναρτήσει του α.

Λύση

(α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ και ΔΕΓ έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες (ΑΔ = ΔΓ=3α, ΔΖ = ΕΓ = α). Άρα είναι ίσα και έχουν $Δ\hat{Α}Ζ=Ε\hat{Δ}Γ$. Αν Μ είναι το σημείο τομής ΑΖ και ΔΕ, τότε έχουμε:

$$Μ\hat{Δ}Ζ+Δ\hat{Ζ}Μ=Δ\hat{Α}Ζ+Δ\hat{Ζ}Α$$

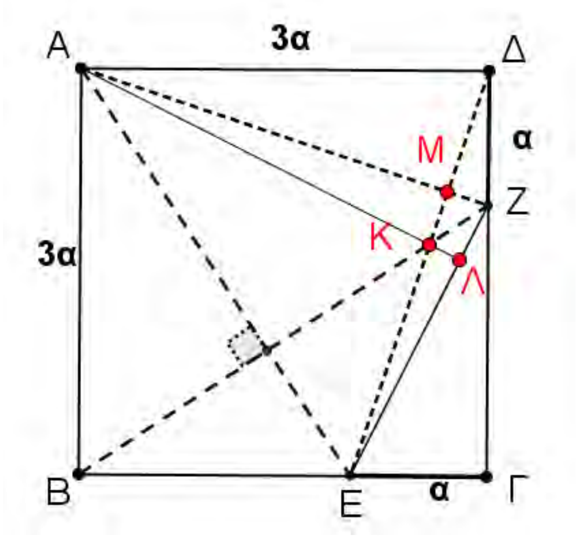
$$=180^0-Α\hat{Δ}Ζ=180^0-90^\circ=90^\circ.$$

Άρα είναι $ΕΔ\perp ΑΖ$ και ομοίως αποδεικνύουμε ότι είναι $ΖΒ\perp ΑΕ$, οπότε το σημείο Κ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΕΖ.

Άρα θα είναι και

$$ΑΚ\perp ΕΖ \text{ ή } ΑΛ\perp ΕΖ.$$

Δ



(β) Έχουμε ότι

$$(\mathrm{AEZ}) = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{EZ}\cdot \mathrm{A\Lambda} = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}\cdot \mathrm{A\Lambda} \text{ και}$$

$$(\mathrm{AEZ}) = (\mathrm{AB\Gamma\Delta}) - (\mathrm{ABE}) - (\mathrm{E\Gamma Z}) - (\mathrm{A\Delta Z}) = 9\alpha^2 - 3\alpha^2 - \alpha^2 - \frac{3\alpha^2}{2} = \frac{7\alpha^2}{2},$$

οπότε λαμβάνουμε: $\mathrm{A\Lambda} = \dfrac{7\sqrt{5}\alpha}{5}$.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, όπου a, b, c ψηφία, $a > 0$, ο οποίος ικανοποιεί την ισότητα:

$$\overline{abc} = \left(a + b^2 + c^3\right)^2$$

Λύση

Από τη σχέση $100 \le \overline{abc} = \left(a + b^2 + c^3\right)^2 < 1000$ προκύπτει ότι:

$$10 \le a + b^2 + c^3 \le 31, \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1), δεδομένου ότι $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ και $b, c \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, συμπεραίνουμε ότι:

$$c \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ και } b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}. \qquad (2)$$

Επιπλέον η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$\overline{abc} = \left(a + b^2 + c^3\right)^2 \Leftrightarrow 100a + 10b + c = \left(a + b^2 + c^3\right)^2. \qquad (3)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- Για $c = 0$ η εξίσωση (3) γίνεται:

$$100a + 10b = \left(a + b^2\right)^2, \qquad (4)$$

από την οποία για $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ δεν προκύπτουν a, b που την επαληθεύουν.

Πράγματι, τα ψηφία a, b που ικανοποιούν την εξίσωση (4) πρέπει να είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $a + b^2$ να λήγει σε 0. Έτσι πιθανά ζεύγη είναι τα

$$(a, b) = (9,1) \text{ ή } (6,2) \text{ ή } (1,3) \text{ ή } (4,4) \text{ ή } (5,5),$$

από τα οποία κανένα δεν ικανοποιεί την εξίσωση (4).

- Για $c=1$ η εξίσωση (3) γίνεται:
$$100a+10b+1=\left(a+b^2+1\right)^2,$$
από την οποία προκύπτει ότι ο αριθμός $a+b^2+1$ πρέπει να λήγει σε 1 ή 9. Έτσι πιθανά ζεύγη είναι τα
$$(a,b)=(8,0) \text{ ή } (7,1) \text{ ή } (9,1) \text{ ή } (4,2) \text{ ή } (6,2) \text{ ή } (1,3)$$
$$\text{ή } (9,3) \text{ ή } (2,4) \text{ ή } (4,4) \text{ ή } (3,5) \text{ ή } (5,5),$$
από τα οποία προκύπτει μόνο η λύση $(a,b)=(4,4)$ και ο αριθμός $\overline{abc}=441$.
- Για $c=2$ η εξίσωση (3) γίνεται:
$$100a+10b+2=\left(a+b^2+2\right)^2,$$
η οποία είναι αδύνατη, αφού δεν είναι δυνατόν το τετράγωνο ενός ακεραίου να τελειώνει σε 2.
- Για $c=3$ η εξίσωση (3) γίνεται:
$$100a+10b+3=\left(a+b^2+3\right)^2,$$
η οποία είναι αδύνατη, αφού δεν είναι δυνατόν το τετράγωνο ενός ακεραίου να τελειώνει σε 3.

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες το σύστημα
$$x^2+4y^2=4a^2$$
$$ax-y=2a$$
έχει μία μόνο λύση.

Για τις τιμές του a που θα βρείτε να λύσετε το σύστημα.

Λύση

Το σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα
$$\left.\begin{cases} x^2+4y^2=4a^2 \\ ax-y=2a \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} y=ax-2a \\ x^2+4(ax-2a)^2=4a^2 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} y=ax-2a \\ \left(1+4a^2\right)x^2-16a^2x+12a^2=0 \end{cases}\right\}.$$
Το σύστημα έχει μία μόνο λύση, αν, και μόνον αν, η εξίσωση $\left(1+4a^2\right)x^2-16a^2x+12a^2=0$ έχει μία διπλή ρίζα, δηλαδή, αν, και μόνον αν, ισχύει:
$$\Delta=16a^2\left(4a^2-3\right)=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ή } a=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ή } a=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
- Για $a=0$, το σύστημα έχει τη λύση $(x,y)=(0,0)$.
- Για $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ η εξίσωση $\left(1+4a^2\right)x^2-16a^2x+12a^2=0$ γίνεται $4x^2-12x+9=0$ και έχει τη διπλή ρίζα $x=\frac{3}{2}$, οπότε το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $(x,y)=\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, αν $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $(x,y)=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, αν $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Πρόβλημα 2

Έστω $S_1 = x + y + z$ και $S_2 = xy + yz + zx$, όπου $x, y, z \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε να ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2\left(y+z\right)+y^2\left(z+x\right)+z^2\left(x+y\right)=6.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $3xyz = S_1S_2 - 6$.

(β) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z, αν είναι $S_1 = 3$ και $S_2 = 2$.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} x^2\left(y+z\right)+y^2\left(z+x\right)+z^2\left(x+y\right)=6 &\Leftrightarrow x\left(xy+xz\right)+y\left(yz+yx\right)+z\left(zx+zy\right)=6 \\ &\Leftrightarrow x\left(S_2-yz\right)+y\left(S_2-zx\right)+z\left(S_2-xy\right)=6 \\ &\Leftrightarrow \left(x+y+z\right)S_2-3xyz=6 \Leftrightarrow 3xyz=S_1S_2-6. \end{aligned}$$

(β) Για $S_1 = 3$ και $S_2 = 2$ έχουμε το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=3 \\ xy+yz+zx=2 \\ xyz=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=3 \\ xy+yz+zx=2 \\ x=0 \text{ ή } y=0 \text{ ή } z=0 \end{array}\right\},$$

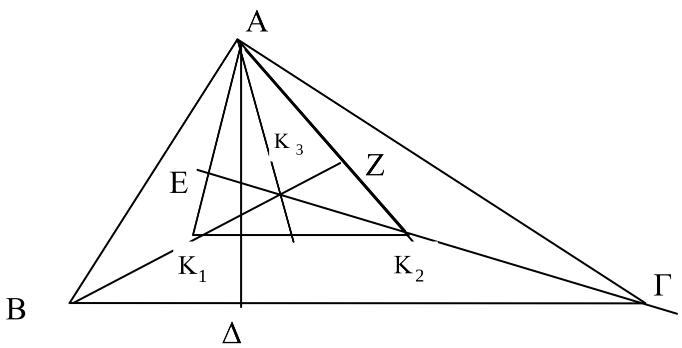
από το οποίο εύκολα προκύπτουν οι λύσεις

$$\left(x,y,z\right)=\left(2,1,0\right) \text{ ή } \left(1,2,0\right) \text{ ή } \left(2,0,1\right) \text{ ή } \left(1,0,2\right) \text{ ή } \left(0,2,1\right) \text{ ή } \left(0,1,2\right).$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ$. Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου και $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3$ είναι τα κέντρα των εγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ, ΑΒΓ, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\mathrm{AK}_3 = \mathrm{K}_1\mathrm{K}_2$.

Λύση



Τα σημεία K_1 και K_3 βρίσκονται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, ενώ τα σημεία K_2 και K_3 βρίσκονται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$. Έτσι έχουμε

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}_3\Gamma = 180^0 - \left(\frac{\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}}{2}\right) = 180^0 - 45^\circ = 135^\circ$$

Ομοίως λαμβάνουμε

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}_1\mathrm{A} = 135^\circ \text{ και } \Gamma\hat{\mathrm{K}}_3\mathrm{A} = 135^\circ.$$

Άρα έχουμε

$$\mathrm{K_1\hat{K}_3E = K_3\hat{K}_1E = K_3\hat{K}_2Z = Z\hat{K}_3K_2} = 45^0,$$

ως παραπληρώματα κάποιας γωνίας 135^0. Επομένως τα τρίγωνα $\mathrm{AEK_3}$, $\mathrm{K_3EK_1}$ και $\mathrm{K_3ZK_2}$ είναι ορθογώνια ισοσκελή, οπότε το σημείο $\mathrm{K_3}$ είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AK_1K_2}$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{AK_3E}$ και $\mathrm{K_2EK_1}$ είναι ίσα, γιατί έχουν $\mathrm{EK_3 = EK_1}$ και $\mathrm{K_1\hat{K}_2E = E\hat{A}K_3}$, αφού έχουν τις πλευρές τους κάθετες. Άρα είναι $\mathrm{AK_3 = K_1K_2}$

Πρόβλημα 4.

Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού k, $1 < k < 30$ και μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, έτσι ώστε να ισχύει:

$$(x-k)P(3x) = k(x-1)P(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

Έστω $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0, n \geq 1$ το ζητούμενο πολυώνυμο. Τότε εξισώνοντας τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων των δύο μελών της δεδομένης ισότητας πολυωνύμων, λαμβάνουμε

$$3^n a_n = k a_n \Leftrightarrow k = 3^n.$$

Επειδή είναι $1 < k < 30$ οι μόνες δυνατές τιμές του n είναι οι $n = 1$ ή $n = 2$ ή $n = 3$.

Έτσι η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$\left(x - 3^n\right)P(3x) = 3^n(x-1)P(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Για $n = 1$ η (1) γίνεται $(x-3)P(3x) = 3(x-1)P(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από την οποία για $x = 1$ προκύπτει $P(3) = 0$. Άρα είναι $P(x) = a_1(x-3)$.

Για $n = 2$ η (1) γίνεται $\left(x-3^2\right)P(3x) = 3^2(x-1)P(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από την οποία για προκύπτει $P(3) = 0$ και $P(9) = 0$. Άρα είναι $P(x) = a_2(x-3)(x-9)$.

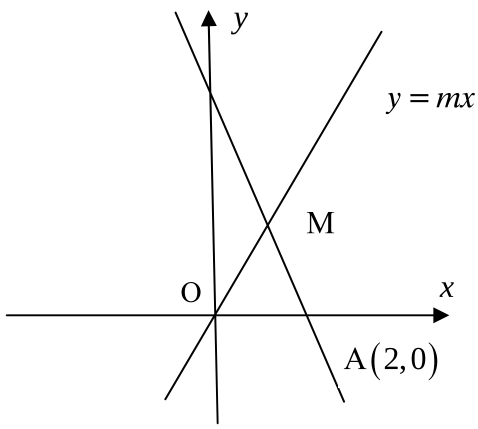
Για $n = 3$ η (1) γίνεται $\left(x-3^3\right)P(3x) = 3^3(x-1)P(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από την οποία για προκύπτει $P(3) = 0$, $P(9) = 0$ και $P(27) = 0$. Άρα είναι $P(x) = a_3(x-3)(x-9)(x-27)$.

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου m για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = -3x+6$, $g(x) = mx,\ m \in \mathbb{R}$ και τον άξονα των x ισούται με 3.

Λύση



Από το σύστημα $y = mx, y = -3x+6$ προκύπτει ότι οι συντεταγμένες του σημείου Μ είναι $\left(\frac{6}{m+3}, \frac{6m}{m+3}\right)$, οπότε έχουμε:

$$\mathrm{E}(\mathrm{OAM}) = \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot \left|\frac{6m}{3+m}\right| = 3 \Leftrightarrow \frac{6m}{3+m} = 3 \text{ ή } \frac{6m}{3+m} = -3 \Leftrightarrow m = 3 \text{ ή } m = -1.$$

Πρόβλημα 2

Έστω Η το ορθόκεντρο και Ο το περίκεντρο οξυγωνίου τριγώνουΑΒΓ. Έστω ακόμη Δ, Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία Δ_1, E_1 και Z_1 έτσι ώστε: $\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}\Delta}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OE}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{OZ}_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}$, με $\lambda > 1$.. Ο κύκλος C_α που έχει κέντρο το σημείο Δ_1 και διέρχεται από το Η τέμνει την ευθεία ΒΓ στα σημεία A_1 και A_2. Όμοια, οι κύκλοι $C_\beta(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_1\mathrm{H})$ και $C_\gamma(\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_1\mathrm{H})$ ορίζουν τα σημεία $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ και Γ_1, Γ_2 στις ευθείες ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A_1, A_2, B_1, B_2, Γ_1 και Γ_2 είναι ομοκυκλικά.

Λύση

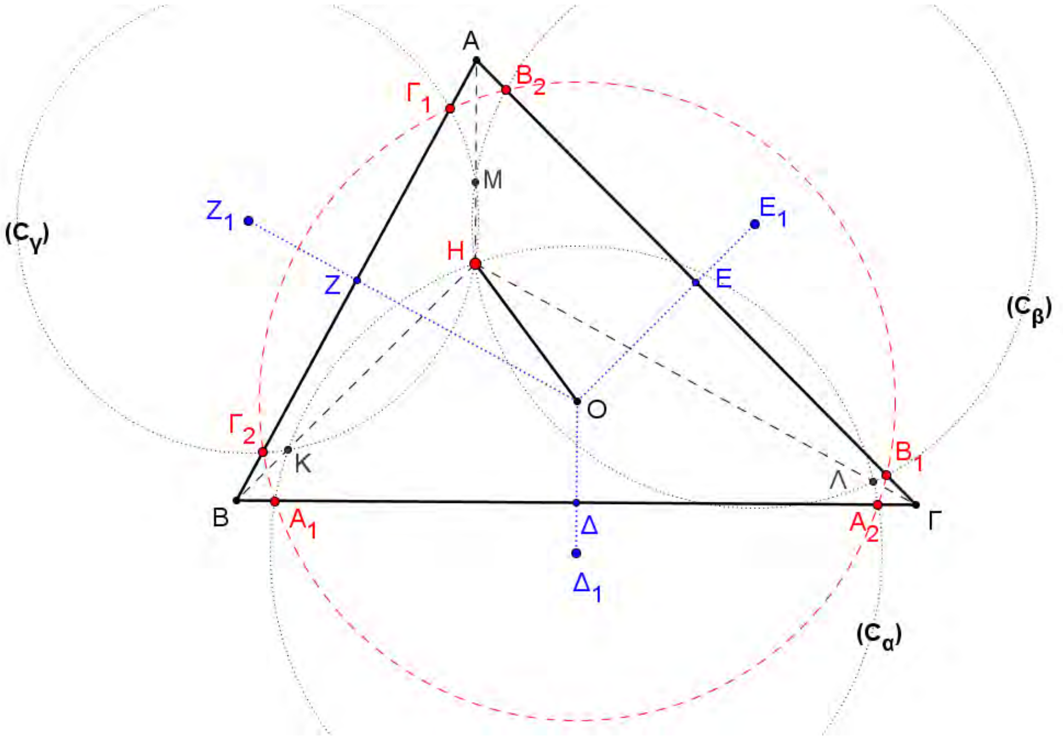
Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Επειδή τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν τις πλευρές τους παράλληλες. Τα τρίγωνα ΔΕΖ και $\Delta_1\mathrm{E}_1\mathrm{Z}_1$ έχουν επίσης τις πλευρές τους παράλληλες, γιατί

$$\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}\Delta},\ \overrightarrow{\mathrm{OE}_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OE}} \text{ και } \overrightarrow{\mathrm{OZ}_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}.$$

Η $\Delta_1\mathrm{Z}_1$ είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής ΚΗ των κύκλων C_α και C_γ. Επειδή η $\Delta_1\mathrm{Z}_1$ είναι παράλληλη με την ΑΓ, έπεται ότι $\mathrm{KH} \perp \mathrm{A}\Gamma$.

Επειδή όμως ισχύει και ότι $\mathrm{BH} \perp \mathrm{A}\Gamma$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι τα σημεία Β, Κ, Η είναι συνευθειακά.

Με όμοιο τρόπο, αν ΜΗ, ΛΗ είναι η κοινή χορδή των κύκλων C_β, C_γ και C_α, C_β, αντίστοιχα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{M}, \mathrm{H}$ και τα σημεία $\Gamma, \Lambda, \mathrm{H}$ είναι συνευθειακά.



Από τη δύναμη του σημείου Β ως προς τους κύκλους C_α και C_γ, έχουμε:

$$\mathrm{BK} \cdot \mathrm{B}\Gamma = \mathrm{BA}_1 \cdot \mathrm{BA}_2 = \mathrm{B}\Gamma_1 \cdot \mathrm{B}\Gamma_2,$$

οπότε τα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \Gamma_1, \Gamma_2$ είναι ομοκυκλικά στο κύκλο με κέντρο το Ο, που είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των τμημάτων $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ και $\Gamma_1\Gamma_2$.

Όμοια εργαζόμαστε και με τα άλλα ζευγάρια σημείων, οπότε τα σημεία A_1, A_2, B_1, B_2, Γ_1 και Γ_2 βρίσκονται σε κύκλο κέντρου Ο.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε την τιμή του θετικού ακέραιου k και μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$, n βαθμού, με πραγματικούς συντελεστές, έτσι ώστε να ισχύει:

$$(x-k)P(3x) = k(x-1)P(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

Έστω $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0, n \geq 1$, το ζητούμενο πολυώνυμο. Τότε εξισώνοντας τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων των δύο μελών της δεδομένης ισότητας πολυωνύμων, λαμβάνουμε

$$3^n a_n = k a_n \Leftrightarrow k = 3^n.$$

Έτσι η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$(x-3^n)P(3x) = 3^n(x-1)P(x), n \geq 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Από την (1) για $x=1$ προκύπτει ότι $P(3)=0$, οπότε στη συνέχεια για $x=3$ προκύπτει $P(3^2)=0$. Συνεχίζοντας έτσι λαμβάνουμε τις σχέσεις $P(3^k)=0$, για $k=3,\ldots n-1$.

Επίσης από την (1) για $x=3^n$ λαμβάνουμε:

$$0=3^n\left(3^n-1\right)P\left(3^n\right)=0 \Leftrightarrow P\left(3^n\right)=0.$$

Άρα το ζητούμενο πολυώνυμο n βαθμού έχει τις n ρίζες 3^k, $k=1,2,...,n$, οπότε

$$P(x)=a_n\,(x-3)\left(x-3^2\right)\cdots\left(x-3^n\right),\ a_n\in\mathbb{R}.$$

. **Πρόβλημα 4**

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών, το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\left(f(\mathbb{R})=\mathbb{R}\right)$. Αν για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x,y ισχύει η σχέση:

$$f\left(f\left(f(x)\right)-f(y)\right)=f(x)-f\left(f(y)\right), \tag{1}$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f, είναι περιττή.

Λύση

Θέτουμε στη δεδομένη σχέση όπου y το $f(x)$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} &f\left(f\left(f(x)\right)-f\left(f(x)\right)\right)=f(x)-f\left(f\left(f(x)\right)\right)\\ &\Leftrightarrow f(0)=f(x)-f\left(f\left(f(x)\right)\right)\\ &\Leftrightarrow f\left(f\left(f(x)\right)\right)=f(x)-f(0)\\ &\Leftrightarrow \left(f\circ f\circ f\right)(x)=f(x)-f(0) \qquad (2).\end{aligned}$$

Από τη σχέση (2) έχουμε τις ισότητες

$$\left.\begin{aligned}\left(f\circ f\circ f\circ f\right)(x)=f\left(f(x)-f(0)\right)\\ \left(f\circ f\circ f\circ f\right)(x)=f\left(f(x)\right)-f(0)\end{aligned}\right\},$$

από τις οποίες προκύπτει ότι:

$$f\left(f(x)-f(0)\right)=f\left(f(x)\right)-f(0). \tag{3}$$

Από την (3) για $x=0$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} &f\left(f(0)-f(0)\right)=f\left(f(0)\right)-f(0)\\ &\Leftrightarrow f(0)=f\left(f(0)\right)-f(0)\\ &\Leftrightarrow f\left(f(0)\right)=2f(0) \qquad (4).\end{aligned}$$

Από τη σχέση (1) για $x=y=0$ και σε συνδυασμό με τη σχέση (4), έχουμε:

$$\begin{aligned} &f\left(f\left(f(0)\right)-f(0)\right)=f(0)-f\left(f(0)\right)\\ &\Leftrightarrow f\left(2f(0)-f(0)\right)=f(0)-2f(0)\\ &\Leftrightarrow f\left(f(0)\right)=-f(0) \qquad (5).\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (4) και (5) έχουμε: $f(0)=0$.

Αν τώρα στη σχέση (1) θέσουμε $x=0$ καταλήγουμε στη σχέση:

$$\begin{aligned} &f\left(f\left(f(0)\right)-f(y)\right)=f(0)-f\left(f(y)\right)\\ &\Leftrightarrow f\left(-f(y)\right)=-f\left(f(y)\right).\end{aligned}$$

Επειδή όμως σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$, έπεται ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $y\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(y)=x$.

Άρα έχουμε $f(-x)=-f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι περιττή.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$70^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A} = 2010 - 2009\cdot 2008 + 2010\cdot 2008 .$$

Μονάδες 2

(β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{B} = \frac{3}{8}\cdot\left(2^2 - \frac{1}{2} : \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) \text{ και } \Gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11}\right)\cdot\left(\frac{1}{3^2} + \frac{20}{9}\right).$$

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2

Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $x = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma,\ \alpha \neq 0,$ έχει άθροισμα ψηφίων 10. Αν εναλλάξουμε το ψηφίο των εκατοντάδων με το ψηφίο των μονάδων του, τότε προκύπτει ακέραιος μικρότερος από τον x κατά 297. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του x;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

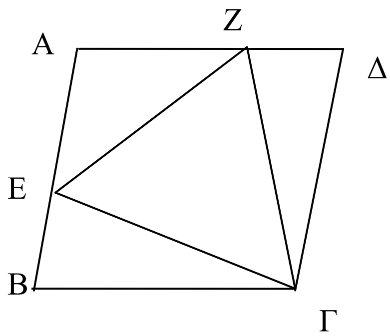
Ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει πλάτος $\mathrm{AB} = x$ μέτρα και μήκος $\mathrm{B\Gamma} = y$ μέτρα, το οποίο είναι διπλάσιο του πλάτους του. Αν αυξήσουμε το πλάτος του κατά 25%, να βρείτε πόσο επί τα εκατό πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του, ώστε το εμβαδόν του να μείνει αμετάβλητο.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος πλευράς α και το τρίγωνο ΓΕΖ είναι ισόπλευρο πλευράς α. Τα σημεία Ε και Ζ βρίσκονται πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΔ, αντίστοιχα. Να βρείτε τις γωνίες του ρόμβου ΑΒΓΔ.

Μονάδες 5



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
Έστω ο ακέραιος
$$\mathrm{A}=\left[(-1)^{\nu}+(-1)^{2\nu}+(-1)^{3\nu}+(-1)^{4\nu}\right]\cdot\nu, \text{ όπου } \nu \text{ θετικός ακέραιος.}$$
Αν ο Α είναι διαιρέτης του 24, να βρείτε τις δυνατές τιμές του ν.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2
Υπάρχει διψήφιος θετικός ακέραιος $N=\overline{ab}=10a+b,$ όπου a,b ψηφία με $a\neq 0$, που ισούται με το γινόμενο των ψηφίων του ελαττωμένο κατά το άθροισμα των ψηφίων του;

Μονάδες 5

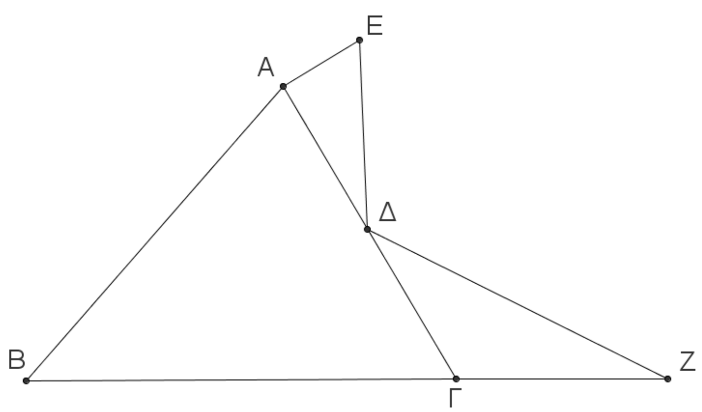
Πρόβλημα 3
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
$$S=1^2-2^2-3^2+4^2+5^2-6^2-7^2+8^2+\cdots+997^2-998^2-999^2+1000^2.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς $\mathrm{A\Gamma}=\beta$ του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}=90^{\circ}$, η ευθεία ΔΕ είναι κάθετη προς την ευθεία ΒΓ , $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{Z}=\theta$ και $\Gamma\hat{\mathrm{Z}}\Delta=30^{0}$.

(i) Να βρείτε τη γωνία θ. ***Μονάδες 1***

(ii) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΕΖ συναρτήσει του β. ***Μονάδες 4***



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$70^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές του ρητού αριθμού α, για τις οποίες ο αριθμός $\mathrm{A} = \alpha\sqrt{3}$ είναι ρητός.

Μονάδες 2

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{B} = \left(1+\sqrt{3}\right)^2$ είναι άρρητος.

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x+1-2|x| = \alpha x,$$

έχει, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, μία τουλάχιστον πραγματική λύση.
Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές λύσεις;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ και έστω A_1, B_1, C_1 τα αντιδιαμετρικά σημεία των κορυφών του A, B, C. Στις ευθείες που ορίζουν οι πλευρές BC, AC, AB θεωρούμε τα σημεία A_2, B_2, C_2, αντίστοιχα, και έστω (ε_1) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία A_1, A_2, (ε_2) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία B_1, B_2 και (ε_3) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία C_1, C_2.
Έστω ακόμη (δ_1) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο A προς την (ε_1), (δ_2) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο B προς την (ε_2) και (δ_3) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο C προς την (ε_3). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ και (ε_3) συντρέχουν (δηλαδή, περνάνε από το ίδιο σημείο), αν, και μόνο αν, οι ευθείες $(\delta_1), (\delta_2)$ και (δ_3) συντρέχουν.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Οι πραγματικοί αριθμοί x, y και z ικανοποιούν τις ισότητες:

$$x^3 - y^3 = 26z^3$$
$$x^2y - xy^2 = 6z^3.$$

(α) Να εκφράσετε τους x, y συναρτήσει του z. ***Μονάδες 3***

(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $x+2y+3z=8$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y και z.

Μονάδες 2

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες (x, y, z) πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$x^3 + y^3 = 65z^3$$
$$x^2 y + xy^2 = 20z^3$$
$$x - y + 2z = 10.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ABC , K τυχόν σημείο στο εσωτερικό του και τα ύψη του AH_1, BH_2, CH_3. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AH_2H_3 τέμνει την ημιευθεία AK στο σημείο K_1, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BH_1H_3 τέμνει την ημιευθεία BK στο σημείο K_2 και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου CH_1H_2 τέμνει τη ημιευθεία CK στο σημείο K_3 . Να αποδείξετε ότι τα σημεία K_1, K_2, K_3, H και K είναι ομοκυκλικά , δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο, όπου H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC .

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2 + x + 1 - 2|x| = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

έχει, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, δύο διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες στο σύνολο $\mathbb{R}$.
Για ποιες τιμές του α οι δύο ρίζες είναι ετερόσημες;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 2} - 2\sqrt{x^2 + x + 1} = x + 1.$$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Η ακολουθία $a_n,\ n\in\mathbb{N}^*$, ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$a_{n+1}=a_n+kn,\ n\in\mathbb{N}^*,$$

όπου k θετικός ακέραιος και $a_1=1$. Να βρείτε για ποια τιμή του k ο αριθμός 2011 είναι όρος της ακολουθίας $a_n,\ n\in\mathbb{N}^*$.

.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ABC και έστω M_1, M_2, M_3 τυχόντα σημεία των πλευρών του BC, AC, AB αντίστοιχα. Έστω ακόμη τα ύψη του AH_1, BH_2, CH_3. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $AH_2H_3, BM_1H_3, CM_1H_2$ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_1), οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $BH_1H_3,\ AM_2H_3, CM_2H_1$ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_2) και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $CH_1H_2, AM_3H_2, BM_3H_1$ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_3). Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι οι ευθείες AK_1, BK_2, CK_3 συντρέχουν (δηλαδή, περνάνε από το ίδιο σημείο), αν, και μόνο αν, οι ευθείες AM_1, BM_2, CM_3 συντρέχουν.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Αν $a,b,x,y\in\mathbb{R}$ με $(a,b)\neq(0,0)$ και $(x,y)\neq(0,0)$ και ισχύουν

$$a\left(x^2-y^2\right)-2bxy=x\left(a^2-b^2\right)-2aby$$
$$b\left(x^2-y^2\right)+2axy=y\left(a^2-b^2\right)+2abx,$$

να αποδείξετε ότι $x=a$ και $y=b$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Σημείο Μ βρίσκεται στο εσωτερικό κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$, όπου $\mathrm{r}=15cm$, σε απόσταση $9cm$ από το κέντρο του κύκλου. Να βρείτε τον αριθμό των χορδών του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$ που περνάνε από το σημείο Μ και το μήκος τους είναι ακέραιος αριθμός.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
(α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
$$\mathrm{A} = 2010 - 2009 \cdot 2008 + 2010 \cdot 2008 .$$
(β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς
$$\mathrm{B} = \frac{3}{8} \cdot \left(2^2 - \frac{1}{2} : \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) \quad \text{και} \quad \Gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11} \right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{20}{9} \right)$$

Λύση
(α) Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα λαμβάνουμε:
$$\mathrm{A} = 2010 - 2009 \cdot 2008 + 2010 \cdot 2008 = 2010 + 2008 \cdot \left(2010 - 2009 \right)$$
$$= 2010 + 2008 \cdot 1 = 2010 + 2008 = 4018.$$
(β) Έχουμε
$$\mathrm{B} = \frac{3}{8} \cdot \left(2^2 - \frac{1}{2} : \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{8} \cdot \left(4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{8} \cdot \left(4 - \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{48 - 9 - 8}{12} \right) = \frac{3 \cdot 31}{8 \cdot 12} = \frac{31}{32}$$
$$\Gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11} \right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{20}{9} \right) = \frac{9}{22} \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{20}{9} \right) = \frac{9}{22} \cdot \frac{21}{9} = \frac{21}{22} .$$
Επειδή ισχύει ότι:
$$\mathrm{B} - \Gamma = \frac{31}{32} - \frac{21}{22} = \frac{31 \cdot 22 - 32 \cdot 21}{32 \cdot 22} = \frac{682 - 672}{32 \cdot 22} = \frac{10}{32 \cdot 22} > 0 ,$$
έπεται ότι είναι $\mathrm{B} > \Gamma$.

Πρόβλημα 2
Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $x = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma,\ \alpha \neq 0,$ έχει άθροισμα ψηφίων 10. Αν εναλλάξουμε το ψηφίο των εκατοντάδων με το ψηφίο των μονάδων του, τότε προκύπτει ακέραιος μικρότερος από τον x κατά 297. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του x;

Λύση
Ο ακέραιος που προκύπτει μετά την εναλλαγή των ψηφίων των εκατοντάδων και μονάδων είναι ο $y = 100\gamma + 10\beta + \alpha$ και, σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος, ισχύει ότι:
$$x - y = 297 \Leftrightarrow \left(100\alpha + 10\beta + \gamma \right) - \left(100\gamma + 10\beta + \alpha \right) = 297$$
$$\Leftrightarrow 99\left(\alpha - \gamma \right) = 297 \Leftrightarrow \alpha - \gamma = 3.$$

Άρα οι δυνατές τιμές για τα ψηφία α και γ είναι:

$\alpha = 3, \gamma = 0$ ή $\alpha = 4, \gamma = 1$ ή $\alpha = 5, \gamma = 2$ ή $\alpha = 6, \gamma = 3$ ή $\alpha = 7, \gamma = 4$ ή $\alpha = 8, \gamma = 5$ ή $\alpha = 9, \gamma = 6$.

Επειδή από την υπόθεση δίνεται ότι $\alpha + \beta + \gamma = 10$, οι ζητούμενοι ακέραιοι $x = \overline{\alpha\beta\gamma}$ είναι οι:

370, 451, 532, 613.

Πρόβλημα 3

Ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει πλάτος ΑΒ = x μέτρα και μήκος ΒΓ = y μέτρα, το οποίο είναι διπλάσιο του πλάτους του. Αν αυξήσουμε το πλάτος του κατά 25%, να βρείτε πόσο επί τα εκατό πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του, ώστε το εμβαδόν του να μείνει αμετάβλητο.

Λύση

Μετά την αύξηση κατά 25% το πλάτος του ορθογωνίου γίνεται $x_1 = x + \frac{25x}{100} = \frac{125x}{100} = \frac{5x}{4}$.

Έστω ότι πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του ορθογωνίου κατά $\alpha\%$, έτσι ώστε να μείνει το εμβαδό του αμετάβλητο. Τότε το μήκος του θα γίνει:

$$y_1 = y - \frac{\alpha y}{100} = \frac{(100-\alpha)y}{100} = \frac{(100-\alpha)\cdot 2x}{100},$$

ενώ θα ισχύει η ισότητα

$$xy = x_1 y_1 \Leftrightarrow x \cdot 2x = \frac{5x}{4} \cdot \frac{(100-\alpha)\cdot 2x}{100} \Leftrightarrow 2x^2 = \frac{100-\alpha}{80} \cdot 2x^2$$

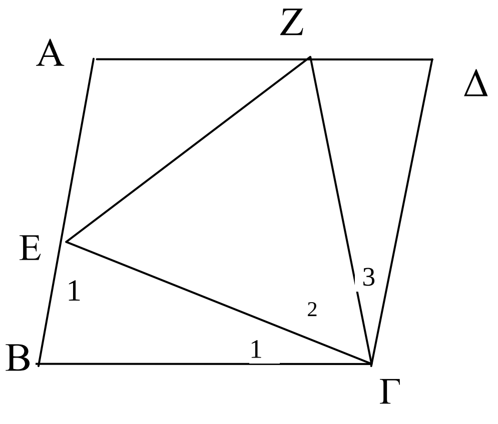
$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{100-\alpha}{80}\right) \cdot 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{100-\alpha}{80} = 0 \ \text{(αφού } x \neq 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow 80 - 100 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 20.$$

Άρα πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του ορθογωνίου κατά 20%.

Πρόβλημα 4.

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος πλευράς α και το τρίγωνο ΓΕΖ είναι ισόπλευρο πλευράς α. Τα σημεία Ε και Ζ βρίσκονται πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΔ, αντίστοιχα. Να βρείτε τις γωνίες του ρόμβου ΑΒΓΔ.



Σχήμα 1

Λύση

Επειδή είναι ΒΓ = ΓΕ = α, το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές και έχει:

$$\hat{B} = \hat{E}_1 \qquad (1)$$

Επειδή είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ και η ΕΓ είναι τέμνουσα των ΑΒ και ΓΔ έχουμε ότι:

$$\hat{E}_1 = E\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_3 = 60^\circ + \hat{\Gamma}_3, \qquad (2)$$

αφού κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60°.
Επίσης από τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΓΕ και ΓΖΔ με ίσες πλευρές ΒΓ = ΓΖ=α, ΓΕ = ΓΔ = α , προκύπτει ότι:

$$\hat{\Gamma}_1 = 180^0 - 2\hat{B} = 180^0 - 2\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}_3, \qquad (3)$$

αφού οι απέναντι γωνίες ρόμβου είναι ίσες,
Από την παραλληλία των πλευρών ΑΒ και ΓΔ έχουμε

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{E}_1 + \hat{\Gamma}_1 + E\hat{\Gamma}\Delta = 180^0 \quad \text{(λόγω της (1))}$$
$$\Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 + 2\cdot\left(60^\circ + \hat{\Gamma}_1\right) = 180^0 \quad \text{(λόγω της (2))}$$
$$\Leftrightarrow 3\cdot\hat{\Gamma}_1 + 120^0 = 180^0 \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 = 20^0.$$

Άρα είναι:

$$\hat{B} = \frac{180^0 - 20^0}{2} = 80^0,\ \hat{\Delta} = \hat{B} = 80^0 \text{ και } \hat{A} = \hat{\Gamma} = 180^0 - 80^0 = 100^0.$$

Γ΄ Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
Έστω ο ακέραιος

$$A = \left[(-1)^\nu + (-1)^{2\nu} + (-1)^{3\nu} + (-1)^{4\nu}\right]\cdot\nu, \text{ όπου } \nu \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Αν ο Α είναι διαιρέτης του 24, να βρείτε τις δυνατές τιμές του ν.

Λύση
Έχουμε

$$A = \left[(-1)^\nu + (-1)^{2\nu} + (-1)^{3\nu} + (-1)^{4\nu}\right]\cdot\nu = \left[(-1)^\nu + 1 + \left((-1)^3\right)^\nu + 1\right]\cdot\nu$$
$$= \left[2 + 2\cdot(-1)^\nu\right]\cdot\nu = \begin{cases} 4\nu, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ 0, & \text{αν } \nu \text{ περιττός.}\end{cases}$$

Επειδή ο ακέραιος Α είναι διαιρέτης του 24, έπεται ότι:

- $A \neq 0$, οπότε ο ν δεν μπορεί να είναι περιττός.
- Ο θετικός ακέραιος $A = 4\nu$, όπου ν άρτιος θετικός ακέραιος, ανήκει στο σύνολο των άρτιων θετικών διαιρετών του 24, δηλαδή είναι:

$$4\nu \in \{2,4,6,8,12,24\}, \text{ όπου } \nu \text{ άρτιος θετικός ακέραιος,}$$
$$\Leftrightarrow \nu \in \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 6\right\}, \text{όπου } \nu \text{ άρτιος θετικός ακέραιος,}$$
$$\Leftrightarrow \nu = 2 \text{ ή } \nu = 6.$$

Άρα οι δυνατές τιμές του ν είναι το 2 και το 6.

Πρόβλημα 2
Υπάρχει διψήφιος θετικός ακέραιος $N = \overline{ab} = 10a + b,$ όπου a, b ψηφία με $a \neq 0$, που ισούται με το γινόμενο των ψηφίων του ελαττωμένο κατά το άθροισμα των ψηφίων του;

Λύση
Ο ζητούμενος διψήφιος θετικός ακέραιος $N = \overline{ab} = 10a + b,$ όπου a, b ψηφία με $a \neq 0$, ικανοποιεί την εξίσωση

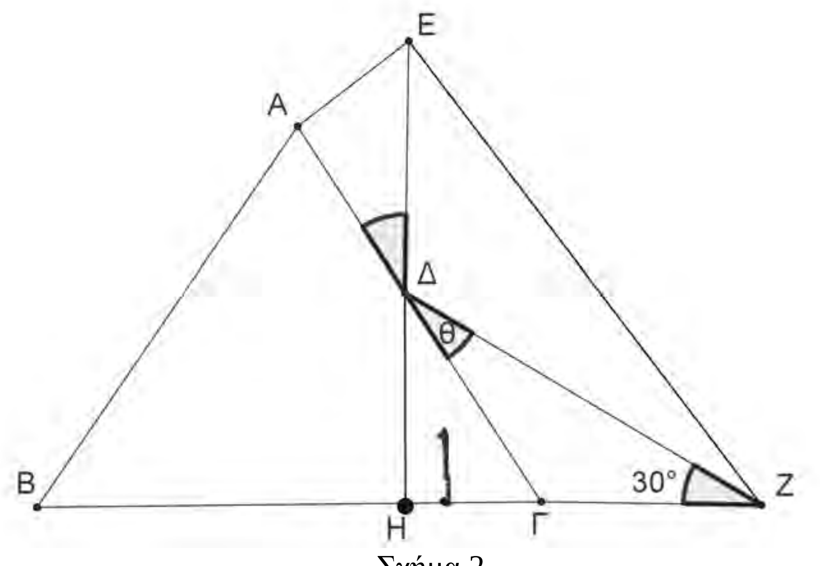
$$10a + b = ab - (a + b) \Leftrightarrow 11a = ab - 2b \Leftrightarrow (11 - b)a = -2b.$$

Η τελευταία εξίσωση δεν είναι δυνατόν να ισχύει, γιατί ο όρος $(11-b)a$ του πρώτου μέλους είναι θετικός, ενώ ο όρος του δευτέρου μέλους είναι μικρότερος ή ίσος με το μηδέν. Άρα δεν υπάρχει ο ζητούμενος διψήφιος θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 3
Να υπολογίσετε το άθροισμα:
$$S = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + \cdots + 997^2 - 998^2 - 999^2 + 1000^2 .$$

Λύση
Παρατηρούμε ότι το άθροισμα S είναι άθροισμα 250 αθροισμάτων της μορφής
$$S_k = (4k+1)^2 - (4k+2)^2 - (4k+3)^2 + (4k+4)^2, \text{ για } k = 0,1,2,3,\ldots,249 .$$
Όμως έχουμε
$$\begin{aligned} S_k &= (4k+1)^2 - (4k+2)^2 - (4k+3)^2 + (4k+4)^2 \\ &= 16k^2 + 8k + 1 - 16k^2 - 16k - 4 - 16k^2 - 24k - 9 + 16k^2 + 32k + 16 \\ &= 4, \text{ για κάθε } k = 0,1,2,3,\ldots,249. \end{aligned}$$
Άρα έχουμε
$$S = S_0 + S_1 + \ldots + S_{249} = 4 + 4 + \ldots 4 = 250 \cdot 4 = 1000$$

Πρόβλημα 4
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι: το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς $ΑΓ = \beta$ του τριγώνου $ΑΒΓ$, $Δ\hat{Α}Ε = 90^\circ$, η ΔΕ είναι κάθετη προς τη ΒΓ, $Α\hat{Δ}Ε = Γ\hat{Δ}Ζ = \theta$ και $Γ\hat{Ζ}Δ = 30^0$.
(i) Να βρείτε τη γωνία θ.
(ii) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΕΖ συναρτήσει του β.



Σχήμα 2

Λύση
(i) Έστω ότι η ευθεία ΔΕ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Η. Τότε θα είναι
$$Η\hat{Δ}Γ = \theta \text{ (ως κατά κορυφή) και } Η\hat{Δ}Ζ = Η\hat{Δ}Γ + Γ\hat{Δ}Ζ = 2\theta ,$$
οπότε από το τρίγωνο ΗΔΖ έχουμε:
$$90^\circ + 2\theta + 30^0 = 180^0 \Leftrightarrow \theta = 30^0$$

(ii) Το τρίγωνο ΗΕΖ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα ΕΖ, οπότε για τον υπολογισμό της ΕΖ θα χρησιμοποιήσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα. Πρέπει όμως να έχουμε υπολογίσει τις κάθετες πλευρές ΗΖ και ΗΕ συναρτήσει του β.

Από το τρίγωνο ΗΔΓ που είναι ορθογώνιο στο Η με $\Gamma\Delta = \frac{\beta}{2}$ και έχει $\mathrm{H}\hat{\Delta}\Gamma = \theta = 30^0$ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{H}\Delta = \Delta\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu 30^0 = \frac{\beta}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\beta\sqrt{3}}{4} \text{ και } \mathrm{H}\Gamma = \Delta\Gamma \cdot \eta\mu 30^0 = \frac{\beta}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\beta}{4}.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα μήκη των ΗΔ και ΗΓ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΗΔΓ με $\mathrm{H}\hat{\Delta}\Gamma = \theta = 30^0$, οπότε η κάθετη πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την οξεία γωνία των 30^0 θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας , δηλαδή είναι $\mathrm{H}\Gamma = \frac{\beta}{4}$ και στη συνέχεια από το Πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε και την πλευρά $\mathrm{H}\Delta = \frac{\beta\sqrt{3}}{4}$.

Το τρίγωνο ΓΔΖ είναι ισοσκελές ($\Gamma\hat{\mathrm{Z}}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{Z} = 30^0$), οπότε θα είναι $\Gamma\mathrm{Z} = \Gamma\Delta = \frac{\beta}{2}$ και

$$\mathrm{HZ} = \mathrm{H}\Gamma + \Gamma\mathrm{Z} = \frac{\beta}{4} + \frac{\beta}{2} = \frac{3\beta}{4}.$$

Επιπλέον, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ με $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = 90^\circ$, $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = 30^0$ και $\mathrm{A}\Delta = \frac{\beta}{2}$, έχουμε:

$$\Delta\mathrm{E} = \frac{\mathrm{A}\Delta}{\sigma\upsilon\nu 30^0} = \frac{\beta/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\beta}{\sqrt{3}} = \frac{\beta\sqrt{3}}{3},$$

οπότε θα είναι

$$\mathrm{HE} = \mathrm{H}\Delta + \Delta\mathrm{E} = \frac{\beta\sqrt{3}}{4} + \frac{\beta\sqrt{3}}{3} = \frac{7\beta\sqrt{3}}{12}.$$

Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΗΕΖ με $\hat{\mathrm{H}} = 90^\circ$ έχουμε:

$$\mathrm{EZ} = \sqrt{\mathrm{HE}^2 + \mathrm{HZ}^2} = \sqrt{\left(\frac{7\beta\sqrt{3}}{12}\right)^2 + \left(\frac{3\beta}{4}\right)^2} = \frac{\beta\sqrt{57}}{6}.$$

Α΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές του ρητού αριθμού α, για τις οποίες ο αριθμός $\mathrm{A} = \alpha\sqrt{3}$ είναι ρητός.

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{B} = \left(1+\sqrt{3}\right)^2$ είναι άρρητος.

Λύση

(i) Για $\alpha = 0$ είναι $\mathrm{A} = 0$, ρητός. Έστω $\alpha \neq 0$. Αν ήταν ο $\mathrm{A} = \alpha\sqrt{3}$ ρητός, τότε ο αριθμός $\frac{\mathrm{A}}{\alpha} = \sqrt{3}$**,** θα ήταν επίσης ρητός, ως πηλίκο δύο ρητών αριθμών, που είναι άτοπο.

Επομένως, ο αριθμός Α είναι ρητός μόνο για $\alpha = 0$.

(ii) Έχουμε $\mathrm{B} = \left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$. Αν ο αριθμός Β ήταν ρητός, τότε ο αριθμός $\mathrm{B} - 4 = 2\sqrt{3}$ θα ήταν επίσης ρητός, ως διαφορά δύο ρητών, το οποίο είναι άτοπο, σύμφωνα με το (i).

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x+1-2|x|=\alpha x,$$

έχει, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, μία τουλάχιστον πραγματική λύση.

Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές λύσεις;

Λύση

Επειδή στην εξίσωση εμφανίζεται η απόλυτη τιμή του αγνώστου x διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Έστω $x \geq 0$.

Τότε ισχύει $|x|=x$ και η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$x+1-2x=\alpha x, x \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)x=1, x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{\alpha+1}, \text{ αν } \alpha>-1 \\ \text{αδύνατο, αν } \alpha \leq -1. \end{cases}$$

(ii) Έστω $x<0$.

Τότε ισχύει $|x|=-x$ και η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$x+1+2x=\alpha x, x<0 \Leftrightarrow (\alpha-3)x=1, x<0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{\alpha-3}, \text{ αν } \alpha<3 \\ \text{αδύνατο, αν } \alpha \geq 3. \end{cases}$$

Επομένως, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον πραγματική λύση. Η εξίσωση έχει 2 πραγματικές λύσεις διαφορετικές μεταξύ τους, αν ισχύει: $-1<\alpha<3$.

Πράγματι, για $-1<\alpha<3$ η εξίσωση έχει τις λύσεις $x_1=\dfrac{1}{\alpha-3}<0$ και $x_2=\dfrac{1}{\alpha+1}>0$ που είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ και έστω A_1,B_1,C_1 τα αντιδιαμετρικά σημεία των κορυφών του A,B,C. Στις ευθείες που ορίζουν οι πλευρές BC,AC,AB θεωρούμε τα σημεία A_2,B_2,C_2 αντίστοιχα και έστω (ε_1) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία A_1,A_2, (ε_2) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία B_1,B_2 και (ε_3) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία C_1,C_2.

Έστω ακόμη (δ_1) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο A προς την (ε_1), (δ_2) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο B προς την (ε_2) και (δ_3) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο C προς την (ε_3). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ και (ε_3) συντρέχουν (περνάνε από το ίδιο σημείο), αν, και μόνο αν, οι ευθείες $(\delta_1),(\delta_2)$ και (δ_3) συντρέχουν

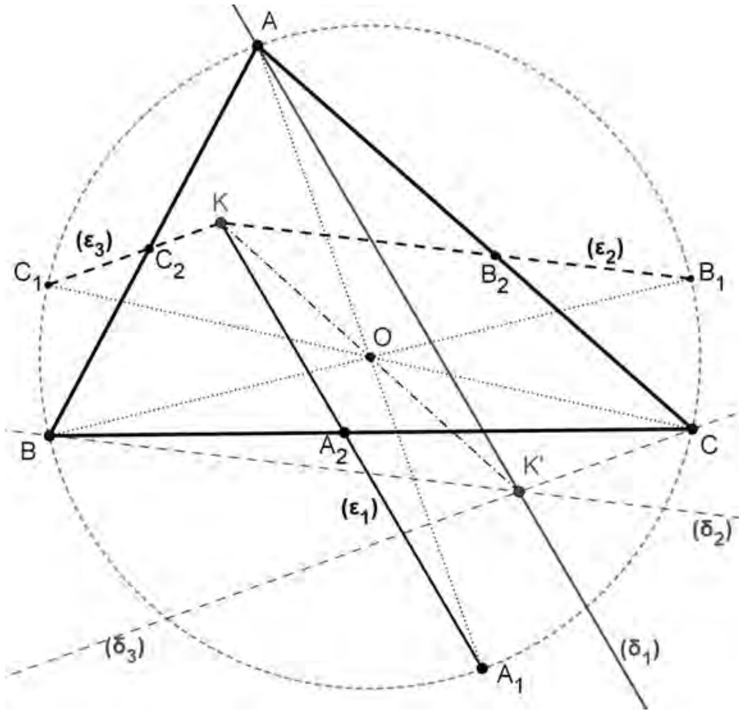
Λύση

Οι ευθείες (ε_1) και (δ_1) είναι συμμετρικές ως προς το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC, αφού το O είναι μέσο της AA_1.

Οι ευθείες (ε_2) και (δ_2) είναι συμμετρικές ως προς το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC, αφού το O είναι μέσο της BB_1.

Οι ευθείες (ε_3) και (δ_3) είναι συμμετρικές ως προς το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC, αφού το O είναι μέσο της CC_1.

Σύμφωνα με τη θεωρία, αν περιστρέψουμε μία ευθεία κατά 180^0 γύρω από το κέντρο συμμετρίας, τότε αυτή θα συμπέσει με τη συμμετρική της ευθεία , ως προς κέντρο το σημείο O. Επομένως, οι ευθείες (ε_1), (ε_2) και (ε_3) συντρέχουν, έστω στο σημείο K, αν, και μόνο αν, οι ευθείες (δ_1), (δ_2) και (δ_3) συντρέχουν στο σημείο K', που είναι το συμμετρικό του σημείου K ως προς το σημείο O.



Σχήμα 3

Παρατήρηση

Το σημείο K ταυτίζεται με το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC, αν, και μόνο αν, τα σημεία A_2, B_2, C_2 είναι τα μέσα των πλευρών BC, AC, AB αντίστοιχα.

Στη περίπτωση αυτή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή πρόταση:

"*Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου ως προς τα μέσα των πλευρών τριγώνου, βρίσκονται επάνω στο περιγεγραμμένο του κύκλο και είναι αντιδιαμετρικά των κορυφών του*"

Πρόβλημα 4

Οι πραγματικοί αριθμοί x, y και z ικανοποιούν τις ισότητες:

$$x^3 - y^3 = 26z^3$$

$$x^2y - xy^2 = 6z^3.$$

(α) Να εκφράσετε τους x, y συναρτήσει του z.

(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $x + 2y + 3z = 8$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y και z.

Λύση

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη ισότητα επί 3 και την αφαιρούμε από την πρώτη, οπότε λαμβάνουμε

$$(x-y)^3 = 8z^3 \Leftrightarrow x - y = 2z. \qquad (1)$$

Τότε η δεύτερη ισότητα γίνεται:

$$2zxy = 6z^3 , \qquad (2)$$

οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
(i) Έστω $z \neq 0$.
Τότε η (2) είναι ισοδύναμη με την σχέση

$$xy = 3z^2 , \qquad (3)$$

Από τις (1) και (3), προκύπτει η σχέση

$$x(x-2z) = 3z^2 \Leftrightarrow x^2 - 2zx - 3z^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3z \text{ ή } x = -z ,$$

οπότε θα είναι

$$x = 3z, y = z \text{ ή } x = -z, y = -3z .$$

(ii) Για $z = 0$ οι δύο πρώτες εξισώσεις γίνονται:

$$\left.\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2) = 0 \\ xy(x-y) = 0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow x - y = 0 \text{ ή } x = y = 0 ,$$

οπότε προκύπτει ότι:

$$x = y, \text{ ανεξάρτητα από το } z .$$

(β) Για $x = 3z, y = z$ η εξίσωση $x + 2y + 3z = 8$ γίνεται $8z = 8 \Leftrightarrow z = 1$, οπότε έχουμε ότι $(x, y, z) = (3,1,1)$, ενώ για $x = -z, y = -3z$, η εξίσωση γίνεται $-4z = 8 \Leftrightarrow z = -2$, οπότε έχουμε ότι $(x, y, z) = (2, 6, -2)$.
Για $z = 0$, είναι $x = y$, οπότε από την εξίσωση $x + 2y + 3z = 8$ προκύπτει ότι

$$(x, y, z) = \left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, 0\right).$$

Β΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες (x, y, z) πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 65z^3 \\ x^2y + xy^2 &= 20z^3 \\ x - y + 2z &= 10. \end{aligned}$$

Λύση

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση επί 3 και την προσθέτουμε στην πρώτη, οπότε λαμβάνουμε την εξίσωση

$$(x+y)^3 = 125z^3 \Leftrightarrow x + y = 5z . \qquad (1)$$

Τότε η δεύτερη εξίσωση γίνεται

$$5zxy = 20z^3 , \qquad (2)$$

οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
(i) Έστω $z \neq 0$.
Τότε από την εξίσωση (2) λαμβάνουμε:

$$xy = 4z^2 . \qquad (3)$$

Από τις (1) και (3), προκύπτει η εξίσωση

$$x(5z - x) = 4z^2 \Leftrightarrow x^2 - 5zx + 4z^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4z \text{ ή } x = z ,$$

οπότε θα είναι

$$x = 4z, y = z \text{ ή } x = z, y = 4z .$$

Για $x = 4z, y = z$ η τρίτη εξίσωση του συστήματος γίνεται $5z = 10 \Leftrightarrow z = 2$, οπότε το σύστημα έχει τη λύση $(x, y, z) = (8, 2, 2)$, ενώ για $x = z,\ y = 4z$ η τρίτη εξίσωση γίνεται $-z = 10 \Leftrightarrow z = -10$, οπότε το σύστημα έχει τη λύση $(x, y, z) = (-10, -40, -10)$.

(ii) Για $z = 0$ οι δύο πρώτες εξισώσεις γίνονται:

$$\left.\begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0 \\ xy(x+y) = 0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow x + y = 0 \text{ ή } x = y = 0 \Leftrightarrow x = -y,$$

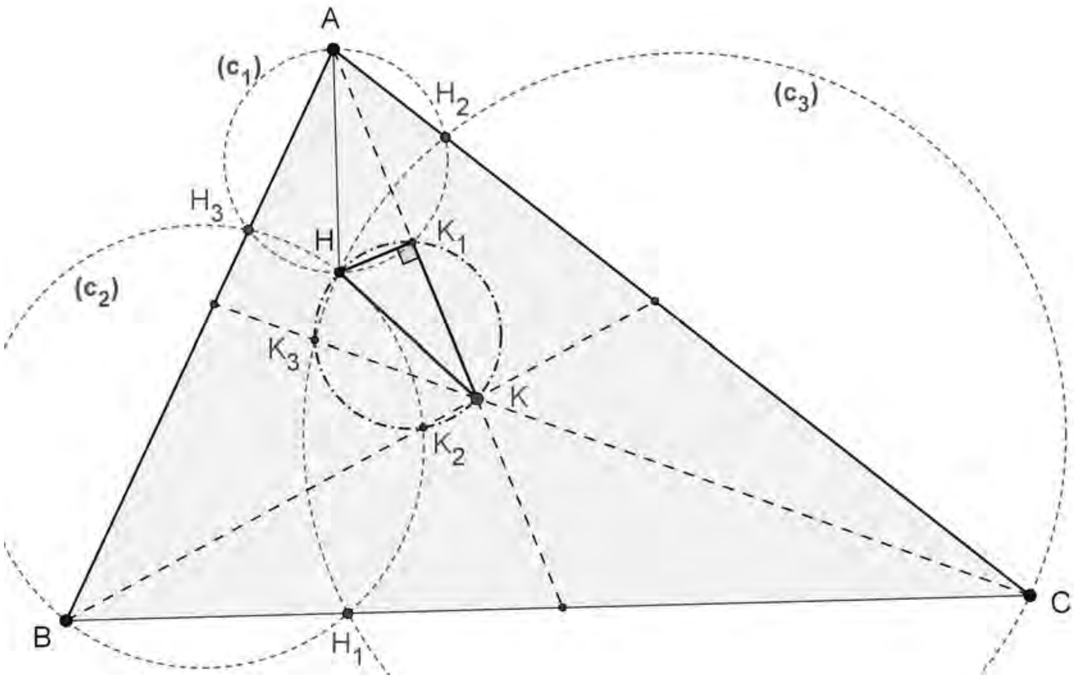
οπότε από την τρίτη εξίσωση προκύπτει ότι $(x, y, z) = (5, -5, 0)$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ABC, K τυχόν σημείο στο εσωτερικό του και τα ύψη του AH_1, BH_2, CH_3. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AH_2H_3 τέμνει την ημιευθεία AK στο σημείο K_1, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BH_1H_3 τέμνει την ημιευθεία BK στο σημείο K_2 και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου CH_1H_2 τέμνει τη ημιευθεία CK στο σημείο K_3. Να αποδείξτε ότι τα σημεία K_1, K_2, K_3, H και K είναι ομοκυκλικά (δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο), όπου H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC.

Λύση

Έστω (c_1) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AH_2H_3, (c_2) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BH_1H_3 και (c_3) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου CH_1H_2.



Σχήμα 4

Το τετράπλευρο AH_2HH_3 είναι εγγράψιμο, οπότε ο κύκλος (c_1) περνάει από το σημείο H.
Το τετράπλευρο BH_1HH_3 είναι εγγράψιμο, οπότε ο κύκλος (c_2) περνάει από το σημείο H.
Το τετράπλευρο CH_1HH_2 είναι εγγράψιμο, οπότε ο κύκλος (c_3) περνάει από το σημείο H.
Τελικά, οι τρεις κύκλοι (c_1), (c_2) και (c_3) περνάνε από το ορθόκεντρο H του τριγώνου ABC.

Ο κύκλος (c_1) έχει διάμετρο την AH, οπότε $HK_1 \perp AK_1$, δηλαδή το σημείο K_1 ανήκει στο κύκλο διαμέτρου HK.
Όμοια αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία K_2, K_3, ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 3
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2 + x + 1 - 2|x| = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

έχει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ δύο διαφορετικές μεταξύ τους λύσεις στο σύνολο $\mathbb{R}$.
Για ποιες τιμές του α οι δύο ρίζες είναι ετερόσημες;

Λύση
Λόγω της ύπαρξης του $|x|$, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
(i) Έστω $x \geq 0$.
Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$x^2 + x + 1 - 2x = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - (\alpha+1)x + 1 = 0, \alpha \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta = (\alpha+1)^2 - 4 = (\alpha-1)(\alpha+3)$. Άρα η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες, όταν είναι $\alpha \leq -3$ ή $\alpha \geq 1$. Επειδή το γινόμενο των ριζών είναι $P = 1 > 0$ οι ρίζες είναι ομόσημες, οπότε για να είναι και οι δύο θετικές πρέπει και αρκεί $S = \alpha + 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > -1$.
Επομένως έχουμε:

- Για $\alpha > 1$, η εξίσωση (1) έχει δύο ακριβώς διαφορετικές θετικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.
- Για $\alpha = 1$, η εξίσωση (1) έχει τη διπλή θετική ρίζα $x = 1$ στο $\mathbb{R}$.
- Για $\alpha < 1$, η εξίσωση (1) δεν έχει μη αρνητικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.

(ii) Έστω $x < 0$.
Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$x^2 + x + 1 + 2x = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - (\alpha-3)x + 1 = 0, \alpha \in \mathbb{R}, \qquad (2)$$

η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta = (\alpha-3)^2 - 4 = (\alpha-5)(\alpha-1)$. Άρα η εξίσωση (2) έχει πραγματικές ρίζες όταν είναι $\alpha \leq 1$ ή $\alpha \geq 5$. Επειδή το γινόμενο των ριζών είναι $P = 1 > 0$ οι ρίζες είναι ομόσημες, οπότε για να είναι και οι δύο αρνητικές πρέπει και αρκεί $S = \alpha - 3 < 0 \Leftrightarrow \alpha < 3$.
Επομένως έχουμε:

- Για $\alpha < 1$, η εξίσωση (2) έχει δύο ακριβώς διαφορετικές αρνητικές ρίζες στο $\mathbb{R}$
- Για $\alpha = 1$, η εξίσωση (2) έχει τη διπλή αρνητική ρίζα $x = -1$ στο $\mathbb{R}$.
- Για $\alpha > 1$, η εξίσωση (2) δεν έχει αρνητικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Από τις περιπτώσεις (1) και (2) προκύπτει ότι η δεδομένη εξίσωση έχει, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, δύο πραγματικές ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους, οι οποίες είναι ετερόσημες για $\alpha = 1$.

Πρόβλημα 4
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 2} - 2\sqrt{x^2 + x + 1} = x + 1.$$

Λύση
Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι ισχύει: $2x^2 + 3x + 2 > 0$ και $x^2 + x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Αν θέσουμε $a = \sqrt{2x^2 + 3x + 2}$, $b = \sqrt{x^2 + x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, τότε λαμβάνουμε:

$$a^2 - b^2 = (2x^2 + 3x + 2) - (x^2 + x + 1) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2,$$

οπότε από τη δεδομένη εξίσωση προκύπτει η εξίσωση με αγνώστους a, b,

$$a^2-b^2=(a-2b)^2 \Leftrightarrow 4ab-5b^2=0 \Leftrightarrow b(4a-5b)=0 \Leftrightarrow 4a=5b,$$

αφού είναι $b\neq 0$. Έτσι έχουμε την εξίσωση

$$4\sqrt{2x^2+3x+2}=5\sqrt{x^2+x+1},$$

της οποίας τα δύο μέλη είναι θετικά, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$16\cdot\left(2x^2+3x+2\right)=25\cdot\left(x^2+x+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 7x^2+23x+7=0 \Leftrightarrow x=\frac{-23\pm 3\sqrt{37}}{14}.$$

Με έλεγχο διαπιστώνουμε ότι η τιμή $x=\frac{-23+3\sqrt{37}}{14}$ δεν επαληθεύει την εξίσωση, οπότε η μοναδική ρίζα της είναι η $x=\frac{-23-3\sqrt{37}}{14}$. Αυτό θα μπορούσε να προκύψει και από τη σχέση $a-2b<0$ η οποία αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε πρέπει να είναι $x<-1$.

Γ΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1

Η ακολουθία $a_n, n\in\mathbb{N}^*$, ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$a_{n+1}=a_n+kn,\ n\in\mathbb{N}^*,$$

όπου k θετικός ακέραιος και $a_1=1$. Να βρείτε για ποια τιμή του k ο αριθμός 2011 είναι όρος της ακολουθίας $a_n, n\in\mathbb{N}^*$.

Λύση

Από τη δεδομένη αναδρομική σχέση έχουμε

$$\begin{aligned}
&a_1=1\\
&a_2=a_1+k\\
&a_3=a_2+2k\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&a_{n-1}=a_{n-2}+(n-2)k\\
&a_n=a_{n-1}+(n-1)k
\end{aligned}$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$a_n=1+k(1+2+\dots+n-1)=1+k(1+2+\dots+n-1)=1+\frac{k(n-1)n}{2}.$$

Επομένως, αρκεί να προσδιορίσουμε τις τιμές των k και n για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

$$a_n=1+\frac{k(n-1)n}{2}=2011 \Leftrightarrow k(n-1)n=4020 \Leftrightarrow k(n-1)n=1\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot67$$

$$\Leftrightarrow (n,k)=(2,2010) \text{ ή } (n,k)=(3,670) \text{ ή } (n,k)=(4,335) \text{ ή } (n,k)=(5,201) \text{ ή } (n,k)=(6,134)$$

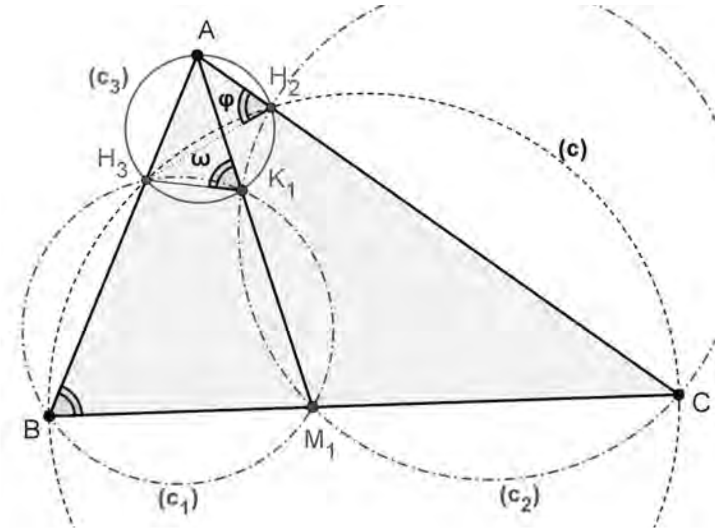
Επομένως, για $k=2010$ είναι $a_2=2011$, για $k=670$ είναι $a_3=2011$, για $k=335$ είναι $a_4=2011$, για $k=201$ είναι $a_5=2011$ και για $k=134$ είναι $a_6=2011$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ABC και έστω M_1, M_2, M_3 τυχόντα σημεία των πλευρών του BC, AC, AB, αντίστοιχα. Έστω ακόμη τα ύψη του AH_1, BH_2, CH_3. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων AH_2H_3, BM_1H_3, CM_1H_2 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_1), οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BH_1H_3, AM_2H_3, CM_2H_1 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_2) και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων CH_1H_2, AM_3H_2, BM_3H_1 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_3). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι ευθείες AK_1, BK_2, CK_3 συντρέχουν, δηλαδή περνάνε από το ίδιο σημείο, αν, και μόνο αν, οι ευθείες AM_1, BM_2, CM_3 συντρέχουν.

Λύση

Έστω (c_1) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BM_1H_3, (c_2) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου CM_1H_2, (c_3) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AH_2H_3 και (c) ο περιγεγραμμένος κύκλος του εγγράψιμου τετραπλεύρου BH_3H_2C.



Σχήμα 5

Θεωρώντας τις τέμνουσες AB και AC του κύκλου (c), συμπεραίνουμε:

$$AB \cdot AH_3 = AC \cdot AH_2.$$

Το γινόμενο όμως $AB \cdot AH_3$ εκφράζει τη δύναμη του σημείου A ως προς το κύκλο (c_1) ενώ το γινόμενο $AC \cdot AH_2$ εκφράζει τη δύναμη του σημείου A ως προς το κύκλο (c_2).

Άρα το σημείο A, ανήκει στον ριζικό άξονα των κύκλων (c_1) και (c_2).

Έστω τώρα ότι οι κύκλοι (c_1) και (c_2) τέμνονται στο σημείο K_1 (εκτός βέβαια από το σημείο M_1). Τότε η ευθεία που ορίζουν τα σημεία αυτά (δηλαδή τα K_1 και M_1) είναι ο ριζικός άξονας των κύκλων (c_1) και (c_2).

Από τους παραπάνω συλλογισμούς προκύπτει ότι τα σημεία A, K_1 και M_1 είναι συνευθειακά.

Θα αποδείξουμε ότι και ο κύκλος (c_3) περνάει από το σημείο K_1, δηλαδή ότι το τετράπλευρο $AH_2K_1H_3$ είναι εγγράψιμο.

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο BH_3H_2C έχουμε: $\hat{\varphi}=\hat{B}$. Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $BM_1K_1H_3$ έχουμε: $\hat{\omega}=\hat{B}$. Άρα είναι $\hat{\omega}=\hat{\varphi}$ και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $AH_2K_1H_3$ είναι εγγράψιμο.
Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και οι δύο άλλες τριάδες κύκλων, περνάνε από το ίδιο σημείο.
Προφανώς τώρα οι ευθείες AK_1, BK_2, CK_3 συντρέχουν, αν, και μόνο αν, συντρέχουν οι ευθείες AM_1, BM_2, CM_3 (δεδομένου ότι τα σημεία A, K_1, M_1, τα σημεία B, K_2, M_2 και τα σημεία C, K_3, M_3, είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 3
Αν $a,b,x,y\in\mathbb{R}$ με $(a,b)\neq(0,0)$ και $(x,y)\neq(0,0)$ και ισχύουν

$$a\left(x^2-y^2\right)-2bxy=x\left(a^2-b^2\right)-2aby$$
$$b\left(x^2-y^2\right)+2axy=y\left(a^2-b^2\right)+2abx,$$

να αποδείξετε ότι $x=a$ και $y=b$.

Λύση
Σύμφωνα με τον ορισμό της ισότητας μιγαδικών αριθμών, προκύπτει ότι το σύστημα των δύο δεδομένων εξισώσεων είναι ισοδύναμο με την εξίσωση:

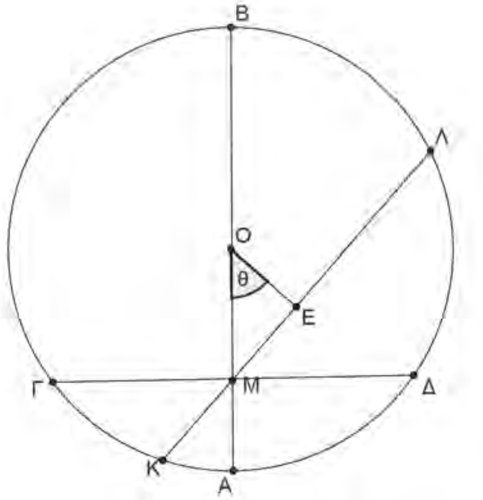
$$\left[a\left(x^2-y^2\right)-2bxy\right]+\left[b\left(x^2-y^2\right)+2axy\right]i=\left[x\left(a^2-b^2\right)-2aby\right]+\left[y\left(a^2-b^2\right)+2abx\right]i$$
$$\Leftrightarrow (a+bi)\cdot\left[\left(x^2-y^2\right)+2xyi\right]=\left[\left(a^2-b^2\right)+2abi\right]\cdot(x+yi)$$
$$\Leftrightarrow (a+bi)\cdot(x+yi)^2=(a+bi)^2\cdot(x+yi)$$
$$\Leftrightarrow x+yi=a+bi \text{ (αφού } (\alpha,\beta)\neq(0,0) \text{ και } (x,y)\neq(0,0))$$
$$\Leftrightarrow x=a,\ y=b.$$

Πρόβλημα 4
Σημείο Μ βρίσκεται στο εσωτερικό κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$, όπου $\mathrm{r}=15cm$, σε απόσταση $9cm$ από το κέντρο του κύκλου. Να βρείτε τον αριθμό των χορδών του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$ που περνάνε από το σημείο Μ και το μήκος τους είναι ακέραιος αριθμός.

Λύση
Θεωρούμε τη χορδή ΑΒ που περνάει από το σημείο Μ και το κέντρο Ο του κύκλου, καθώς και την κάθετη προς αυτήν χορδή ΓΜΔ, οπότε το σημείο Μ είναι το μέσο της χορδής ΓΔ. Η χορδή ΑΒ έχει ακέραιο μήκος $30cm$. Από το θεώρημα τεμνομένων χορδών έχουμε ότι:

$$\Gamma\mathrm{M}\cdot\mathrm{M}\Delta=\mathrm{AM}\cdot\mathrm{MB}\Leftrightarrow\left(\frac{\Gamma\Delta}{2}\right)^2=6\cdot(9+15)\Leftrightarrow\left(\frac{\Gamma\Delta}{2}\right)^2=144\Leftrightarrow\frac{\Gamma\Delta}{2}=12\Leftrightarrow\Gamma\Delta=24.$$

Έτσι μέχρι τώρα έχουμε βρει δύο χορδές του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$ που περνάνε από το σημείο Μ και έχουν ακέραιο μήκος. Θεωρούμε τυχούσα χορδή ΚΛ του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$ που περνάει από το Μ και έστω $\mathrm{ME}=x,\ \mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{E}=\theta,$ όπου Ε είναι το μέσο της ΚΛ, σχήμα 6. Αν υποθέσουμε ότι $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$, τότε έχουμε θεωρήσει όλες τις χορδές του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$ που περνάνε από το Μ και τα άκρα τους Κ και Λ βρίσκονται στα ελάσσονα τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{A}\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\mathrm{B}\Delta}$, αντίστοιχα . Για κάθε μία από αυτές τις χορδές αντιστοιχεί και μία ακόμη που είναι η συμμετρική της ως προς τη διάμετρο ΑΒ.



Σχήμα 6

Για τη χορδή ΚΛ, αν συμβολίσουμε το μήκος της ως $\ell(\theta)$, έχουμε

$$\ell(\theta) = 2\sqrt{225 - 81\sigma\upsilon\nu^2\theta},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Επειδή είναι $\ell'(\theta) = \dfrac{81\eta\mu 2\theta}{\sqrt{225 - 81\sigma\upsilon\nu^2\theta}} > 0,\ \theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, έπεται ότι η συνάρτηση $\ell(\theta)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, οπότε η συνάρτηση $\ell(\theta)$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\left[\ell(0), \ell\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right] = [24, 30]$. Άρα το μήκος της χορδής ΚΛ μπορεί να πάρει όλες τις ακέραιες τιμές του διαστήματος $[24, 30]$. Αν λάβουμε υπόψιν και τη συμμετρική χορδή της ΚΛ ως προς τη διάμετρο ΑΒ, τότε τα πέντε μήκη 25, 26, 27, 28, 29 λαμβάνονται δύο φορές το καθένα, ενώ τα μήκη 24 και 30 λαμβάνονται από μία φορά. Έτσι έχουμε συνολικά 12 χορδές που περνάνε από το Μ με ακέραιο μήκος.

Παρατήρηση 1

Θα μπορούσαμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε το *θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής* για τη συνεχή συνάρτηση $\ell(\theta) = 2\sqrt{225 - 81\sigma\upsilon\nu^2\theta},\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, η οποία έχει ελάχιστη τιμή την $\ell(0) = 24$ και μέγιστη τιμή την $\ell\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 30$. Αυτό προκύπτει από την παρατήρηση ότι τα μήκη των χορδών είναι αντιστρόφως ανάλογα από τα αποστήματά τους και ότι το μέγιστο απόστημα λαμβάνεται για $\theta = 0$, ενώ το ελάχιστο απόστημα λαμβάνεται για $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Παρατήρηση 2

Σημειώνουμε ακόμη ότι οι χορδές με ακέραια μήκη 25, 26, 27, 28, 29, μπορούν να κατασκευαστούν γεωμετρικά, αφού αν θέσουμε $\mathrm{KM} = x$ και $\mathrm{M\Lambda} = y$, τότε έχουμε

$$x + y = m,\ m \in \{25, 26, 27, 28, 29\} \text{ και } xy = 144 = 12^2.$$

Έτσι εξασφαλίζουμε την ύπαρξη αυτών των χορδών με ακέραιο μήκος, χωρίς τη χρήση του διαφορικού λογισμού.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

Αθήνα, 15 Ιανουαρίου 2011

Αγαπητοί μαθητές,

Σας καλωσορίζουμε στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (ΕΜΕ) “**ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ**”. Σήμερα δεν δίνετε τις συνηθισμένες εξετάσεις. Συμμετέχετε σε έναν αγώνα του πνεύματος. Και μόνο η απόφασή σας για συμμετοχή και η πρόκρισή σας από τον προηγούμενο διαγωνισμό **ΘΑΛΗΣ**” είναι μια επιτυχία. Με την ευκαιρία αυτής μας της επικοινωνίας θα θέλαμε να σας πληροφορήσουμε για τα εξής :

Στα περιοδικά της ΕΜΕ **Ευκλείδης Α΄** και **Ευκλείδης Β΄** δημοσιεύονται εκτός των άλλων θεμάτων ανά τάξη και θέματα με τις λύσεις τους από Διεθνείς Μαθηματικούς Διαγωνισμούς.

Επίσης έχουν εκδοθεί βιβλία της ΕΜΕ με τα θέματα των Διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων (2 τεύχη), Βαλκανικών Μαθηματικών Ολυμπιάδων (1984-2008), Θεωρίας αριθμών και τα βιβλία με τα Θέματα των Ελληνικών Μαθηματικών Διαγωνισμών 1997-2007 σε 2 τεύχη.

Επιπλέον, η ΕΜΕ θα οργανώσει **Θερινά Σχολεία** διάρκειας μιας εβδομάδας προς το τέλος **Ιουλίου και αρχές Αυγούστου 2011**. Τα μαθήματα θα επικεντρωθούν σε ειδικά Κεφάλαια της σχολικής ύλης και σε θέματα Μαθηματικών Ολυμπιάδων. Λεπτομέρειες θα ανακοινωθούν στον επόμενο διαγωνισμό και στην ιστοσελίδα της ΕΜΕ.

Για το νέο έτος το Δ.Σ. της ΕΜΕ σας εύχεται ολόψυχα καλή χρονιά, προσωπική και οικογενειακή ευτυχία.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΓΙΑ ΤΟ Δ.Σ.
ΤΗΣ Ε.Μ.Ε.

Ο Πρόεδρος
Καθηγητής Γρηγόρης Καλογερόπουλος

Ο Γενικός Γραμματέας
Ιωάννης Τυρλής

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\frac{1}{8^2}\cdot\left(2^3+1+\frac{1}{4}:\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right) \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{3^3}-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{3^2}{2^7}.$$

Μονάδες 3

(β) Αν ισχύει ότι:
$$\frac{2}{\alpha}+\frac{4}{\beta}+\frac{\gamma}{6}=\frac{1}{6},$$
να βρείτε την τιμή της παράστασης:
$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{4\alpha}+\frac{12-2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma-3}{12}.$$

Μονάδες 2

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος αυτοκινήτων είχε στο κατάστημά του την αρχή της περυσινής χρονιάς 20 αυτοκίνητα τύπου Α και 60 αυτοκίνητα τύπου Β. Η τιμή πώλησης για κάθε αυτοκίνητο τύπου Α είναι 10000 ευρώ, ενώ για κάθε αυτοκίνητο τύπου Β είναι 12000 ευρώ.

Στο τέλος της χρονιάς είχε πουλήσει το 30% των αυτοκινήτων τύπου Α και το 60% του συνόλου των αυτοκινήτων τύπου Α και Β.

Να βρείτε ποιο θα είναι το κέρδος του από την πώληση των αυτοκινήτων, αν γνωρίζετε ότι από καθένα αυτοκίνητο τύπου Α κερδίζει το 5% της τιμής πώλησής του, ενώ από καθένα αυτοκίνητο τύπου Β κερδίζει το 10% της τιμής πώλησής του.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}}=36^0$. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία ε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ και την ευθεία ε στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ, ΑΔΕ και ΑΒΕ είναι ισοσκελή.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $\mathrm{A}=\overline{\alpha\beta\gamma}=100\alpha+10\beta+\gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

(i) $\mathrm{A}-\mathrm{B}=27$, όπου $\mathrm{B}=\overline{\alpha\gamma\beta}=100\alpha+10\gamma+\beta$.

(ii) Το άθροισμα των ψηφίων $\beta,\ \gamma$ ισούται με το μικρότερο ακέραιο που είναι λύση της ανίσωσης: $3x+12<5x-1$.

(iii) Ο αριθμός Α διαιρείται με το 3.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Elefttheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
(α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x+18}{4}-\frac{7-3x}{8}=1.$$

Μονάδες 2

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{3\beta}\right)^{-3}-9\beta^2-20,$$

για $\beta=-\frac{1}{3}$.

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2
Οι ακέραιοι α,β είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 0 και τέτοιοι ώστε

$$\alpha\le 10,\ \ \beta\ge 12\ \text{ και }\left(\alpha-12\right)\cdot\left(40-2\beta\right)\le 0.$$

Να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη της παράστασης $\mathrm{A}=3\alpha-2\beta$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Δίνεται ακόμη ότι ο κύκλος C που περνάει από τα σημεία Γ, Δ και Ε έχει ακτίνα 4 cm.

(i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές. ***Μονάδες 1***
(ii) Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου. ***Μονάδες 2***
(iii) Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται εξωτερικά του σχήματος ΕΑΒΓΔΕ και εσωτερικά του κύκλου C. ***Μονάδες 2***

Πρόβλημα 4
Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $\mathrm{A}=\overline{\alpha\beta\gamma}=100\alpha+10\beta+\gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

(i) $\mathrm{A}-\mathrm{B}=198$, όπου $\mathrm{B}=\overline{\gamma\beta\alpha}=100\gamma+10\beta+\alpha$.

(ii) Η εξίσωση $\dfrac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma}-\dfrac{\alpha-2\gamma}{x}=1$ έχει δύο ρίζες με άθροισμα 4.

(iii) Ο αριθμός Α διαιρείται με το 9.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές των ρητών αριθμών α, β για τις οποίες ο αριθμός $\alpha + \beta\sqrt{10}$ είναι ρητός.

Μονάδες 3

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x = \sqrt{5} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ είναι άρρητος.

Μονάδες 2

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\left(|x| - 2\right)^2 = x^2 + 4\alpha,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ και ευθεία (ε) που διέρχεται από την κορυφή του A και είναι παράλληλη προς τη πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Δ και έστω E το συμμετρικό του Δ ως προς τη κορυφή A. Από το A τέλος θεωρούμε παράλληλη προς την EB η οποία τέμνει τη $\mathrm{B\Delta}$ στο σημείο M και τη $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο K. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{AB} = \mathrm{BK} = \mathrm{K\Delta} = \Delta\mathrm{A}$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ που ικανοποιούν τις ισότητες

$$\alpha + \beta + \gamma = 2010 \quad \text{και} \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 67^2.$$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\left(|x|-1\right)^2 = 2x+\alpha,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 8\\ x^2+y^2+z^2 &= 26\\ xy+xz &= \left(yz+1\right)^2. \end{aligned}$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Αν οι α,β,γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$, να αποδείξετε ότι:

$$1 \le \frac{\left(\alpha^3+\beta^3\right)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\left(\beta^3+\gamma^3\right)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{\left(\gamma^3+\alpha^3\right)\beta}{\gamma^2+\alpha^2} < 2.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ (με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma}$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) με κέντρο O και ακτίνα R. Από το σημείο A φέρνουμε τις δύο εφαπτόμενες προς τον κύκλο (c_1), που έχει κέντρο το σημείο O και ακτίνα $r=\mathrm{OM}$ (M είναι το μέσο της $\mathrm{B\Gamma}$). Η μία εφαπτόμενη εφάπτεται στο κύκλο (c_1) στο σημείο T, τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο N και το κύκλο (c) στο σημείο N_1 (θεωρούμε $\mathrm{BN}<\mathrm{BM}$). Η άλλη εφαπτόμενη εφάπτεται στο κύκλο (c_1) στο σημείο Σ, τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο K και το κύκλο (c) στο σημείο K_1 (θεωρούμε $\mathrm{\Gamma K}<\mathrm{\Gamma M}$). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\mathrm{BN}_1, \mathrm{\Gamma K}_1$ και AM περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Αν οι α,β,γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 12, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\gamma}{4\alpha\beta}+\frac{\left(\beta^2+4\gamma^2\right)\alpha}{4\beta\gamma}+\frac{\left(\gamma^2+4\alpha^2\right)\beta}{4\gamma\alpha}>12$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^2+2xy=5$$
$$y^2-3xy=-2.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) με κέντρο Ο και ακτίνα R. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΟΒ (έστω (c_1)), τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΒΓ στο σημείο Ν. Έστω (c_2) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΚΝ και (c_3) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΟΓΚ. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι (c_1), (c_2) και (c_3) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Η ακολουθία $a_n, n\in\mathbb{N}^*$, ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$a_{n+1}=a_n-\frac{k}{2^n},\ n\in\mathbb{N}^*,\ a_1=1,$$

όπου k θετικός ακέραιος.

(i) Να προσδιορίσετε το γενικό όρο a_n της ακολουθίας ως συνάρτηση των n και k.

Μονάδες 2

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί θετικοί ακέραιοι k, n τέτοιοι ώστε : $a_n=\dfrac{1}{2^{1000}}$.

Μονάδες 3

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\frac{1}{8^2}\cdot\left(2^3+1+\frac{1}{4}:\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right) \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{3^3}-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{3^2}{2^7}.$$

(β) Αν ισχύει ότι:

$$\frac{2}{\alpha}+\frac{4}{\beta}+\frac{\gamma}{6}=\frac{1}{6},$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{4\alpha}+\frac{12-2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma-3}{12}.$$

Λύση

(α) Έχουμε

$$\mathrm{A}=\frac{1}{8^2}\cdot\left(2^3+1+\frac{1}{4}:\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{64}\cdot\left(8+1+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{64}\cdot\left(9+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{64}\cdot 9=\frac{9}{64},$$

$$\mathrm{B}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{3^3}-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{3^2}{2^7}=\left(\frac{9}{27}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{27}-\frac{6}{27}\right)\cdot\frac{9}{128}=\frac{8}{27}:\frac{4}{27}\cdot\frac{9}{128}=\frac{8}{27}\cdot\frac{27}{4}\cdot\frac{9}{128}=\frac{9}{64}.$$

Άρα είναι $\mathrm{A}=\mathrm{B}$.

Σημείωση. *Λόγω της μη ύπαρξης παρενθέσεων που να δίνουν προτεραιότητα στις πράξεις διαίρεσης και πολλαπλασιασμού θεωρούμε δεκτή και τη λύση της μορφής*

$$\mathrm{B}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{3^3}-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{3^2}{2^7}=\left(\frac{9}{27}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{27}-\frac{6}{27}\right)\cdot\frac{9}{128}=\frac{8}{27}:\frac{4}{27}\cdot\frac{9}{128}=\frac{8}{27}:\frac{1}{96}=\frac{768}{27}.$$

Στην περίπτωση αυτή είναι $\mathrm{A}<1<\mathrm{B}$, δηλαδή $\mathrm{A}<\mathrm{B}$.

(β) Λόγω της υπόθεσης $\frac{2}{\alpha}+\frac{4}{\beta}+\frac{\gamma}{6}=\frac{1}{6}$, έχουμε ότι:

$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{4\alpha}+\frac{12-2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma-3}{12}=\frac{8}{4\alpha}-\frac{\alpha}{4\alpha}+\frac{12}{3\beta}-\frac{2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma}{12}-\frac{3}{12}$$

$$=\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{4}+\frac{4}{\beta}-\frac{2}{3}+\frac{\gamma}{6}-\frac{1}{4}=\left(\frac{2}{\alpha}+\frac{4}{\beta}+\frac{\gamma}{6}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}-\frac{7}{6}=-1.$$

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος αυτοκινήτων είχε στο κατάστημά του την αρχή της περυσινής χρονιάς 20 αυτοκίνητα τύπου Α και 60 αυτοκίνητα τύπου Β. Η τιμή πώλησης για κάθε αυτοκίνητο τύπου Α είναι 10000 ευρώ, ενώ για κάθε αυτοκίνητο τύπου Β είναι 12000 ευρώ.

Στο τέλος της χρονιάς είχε πουλήσει το 30% των αυτοκινήτων τύπου Α και το 60% του συνόλου των αυτοκινήτων τύπου Α και Β.

Να βρείτε ποιο θα είναι το κέρδος του από την πώληση των αυτοκινήτων, αν γνωρίζετε ότι από καθένα αυτοκίνητο τύπου Α κερδίζει το 5% της τιμής πώλησής του, ενώ από καθένα αυτοκίνητο τύπου Β κερδίζει το 10% της τιμής πώλησής του.

Λύση

Το 30% των αυτοκινήτων τύπου Α είναι $20\cdot\frac{30}{100}=6$ αυτοκίνητα, ενώ το 60% του συνόλου των αυτοκινήτων τύπου Α και Β είναι $(20+60)\cdot\frac{60}{100}=80\cdot\frac{60}{100}=48$ αυτοκίνητα. Επομένως από τα αυτοκίνητα τύπου Β πουλήθηκαν $48-6=42$ αυτοκίνητα.

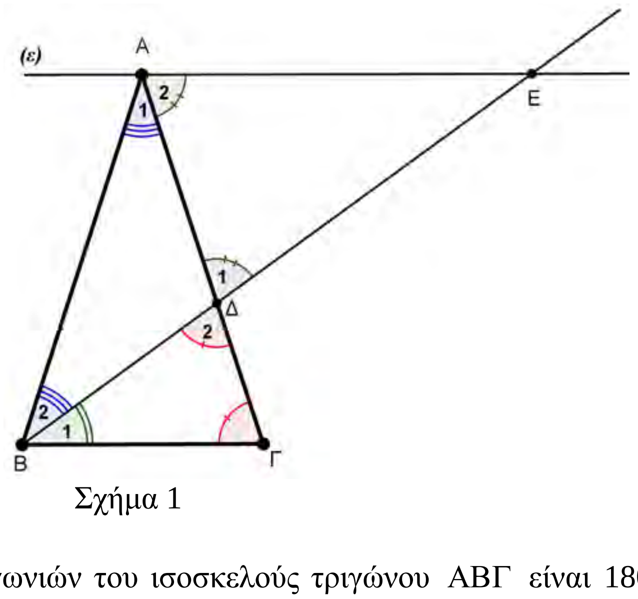
Από την πώληση καθενός αυτοκινήτου τύπου Α κερδίζει $10000\cdot\frac{5}{100}=500$ ευρώ, ενώ από την πώληση καθενός αυτοκινήτου τύπου Β κερδίζει $12000\cdot\frac{10}{100}=1200$ ευρώ. Επομένως από την πώληση των αυτοκινήτων ο έμπορος κέρδισε

$$6\cdot 500+42\cdot 1200=3000+50400=53400 \text{ ευρώ}.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ}=\text{ΑΓ}$ και $\hat{\text{Α}}=36^0$. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία ε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ και την ευθεία ε στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ, ΑΔΕ και ΑΒΕ είναι ισοσκελή.

Λύση



Σχήμα 1

Το άθροισμα των γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ είναι 180^o Επειδή όμως ισχύει $\hat{\text{Α}}=36^o$, θα έχουμε: $\hat{\text{Β}}=\hat{\Gamma}=72^o$.

Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{Β}}$, οπότε $\hat{\text{Β}}_1=\hat{\text{Β}}_2=\frac{\hat{\text{Β}}}{2}=\frac{72^o}{2}=36^o$.

Επειδή τώρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_2 = 36^o$, το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.

Στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ ισχύει $\hat{B}_1 = 36^o$ και $\hat{\Gamma} = 72^o$. Άρα $\hat{\Delta}_2 = 72^o$.

Από την ισότητα των γωνιών $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_2 = 72^o$, προκύπτει ότι το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

Οι γωνίες $\hat{A}_2$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες διότι είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων AE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$.

Από την ισότητα τέλος των γωνιών $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 72^o$ (ως κατά κορυφή), προκύπτει η ισότητα $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_2 = 72^o$. Επομένως το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

Οι γωνίες $\hat{B}_1$ και $\hat{E}$ είναι ίσες διότι είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων AE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την BE. Επίσης $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2} = 36^o$, οπότε θα είναι και $\hat{B}_2 = \hat{E}$. Επομένως και το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

(i) $A - B = 27$, όπου $B = \overline{\alpha\gamma\beta} = 100\alpha + 10\gamma + \beta$.

(ii) Το άθροισμα των ψηφίων β, γ ισούται με το μικρότερο ακέραιο που είναι λύση της ανίσωσης: $3x + 12 < 5x - 1$.

(iii) Ο αριθμός A διαιρείται με το 3.

Λύση

Σύμφωνα με την πρόταση (i) έχουμε:

$$A - B = 27 \Leftrightarrow 9\beta - 9\gamma = 27 \Leftrightarrow 9\cdot(\beta - \gamma) = 27 \Leftrightarrow \beta - \gamma = 3. \qquad (1)$$

Για την ανίσωση του ερωτήματος (ii) έχουμε:

$$3x + 12 < 5x - 1 \Leftrightarrow 3x - 5x < -12 - 1 \Leftrightarrow -2x < -13 \Leftrightarrow 2x > 13 \Leftrightarrow x > \frac{13}{2}.$$

Άρα, ο μικρότερος ακέραιος που είναι λύση της είναι ο 7, οπότε έχουμε:

$$\beta + \gamma = 7. \qquad (2)$$

Με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε

$$2\beta = 10,\ 2\gamma = 4 \Leftrightarrow \beta = 5,\ \gamma = 2.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να σκεφθούμε ως εξής: Επειδή οι ακέραιοι β, γ είναι ψηφία με διαφορά $\beta - \gamma = 3$ θα είναι $\beta > \gamma$ και επειδή επιπλέον έχουν άθροισμα 7, οι δυνατές τιμές τους είναι

$$\beta = 7,\ \gamma = 0 \text{ ή } \beta = 6,\ \gamma = 1 \text{ ή } \beta = 5,\ \gamma = 2 \text{ ή } \beta = 4,\ \gamma = 3.$$

Επειδή πρέπει $\beta - \gamma = 3$ οι αποδεκτές τιμές είναι $\beta = 5,\ \gamma = 2$.

Άρα ο θετικός ακέραιος A θα έχει τη μορφή $A = \overline{\alpha 52}$ με άθροισμα ψηφίων $\alpha + 7$. Επειδή, σύμφωνα με την πρόταση (iii) ο A διαιρείται με το 3, πρέπει και αρκεί ο ακέραιος $\alpha + 7$ να είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε, αφού το α είναι ψηφίο, οι κατάλληλες τιμές του είναι: $\alpha = 2$ ή $\alpha = 5$ ή $\alpha = 8$.

Επομένως, έχουμε $A = 252$ ή $A = 552$ ή $A = 852$

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x+18}{4}-\frac{7-3x}{8}=1.$$

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{3\beta}\right)^{-3}-9\beta^2-20,$$

για $\beta=-\frac{1}{3}$.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\frac{2x+18}{4}-\frac{7-3x}{8}=1\Leftrightarrow 2\cdot(2x+18)-(7-3x)=8\Leftrightarrow 4x+36-7+3x=8$$

$$\Leftrightarrow 7x+29=8\Leftrightarrow 7x=8-29\Leftrightarrow 7x=-21\Leftrightarrow x=-3.$$

(β) Για $\beta=-\frac{1}{3}$ η παράσταση Α γίνεται:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}\right)^{-3}-9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2-20=\left(\frac{1}{\frac{1}{9}}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{-1}\right)^{-3}-9\cdot\frac{1}{9}-20$$

$$=\left(9+\frac{1}{9}\right)\cdot(-1)^3-1-20=\left(\frac{81}{9}+\frac{1}{9}\right)\cdot(-1)-1-20=-\frac{82}{9}-1-20$$

$$=-\frac{82}{9}-\frac{9}{9}-\frac{180}{9}=-\frac{271}{9}.$$

Πρόβλημα 2

Οι θετικοί ακέραιοι α,β είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 0 και τέτοιοι ώστε

$$\alpha\leq 10,\ \beta\geq 12\ \text{ και }\ (\alpha-12)\cdot(40-2\beta)\leq 0.$$

Να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=3\alpha-2\beta$.

Λύση

Είναι $\alpha\leq 10$, οπότε $\alpha-12<0$. Άρα, για να αληθεύει η ανίσωση $(\alpha-12)\cdot(40-2\beta)\leq 0$, αρκεί να ισχύει ότι: $40-2\beta\geq 0\Leftrightarrow 40\geq 2\beta\Leftrightarrow \beta\leq 20$. Έτσι έχουμε:

$$0\leq\alpha\leq 10 \text{ και } 12\leq\beta\leq 20\Rightarrow 0\leq 3\alpha\leq 30 \text{ και } 24\leq 2\beta\leq 40$$

$$\Rightarrow 0\leq 3\alpha\leq 30 \text{ και } -40\leq -2\beta\leq -24,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$-40\leq \mathrm{A}=3\alpha-2\beta\leq 6,$$

οπότε η μεγαλύτερη τιμή της παράστασης Α είναι 6, ενώ η μικρότερη τιμή της είναι -40.

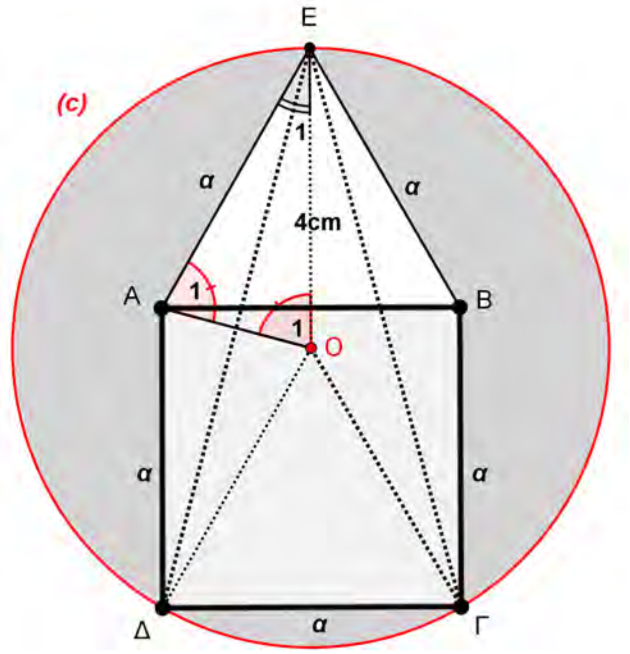
Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Δίνεται ακόμη ότι ο κύκλος C που περνάει από τα σημεία Γ, Δ και Ε έχει ακτίνα 4 cm.

(i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές.
(ii) Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου.
(iii) Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται εξωτερικά του σχήματος ΕΑΔΓΒΕ και εσωτερικά του κύκλου (c).

Λύση

(i) Στα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΓ ισχύουν: $\mathrm{AE}=\mathrm{BE}=\alpha$, $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{B\Gamma}=\alpha$ και $\mathrm{E\hat{A}\Delta}=\mathrm{E\hat{B}\Gamma}=90^o+60^o=150^o$.



Σχήμα 2

Άρα τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΓ είναι ίσα και κατά συνέπεια $\mathrm{E\Delta}=\mathrm{E\Gamma}$, δηλαδή το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές.

(ii) Εφόσον $\mathrm{E\Delta}=\mathrm{E\Gamma}$, το σημείο Ε ανήκει στη μεσοκάθετη του τμήματος ΔΓ (που ταυτίζεται με τη μεσοκάθετη του τμήματος ΑΒ). Επίσης $\mathrm{EA}=\mathrm{EB}$, οπότε το σημείο Ε ανήκει στη μεσοκάθετη του τμήματος ΑΒ. Άρα η ΟΕ είναι μεσοκάθετη της ΑΒ και κατά συνέπεια διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A\hat{E}B}$ του ισόπλευρου τριγώνου ΑΕΒ. Άρα είναι $\hat{\mathrm{E}}_1=30^o$.

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{AE}=\mathrm{A\Delta}=\alpha\\ \mathrm{OE}=\mathrm{O\Delta}=4\end{array}\right\}\Rightarrow \mathrm{OA}\ \text{μεσοκάθετη της}\ \mathrm{E\Delta}\Rightarrow \mathrm{OA}\ \text{διχοτόμος της}\ \mathrm{\Delta\hat{A}E}\Rightarrow \hat{\mathrm{A}}_1=75^o.$$

Στο τρίγωνο ΑΟΕ έχουμε: $\hat{\mathrm{A}}_1=75^o$ και $\hat{\mathrm{E}}_1=30^o$. Άρα $\hat{\mathrm{O}}_1=75^o$, οπότε το τρίγωνο ΑΟΕ είναι ισοσκελές με $\mathrm{EA}=\mathrm{EO}=\alpha=4cm$.

(iii) Το εμβαδόν του κύκλου (c) είναι: $\mathrm{E}_c=\pi\cdot 4^2=16\pi$.

Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι: $\mathrm{E}_{\tau\varepsilon\tau}=4^2=16$, ενώ το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΕ είναι: $\mathrm{E}_{\tau\rho}=4\sqrt{3}$. Άρα το εμβαδόν της ζητούμενης επιφάνειας είναι: $\mathrm{E}=16\pi-16-4\sqrt{3}$.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $\mathrm{A}=\overline{\alpha\beta\gamma}=100\alpha+10\beta+\gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

(i) $\mathrm{A}-\mathrm{B}=198$, όπου $\mathrm{B}=\overline{\gamma\beta\alpha}=100\gamma+10\beta+\alpha$,

(ii) Η εξίσωση $\frac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma}-\frac{\alpha-2\gamma}{x}=1$ έχει δύο ρίζες με άθροισμα 4.

(iii) Ο αριθμός Α διαιρείται με το 9.

Λύση

Σύμφωνα με την πρόταση (i) έχουμε:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=198 \Leftrightarrow 99\cdot(\alpha-\gamma)=198 \Leftrightarrow \alpha-\gamma=2. \qquad (1)$$

Η εξίσωση της πρότασης (ii) , αν $\gamma \neq 2\alpha$ και $x \neq 0$, γράφεται:

$$\frac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma}-\frac{\alpha-2\gamma}{x}-1=0 \Leftrightarrow \frac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma}-\frac{x+\alpha-2\gamma}{x}=0 \Leftrightarrow (x+\alpha-2\gamma)\left(\frac{1}{2\alpha-\gamma}-\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x+\alpha-2\gamma=0 \text{ ή } \frac{1}{2\alpha-\gamma}-\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow x=2\gamma-\alpha \text{ ή } x=2\alpha-\gamma$$

Επειδή, λόγω της (ii) το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι 4, έχουμε ότι

$$(2\gamma-\alpha)+(2\alpha-\gamma)=4 \Leftrightarrow \alpha+\gamma=4, \qquad (2)$$

με τους περιορισμούς για τις παραμέτρους $\gamma \neq 2\alpha$ και $\alpha \neq 2\gamma$.

Από τις (1) και (2) με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$2\alpha=6,\ 2\gamma=2 \Leftrightarrow \alpha=3,\ \gamma=1$$

και εύκολα διαπιστώνουμε ότι ικανοποιούνται οι περιορισμοί για την εξίσωση.

Άρα ο θετικός ακέραιος Α θα έχει τη μορφή $\mathrm{A}=\overline{3\beta 1}$ με άθροισμα ψηφίων $4+\beta$. Επειδή, σύμφωνα με την πρόταση (iii) ο Α διαιρείται με το 9, πρέπει και αρκεί $4+\beta=\pi o\lambda.(9)$, οπότε, αφού το β είναι ψηφίο, η μοναδική δυνατή τιμή του είναι $\beta=5$.

Επομένως, ο ζητούμενος θετικός ακέραιος Α είναι ο 351.

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές των ρητών αριθμών α, β για τις οποίες ο αριθμός $\alpha + \beta\sqrt{10}$ είναι ρητός.

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x = \sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι άρρητος.

Λύση

(i) Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι για $\beta = 0$, ο αριθμός $\alpha + \beta\sqrt{10} = \alpha$ είναι ρητός, για κάθε ρητό αριθμό α.

Έστω ότι, για $\beta \neq 0$, ο αριθμός $\rho = \alpha + \beta\sqrt{10}$ είναι ρητός. Τότε και ο αριθμός

$$\rho - \alpha = \left(\alpha + \beta\sqrt{10}\right) - \alpha = \beta\sqrt{10}$$

θα είναι ρητός, αλλά και ο αριθμός $\frac{\rho - \alpha}{\beta} = \sqrt{10}$ θα είναι ρητός, που είναι άτοπο.

Άρα ο αριθμός $\alpha + \beta\sqrt{10}$ είναι ρητός, για $\beta = 0$ και για κάθε ρητό αριθμό α.

(ii) Έστω ότι ο αριθμός $x = \sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι ρητός. Τότε και ο αριθμός

$$x^2 = \left(\sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 5 + \frac{2}{4} + \sqrt{10} = \frac{11}{2} + \sqrt{10},$$

θα είναι ρητός, το οποίο είναι άτοπο, σύμφωνα με το (i).

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\left(|x| - 2\right)^2 = x^2 + 4\alpha,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$|x|^2 - 4|x| + 4 = x^2 + 4\alpha \Leftrightarrow x^2 - 4|x| + 4 = x^2 + 4\alpha \Leftrightarrow |x| = 1 - \alpha.$$

Επειδή είναι $|x| \geq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\alpha < 1$, οπότε είναι $1 - \alpha > 0$. Τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις:
$$x = 1 - \alpha \text{ ή } x = \alpha - 1.$$
- $\alpha = 1$, οπότε η εξίσωση έχει μόνο τη λύση $x = 0$.
- $\alpha > 1$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ και ευθεία ε που διέρχεται από την κορυφή του A και είναι παράλληλη προς τη πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Δ και έστω E το συμμετρικό του Δ ως προς τη κορυφή A. Από το A τέλος θεωρούμε παράλληλη προς την EB η οποία τέμνει τη $\mathrm{B\Delta}$ στο σημείο M και τη $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο K. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{AB} = \mathrm{BK} = \mathrm{K\Delta} = \Delta\mathrm{A}$.

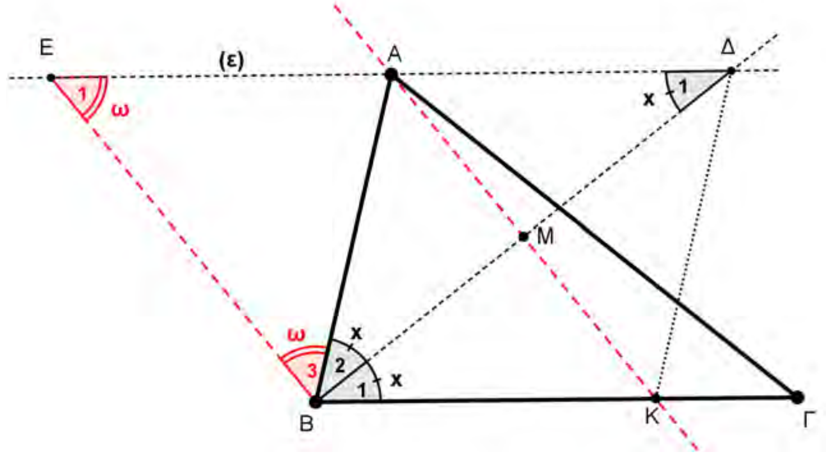
Λύση

Επειδή είναι $ΑΔ \parallel ΒΓ$ θα ισχύει: $\hat{Δ}_1 = \hat{Β}_1 = \hat{x} = \frac{\hat{Β}}{2}$.

Επίσης η $ΒΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Β}$, οπότε θα ισχύει: $\hat{Β}_1 = \hat{Β}_2 = \hat{x} = \frac{\hat{Β}}{2}$.

Άρα $\hat{Δ}_1 = \hat{Β}_2 = \hat{x} = \frac{\hat{Β}}{2}$ και κατά συνέπεια το τρίγωνο $ΑΒΔ$ είναι ισοσκελές, δηλαδή:

$$ΑΒ = ΑΔ. \qquad (1)$$



Σχήμα 3

Επειδή $Ε$ είναι το συμμετρικό του $Δ$ ως προς το $Α$, θα ισχύει:

$$ΑΔ = ΑΕ. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις $(1),(2)$ έχουμε $ΑΕ = ΑΒ$ και κατά συνέπεια $\hat{Ε}_1 = \hat{Β}_3 = \hat{\omega}$.

Από το τρίγωνο τώρα $ΒΕΔ$ έχουμε:

$$\hat{Δ}_1 + \hat{Β}_2 + \hat{Β}_3 + \hat{Ε}_1 = 180^o \Rightarrow 2\hat{x} + 2\hat{\omega} = 180^o \Rightarrow \hat{x} + \hat{\omega} = 90^o,$$

δηλαδή το τρίγωνο $ΒΕΔ$ είναι ορθογώνιο ($ΒΕ \perp ΒΔ$) και εφόσον $ΑΜ \parallel ΒΕ$ καταλήγουμε:

$$ΑΜ \perp ΒΔ.$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΒΑΔ$ η $ΑΜ$ είναι ύψος, άρα και μεσοκάθετη της πλευράς $ΒΔ$.

Επειδή τώρα το σημείο $Κ$ ανήκει στη μεσοκάθετη του $ΒΔ$, το τρίγωνο $ΚΒΔ$ είναι ισοσκελές και ίσο με το ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΔ$ (διότι $\hat{Β}_1 = \hat{Β}_2 = \frac{\hat{Β}}{2}$ και $ΒΔ$ κοινή πλευρά). Άρα θα έχουν και $ΑΒ = ΑΔ = ΒΚ = ΚΔ$, οπότε το τετράπλευρο $ΑΒΚΔ$ είναι ρόμβος.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ που ικανοποιούν τις ισότητες

$$\alpha + \beta + \gamma = 2010 \quad \text{και} \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 67^2.$$

Λύση

Από τις δεδομένες ισότητες λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta + \gamma)^2 = 2010^2 &\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 2010^2 \\ &\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2010^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2010^2 - 2(2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 67^2) \\ &\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2010^2 - \frac{2}{3} \cdot 2010^2 = \frac{2010^2}{3}.\end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\left(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\right)=\frac{2010^2}{3}-\frac{1}{3}\cdot 2010^2=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\alpha-\beta\right)^2+\left(\beta-\gamma\right)^2+\left(\gamma-\alpha\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha-\beta=\beta-\gamma-\gamma-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma,$$

γιατί, αν ήταν $\alpha-\beta\neq 0$ ή $\beta-\gamma\neq 0$ ή $\gamma-\alpha\neq 0,$ τότε θα είχαμε

$$\left(\alpha-\beta\right)^2+\left(\beta-\gamma\right)^2+\left(\gamma-\alpha\right)^2>0.$$

Επομένως, από την ισότητα $\alpha+\beta+\gamma=2010$ λαμβάνουμε $\alpha=\beta=\gamma=670$.

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\left(|x|-1\right)^2 = 2x+\alpha,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2-2|x|+1=2x+\alpha \Leftrightarrow x^2-2\left(|x|+x\right)+1-\alpha=0. \qquad (1)$$

Λόγω της παρουσίας της απόλυτης τιμής του x, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $x\geq 0$. Τότε η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2-4x+1-\alpha=0, \qquad (2)$$

η οποία είναι δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=16-4(1-\alpha)=4(3+\alpha)$.

Άρα η εξίσωση (2) έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, αν, και μόνον αν, $\alpha\geq -3$. Για να διαπιστώσουμε πόσες από αυτές είναι δεκτές θεωρούμε το γινόμενο και το άθροισμα των ριζών που είναι

$$\mathrm{P}=1-\alpha \text{ και } \mathrm{S}=4>0.$$

Έτσι, για την εξίσωση (2) έχουμε τις υποπεριπτώσεις:

- Αν $\alpha=-3$, τότε η εξίσωση έχει **μία διπλή ρίζα**, $x=2$.
- Αν $-3<\alpha\leq 1$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες** μη αρνητικές, $x=2\pm\sqrt{3+\alpha}$. Ειδικότερα, αν $\alpha=1$, τότε η εξίσωση έχει τις ρίζες $x=4$ και $x=0$.
- Αν $\alpha>1$, τότε η εξίσωση έχει **μία** μόνο ρίζα μη αρνητική, τη $x=2+\sqrt{3+\alpha}$

(ii) $x<0$. Τότε η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2+1-\alpha=0, \qquad (3)$$

η οποία έχει μία μόνο αρνητική ρίζα, τη $x=-\sqrt{\alpha-1}$, αν $\alpha>1$.

Συνοπτικά, από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, έχουμε για τη δεδομένη εξίσωση, τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Αν $\alpha<-3$, η εξίσωση **δεν έχει ρίζες** στο $\mathbb{R}$.
- Αν $\alpha=-3$, τότε η εξίσωση έχει **μία διπλή ρίζα**, $x=2$.
- Αν $-3<\alpha\leq 1$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες**, $x=2\pm\sqrt{3+\alpha}$.
- Αν $\alpha>1$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες**, τις $x=2+\sqrt{3+\alpha}$, $x=-\sqrt{\alpha-1}$.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\begin{aligned} x+y+z&=8\\ x^2+y^2+z^2&=26\\ xy+xz&=(yz+1)^2. \end{aligned}$$

Λύση

Έχουμε

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=8\\ x^2+y^2+z^2=26\\ xy+xz=(yz+1)^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=8\\ (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=26\\ xy+xz=(yz+1)^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=8\\ xy+yz+zx=19\\ xy+xz=(yz+1)^2 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+y+z=8\\ xy+yz+zx=19\\ 19-yz=(yz+1)^2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8\\ x(y+z)+yz=19\\ (yz)^2+3(yz)-18=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8\\ x(y+z)+yz=19\\ yz=-6 \text{ ή } yz=3\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8\\ x(y+z)+yz=19\\ yz=3\end{array}\right\}\text{ ή }\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8\\ x(y+z)+yz=19\\ yz=-6\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8\\ x(y+z)=16\\ yz=3\end{array}\right\}\text{ ή }\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8\\ x(y+z)=25\\ yz=-6\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8\\ x(8-x)=16\\ yz=3\end{array}\right\}\text{ ή }\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8\\ x(8-x)=25\\ yz=-6\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8\\ x^2-8x+16=0\\ yz=3\end{array}\right\}\text{ ή }\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8\\ x^2-8x+25=0\\ yz=-6\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8\\ x=4\\ yz=3\end{array}\right\}\text{ ή }\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8\\ x^2-8x+25=0\,(\text{αδύνατη στο } \mathbb{R})\\ yz=-6\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=4\\ y+z=4\\ yz=3\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=4\\ z=4-y\\ y(4-y)=3\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=4\\ z=4-y\\ y^2-4y+3=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow(x,y,z)=(4,1,3)\text{ ή }(x,y,z)=(4,3,1).$$

Πρόβλημα 3

Αν οι α,β,γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{1}{\alpha\beta\gamma}$, να αποδείξετε ότι:

$$1\le\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{(\beta^3+\gamma^3)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{(\gamma^3+\alpha^3)\beta}{\gamma^2+\alpha^2}<2.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}<\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}=(\alpha+\beta)\gamma, \tag{1}$$

$$\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}\ge\frac{(\alpha+\beta)\left(\alpha^2+\beta^2-\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\gamma. \tag{2}$$

Η ισότητα στη (2) ισχύει, αν, και μόνον αν, $\alpha=\beta$.

Άρα έχουμε

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\gamma\le\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}<(\alpha+\beta)\gamma. \tag{3}$$

Ομοίως λαμβάνουμε

$$\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\alpha\le\frac{(\beta^3+\gamma^3)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}<(\beta+\gamma)\alpha, \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)\beta\le\frac{(\gamma^3+\alpha^3)\beta}{\gamma^2+\alpha^2}<(\gamma+\alpha)\beta. \tag{5}$$

Οι ισότητα στις (4) και (5) ισχύει αν, και μόνον αν, $\beta=\gamma$ και $\gamma=\alpha$, αντίστοιχα.

Από τις (3), (4) και (5) με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε :.

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \le \frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{(\beta^3+\gamma^3)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{(\gamma^3+\alpha^3)\beta}{\gamma^2+\alpha^2} < 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \quad (6)$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma} \Leftrightarrow \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1, \quad (7)$$

οπότε από τις (6) και (7) προκύπτουν οι ζητούμενες ανισότητες.

Η ισότητα ισχύει αν, και μόνον αν, $\alpha=\beta=\gamma$, οπότε από τη σχέση $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, προκύπτει ότι $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Παρατήρηση. *Η δεύτερη ανισότητα είναι γνήσια από την κατασκευή της άσκησης με τους* α,β,γ *θετικούς πραγματικούς αριθμούς, λόγω της ισότητας* $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$. *Στην περίπτωση που επιτρέψουμε οι* α,β,γ *να είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, δίνοντας στην παραπάνω ισότητα τη μορφή* $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, *τότε η δεύτερη ανισότητα γίνεται*

$$\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{(\beta^3+\gamma^3)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{(\gamma^3+\alpha^3)\beta}{\gamma^2+\alpha^2} \le 2,$$

όπου η ισότητα ισχύει, αν, και μόνον αν, ένας μόνον από τους α,β,γ *είναι μηδέν και οι άλλοι δύο αντίστροφοι.*

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB<A\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) με κέντρο O και ακτίνα R. Από το σημείο A φέρνουμε τις δύο εφαπτόμενες προς τον κύκλο (c_1), που έχει κέντρο το σημείο O και ακτίνα $r=OM$ (M είναι το μέσο της $B\Gamma$). Η μία εφαπτόμενη εφάπτεται στο κύκλο (c_1) στο σημείο T, τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο N και το κύκλο (c) στο σημείο N_1 (θεωρούμε $BN<BM$). Η άλλη εφαπτόμενη εφάπτεται στο κύκλο (c_1) στο σημείο Σ, τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο K και το κύκλο (c) στο σημείο K_1 (θεωρούμε $\Gamma K<\Gamma M$). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $BN_1, \Gamma K_1$ και AM περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

Λύση

Οι χορδές AN_1, AK_1 και $B\Gamma$ του κύκλου (c), είναι εφαπτόμενες του κύκλου (c_1) στα σημεία T,Σ και M αντίστοιχα. Άρα οι ακτίνες $OT, O\Sigma$ και OM του κύκλου (c_1), είναι κάθετες προς τις χορδές AN_1, AK_1 και $B\Gamma$ του κύκλου (c) αντίστοιχα. Δηλαδή οι ακτίνες $OT, O\Sigma$ και OM του κύκλου (c_1), είναι τα αποστήματα που αντιστοιχούν στις χορδές AN_1, AK_1 και $B\Gamma$ του κύκλου (c). Τα αποστήματα $OT, O\Sigma$ και OM είναι ίσα μεταξύ τους , αφού είναι ακτίνες του κύκλου (c_1).

Άρα $AN_1=AK_1=B\Gamma$ (*) και τα σημεία T,Σ,M είναι τα μέσα των χορδών AN_1, AK_1 και $B\Gamma$, αντίστοιχα. Από τους προηγούμενους συλλογισμούς, προκύπτουν οι παρακάτω ισότητες ευθυγράμμων τμημάτων:

$$MB=M\Gamma=TA=TN_1=\Sigma A=\Sigma K_1 \quad (1)$$

Το σημείο N βρίσκεται εκτός του κύκλου (c_1) και NM, NT είναι τα εφαπτόμενα τμήματα, οπότε

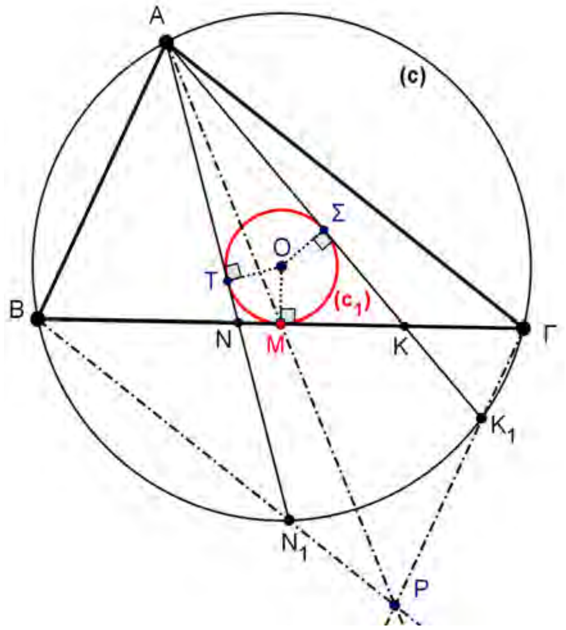
$$NM=NT \quad (2)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}(1): \quad MB = TN_1 \\ (2): \quad NM = NT\end{array}\right\} \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{MB}{MN} = \frac{TN_1}{NT} \Rightarrow TM\ \mathrm{P}\ BN_1 \qquad (3)$$

Συνδυάζοντας και πάλι τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}(1): \quad M\Gamma = TA \\ (2): \quad NM = NT\end{array}\right\} \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{M\Gamma}{NM} = \frac{TA}{NT} \Rightarrow TM // A\Gamma \qquad (4)$$



Σχήμα 4

Από τις (3) και (4) έχουμε $BN_1\ \mathrm{P}\ A\Gamma$. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $\Gamma K_1\ \mathrm{P}\ AB$. Αν λοιπόν P είναι η τομή των ευθειών BN_1 και ΓK_1, τότε το τετράπλευρο $AB P\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα οι ευθείες $BN_1, \Gamma K_1$ και AM θα συντρέχουν στο P.

(*) “Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.”
(Θεώρημα ΙΙΙ, Σελ.46, του Σχολικού βιβλίου της ΕΜΕ)

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Αν οι α,β,γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 12, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\gamma}{4\alpha\beta}+\frac{\left(\beta^2+4\gamma^2\right)\alpha}{4\beta\gamma}+\frac{\left(\gamma^2+4\alpha^2\right)\beta}{4\gamma\alpha}>12$$

Λύση

Από τις γνωστές ανισότητες

$$\alpha^2+4\beta^2\geq 4\alpha\beta,\ \beta^2+4\gamma^2\geq 4\beta\gamma,\ \gamma^2+4\alpha^2\geq 4\gamma\alpha, \qquad (1)$$

λαμβάνουμε τις ανισότητες:

$$\frac{\alpha^2+4\beta^2}{4\alpha\beta}\geq\frac{4\alpha\beta}{4\alpha\beta}=1 \text{ (η ισότητα ισχύει για } \alpha=2\beta) \Rightarrow \frac{\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\gamma}{4\alpha\beta}\geq\gamma \qquad (2)$$

$$\frac{\beta^2+4\gamma^2}{4\beta\gamma}\geq\frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma}=1 \text{ (η ισότητα ισχύει για } \beta=2\gamma) \Rightarrow \frac{\left(\beta^2+4\gamma^2\right)\alpha}{4\beta\gamma}\geq\alpha \qquad (3)$$

$$\frac{\gamma^2+4\alpha^2}{4\gamma\alpha}\geq\frac{4\gamma\alpha}{4\gamma\alpha}=1 \text{ (η ισότητα ισχύει για } \gamma=2\alpha) \Rightarrow \frac{\left(\gamma^2+4\alpha^2\right)\beta}{4\gamma\alpha}\geq\beta \qquad (4)$$

Από τις (2), (3) και (4) με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\frac{\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\gamma}{4\alpha\beta}+\frac{\left(\beta^2+4\gamma^2\right)\alpha}{4\beta\gamma}+\frac{\left(\gamma^2+4\alpha^2\right)\beta}{4\gamma\alpha}\geq\alpha+\beta+\gamma=12. \qquad (5)$$

Η ισότητα στη σχέση (5) ισχύει, αν, και μόνον αν, ισχύουν οι ισότητες και στις τρεις σχέσεις (2), (3) και (4) ή ισοδύναμα:

$$\alpha=2\beta,\ \beta=2\gamma,\ \gamma=2\alpha,$$

από τις οποίες προκύπτει ότι $\alpha=\beta=\gamma=0$, που είναι άτοπο, αφού οι αριθμοί α,β,γ είναι θετικοί. Επομένως έχουμε αποδείξει ότι:

$$\frac{\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\gamma}{4\alpha\beta}+\frac{\left(\beta^2+4\gamma^2\right)\alpha}{4\beta\gamma}+\frac{\left(\gamma^2+4\alpha^2\right)\beta}{4\gamma\alpha}>12.$$

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left.\begin{cases} x^2+2xy=5 \\ y^2-3xy=-2 \end{cases}\right\}. \qquad (\Sigma)$$

Λύση

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει λύση (x,y) του συστήματος (Σ), με $x=0$ ή $y=0$, τότε λαμβάνουμε 0 = 5 ή 0 = -2, άτοπο.

Για $xy\neq 0$, η μία εξίσωση του συστήματος μπορεί να αντικατασταθεί με αυτήν που προκύπτει από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, με διαίρεση κατά μέλη:

$$\frac{x^2+2xy}{y^2-3xy}=-\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{1+2\cdot\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2-3\cdot\frac{y}{x}}=-\frac{5}{2}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\frac{1+2m}{m^2-3m}=-\frac{5}{2}\\ \frac{y}{x}=m\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}5m^2-11m+2=0\\ \frac{y}{x}=m\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}m=2 \text{ ή } m=\frac{1}{5}\\ \frac{y}{x}=m\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}m=2\\ y=2x\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix}m=\frac{1}{5}\\ y=\frac{x}{5}\end{matrix}\right\}.$$

Επομένως έχουμε:

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x^2+2xy=5\\ y=2x\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix}x^2+2xy=5\\ y=\frac{x}{5}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}5x^2=5\\ y=2x\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix}\frac{7x^2}{5}=5\\ y=\frac{x}{5}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x=\pm1\\ y=2x\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix}x=\pm\frac{5\sqrt{7}}{7}\\ y=\frac{x}{5}\end{matrix}\right\}$$

$$(x,y)=(1,2) \text{ ή } (x,y)=(-1,-2) \text{ ή } (x,y)=\left(\frac{5\sqrt{7}}{7},\frac{\sqrt{7}}{7}\right) \text{ ή } (x,y)=\left(-\frac{5\sqrt{7}}{7},-\frac{\sqrt{7}}{7}\right).$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) με κέντρο Ο και ακτίνα R. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΟΒ (έστω (c_1)), τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΒΓ στο σημείο Ν. Έστω (c_2) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΚΝ και (c_3) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΟΓΚ. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι (c_1), (c_2) και (c_3) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Λύση

Έστω R_1, R_2, R_3 οι ακτίνες των κύκλων (c_1),(c_2) και (c_3) αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι $R_1=R_2=R_3$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΚΟΒ έχουμε: $\hat{A}_1=\hat{B}_1$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΟΝΒ έχουμε: $\hat{A}_2=\hat{B}_2$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΟΒΓ, έχουμε: $\hat{B}_2=\hat{\Gamma}_2$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΓ, έχουμε: $\hat{A}_1=\hat{\Gamma}_1$.

Από τις παραπάνω ισότητες των γωνιών, προκύπτει $N\hat{A}\Gamma=K\hat{B}\Gamma=\hat{\Gamma}$, δηλαδή τα τρίγωνα ΝΑΓ και ΚΒΓ είναι ισοσκελή, οπότε $NA=N\Gamma$ και $KB=K\Gamma$.

Τα τρίγωνα τώρα ΟΚΒ και ΟΚΓ είναι ίσα διότι έχουν:

1. $OB=O\Gamma$ (ακτίνες του κύκλου (c))

2. ΟΚ (κοινή)

3. $KB=K\Gamma$ (από το ισοσκελές τρίγωνο ΚΒΓ).

Εφόσον λοιπόν τα τρίγωνα ΟΚΒ και ΟΚΓ είναι ίσα, θα έχουν ίσους τους περιγεγραμμένους κύκλους τους (c_1) και (c_3).

Απόδειξη της Ισότητας των Κύκλων (c_1) και (c_2) (1ος τρόπος)

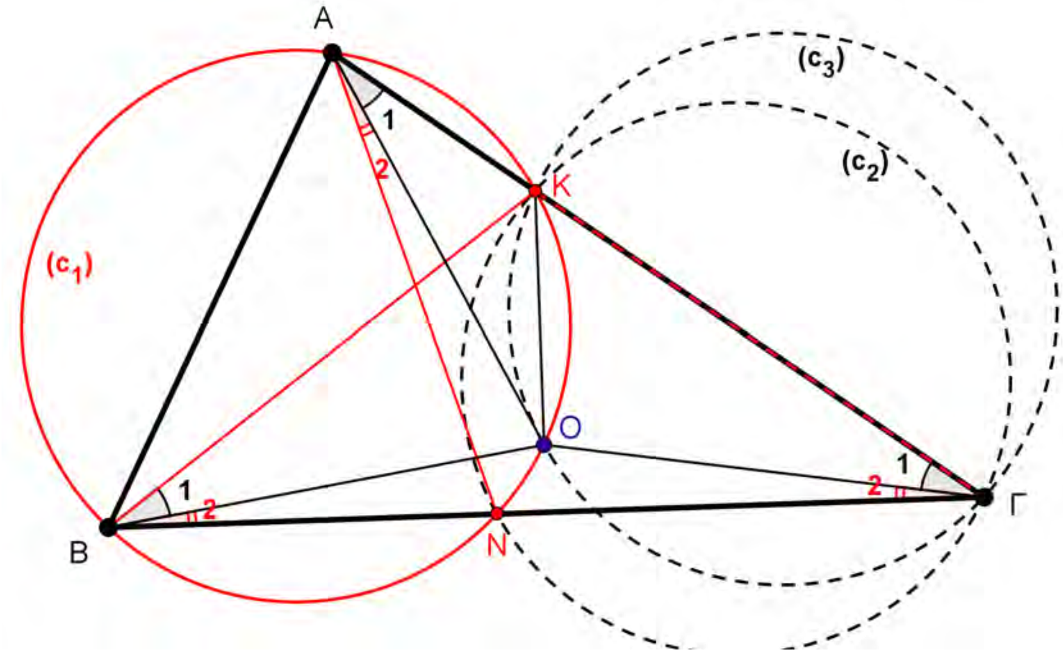
Θεωρούμε τώρα τα τρίγωνα ΚΝΒ και ΚΝΓ που έχουν περιγεγραμμένους κύκλους (c_1) και (c_2) αντίστοιχα.

Θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια τον τύπο $E=(\mathrm{AB\Gamma})=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ που εκφράζει το εμβαδό τριγώνου συναρτήσει του μήκους των πλευρών και της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου.

Έστω λοιπόν $E_1=(\mathrm{KNB})$ το εμβαδό του τριγώνου ΚΝΒ και $E_2=(\mathrm{KN\Gamma})$ το εμβαδό του τριγώνου ΚΝΓ. Τότε:

$$\left.\begin{aligned} E_1=(\mathrm{KNB})=\frac{\mathrm{NB\cdot NK\cdot BK}}{4R_1}\\ E_2=(\mathrm{KN\Gamma})=\frac{\mathrm{N\Gamma\cdot NK\cdot \Gamma K}}{4R_2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{\mathrm{E_1}}{\mathrm{E_2}}=\frac{4R_2\cdot\mathrm{NB\cdot NK\cdot BK}}{4R_1\cdot\mathrm{N\Gamma\cdot NK\cdot \Gamma K}}\Rightarrow\frac{\mathrm{E_1}}{\mathrm{E_2}}=\frac{R_2\cdot\mathrm{NB}}{R_1\cdot\mathrm{N\Gamma}}, \qquad (1)$$

(για τη τελευταία συνεπαγωγή χρησιμοποιήσαμε την ισότητα $\mathrm{KB}=\mathrm{K\Gamma}$, που προκύπτει από το ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{KB\Gamma}$).



Σχήμα 5

Τα τρίγωνα ΚΝΒ και ΚΝΓ έχουν τις γωνίες τους $\mathrm{K\hat{N}B}$ και $\mathrm{K\hat{N}\Gamma}$ παραπληρωματικές. Άρα:

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{\mathrm{NB\cdot NK}}{\mathrm{N\Gamma\cdot NK}}\Rightarrow\frac{\mathrm{E_1}}{\mathrm{E_2}}=\frac{\mathrm{NB}}{\mathrm{N\Gamma}}\ . \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $R_1=R_2$.

Απόδειξη της Ισότητας των Κύκλων (c_1) και (c_2) (2ος τρόπος)

Για την απόδειξη, θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο των ημιτόνων:

$$\frac{a}{\eta\mu\mathrm{A}}=\frac{\beta}{\eta\mu\mathrm{B}}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=2R.$$

Εφαρμόζοντας το νόμο των ημιτόνων στα τρίγωνα ΚΝΒ και ΚΝΓ έχουμε:

$$\frac{\mathrm{KN}}{\eta\mu(\mathrm{K\hat{B}N})}=2R_1 \text{ και } \frac{\mathrm{KN}}{\eta\mu(\hat{\Gamma})}=2R_2.$$

Από την ισότητα τώρα των γωνιών $\mathrm{K\hat{B}N}=\hat{\Gamma}$, καταλήγουμε: $R_1=R_2$.

Πρόβλημα 4

Η ακολουθία $a_n, n\in\mathbb{N}^*$, ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$a_{n+1} = a_n - \frac{k}{2^n},\ n \in \mathbb{N}^*,\ \ a_1 = 1,$$

όπου k θετικός ακέραιος.

(i) Να προσδιορίσετε το γενικό όρο a_n της ακολουθίας ως συνάρτηση των n και k.

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί θετικοί ακέραιοι $k,\ n$ τέτοιοι ώστε : $a_n = \dfrac{1}{2^{1000}}$.

Λύση

(i) Από τις υποθέσεις έχουμε

$$a_2 = a_1 - \frac{k}{2},\ a_3 = a_2 - \frac{k}{2^2},\ \dots,\ a_n = a_{n-1} - \frac{k}{2^{n-1}},\ \ n = 1, 2, 3, \dots$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$a_n = a_1 - k\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1 - k\left(-1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow$$

$$a_n = 1 + k - 2k\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = (1-k) + \frac{k}{2^{n-1}},\ n = 1, 2, 3, \dots$$

(ii) Έστω ότι:

$$a_n = \frac{1}{2^{1000}} \Leftrightarrow (1-k) + \frac{k}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{1000}} \Leftrightarrow (1-k)\cdot 2^{n-1+1000} + k\cdot 2^{1000} = 2^{n-1},$$

όπου k θετικός ακέραιος και $n \in \mathbb{N}^*,\ n > 1$. Τότε έχουμε

$$2^{n-1+1000} - 2^{n-1} = k\left(2^{n-1+1000} - 2^{1000}\right).$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{2^{n-1+1000} - 2^{n-1}}{2^{n-1+1000} - 2^{1000}} > 0,\ k \in \mathbb{Z}. \qquad (1)$$

- Αν υποθέσουμε ότι $n - 1 > 1000 \Leftrightarrow n > 1001,$ τότε από τη σχέση (1) προκύπτει, ότι $k \in (0, 1)$, άτοπο.
- Αν υποθέσουμε ότι $n - 1 < 1000 \Leftrightarrow n < 1001,$ τότε έχουμε:

  $$k - 1 = \frac{2^{n-1+1000} - 2^{n-1}}{2^{n-1+1000} - 2^{1000}} - 1 = \frac{2^{1000} - 2^{n-1}}{2^{n-1+1000} - 2^{1000}} = \frac{1 - 2^{n-1001}}{2^{n-1} - 1},$$

  οπότε θα είναι $0 < k - 1 < 1$, που είναι άτοπο.

Άρα είναι $n - 1 = 1000 \Leftrightarrow n = 1001$, οπότε από την (1) προκύπτει ότι $k = 1$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012
Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\frac{2^3}{31}\cdot\left(2^3+2^0+\frac{3}{8}:\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right) \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right):\left(\frac{8}{3^4}-\frac{2}{9^2}\right)+\frac{3}{2^4}.$$

Μονάδες 2

(β) Αν ισχύει ότι:

$$6(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=11\alpha\beta\gamma \quad \text{και} \quad \alpha\beta\gamma\neq 0,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{2\alpha}+\frac{12-\beta}{3\beta}+\frac{16-\gamma}{4\gamma}.$$

Μονάδες 3

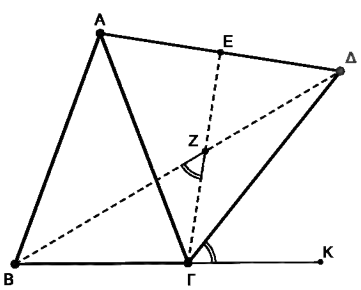
Πρόβλημα 2

Ένας πελάτης αγόρασε από μία έκθεση αυτοκινήτων ένα αυτοκίνητο για το οποίο πλήρωσε με μετρητά το μισό της τιμής πώλησης του αυτοκινήτου, ενώ για τα υπόλοιπα συμφωνήθηκε να πληρώσει με 24 μηνιαίες δόσεις των 500 ευρώ. Με αυτόν το διακανονισμό επιβαρύνθηκε με τόκους που συνολικά αντιστοιχούν στο 10% της τιμής πώλησης του αυτοκινήτου. Να βρείτε την τιμή πώλησης του αυτοκινήτου και πόσα συνολικά θα πληρώσει συνολικά ο πελάτης.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές ($\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$) και οξυγώνιο, το τρίγωνο $\mathrm{A\Delta\Gamma}$ είναι ισόπλευρο και E είναι το μέσο του $\mathrm{A\Delta}$. Αν το K βρίσκεται στη προέκταση της $\mathrm{B\Gamma}$ και οι $\mathrm{B\Delta},\mathrm{\Gamma E}$ τέμνονται στο σημείο Z, να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\mathrm{B\hat{Z}\Gamma}$ και $\mathrm{K\hat{\Gamma}\Delta}$, είναι ίσες.



Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο Α που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 2012. Διαγράφουμε από το σύνολο Α όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 5 και στη συνέχεια, από τους ακέραιους που απέμειναν, διαγράφουμε αυτούς που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο Α.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{\alpha}{\beta^2}+237\right)\cdot\left(\frac{\alpha}{4\beta^2}\right)^3+\frac{9\alpha-20\beta^2}{\beta^2},$$

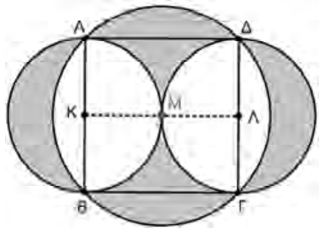
αν δίνεται ότι $\alpha=\beta=2^{-3}$. ***Μονάδες 2***

(β) Αν τα ποσά x, y είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας $\frac{x}{y}=\alpha>0$, να αποδείξετε ότι η παράσταση $\mathrm{K}=\frac{2xy}{x^2+y^2}$ έχει τιμή ανεξάρτητη των τιμών των x, y και ισχύει ότι $\mathrm{K}\leq 1$.

Για ποια τιμή του α η παράσταση Κ παίρνει τη μέγιστη τιμή της. ***Μονάδες 3***

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα, οι μικροί κύκλοι είναι ίσοι μεταξύ τους (με ακτίνα R), έχουν κέντρα τα σημεία K, Λ και εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο M. Οι διάμετροι ΑΒ και ΓΔ (των μικρών κύκλων) είναι κάθετες στην διάκεντρό τους ΚΛ. Ο μεγάλος κύκλος τέλος, έχει κέντρο το σημείο Μ και περνάει από τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta$. Να υπολογιστεί συναρτήσει του R, το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου.



Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο Α που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 101 μέχρι και το 2012. Διαγράφουμε από το σύνολο Α όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 3 και στη συνέχεια, από τους ακέραιους που απέμειναν, διαγράφουμε αυτούς που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο Α.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \text{ και } Q(x)=\left(\alpha x^2+\beta x\right)\left(\gamma x^2+\delta\right)+4,$$

όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-3$, να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να βρείτε το υποσύνολο των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{|x|-1}{3}\leq\frac{|x|+x^2}{4} \quad \text{και} \quad \frac{x+1}{2}+\frac{x(x+1)}{4}>\frac{(x+2)^2}{4}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{x+x^2}{1-x^2}\cdot\frac{\left[(1+ax)^2-(a+x)^2\right]}{1-a^2}=\frac{ab}{(a-b)^2},$$

για τις διάφορες τιμές των πραγματικών αριθμών a,b με $ab(a-b)(1-a^2)\neq 0$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$ και $\hat{\mathrm{A}}<45^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΒΓ και ΑΓ, αντίστοιχα, και σημείο Μ διαφορετικό από το Α στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ. Αν η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΒΜ τέμνει την ευθεία ΔΕ στο Ζ και την ευθεία ΑΓ στο Θ, να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{Z}=\hat{\mathrm{A}}$.

(β) Η ευθεία ΒΖ διχοτομεί τη γωνία $\Theta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Αν υπάρχουν ακέραιοι x,y,a που επαληθεύουν την εξίσωση

$$yx^2+\left(y^2-a^2\right)x+y(y-a)^2=0,$$

να αποδείξετε ότι ο αριθμός xy είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $a \neq 0$ για τις οποίες η εξίσωση

$$\frac{1}{2a+ax}-\frac{1}{2x-x^2}=\frac{2a+6}{x^3-4x},$$

έχει δύο πραγματικές ρίζες με διαφορά 4.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Αν y ακέραιος και $x \in \mathbb{R}$, να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (x, y) που είναι λύσεις του συστήματος

$$\left\{\begin{matrix} 1+y-\left|x^2-3x+1\right|>0 \\ y-2+\left|x-2\right|<0 \end{matrix}\right\}. \qquad (\Sigma)$$

Να παραστήσετε γραφικά στο Καρτεσιανό επίπεδο Oxy, το σύνολο των σημείων $\mathrm{M}(x, y)$, όπου (x, y) λύση του συστήματος (Σ).

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$ τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο Μ. Ο κύκλος $c_1(\mathrm{M},\mathrm{AM})$ τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = \mathrm{AB}$.

Πρόβλημα 4

Βρείτε όλες τις ρητές τιμές του x για τις οποίες είναι ρητός ο αριθμός $\sqrt{x^2+ax+b}$, όπου a, b ρητοί τέτοιοι ώστε $a^2 < 4b$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να βρεθεί η αριθμητική πρόοδος α_ν, $\nu = 1,2,3,\ldots$ που έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = \alpha \neq 0$, διαφορά $\omega \neq 0$ και είναι τέτοια ώστε ο λόγος του αθροίσματος $\alpha_1 + \cdots + \alpha_\nu$ των ν πρώτων όρων της προς το άθροισμα $\alpha_{\nu+1} + \cdots + \alpha_{3\nu}$ των επόμενων 2ν το πλήθος όρων της είναι σταθερός, δηλαδή ανεξάρτητος του ν.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^2 = \frac{8z^4}{16+z^4},\ y^2 = \frac{8x^4}{16+x^4},\ z^2 = \frac{8y^4}{16+y^4}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB}\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Τα ύψη του $\mathrm{A}\Delta, \mathrm{BE}, \Gamma\mathrm{Z}$ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \Gamma_1$ αντίστοιχα. Αν $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \Gamma_2$ είναι τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων $\mathrm{O}\Delta, \mathrm{OE}, \mathrm{OZ}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1\mathrm{B}_2, \Gamma_1\Gamma_2$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Βρείτε όλες τις ρητές τιμές του x για τις οποίες είναι ρητός ο αριθμός $\sqrt{4x^2 - ax + b}$, όπου a, b ρητοί τέτοιοι ώστε $a^2 < 16b$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

72^ος^ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\frac{2^3}{31}\cdot\left(2^3+2^0+\frac{3}{8}:\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)\ \text{ και }\ \mathrm{B}=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right):\left(\frac{8}{3^4}-\frac{2}{9^2}\right)+\frac{3}{2^4}.$$

(β) Αν ισχύει ότι:

$$6(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=11\alpha\beta\gamma\ \text{ και }\ \alpha\beta\gamma\neq 0,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{2\alpha}+\frac{12-\beta}{3\beta}+\frac{16-\gamma}{4\gamma}.$$

Λύση

(α) Έχουμε

$$\mathrm{A}=\frac{2^3}{31}\cdot\left(2^3+2^0+\frac{3}{8}:\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{8}{31}\cdot\left(8+1+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{8}{31}\cdot\left(9+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{8}{31}\cdot 9=\frac{72}{31},$$

$$\mathrm{B}=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right):\left(\frac{8}{3^4}-\frac{2}{9^2}\right)+\frac{3}{2^4}=\left(\frac{3}{12}-\frac{1}{12}\right):\left(\frac{8}{81}-\frac{2}{81}\right)+\frac{3}{16}=\frac{1}{6}\cdot\frac{81}{6}+\frac{3}{16}=\frac{9}{4}+\frac{3}{16}=\frac{39}{16}.$$

Επειδή είναι $\mathrm{A}-\mathrm{B}=\frac{72}{31}-\frac{39}{16}=\frac{72\cdot 16-39\cdot 31}{31\cdot 16}=\frac{1152-1209}{496}<0$, έπεται ότι $\mathrm{A}<\mathrm{B}$.

(β) Έχουμε

$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{2\alpha}+\frac{12-\beta}{3\beta}+\frac{16-\gamma}{4\gamma}=\frac{8}{2\alpha}-\frac{\alpha}{2\alpha}+\frac{12}{3\beta}-\frac{\beta}{3\beta}+\frac{16}{4\gamma}-\frac{\gamma}{4\gamma}$$

$$=4\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=4\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-\frac{13}{12}.$$

Από την υπόθεση $6(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=11\alpha\beta\gamma$ και $\alpha\beta\gamma\neq 0$ με διαίρεση και των δύο μελών της ισότητας με $6\alpha\beta\gamma\neq 0$ προκύπτει ότι:

$$\frac{6(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{6\alpha\beta\gamma}=\frac{11\alpha\beta\gamma}{6\alpha\beta\gamma}\Rightarrow\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{11}{6},$$

οπότε η παράσταση Γ έχει τιμή

$$\Gamma=4\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-\frac{13}{12}=4\cdot\frac{11}{6}-\frac{13}{12}=\frac{44}{6}-\frac{13}{12}=\frac{75}{12}=\frac{25}{4}.$$

Πρόβλημα 2

Ένας πελάτης αγόρασε από μία έκθεση αυτοκινήτων ένα αυτοκίνητο για το οποίο πλήρωσε με μετρητά το μισό της τιμής πώλησης του αυτοκινήτου, ενώ για τα υπόλοιπα συμφωνήθηκε να πληρώσει με 24 μηνιαίες δόσεις των 500 ευρώ. Με αυτόν το διακανονισμό επιβαρύνθηκε με τόκους που συνολικά αντιστοιχούν στο 10% της τιμής πώλησης του αυτοκινήτου. Να βρείτε την τιμή πώλησης του αυτοκινήτου και πόσα συνολικά θα πληρώσει συνολικά ο πελάτης.

Λύση.

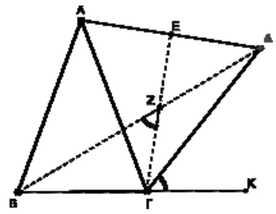
Αν υποθέσουμε ότι η τιμή πώλησης του αυτοκινήτου είναι x, τότε, σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος θα έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{2}+24\cdot 500=x+\frac{10x}{100}\Leftrightarrow \frac{x}{2}+12000=x+\frac{x}{10}\Leftrightarrow 5x+120000=10x+x$$

$$\Leftrightarrow 6x=120000\Leftrightarrow x=\frac{120000}{6}=20000.$$

Άρα η τιμή πώλησης του αυτοκινήτου είναι $x=20000$ ευρώ και ο πελάτης θα πληρώσει συνολικά $x+\frac{10x}{100}=\frac{11x}{10}=\frac{11\cdot 20000}{10}=22000$ ευρώ.

Πρόβλημα 3

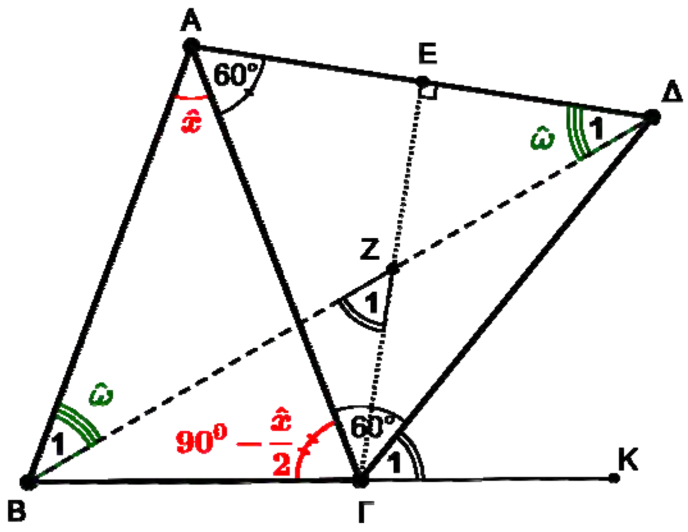


Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές ($\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$), το τρίγωνο $\mathrm{A\Delta\Gamma}$ είναι ισόπλευρο και E είναι το μέσο του $\mathrm{A\Delta}$. Αν το K βρίσκεται στη προέκταση της $\mathrm{B\Gamma}$ και οι $\mathrm{B\Delta},\mathrm{\Gamma E}$ τέμνονται στο σημείο Z, να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\mathrm{B\hat{Z}\Gamma}$ και $\mathrm{K\hat{\Gamma}\Delta}$, είναι ίσες.

Λύση

Έστω $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}=\hat{x}$. Από το ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}$ έχουμε:

$$\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=180^o\Leftrightarrow \hat{x}+2\hat{\Gamma}=180^o\Leftrightarrow \hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=90^o-\frac{\hat{x}}{2}. \quad (1)$$



Σχήμα 1

Από το ισόπλευρο τρίγωνο $\mathrm{A\Gamma\Delta}$, έχουμε: $\mathrm{A\hat{\Gamma}\Delta}=60^0$. Οι γωνίες τώρα $\hat{\Gamma}$, $\mathrm{A\hat{\Gamma}\Delta}$ και $\hat{\Gamma}_1$ είναι διαδοχικές με την πρώτη και την τελευταία πλευρά τους αντικείμενες ημιευθείες, έχουμε ότι $\hat{\Gamma}+\mathrm{A\hat{\Gamma}\Delta}+\hat{\Gamma}_1=180^o$, οπότε

$$\hat{\Gamma}_1 = 180^o - 60^o - \left(90^o - \frac{\hat{x}}{2}\right) \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 = 30^o + \frac{\hat{x}}{2}. \qquad (2)$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Delta$, θέτουμε $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \hat{\omega}$ και παίρνουμε:

$$2\hat{\omega} + \hat{x} + 60^0 = 180 \Leftrightarrow \hat{\omega} = 60^o - \frac{\hat{x}}{2}. \qquad (3)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο τέλος $E\Delta Z$, έχουμε:

$$\hat{Z}_1 = E\hat{Z}\Delta = 90^o - \hat{\omega} \Leftrightarrow \hat{Z}_1 = 30^o + \frac{\hat{x}}{2}. \qquad (4)$$

Πρόβλημα 4

Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο Α που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 2012. Διαγράφουμε από το σύνολο Α όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 5 και στη συνέχεια, από τους ακέραιους που απέμειναν, διαγράφουμε αυτούς που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο Α.

Λύση

Το σύνολο $A = \{1, 2, 3, ..., 2012\}$ έχει 2012 στοιχεία. Τα πολλαπλάσια του 5 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι της μορφής 5κ, όπου κ ακέραιος τέτοιος ώστε

$$1 \le 5\kappa \le 2012 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \le \kappa \le \frac{2012}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5} \le \kappa \le 402\frac{2}{5} \Leftrightarrow \kappa \in \{1, 2, ..., 402\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 5 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι 402.

Τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι της μορφής 8κ, όπου κ ακέραιος τέτοιος ώστε

$$1 \le 8\kappa \le 2012 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \le \kappa \le \frac{2012}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{8} \le \kappa \le 251\frac{4}{8} \Leftrightarrow \kappa \in \{1, 2, ..., 251\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι 251.

Όμως υπάρχουν πολλαπλάσια του 8 που είναι και πολλαπλάσια του 5 και έχουν ήδη διαγραφεί. Αυτά είναι όλα τα πολλαπλάσια του $\text{ΕΚΠ}\{5,8\} = 40$ που ανήκουν στο σύνολο Α.

Εργαζόμενοι ομοίως, από τις ανισώσεις

$$1 \le 40\kappa \le 2012 \Leftrightarrow \frac{1}{40} \le \kappa \le \frac{2012}{40} \Leftrightarrow \frac{1}{40} \le \kappa \le 50\frac{12}{40} \Leftrightarrow \kappa \in \{1, 2, ..., 50\},$$

βρίσκουμε ότι τα κοινά πολλαπλάσια των 5 και 8 μέσα στο σύνολο Α είναι 50.

Επομένως, διαγράψαμε από το σύνολο Α συνολικά $402 + 251 - 50 = 603$ στοιχεία, οπότε απέμειναν τελικά $2012 - 603 = 1409$ στοιχεία.

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{\alpha}{\beta^2} + 237\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{4\beta^2}\right)^3 + \frac{9\alpha - 20\beta^2}{\beta^2},$$

αν δίνεται ότι $\alpha = \beta = 2^{-3}$.

(β) Αν τα ποσά x, y είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας $\frac{x}{y} = \alpha > 0$, να αποδείξετε ότι η παράσταση $K = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ έχει τιμή ανεξάρτητη των τιμών των x, y και ισχύει ότι $K \le 1$.

Για ποια τιμή του α η παράσταση K παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

Λύση

(α) Για $\alpha = \beta = 2^{-3}$ λαμβάνουμε $\frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{2^{-3}}{\left(2^{-3}\right)^2} = \frac{2^{-3}}{2^{-6}} = 2^{-3+6} = 2^3 = 8$.

Η παράσταση Α γράφεται:

$$A = \left(\frac{\alpha}{\beta^2} + 237\right) \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{\alpha}{\beta^2}\right)^3 + 9 \cdot \frac{\alpha}{\beta^2} - 20 = (8 + 237) \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 8\right)^3 + 9 \cdot 8 - 20$$
$$= 245 \cdot 2^3 + 72 - 20 = 245 \cdot 8 + 52 = 2012.$$

(β) Από την υπόθεση έχουμε ότι $x = \alpha y$, οπότε η παράσταση γράφεται

$$K = \frac{2ayy}{\alpha^2 y^2 + y^2} = \frac{2\alpha y^2}{\left(\alpha^2 + 1\right) y^2} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1},$$

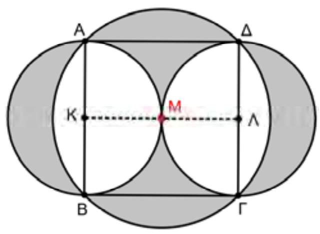
δηλαδή είναι ανεξάρτητη των x, y και εξαρτάται μόνο από το λόγο α. Επιπλέον, ισχύει

$$K = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \le 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 \ge 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 \ge 0 \Leftrightarrow \left(\alpha - 1\right)^2 \ge 0,$$

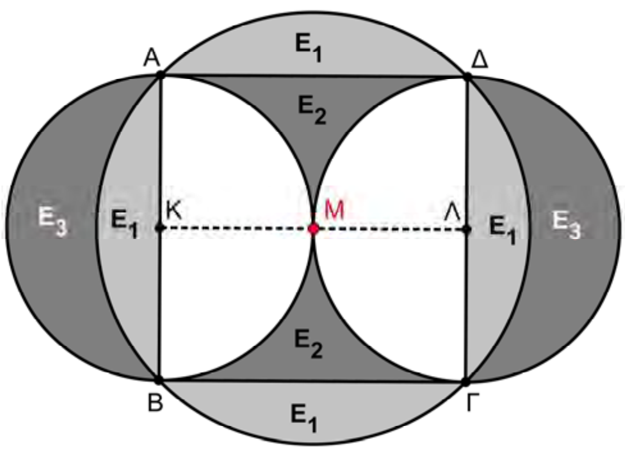
το οποίο είναι αληθές. Επομένως η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι 1 και λαμβάνεται όταν $\alpha - 1 = 0$, δηλαδή όταν $\alpha = 1$.

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα, οι μικροί κύκλοι είναι ίσοι μεταξύ τους (με ακτίνα R), έχουν κέντρα τα σημεία K, Λ και εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο M. Οι διάμετροι AB και $\Gamma\Delta$ (των μικρών κύκλων) είναι κάθετες στην διάκεντρό τους $K\Lambda$. Ο μεγάλος κύκλος τέλος, έχει κέντρο το σημείο M και περνάει από τα σημεία A, B, Γ, Δ. Να υπολογιστεί συναρτήσει του R, το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου.



Λύση



Σχήμα 2

Επειδή είναι $AK = \Delta\Lambda$ και $AK \parallel \Delta\Lambda$, ως κάθετες στη διάκεντρο $K\Lambda$, το τετράπλευρο $AK\Lambda\Delta$ είναι ορθογώνιο, οπότε θα είναι $A\Delta = K\Lambda = 2R$. Ομοίως προκύπτει ότι και το τετράπλευρο ΚΒΓΛ είναι ορθογώνιο και ότι $ΒΓ = ΚΛ = 2R$ Επομένως, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με πλευρά $2R$ και εμβαδό $(ΑΒΓΔ) = 4R^2$.

Το τρίγωνο ΑΚΜ είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές $ΚΑ = ΚΜ = R$. Άρα, από το Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε: $ΜΑ = ΜΒ = ΜΓ = ΜΔ = R\sqrt{2}$, δηλαδή ο μεγάλος κύκλος έχει ακτίνα $R\sqrt{2}$ και κατά συνέπεια το εμβαδό του θα είναι: $Ε = \pi(R\sqrt{2})^2 = 2\pi R^2$.

Τα εμβαδά των δύο μικτόγραμμων χωρίων ΜΑΔ και ΜΒΓ είναι ίσα μεταξύ τους και το άθροισμά τους προκύπτει, αν από το εμβαδό του τετραγώνου αφαιρέσουμε το εμβαδό των δύο μικρών ημικυκλίων (δηλαδή το εμβαδό του μικρού κύκλου).

Με βάση τους παραπάνω συλλογισμούς προκύπτουν οι σχέσεις:

$$2Ε_2 = (ΑΒΓΔ) - \pi R^2 \Leftrightarrow 2Ε_2 = 4R^2 - \pi R^2 \Leftrightarrow Ε_2 = \left(\frac{4-\pi}{2}\right)R^2.$$

Για τα εμβαδά των χωρίων $Ε_3$ έχουμε: $Ε_3 = \dfrac{\pi R^2}{2} - Ε_1$.

Άρα το εμβαδό του ζητούμενου χωρίου είναι:

$$2Ε_1 + 2Ε_2 + 2Ε_3 = 2Ε_1 + (4-\pi)R^2 + \pi R^2 - 2Ε_1 = 4R^2.$$

Παρατήρηση

Το εμβαδό ενός από τα τέσσερα ίσα κυκλικά τμήματα του μεγάλου κύκλου είναι:

$$Ε_1 = \frac{Ε - (ΑΒΓΔ)}{4} = \frac{2\pi R^2 - 4R^2}{4} = \frac{(\pi - 2)R^2}{2}..$$

Ο υπολογισμός όμως δεν είναι απαραίτητος γιατί απλοποιείται με τις πράξεις.

Πρόβλημα 3

Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο Α που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 101 μέχρι και το 2012. Διαγράφουμε από το σύνολο Α όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 3 και στη συνέχεια διαγράφουμε όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο Α.

Λύση

Το σύνολο $Α = \{101, 102, 103, ..., 2012\}$ έχει 2012 - 100 =1912 στοιχεία. Τα πολλαπλάσια του 3 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι της μορφής 3κ, όπου κ ακέραιος τέτοιος ώστε

$$101 \le 3\kappa \le 2012 \Leftrightarrow \frac{101}{3} \le \kappa \le \frac{2012}{3} \Leftrightarrow 33\frac{2}{3} \le \kappa \le 670\frac{2}{3} \Leftrightarrow \kappa \in \{34, 35, ..., 670\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 3 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι $670 - 33 = 637$.

Τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι της μορφής 8κ, όπου κ ακέραιος τέτοιος ώστε

$$101 \le 8\kappa \le 2012 \Leftrightarrow \frac{101}{8} \le \kappa \le \frac{2012}{8} \Leftrightarrow 12\frac{5}{8} \le \kappa \le 251\frac{4}{8} \Leftrightarrow \kappa \in \{13, 14, ..., 251\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι $251 - 12 = 239$.

Όμως υπάρχουν πολλαπλάσια του 8 που είναι και πολλαπλάσια του 3 και έχουν ήδη διαγραφεί. Αυτά είναι όλα τα πολλαπλάσια του $ΕΚΠ\{3, 8\} = 24$ που ανήκουν στο σύνολο Α.

Εργαζόμενοι ομοίως, από τις ανισώσεις

$$101 \le 24\kappa \le 2012 \Leftrightarrow \frac{101}{24} \le \kappa \le \frac{2012}{24} \Leftrightarrow 4\frac{5}{24} \le \kappa \le 83\frac{20}{24} \Leftrightarrow \kappa \in \{5, 6, ..., 83\},$$

βρίσκουμε ότι τα κοινά πολλαπλάσια των 3 και 8 μέσα στο σύνολο Α είναι $83 - 4 = 79$.

Επομένως, διαγράψαμε από το σύνολο Α συνολικά $637 + 239 - 79 = 797$ στοιχεία, οπότε απέμειναν τελικά $1912 - 797 = 1115$ στοιχεία.

Πρόβλημα 4
Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \text{ και } Q(x)=\left(\alpha x^2+\beta x\right)\left(\gamma x^2+\delta\right)+4,$$

όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-3$, να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Λύση
Έχουμε $P(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)=\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)=x^4-5x^2+4$ και

$$Q(x)=\left(\alpha x^2+\beta x\right)\left(\gamma x^2+\delta\right)+4=\alpha\gamma x^4+\beta\gamma x^3+\alpha\delta x^2+\beta\delta x+4.$$

Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα, αν, και μόνον αν, ισχύουν

$$\alpha\gamma=1,\ \beta\gamma=0,\ \alpha\delta=-5,\ \beta\delta=0$$

$$\Leftrightarrow \{\beta=0 \text{ ή } \gamma=0\},\ \{\beta=0 \text{ ή } \delta=0\}, \alpha\gamma=1, \alpha\delta=-5.$$

Οι τιμές $\gamma=0$ και $\delta=0$ αποκλείονται γιατί δεν επαληθεύουν τις δύο τελευταίες εξισώσεις, οπότε λαμβάνουμε $\beta=0,\ \gamma=\frac{1}{\alpha},\ \delta=-\frac{5}{\alpha},\ \alpha\neq 0.$ Από την εξίσωση $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-3$, με αντικατάσταση των τιμών των β,γ και δ προκύπτει η εξίσωση

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}-\frac{5}{\alpha}=-3\Leftrightarrow \alpha-\frac{4}{\alpha}=-3\Leftrightarrow \alpha^2+3\alpha-4=0\Leftrightarrow \alpha^2-1+3\alpha-3=0$$

$$(\alpha-1)(\alpha+1)+3(\alpha-1)=0\Leftrightarrow(\alpha-1)(\alpha+4)=0\Leftrightarrow \alpha-1=0 \text{ ή } \alpha+4=0\Leftrightarrow \alpha=1 \text{ ή } \alpha=-4$$

Επομένως οι τιμές των παραμέτρων $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ πρέπει και αρκεί να είναι

$$\alpha=1,\ \beta=0,\ \gamma=1,\ \delta=-5 \text{ ή } \alpha=-4,\ \beta=0,\ \gamma=-\frac{1}{4},\ \delta=\frac{5}{4}.$$

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1
Να βρείτε το υποσύνολο των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{|x|-1}{3}\leq\frac{|x|+x^2}{4} \quad \text{και} \quad \frac{x+1}{2}+\frac{x(x+1)}{4}>\frac{(x+2)^2}{4}.$$

Λύση
Έχουμε

$$\frac{x^2}{4}+\frac{|x|-1}{3}\leq\frac{|x|+x^2}{4}\Leftrightarrow 3x^2+4\left(|x|-1\right)\leq 3|x|+3x^2\Leftrightarrow |x|\leq 4\Leftrightarrow -4\leq x\leq 4.$$

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x(x+1)}{4}>\frac{(x+2)^2}{4}\Leftrightarrow 2x+2+x(x+1)>(x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x+2+x^2+x>x^2+4x+4\Leftrightarrow -x>2\Leftrightarrow x<-2.$$

Επομένως, οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν στο διάστημα $[-4,-2)=\{x\in\mathbb{R}:-4\leq x<-2\}$.

Πρόβλημα 2
Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{x+x^2}{1-x^2}\cdot\frac{\left[\left(1+ax\right)^2-\left(a+x\right)^2\right]}{1-a^2}=\frac{ab}{\left(a-b\right)^2},$$

για τις διάφορες τιμές των πραγματικών αριθμών a,b με $ab\left(a-b\right)\left(1-a^2\right)\neq 0$.

Λύση

Για να ορίζονται οι δεδομένες παραστάσεις πρέπει να ισχύουν:

$$1-x^2\neq 0, 1-a^2\neq 0 (\text{υπόθεση}) \text{ και } a\neq b (\text{υπόθεση}) \Leftrightarrow x\neq \pm 1.$$

Για $x\neq\pm 1$, η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

$$\frac{x}{1-x}\cdot\frac{\left(1+a^2x^2-a^2-x^2\right)}{\left(1-a^2\right)}=\frac{ab}{\left(a-b\right)^2}\Leftrightarrow\frac{x}{1-x}\cdot\frac{\left(1-a^2\right)\left(1-x^2\right)}{\left(1-a^2\right)}=\frac{ab}{\left(a-b\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow x\left(1+x\right)=\frac{ab}{\left(a-b\right)^2}\Leftrightarrow\left(a-b\right)^2x^2+\left(a-b\right)^2x-ab=0$$

Επειδή είναι $a\neq b$ η τελευταία εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\left(a-b\right)^4+4ab\left(a-b\right)^2=\left(a-b\right)^2\left[\left(a-b\right)^2+4ab\right]=\left(a-b\right)^2\left(a+b\right)^2=\left(a^2-b^2\right)^2\geq 0.$$

Άρα η εξίσωση έχει τις ρίζες (ίσες, αν $a=-b$):

$$x_1=\frac{-\left(a-b\right)^2+\left(a^2-b^2\right)}{2\left(a-b\right)^2}=\frac{2ab-2b^2}{2\left(a-b\right)^2}=\frac{2b\left(a-b\right)}{2\left(a-b\right)^2}=\frac{b}{a-b} \text{ και}$$

$$x_2=\frac{-\left(a-b\right)^2-\left(a^2-b^2\right)}{2\left(a-b\right)^2}=\frac{2ab-2a^2}{2\left(a-b\right)^2}=\frac{-2a\left(a-b\right)}{2\left(a-b\right)^2}=\frac{-a}{a-b}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{b}{b-a}=1\Leftrightarrow b=b-a\Leftrightarrow a=0 \text{ και } \frac{b}{b-a}=-1\Leftrightarrow b=-b+a\Leftrightarrow a=2b,$$

$$\frac{-a}{a-b}=1\Leftrightarrow -a=a-b\Leftrightarrow 2a=b \text{ και } \frac{-a}{a-b}=-1\Leftrightarrow -a=b-a\Leftrightarrow b=0.$$

Επομένως, για τιμές των παραμέτρων a,b που ικανοποιούν τις υποθέσεις $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a\neq b$ και $a\neq\pm 1$, έχουμε:

- Αν $\left(a-2b\right)\left(2a-b\right)\neq 0$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες (ίσες με $\frac{1}{2}$, αν $a=-b$):

$$x_1=\frac{b}{a-b} \text{ και } x_2=\frac{-a}{a-b}.$$

- Αν $a=2b$, τότε η εξίσωση έχει μόνο τη ρίζα $x_2=-2$.
- Αν $a=\frac{b}{2}$, τότε η εξίσωση έχει μόνο τη ρίζα $x_2=-2$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$ και $\hat{\mathrm{A}}<45^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΒΓ και ΑΓ, αντίστοιχα, και σημείο $\mathrm{M}\neq\mathrm{A}$ στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ. Αν η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΒΜ τέμνει την ευθεία ΔΕ στο Ζ και την ευθεία ΑΓ στο Θ, να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{Z}=\hat{\mathrm{A}}$.

(β) Η ευθεία ΒΖ διχοτομεί τη γωνία $\Theta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$.

Λύση

(α) Επειδή το Ζ ανήκει στη μεσοκάθετη του ΒΜ θα είναι ΖΒ = ΖΜ και

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{Z} = \mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \omega .$$

Επειδή είναι $\Delta\mathrm{E} \parallel \mathrm{AB}$ και $\mathrm{AB} \perp \mathrm{B\Gamma}$ έπεται ότι $\Delta\mathrm{E} \perp \mathrm{B\Gamma}$, δηλαδή η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$. Αφού $\mathrm{Z} \in \mathrm{B\Gamma}$ θα είναι $\mathrm{ZB} = \mathrm{Z\Gamma}$ και

$$\mathrm{Z}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \varphi .$$

Επειδή $\mathrm{MZ} = \mathrm{BZ} = \Gamma\mathrm{Z}$ θα είναι και

$$\mathrm{Z}\hat{\mathrm{M}}\Gamma = \mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{M} = \theta .$$

Από το τρίγωνο $\mathrm{BM\Gamma}$, λόγω των προηγούμενων ισοτήτων, έχουμε

$$\mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\Gamma + \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{M} + \Gamma\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B} = 180^\circ \Rightarrow 2\omega + 2\varphi + 2\theta = 180^\circ$$

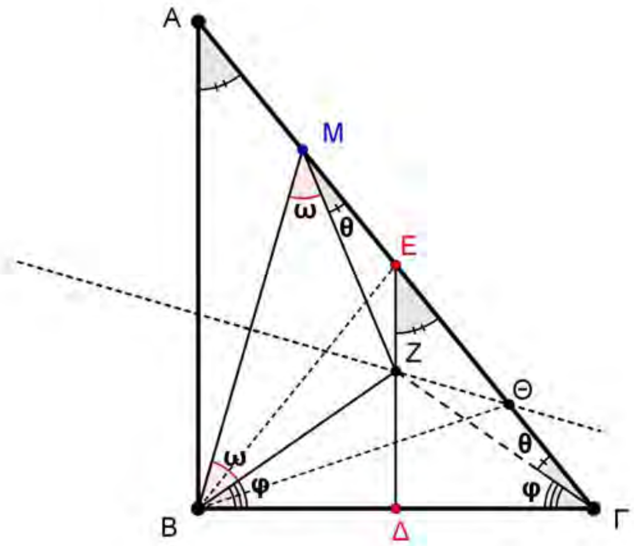
$$\omega + \varphi + \theta = 90^\circ . \qquad (1)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ λαμβάνουμε

$$\varphi + \theta = \hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{\mathrm{A}}. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{Z} = \omega = \hat{\mathrm{A}} .$$



Σχήμα 3

(β) Επειδή το σημείο Θ ανήκει στη μεσοκάθετη του ΒΜ η ΘΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\Theta}\mathrm{E}$. Επίσης, επειδή η ΒΕ είναι διάμεσος του ορθογώνιου τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ προς την υποτείνουσα, θα είναι $\mathrm{BE} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{2} = \mathrm{E\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο $\mathrm{BE\Gamma}$ είναι ισοσκελές με την ΕΔ ύψος και διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma$, άρα και της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Theta$. Επομένως στο τρίγωνο ΒΘΕ το Ζ είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του, οπότε και η ΒΖ διχοτομεί τη γωνία $\Theta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$.

Πρόβλημα 4

Αν υπάρχουν ακέραιοι x, y, a που επαληθεύουν την εξίσωση

$$yx^2 + \left(y^2 - a^2\right)x + y\left(y - a\right)^2 = 0,$$

να αποδείξετε ότι ο αριθμός xy είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Λύση

Έστω ότι οι ακέραιοι x, y, a επαληθεύουν την εξίσωση: $yx^2 + \left(y^2 - a^2\right)x + y\left(y - a\right)^2 = 0$.

Μετά τις πράξεις και αναδιάταξη των όρων η εξίσωση, ως προς άγνωστο το a, γράφεται:

$$(y-x)a^2-2y^2a+y\left(x^2+xy+y^2\right)=0.$$

Σύμφωνα με την υπόθεση, η εξίσωση αυτή με άγνωστο το a έχει ακέραια λύση, αλλά και ακέραιους συντελεστές. Επομένως, η διακρίνουσα της είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, δηλαδή υπάρχει $\kappa \in \mathbb{Z}$ τέτοιο, ώστε

$$\Delta = 4y^4-4y(y-x)\left(x^2+xy+y^2\right)=4y\left[y^3-\left(y^3-x^3\right)\right]=4yx^3=xy(2x)^2=\kappa^2.$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι: $xy=\left(\dfrac{\kappa}{2x}\right)^2$, όπου ο αριθμός $\dfrac{\kappa}{2x}$ είναι ρητός.

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $a \neq 0$ για τις οποίες η εξίσωση

$$\frac{1}{2a+ax}-\frac{1}{2x-x^2}=\frac{2a+6}{x^3-4x},$$

έχει δύο πραγματικές ρίζες με διαφορά 4.

Λύση

Μετά τις παραγοντοποιήσεις των όρων των κλασμάτων η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{1}{a(x+2)}+\frac{1}{x(x-2)}=\frac{2(a+3)}{x(x-2)(x+2)}. \qquad (1)$$

Πρέπει να ισχύουν $x \neq 0, \pm 2$, δηλαδή η εξίσωση θα λυθεί στο σύνολο $\mathbb{R}-\{-2,0,2\}$.

Η εξίσωση (1) στο σύνολο $\mathbb{R}-\{-2,0,2\}$ είναι ισοδύναμη τελικά με την εξίσωση

$$x^2+(a-2)x-\left(2a^2+4a\right)=0,$$

η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta=(3a+2)^2$ και ρίζες $x_1=a+2$ και $x_2=-2a$. Επειδή

$$a+2\in\{-2,0,2\} \Leftrightarrow a\in\{-4,-2,0\} \text{ και } -2a\in\{-2,0,2\} \Leftrightarrow a\in\{1,0,-1\}$$

και αφού από την υπόθεση είναι $a \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες δεκτές, τις $x_1=a-2$ και $x_2=-2a$, όταν είναι $a \neq -1, +1, -2, -4$.

Επειδή είναι

$$|a+2-(-2a)|=4 \Leftrightarrow |3a+2|=4 \Leftrightarrow 3a+2=4 \text{ ή } 3a+2=-4 \Leftrightarrow a=\frac{2}{3} \text{ ή } a=-2,$$

η τιμή του a που ζητάμε είναι η $a=\dfrac{2}{3}$.

Πρόβλημα 2

Αν y ακέραιος και $x\in\mathbb{R}$, να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (x,y) που είναι λύσεις του συστήματος

$$\left\{\begin{array}{c} 1+y-\left|x^2-3x+1\right|>0 \\ y-2+|x-2|<0 \end{array}\right\}. \qquad (\Sigma)$$

Να παραστήσετε γραφικά στο Καρτεσιανό επίπεδο Oxy, το σύνολο των σημείων $\mathrm{M}(x,y)$, όπου (x,y) λύση του συστήματος (Σ).

Λύση

Έχουμε

$$\begin{Bmatrix} 1+y-\left|x^2-3x+1\right|>0 \\ y-2+\left|x-2\right|<0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 1+y>\left|x^2-3x+1\right|\geq 0 \\ y-2<-\left|x-2\right|\leq 0 \end{Bmatrix},$$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις προκύπτει ότι:

$$1+y>0 \text{ και } y-2<0 \Leftrightarrow -1<y<2.$$

Επομένως οι δυνατές τιμές του y είναι $y=0$ ή $y=1$.

- Για $y=0$, το σύστημα γίνεται:

$$\begin{Bmatrix} \left|x^2-3x+1\right|<1 \\ \left|x-2\right|<2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -1<x^2-3x+1<1 \\ -2<x-2<2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2-3x+2>0 \text{ και } x^2-3x<0 \\ -2<x-2<2 \end{Bmatrix}$$

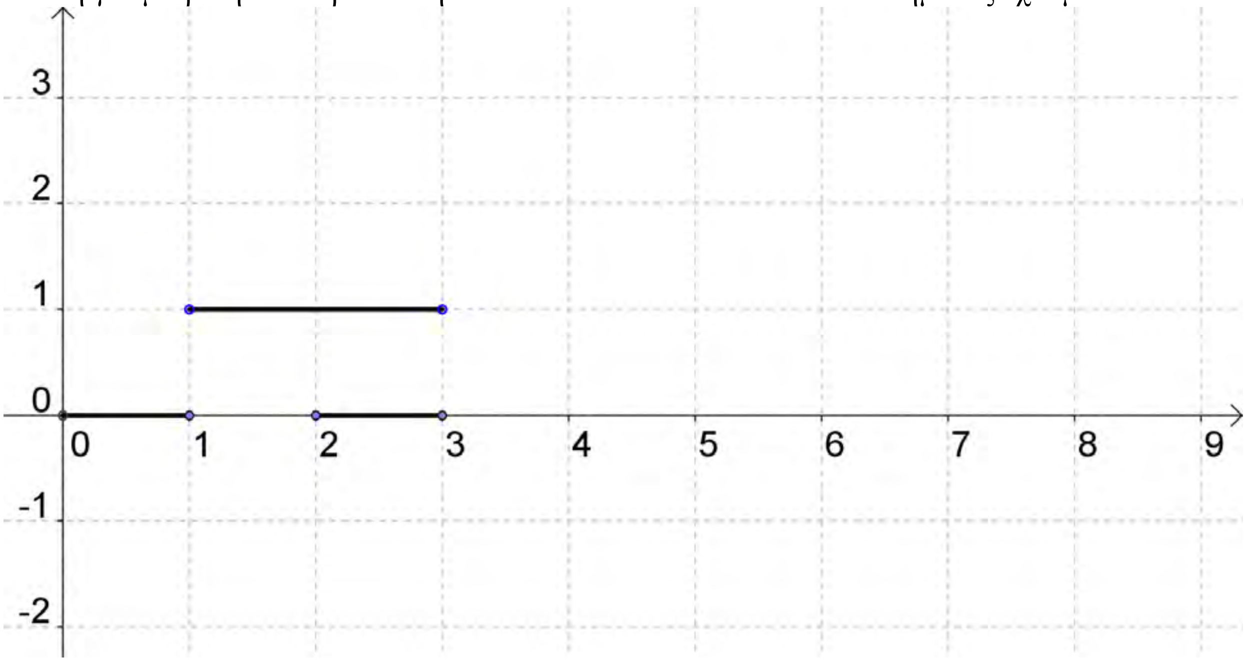
$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (x<1 \text{ ή } x>2) \text{ και } 0<x<3 \\ 0<x<4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow 0<x<1 \text{ ή } 2<x<3.$$

- Για $y=1$, το σύστημα γίνεται:

$$\begin{Bmatrix} \left|x^2-3x+1\right|<2 \\ \left|x-2\right|<1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2<x^2-3x+1<2 \\ -1<x-2<1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2-3x+3>0 \text{ και } x^2-3x-1<0 \\ 1<x<3 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}<x<\dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \\ 1<x<3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow 1<x<3.$$

Για τη γεωμετρική αναπαράσταση του συνόλου των λύσεων του συστήματος έχουμε:



Σχήμα 4

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ<ΑΓ$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$ τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο Μ. Ο κύκλος $c_1(\mathrm{M},\mathrm{AM})$ τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι $ΓΔ=ΑΒ$.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

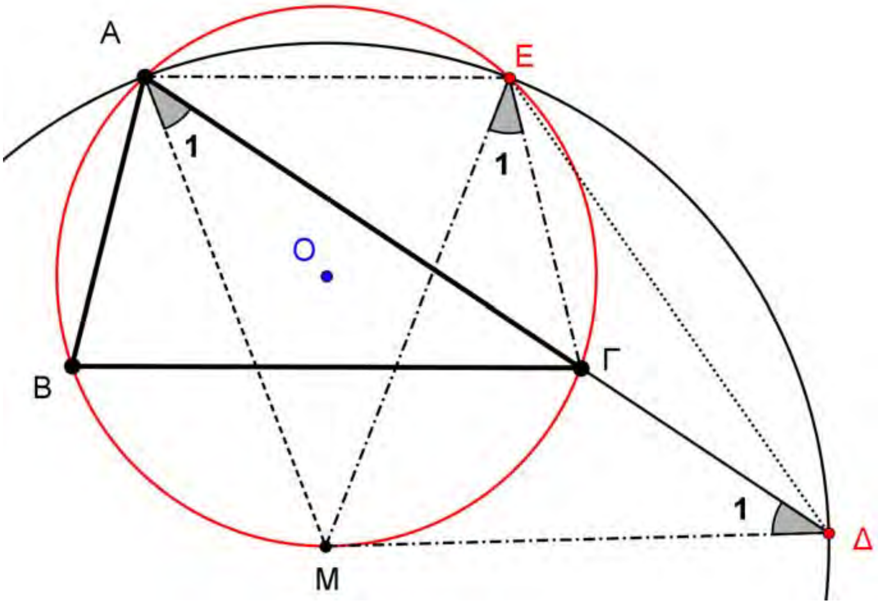
Έστω E το δεύτερο κοινό σημείο των περιφερειών (c) και (c_1). Τότε η AE είναι η κοινή χορδή των δύο κύκλων, άρα η OM είναι μεσοκάθετη της AE.

Το M είναι το μέσο του τόξου $B\Gamma$ (διότι η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$). Άρα η OM είναι μεσοκάθετη και της $B\Gamma$.

Επειδή οι χορδές $B\Gamma$ και AE έχουν την OM κοινή μεσοκάθετη, συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οπότε:

$$AB = E\Gamma. \qquad (1)$$

Το τρίγωνο $MA\Delta$ είναι ισοσκελές, αφού $MA = M\Delta$ ως ακτίνες του κύκλου (c_1). Άρα είναι $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$. Ισχύει επίσης $\hat{A}_1 = \hat{E}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$ (εγγεγραμμένες στον κύκλο (c) και βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{M\Gamma}$).



Σχήμα 5

Από τις τελευταίες ισότητες γωνιών συμπεραίνουμε ότι $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$ και σε συνδυασμό με την ισότητα $M\hat{\Delta}E = M\hat{E}\Delta$ (που προκύπτει από το ισοσκελές τρίγωνο $M\Delta E$), καταλήγουμε στην ισότητα των γωνιών $\Gamma\hat{\Delta}E = \Gamma\hat{E}\Delta$ και στην ισότητα των ευθυγράμμων τμημάτων:

$$E\Gamma = \Delta\Gamma. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε το ζητούμενο.

2^ος Τρόπος

Το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές ($MA = M\Delta$ ακτίνες του κύκλου (c_1)). Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, οπότε έχουμε:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1 = \frac{\hat{A}}{2}. \qquad (3)$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο $AM\Delta$, έχουμε:

$$\hat{M}_1 + \hat{\omega} = A\hat{M}\Delta = 180^o - \hat{A}_1 - \hat{\Delta}_1 = 180^o - \hat{A}$$

$$\Rightarrow \hat{M}_1 + \hat{\omega} = 180^o - \hat{A} \Leftrightarrow \hat{M}_1 = 180^o - \hat{A} - \hat{\omega}. \qquad (4)$$

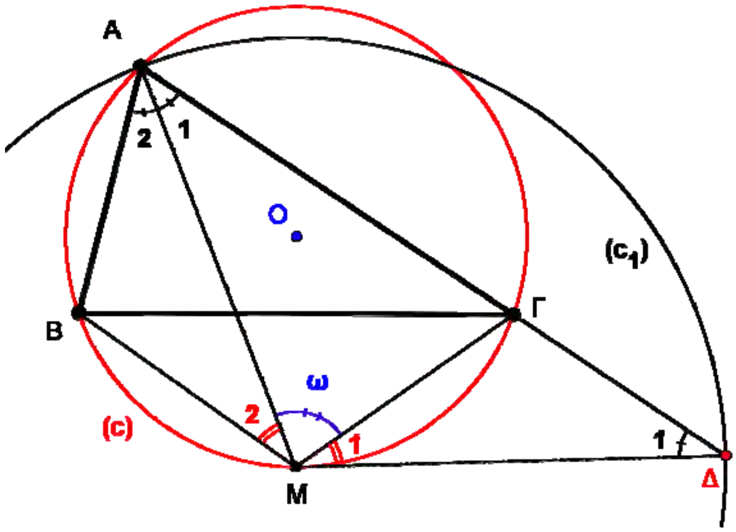
Επίσης, ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$\hat{B} = \hat{\omega}$ (είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο (c) και βαίνουν στο ίδιο τόξο)

$\hat{M}_2 = \hat{\Gamma}$ (είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο (c) και βαίνουν στο ίδιο τόξο).

Άρα έχουμε

$$\hat{M}_1 = 180^o - \hat{A} - \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{M}_2 . \qquad (5)$$



Σχήμα 6

Από τις ισότητες: $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, $MB = M\Gamma$ (διότι το M είναι μέσο του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$) και $MA = M\Delta$ (διότι $MA, M\Delta$ ακτίνες του κύκλου (c_1)), συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα MAB και $M\Delta\Gamma$ (*) είναι ίσα, οπότε $\Gamma\Delta = AB$.

(*) *Η ισότητα των τριγώνων, μπορεί να αποδειχθεί και με άλλους τρόπους.*

Παρατηρήσεις

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι τα σημεία M, Γ και το μέσο της ΔE είναι συνευθειακά.

Ο κύκλος (c_1) τέμνει και τη προέκταση της AB. Αν ονομάσουμε Λ το σημείο τομής, τότε θα ισχύει $B\Lambda = A\Gamma$. Έτσι δημιουργείτε το ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta\Lambda$ με $A\Delta = A\Lambda = AB + A\Gamma$ και στη συνέχεια, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $AM \perp \Delta\Lambda$.

Πρόβλημα 4

Βρείτε όλες τις ρητές τιμές του x για τις οποίες είναι ρητός ο αριθμός $\sqrt{x^2+ax+b}$, όπου a, b ρητοί τέτοιοι ώστε $a^2 < 4b$.

Λύση

Επειδή από υπόθεση $a^2 - 4b < 0$, έπεται ότι $x^2 + ax + b > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι οι αριθμοί x, $\sqrt{x^2+ax+b} = y$ είναι και οι δύο ρητοί, τότε και η διαφορά τους $y - x = r$ θα είναι ρητός. Έτσι έχουμε

$$\sqrt{x^2+ax+b} - x = r \Leftrightarrow \sqrt{x^2+ax+b} = x + r \Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 + 2rx + r^2 \Rightarrow x = \frac{r^2 - b}{a - 2r},$$

εφόσον $r \neq \frac{a}{2}$ και $x + r \geq 0$ ή ισοδύναμα, εφόσον $r > \frac{a}{2}$.

Αντίστροφα, αν είναι $x = \frac{r^2 - b}{a - 2r}$, όπου r ρητός με $r > \frac{a}{2}$, τότε έχουμε

$$x^2+ax+b=\left(\frac{r^2-b}{a-2r}\right)^2+a\frac{r^2-b}{a-2r}+b=\frac{r^4-2ar^3+a^2r^2+2br^2-2abr+b^2}{(a-2r)^2}=\frac{\left(r^2-ar+b\right)^2}{(a-2r)^2},$$

οπότε, αφού από υπόθεση $a^2-4b<0$, θα είναι

$$y=\sqrt{x^2+ax+b}=\frac{r^2-ar+b}{|a-2r|}=\frac{r^2-ar+b}{2r-a},\ r>\frac{a}{2},$$

δηλαδή ο y είναι ρητός.

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να βρεθεί η αριθμητική πρόοδος α_ν, $\nu=1,2,3,...$ που έχει πρώτο όρο $\alpha_1=\alpha\neq 0$, διαφορά $\omega\neq 0$ και είναι τέτοια ώστε ο λόγος του αθροίσματος $\alpha_1+\cdots+\alpha_\nu$ των ν πρώτων όρων της προς το άθροισμα $\alpha_{\nu+1}+\cdots+\alpha_{3\nu}$ των επόμενων 2ν το πλήθος όρων της είναι σταθερός, δηλαδή ανεξάρτητος του ν.

Λύση

Από την υπόθεση δίνεται ότι:

$$\frac{\Sigma_\nu}{\Sigma_{3\nu}-\Sigma_\nu}=\frac{\alpha_1+\cdots\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}+\cdots\alpha_{3\nu}}=c\,(\text{ανεξάρτητο του } \nu). \qquad (1)$$

Επειδή είναι

$$\Sigma_\nu=\alpha_1+\cdots+\alpha_\nu=\frac{\left[2\alpha+(\nu-1)\omega\right]\cdot\nu}{2}\ \text{και}$$

$$\Sigma_{3\nu}-\Sigma_\nu=\frac{\left[2\alpha+(3\nu-1)\omega\right]\cdot 3\nu}{2}-\frac{\left[2\alpha+(\nu-1)\omega\right]\cdot\nu}{2}=\frac{\left[4\alpha+(8\nu-2)\omega\right]\cdot\nu}{2},$$

η σχέση (1) γίνεται

$$\frac{2\alpha+(\nu-1)\omega}{4\alpha+(8\nu-2)\omega}=c\Leftrightarrow(8c\omega-\omega)\nu+4\alpha c-2\alpha-2c\omega+\omega=0$$

$$\Leftrightarrow(8c-1)\omega\nu+(2c-1)(2\alpha-\omega)=0,\text{για κάθε } \nu=1,2,3,...$$

$$\Leftrightarrow(8c-1)\omega=0 \text{ και } (2c-1)(2\alpha-\omega)=0$$

$$\Leftrightarrow 8c-1=0\ \text{ και }\ 2c-1 \text{ ή } 2\alpha-\omega=0\Leftrightarrow c=\frac{1}{8},\omega=2\alpha,$$

αφού $\omega\neq 0$. Επομένως η αριθμητική πρόοδος που ζητάμε είναι η: $\alpha,3\alpha,5\alpha,....,(2\nu-1)\alpha,...$.

Διαφορετικά, στην ισότητα $(8c-1)\omega\nu+(2c-1)(2\alpha-\omega)=0$, που ισχύει για κάθε $\nu=1,2,3,...$ μπορούμε να θεωρήσουμε $\nu=1$ και $\nu=2$ και να αφαιρέσουμε κατά μέλη τις ισότητες που προκύπτουν, οπότε λαμβάνουμε $(8c-1)\omega=0$ και από αυτή $(2c-1)(2\alpha-\omega)=0$, οπότε έχουμε πάλι το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c}(8c-1)\omega=0\\(2c-1)(2a-\omega)=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}c=\dfrac{1}{8}\\\omega=2\alpha\end{array}\right\},\text{ αφού } \omega\neq 0.$$

Επομένως η αριθμητική πρόοδος που ζητάμε είναι η: $\alpha,3\alpha,5\alpha,....,(2\nu-1)\alpha,...$.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^2 = \frac{8z^4}{16+z^4}, \quad y^2 = \frac{8x^4}{16+x^4}, \quad z^2 = \frac{8y^4}{16+y^4}.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$x^2 = \frac{8z^4}{16+z^4} = z^2 \cdot \frac{8z^2}{4^2+\left(z^2\right)^2} \le z^2, \text{αφού ισχύει}: \frac{8z^2}{4^2+\left(z^2\right)^2} \le 1,$$

και ομοίως λαμβάνουμε ότι: $z^2 \le y^2$ και $y^2 \le x^2$. Επομένως, έχουμε: $x^2 = y^2 = z^2$.
Τότε από την πρώτη εξίσωση λαμβάνουμε:

$$x^2 = \frac{8x^4}{16+x^4} \Leftrightarrow x^2\left(x^4-8x^2+16\right)=0 \Leftrightarrow x^2\left(x^2-4\right)^2=0$$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $x=-2$ ή $x=2$ (όλες με πολλαπλότητα 2).

- Για $x=0$, προκύπτει η λύση $\left(0,0,0\right)$.
- Για $x=2$, προκύπτουν οι λύσεις: $\left(2,2,2\right)$, $\left(2,-2,2\right)$,$\left(2,2,-2\right)$ και $\left(2,-2,-2\right)$.
- Για $x=-2$, προκύπτουν οι λύσεις: $\left(-2,2,2\right)$, $\left(-2,-2,2\right)$,$\left(-2,2,-2\right)$ και $\left(-2,-2,-2\right)$.

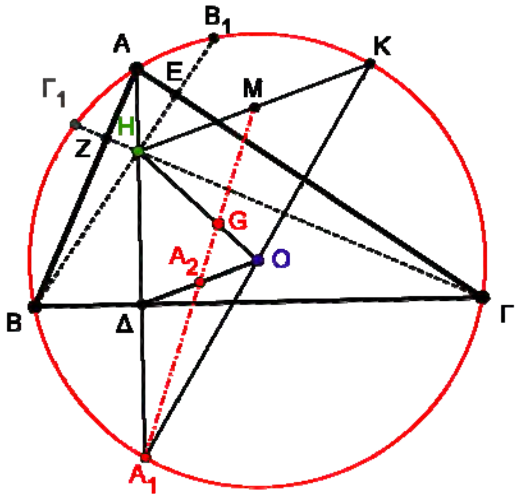
Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Τα ύψη του $\mathrm{A\Delta}, \mathrm{BE}, \mathrm{\Gamma Z}$ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \Gamma_1$ αντίστοιχα. Αν $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \Gamma_2$ είναι τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων $\mathrm{O\Delta}, \mathrm{OE}, \mathrm{OZ}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1\mathrm{B}_2, \Gamma_1\Gamma_2$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση
(1ος τρόπος)

Παρατηρούμε ότι το σημείο A_1 είναι συμμετρικό του ορθοκέντρου Η ως προς την πλευρά ΒΓ. Πράγματι, αν θεωρήσουμε το σημείο H_1 συμμετρικό του Η ως προς την πλευρά ΒΓ, τότε έχουμε $\mathrm{B}\hat{\mathrm{H}}_1\Gamma = \mathrm{B}\hat{\mathrm{H}}\Gamma = 180^\circ - \hat{\mathrm{A}}$. Άρα το τετράπλευρο $\mathrm{ABH}_1\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε το σημείο H_1 συμπίπτει με το σημείο A_1.

Έστω Κ το αντιδιαμετρικό του σημείου A_1 και Μ το σημείο τομής της $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ με την ΗΚ. Τότε στο τρίγωνο $\mathrm{A}_1\mathrm{HK}$ έχουμε ότι το σημείο Ο είναι μέσο της πλευράς $\mathrm{A}_1\mathrm{K}$ και ότι το σημείο Δ είναι μέσο της πλευράς $\mathrm{A}_1\mathrm{H}$ **.(*)** Άρα το τμήμα ΟΔ είναι ίσο και παράλληλο με το τμήμα $\frac{\mathrm{HK}}{2}$.

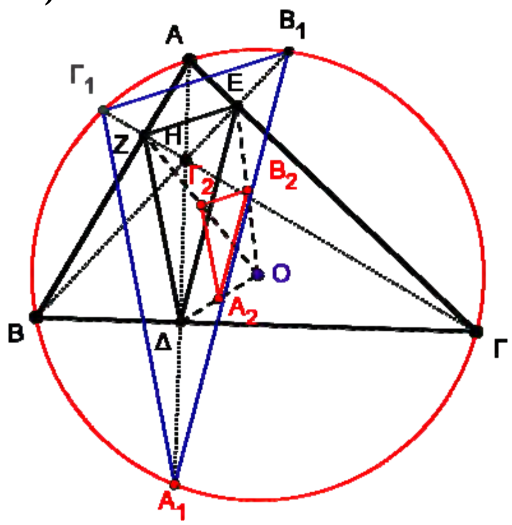


Σχήμα 7

Επειδή τώρα $\mathrm{O\Delta} = \dfrac{\mathrm{HK}}{2}$ και η $\mathrm{A_1A_2}$ είναι διάμεσος στο τρίγωνο $\mathrm{A_1O\Delta}$, συμπεραίνουμε ότι η $\mathrm{A_1M}$ είναι διάμεσος του τριγώνου $\mathrm{A_1HK}$. Έστω ότι οι διάμεσες $\mathrm{A_1M}$ και HO (του τριγώνου $\mathrm{A_1HK}$) τέμνονται στο σημείο G. Τότε θα ισχύει $\mathrm{GH} = 2\mathrm{GO}$, δηλαδή το σημείο G χωρίζει το τμήμα HO σε δύο τμήματα με λόγο $2:1$.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και οι $\mathrm{B_1B_2}$, $\Gamma_1\Gamma_2$ διέρχονται από το σημείο G.

$2^{ος}$ τρόπος (με ομοιοθεσία)



Σχήμα 8

Χρησιμοποιώντας τη πρόταση: “Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου τριγώνου, ως προς τις πλευρές του, βρίσκονται στο περιγεγραμμένο κύκλο του”, που αποδείξαμε στην αρχή της προηγούμενης λύσης, συμπεραίνουμε ότι το Δ είναι μέσο του $\mathrm{A_1H}$, το E είναι μέσο του $\mathrm{B_1H}$ και το Δ είναι μέσο του $\Gamma_1\mathrm{H}$.

Άρα το τρίγωνο $\mathrm{A_1B_1}\Gamma_1$ είναι ομοιόθετο του (ορθικού) τριγώνου $\Delta\mathrm{EZ}$ στην ομοιοθεσία με κέντρο το ορθόκεντρο H και λόγο 2, ($\mathrm{HA_1} = 2\mathrm{H}\Delta$).

Το A_2 είναι μέσο του $O\Delta$, το B_2 είναι μέσο του OE και το Γ_2 είναι μέσο του OZ.

Άρα το ορθικό τρίγωνο ΔEZ, είναι ομοιόθετο του τριγώνου $A_2B_2\Gamma_2$ στην ομοιοθεσία με κέντρο το O και λόγο 2, ($O\Delta = 2OA_2$)., δηλαδή το τρίγωνο $A_2B_2\Gamma_2$ είναι ομοιόθετο του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$.

Άρα οι ευθείες $A_1A_2, B_1B_2, \Gamma_1\Gamma_2$ (που συνδέουν τις ομόλογες κορυφές) θα συντρέχουν στο κέντρο της ομοιοθεσίας (έστω K) το οποίο θα βρίσκεται επάνω στην OH.

Πρόβλημα 4

Βρείτε όλες τις ρητές τιμές του x για τις οποίες είναι ρητός ο αριθμός $\sqrt{4x^2 - ax + b}$, όπου a, b ρητοί τέτοιοι ώστε $a^2 < 16b$.

Λύση

Επειδή από υπόθεση $a^2 - 16b < 0$, έπεται ότι $4x^2 - ax + b > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι οι αριθμοί x, $\sqrt{4x^2 - ax + b} = y$ είναι και οι δύο ρητοί, τότε και η διαφορά $y - 2x = r$ θα είναι ρητός. Έτσι έχουμε

$$\sqrt{4x^2 - ax + b} - 2x = r \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 - ax + b} = 2x + r \Rightarrow 4x^2 - ax + b = 4x^2 + 4rx + r^2 \Rightarrow x = \frac{b - r^2}{a + 4r},$$

εφόσον $r \neq -\frac{a}{4}$ και $2x + r \geq 0$, ή ισοδύναμα εφόσον $r > -\frac{a}{4}$.

Αντίστροφα, αν είναι $x = \frac{b - r^2}{a + 4r}$, όπου r ρητός με $r > -\frac{a}{4}$, τότε έχουμε

$$4x^2 - ax + b = 4\left(\frac{b - r^2}{a + 4r}\right)^2 - \frac{a\left(b - r^2\right)}{a + 4r} + b$$

$$= \frac{4r^4 + a^2r^2 + 4b^2 + 8br^2 + 4abr + 4ar^3}{\left(a + 4r\right)^2} = \frac{\left(2r^2 + ar + 2b\right)^2}{\left(a + 4r\right)^2},$$

οπότε, αφού από υπόθεση $a^2 - 16b < 0$, θα είναι

$$y = \sqrt{4x^2 - ax + b} = \frac{2r^2 + ar + 2b}{\left|a + 4r\right|} = \frac{2r^2 + ar + 2b}{4r + a}, \ r > -\frac{a}{4},$$

δηλαδή ο y είναι ρητός.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
Να συγκρίνετε τους αριθμούς
$$\mathrm{A}=\frac{2^2}{31}\cdot\left(3^3+1000^0+\frac{2}{9}:\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)\ \text{ και }\ \mathrm{B}=\left(1-\frac{40}{41}\right):\left(\frac{80}{3^4}-\frac{79}{9^2}\right)+\frac{67}{41}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2
Ένας φορητός υπολογιστής έχει τιμή πώλησης 720 ευρώ σε μετρητά. Όταν ο πελάτης τον πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 5% πάνω στην τιμή πώλησης. Όταν ο πελάτης τον πληρώσει σε 24 ισόποσες μηνιαίες δόσεις τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 14% πάνω στην τιμή πώλησης. Να βρείτε σε καθεμία από τις δύο περιπτώσεις πόση θα είναι η μηνιαία δόση.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ παράλληλο προς τη βάση ΒΓ και ίσο με την πλευρά ΑΒ. Η ευθεία $\mathrm{B\Delta}$ τέμνει την πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο Ε.

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$.

(β) Αν το τρίγωνο $\mathrm{A\Delta E}$ είναι ισοσκελές, να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}=\omega$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4
Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 60% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 15% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Αν υπάρχουν 24 μαθητές που δεν παίζουν κανένα από τα δύο αθλήματα, να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x^3}{y^2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^3+\frac{81x^2+27y}{y},\ \text{όταν } x=3^{-2}, y=3^{-3}.$$

Μονάδες 2

(β) Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $\mathrm{B}=16^{23}\cdot 5^{89}$, όταν αυτός γραφεί στη δεκαδική αναπαράστασή του.

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2
Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 65% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 20% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Επιπλέον υπάρχουν 12 μαθητές που δεν παίζουν κανένα άθλημα, ενώ υπάρχουν άλλοι 24 μαθητές που παίζουν μόνο βόλεϊ. Να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΔ προς το μέρος του Α κατά τμήμα $\mathrm{AE}=\mathrm{A\Delta}$. Φέρουμε τις ΕΒ, ΕΓ και εξωτερικά του τριγώνου ΕΒΓ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΕΖΓ. Έστω Μ το μέσον του τμήματος ΑΕ.
(i) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{AZ}=\mathrm{E\Gamma}$.
(ii) Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΓΖΕ ως συνάρτηση του α.
(iii) Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΒΓΖΜ ως συνάρτηση του α.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4
Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x)=\left(ax^2+bx+c\right)(ax+b) \text{ και } Q(x)=a^2x^3+4x^2+dx+e,$$

όπου οι συντελεστές a,b,c,d,e είναι θετικοί ακέραιοι. Αν ισχύει ότι $P(1)=21$, να βρείτε τις τιμές των a,b,c,d,e για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{|x|+x}{2}\le\frac{|x|+3+x^2}{4},\quad x\left(x^2+4\right)\left(x^2-5x+4\right)=0.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2
Να απλοποιήσετε τις κλασματικές παραστάσεις

$$\mathrm{A}(x,y)=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^3-y^3\right)\left(x^3+y^3\right)}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)}\ \text{ και }\ \mathrm{B}(x,y)=\frac{4x^2+16y^2+16xy-25}{2x+4y+5},$$

αν $y\neq\pm x$ και $2x+4y+5\neq 0$, και να λύσετε την εξίσωση

$$\mathrm{A}(x,y)=\mathrm{B}(x,y).$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε των πλευρών του ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, ώστε $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{AE}$. Οι κύκλοι $c_1(\mathrm{B},\mathrm{BE})$ και $c_2(\Gamma,\Gamma\Delta)$ τέμνουν την ευθεία ΒΓ στα σημεία $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ και Γ_1, Γ_2, αντίστοιχα. Το σημείο B_1 βρίσκεται εκτός του τμήματος ΒΓ προς το μέρος του Β και το σημείο Γ_2 βρίσκεται εκτός του τμήματος ΒΓ προς το μέρος του Γ.

Να αποδείξετε ότι:

(α) Τα σημεία $\mathrm{E}, \mathrm{B}_2, \Gamma_1, \Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο, έστω c_3.

(β) Τα σημεία $\mathrm{E},\mathrm{B}_1,\Gamma_2,\Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο, έστω c_4.

(γ) Το σημείο Α και τα κέντρα των κύκλων c_3 και c_4, βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4
Δίνεται η εξίσωση

$$a^2x^2+2a\left(\sqrt{2}-1\right)x+\sqrt{x-2}+3-2\sqrt{2}=0,$$

όπου $x\in\mathbb{R}$ άγνωστος και $a\in\mathbb{R}$ παράμετρος. Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a.

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| \geq 5.$$

Να βρείτε τα ζεύγη (x, y) ακέραιων αριθμών, με $x<0$, για τα οποία ισχύει ή ισότητα:

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| = 5.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι

$$x^2\left(y^2-3y+2\right) \leq 4y(y-1)\left(xy-2x+2y-y^2\right),$$

να αποδείξετε ότι: $|2y-3| \leq 1$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{B\Gamma}$. Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε ισοσκελή τρίγωνα $\mathrm{AB\Delta}$ $(\mathrm{AB}=\mathrm{A\Delta})$ και $\mathrm{A\Gamma E}$ $(\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{AE})$ με $\mathrm{B\hat{A}\Delta}=\mathrm{\Gamma\hat{A}E}=\hat{\theta}<90^\circ$. Οι BE και $\mathrm{\Gamma\Delta}$ τέμνονται στο σημείο K. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $\mathrm{A\Delta\Gamma}$ και ABE τέμνονται στο σημείο M. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{B\hat{A}K}=\mathrm{\Gamma\hat{A}M}$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ο αριθμός

$$\sqrt{13-2x}+\sqrt{13+2x}$$

είναι ακέραιος.

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Στο σύνολο των ακεραίων, να λυθεί το σύστημα:

$$xy = z^2 + 2, \quad y^3 = x^3 + 2x^2 + 1.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να βρείτε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f\left(x^2\right) - y^2 = f\left(x+y\right)\cdot f\left(x-y\right), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ο αριθμός

$$\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x},$$

όπου $a > 1$ πραγματική παράμετρος, παίρνει ακέραιες τιμές.

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι είναι δυνατόν να ορίσουμε την τιμή της παραμέτρου a έτσι ώστε ο αριθμός $\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x}$ να είναι ακέραιος περισσότερες ή ίσες από K φορές, όπου K τυχόν θετικός ακέραιος.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ABC ($AB < AC < BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Η προέκταση του ύψους του AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του $c(O,R)$ στο σημείο E. Ο κύκλος $c_1(D,DA)$ τέμνει την πλευρά AC στο σημείο T, την ευθεία AB στο σημείο S, τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο H και την ευθεία OA στο σημείο Z. Να αποδείξετε ότι:

(α) Το τετράπλευρο $SBTC$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, έστω c_2.

(β) Τα σημεία O, D, E, Z, H και το κέντρο του κύκλου c_2, βρίσκονται επάνω στο ίδιο κύκλο.

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$A=\frac{2^2}{31}\cdot\left(3^3+1000^0+\frac{2}{9}:\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right) \text{ και } B=\left(1-\frac{40}{41}\right):\left(\frac{80}{3^4}-\frac{79}{9^2}\right)+\frac{67}{41}.$$

Λύση
Έχουμε

$$A=\frac{2^2}{31}\cdot\left(3^3+1000^0+\frac{2}{9}:\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{31}\cdot\left(27+1+\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{1}-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{31}\cdot\left(28+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{112}{31}$$

$$B=\left(1-\frac{40}{41}\right):\left(\frac{80}{3^4}-\frac{79}{9^2}\right)+\frac{67}{41}=\frac{1}{41}:\left(\frac{80}{81}-\frac{79}{81}\right)+\frac{67}{41}=\frac{1}{41}:\frac{1}{81}+\frac{67}{41}=\frac{81}{41}+\frac{67}{41}=\frac{148}{41}$$

Επειδή $A-B=\frac{112}{31}-\frac{148}{41}=\frac{112\cdot 41-148\cdot 31}{31\cdot 41}=\frac{4592-4588}{1271}=\frac{4}{1271}>0$, έπεται ότι $A>B$.

Πρόβλημα 2
Ένας φορητός υπολογιστής έχει τιμή πώλησης 720 ευρώ σε μετρητά. Όταν ο πελάτης τον πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 5% πάνω στην τιμή πώλησης. Όταν ο πελάτης τον πληρώσει σε 24 ισόποσες μηνιαίες δόσεις τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 14% πάνω στην τιμή πώλησης. Να βρείτε σε καθεμία από τις δύο περιπτώσεις πόση θα είναι η μηνιαία δόση.

Λύση.
Όταν ο πελάτης πληρώσει τον υπολογιστή σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 5% πάνω στην τιμή πώλησης., δηλαδή επιβαρύνεται με $720\cdot\frac{5}{100}=36$ ευρώ, οπότε θα πληρώσει συνολικά $720+36=756$ ευρώ. Επομένως η μηνιαία δόση θα είναι $756:12=63$ ευρώ.

Όταν ο πελάτης πληρώσει τον υπολογιστή σε 24 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 14% πάνω στην τιμή πώλησης, δηλαδή επιβαρύνεται με $720\cdot\frac{14}{100}=100,8$ ευρώ, οπότε θα πληρώσει συνολικά $720+100,8=820,8$ ευρώ. Επομένως η μηνιαία δόση θα είναι $820,8:24=34,2$ ευρώ.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$. Από την κορυφή A φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ παράλληλο προς τη βάση ΒΓ και ίσο με την πλευρά ΑΒ. Η ευθεία $\mathrm{B\Delta}$ τέμνει την πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο Ε.

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$.

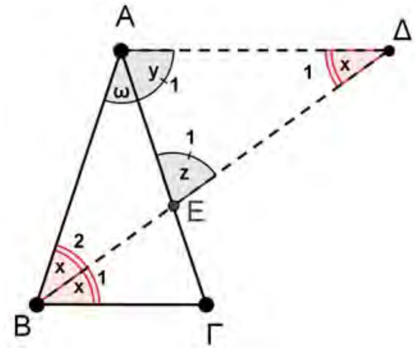
(β) Αν το τρίγωνο $\mathrm{A\Delta E}$ είναι ισοσκελές, να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = \omega$.

Λύση

(α) Το τρίγωνο $\mathrm{AB\Delta}$ είναι ισοσκελές ($\mathrm{AB} = \mathrm{A\Delta}$), οπότε: $\hat{\Delta}_1 = \hat{\mathrm{B}}_2$.

Οι $\mathrm{A\Delta}$ και $\mathrm{B\Gamma}$ είναι παράλληλες, οπότε: $\hat{\Delta}_1 = \hat{\mathrm{B}}_1$, ως εντός εναλλάξ γωνίες.

Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\mathrm{B}}_2 = \hat{x}$. Επομένως η $\mathrm{B\Delta}$ διχοτομεί την γωνία $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$.



Σχήμα 1

(β) Από ο άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\mathrm{A\Delta E}$, έχουμε :

$$\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} = 180^o \qquad (1).$$

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\mathrm{AB\Delta}$, έχουμε:

$$2\hat{x} + \hat{y} + \hat{\omega} = 180^o \qquad (2).$$

Από την παραλληλία τέλος των $\mathrm{A\Delta}$ και $\mathrm{B\Gamma}$ (με τέμνουσα την $\mathrm{A\Gamma}$), έχουμε:

$$\hat{y} = \mathrm{A\hat{\Gamma}B} = \mathrm{A\hat{B}\Gamma} = 2\hat{x} \qquad (3).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) (σε συνδυασμό με τη σχέση (3)), έχουμε:

$$3\hat{x} + \hat{z} = 180^o \qquad (\mathrm{A}) \quad \text{και} \quad 4\hat{x} + \hat{\omega} = 180^o \qquad (\mathrm{B}).$$

Στη συνέχεια διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\hat{y} = \hat{z}$, τότε $\hat{y} = \hat{z} = 2\hat{x}$ και από τις σχέσεις (Α) και (Β) λαμβάνουμε:
  $\hat{x} = 36^o$ και $\hat{\omega} = 36^o$.
- Αν $\hat{x} = \hat{z}$, τότε από τη σχέση (Α) παίρνουμε: $\hat{x} = \hat{z} = 45^o$, οπότε $\hat{\mathrm{B}} = 90^o$, άτοπο.
- Αν $\hat{x} = \hat{y}$, τότε από τη σχέση (3) παίρνουμε: $\hat{x} = 0^o$, άτοπο.

Άρα, αν το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, τότε $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = \omega = 36^0$.

Πρόβλημα 4

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 60% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 15% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Αν υπάρχουν 24 μαθητές που δεν παίζουν κανένα από τα δύο αθλήματα, να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Λύση

Ο αριθμός των μαθητών που παίζουν ένα τουλάχιστον από τα δύο αθλήματα είναι σε ποσοστό $(60 + 45) - 15 = 90\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Επομένως ο αριθμός των μαθητών που δεν ασχολούνται με κανένα από τα δύο αθλήματα είναι σε ποσοστό $100-90=10\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Σύμφωνα με την υπόθεση, αυτοί οι μαθητές είναι 24, οπότε το Γυμνάσιο έχει συνολικά $24\cdot\frac{100}{10}=240$ μαθητές. Επομένως, οι μαθητές που παίζουν ποδόσφαιρο είναι $240\cdot\frac{60}{100}=144$, ενώ οι μαθητές που παίζουν μπάσκετ είναι $240\cdot\frac{45}{100}=108$.

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x^3}{y^2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^3+\frac{81x^2+27y}{y},\ \text{όταν } x=3^{-2}, y=3^{-3}.$$

(β) Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $\mathrm{B}=16^{23}\cdot 5^{89}$, όταν αυτός γραφεί στη δεκαδική αναπαράστασή του.

Λύση

(α) Για $x=3^{-2}$, $y=3^{-3}$ έχουμε $\frac{x^3}{y^2}=\frac{\left(3^{-2}\right)^3}{\left(3^{-3}\right)^2}=\frac{3^{-6}}{3^{-6}}=1$, $\frac{x}{y}=\frac{3^{-2}}{3^{-3}}=\frac{3^3}{3^2}=3$ και

$$\frac{81x^2+27y}{y}=\frac{81\cdot\left(3^{-2}\right)^2+27\cdot 3^{-3}}{3^{-3}}=\frac{81\cdot 3^{-4}+27\cdot 3^{-3}}{3^{-3}}=\frac{81\cdot\frac{1}{81}+27\cdot\frac{1}{27}}{3^{-3}}=2\cdot 3^3.$$

Άρα έχουμε

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x^3}{y^2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^3+\frac{81x^2+27y}{y}=\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot 3^3+2\cdot 3^3=\frac{4}{3}\cdot 27+2\cdot 27=36+54=90.$$

(β) Ο αριθμός Β γράφεται στη μορφή

$$\mathrm{B}=16^{23}\cdot 5^{89}=\left(2^4\right)^{23}\cdot 5^{89}=2^{92}\cdot 5^{89}=2^3\cdot\left(2^{89}\cdot 5^{89}\right)=2^3\cdot\left(2\cdot 5\right)^{89}=2^3\cdot 10^{89}=8\cdot 10^{89}.$$

Επομένως, ο αριθμός Β έχει πρώτο ψηφίο το 8 και ακολουθούν 89 μηδενικά, δηλαδή έχει συνολικά στη δεκαδική του αναπαράσταση 90 ψηφία.

Πρόβλημα 2

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 65% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 20% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Επιπλέον υπάρχουν 12 μαθητές που δεν παίζουν κανένα άθλημα, ενώ υπάρχουν άλλοι 24 μαθητές που παίζουν μόνο βόλεϊ. Να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Λύση

Ο αριθμός των μαθητών που παίζουν ένα τουλάχιστον από τα δύο αθλήματα (ποδόσφαιρο ή μπάσκετ) είναι σε ποσοστό $\left(65+45\right)-20=90\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Επομένως ο αριθμός των μαθητών που δεν ασχολούνται με κανένα από τα δύο αυτά αθλήματα είναι σε ποσοστό $100-90=10\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Σύμφωνα με την υπόθεση, αυτοί οι μαθητές είναι $24+12=36$, οπότε το Γυμνάσιο έχει συνολικά $36\cdot\frac{100}{10}=360$ μαθητές. Επομένως, οι μαθητές που παίζουν ποδόσφαιρο είναι $360\cdot\frac{65}{100}=234$, ενώ οι μαθητές που παίζουν μπάσκετ είναι $360\cdot\frac{45}{100}=162$.

Πρόβλημα 3

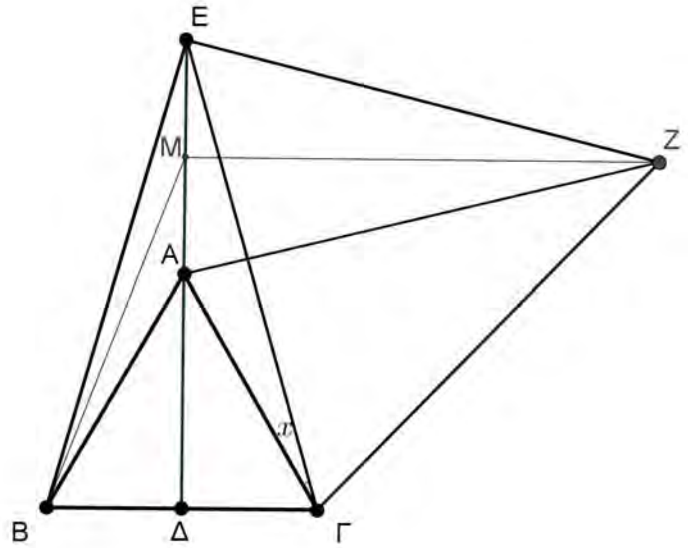
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΔ προς το μέρος του Α κατά τμήμα $\mathrm{AE}=\mathrm{A\Delta}$. Φέρουμε τις ΕΒ, ΕΓ και εξωτερικά του τριγώνου ΕΒΓ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΕΖΓ. Έστω Μ το μέσον του τμήματος ΑΕ.

(i) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{AZ}=\mathrm{E\Gamma}$.

(ii) Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΓΖΕ ως συνάρτηση του α.

(iii) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΒΓΖΜ ως συνάρτηση του α.

Λύση



Σχήμα 2

(i) Τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΖΑΓ έχουν:

1. $\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{A\Gamma}$ (διότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο).

2. $\mathrm{E\Gamma}=\mathrm{Z\Gamma}$ (διότι το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισόπλευρο).

3. $\mathrm{E\hat{\Gamma}B}=\mathrm{Z\hat{\Gamma}A}=60^o+\hat{x}$, όπου $\hat{x}=\mathrm{A\hat{\Gamma}E}$.

Άρα τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΖΑΓ είναι ίσα (έχουν δύο πλευρές και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες), οπότε θα έχουν και $\mathrm{AZ}=\mathrm{E\Gamma}$.

(ii) Σημειώνουμε πρώτα ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς α, οπότε το ύψος του ΑΔ έχει μήκος $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Άρα είναι $\mathrm{AE}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ και $\mathrm{E\Delta}=\alpha\sqrt{3}$

Έχουμε ότι: $(\mathrm{A\Gamma ZE})=(\mathrm{A\Gamma Z})+(\mathrm{ZAE})=(\mathrm{EB\Gamma})+(\mathrm{ZAE})$, αφού λόγω της ισότητας των τριγώνων ΕΒΓ και ΑΓΖ έπεται ότι έχουν και ίσα εμβαδά. Για το τρίγωνο ΕΒΓ θεωρούμε ως βάση το τμήμα $\mathrm{B\Gamma}=\alpha$ με αντίστοιχο ύψος $\mathrm{E\Delta}=2\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\alpha\sqrt{3}$, οπότε έχει εμβαδό

$$(\mathrm{EB\Gamma})=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\alpha\sqrt{3}=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}.$$

Στο τρίγωνο ΖΑΕ θεωρούμε ως βάση το τμήμα $\mathrm{AE} = \mathrm{A\Delta} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Επειδή το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές ($\mathrm{AZ} = \mathrm{E\Gamma} = \mathrm{ZE}$) και το Μ είναι μέσο του τμήματος ΑΕ έπεται ότι το ΖΜ είναι ύψος του τριγώνου ΖΑΕ που αντιστοιχεί στη βάση ΑΕ. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΖΑΜ λαμβάνουμε

$$\mathrm{ZM} = \sqrt{\mathrm{ZA}^2 - \mathrm{AM}^2} = \sqrt{\mathrm{E\Gamma}^2 - \mathrm{AM}^2} = \sqrt{\mathrm{E\Delta}^2 + \mathrm{\Delta\Gamma}^2 - \mathrm{AM}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\alpha\sqrt{3}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{3\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3\alpha^2}{16}} = \frac{7\alpha}{4}.$$

Άρα έχουμε $\left(\mathrm{ZAE}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{7\alpha}{4} = \frac{7\alpha^2\sqrt{3}}{16}$, οπότε

$$\left(\mathrm{A\Gamma ZE}\right) = \left(\mathrm{EB\Gamma}\right) + \left(\mathrm{ZAE}\right) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2} + \frac{7\alpha^2\sqrt{3}}{16} = \frac{15\alpha^2\sqrt{3}}{16}.$$

(iii) Το τετράπλευρο ΒΓΖΜ είναι τραπέζιο ($\mathrm{ZM} \parallel \mathrm{B\Gamma}$, αφού και οι δύο είναι κάθετες προς την ευθεία ΔΕ. Βάσεις του τραπεζίου αυτού είναι οι $\mathrm{B\Gamma} = \alpha$, $\mathrm{ZM} = \frac{7\alpha}{4}$ και ύψος το τμήμα

$\mathrm{\Delta M} = \mathrm{\Delta A} + \mathrm{\Delta M} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} + \frac{\alpha\sqrt{3}}{4} = \frac{3\alpha\sqrt{3}}{4}$, οπότε έχει εμβαδό

$$\left(\mathrm{B\Gamma ZM}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{B\Gamma} + \mathrm{ZM}\right) \cdot \mathrm{\Delta M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\alpha + \frac{7\alpha}{4}\right) \cdot \frac{3\alpha\sqrt{3}}{4} = \frac{33\alpha^2\sqrt{3}}{32}.$$

Πρόβλημα 4

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\left(ax + b\right) \text{ και } Q(x) = a^2x^3 + 4x^2 + dx + e,$$

όπου οι συντελεστές a, b, c, d, e είναι θετικοί ακέραιοι. Αν ισχύει ότι $P(1) = 21$, να βρείτε τις τιμές των a, b, c, d, e για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Λύση

Από την ισότητα $P(1) = 21$ έχουμε ότι $P(1) = (a+b+c)(a+b) = 21$, από την οποία, λόγω της υπόθεσης ότι οι a, b, c είναι θετικοί ακέραιοι, οπότε $a+b+c > a+b$, έπεται ότι

$$\left\{\begin{matrix} a+b+c=7 \\ a+b=3 \end{matrix}\right\} \quad (1) \qquad ή \qquad \left\{\begin{matrix} a+b+c=21 \\ a+b=1 \end{matrix}\right\}. \quad (2)$$

Επειδή οι a, b είναι θετικοί ακέραιοι η εξίσωση $a+b=1$ του συστήματος (2) είναι αδύνατη, οπότε και το σύστημα (2) είναι αδύνατο.

Από το σύστημα (1) λαμβάνουμε $a+b=3$ και $c=4$.

Το πολυώνυμο $P(x)$ γράφεται στη μορφή

$$P(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\left(ax + b\right) = a^2x^3 + 2abx^2 + \left(b^2 + ac\right)x + bc,$$

οπότε έχουμε

$$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow \left\{a^2 = a^2,\ 2ab = 4,\ b^2 + ac = d,\ bc = e\right\}.$$

Επειδή $c = 4$ και $a+b=3$, τελικά έχουμε τις εξισώσεις:

$$a+b=3,\ ab=2,\ c=4,\ b^2+4a=d,\ 4b=e,\ a,b,c,d,e \text{ θετικοί ακέραιοι,}$$

$$\Leftrightarrow a=1,\ b=2,\ c=4,\ d=8\ e=8 \ \text{ ή } \ a=2,\ b=1,\ c=4,\ d=9\ e=4.$$

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{|x|+x}{2}\leq\frac{|x|+3+x^2}{4},\quad x\left(x^2+4\right)\left(x^2-5x+4\right)=0\,.$$

Λύση

Έχουμε

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{|x|+x}{2}\leq\frac{|x|+3+x^2}{4}\Leftrightarrow(x-1)^2+2\left(|x|+x\right)\leq|x|+3+x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+2|x|+2x\leq|x|+3+x^2\Leftrightarrow|x|\leq 2\Leftrightarrow -2\leq x\leq 2.$$

Επομένως η ανίσωση του συστήματος αληθεύει για $x\in[-2,2]$.

Επιπλέον, έχουμε

$$x\left(x^2+4\right)\left(x^2-5x+4\right)=0\Leftrightarrow x=0\ \text{ ή }\ x^2+4=0\ \text{ ή }\ x^2-5x+4=0.$$

Η εξίσωση $x^2+4=0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, αφού $x^2+4>0,$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ενώ η εξίσωση $x^2-5x+4=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=9>0$ και ρίζες $x=1$ ή $x=4$.

Επομένως η εξίσωση του συστήματος έχει τις ρίζες $x=0$ ή $x=1$ ή $x=4$

Επειδή $4\notin[-2,2]$, το σύστημα αληθεύει για $x=0$ ή $x=1$.

Πρόβλημα 2

Να απλοποιήσετε τις κλασματικές παραστάσεις

$$\mathrm{A}(x,y)=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^3-y^3\right)\left(x^3+y^3\right)}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)}\quad\text{και}\quad \mathrm{B}(x,y)=\frac{4x^2+16y^2+16xy-25}{2x+4y+5},$$

αν $y\neq\pm x$ και $2x+4y+5\neq 0$, και να λύσετε την εξίσωση

$$\mathrm{A}(x,y)=\mathrm{B}(x,y).$$

Λύση

Λόγω των υποθέσεων $y\neq\pm x$ και $2x+4y+5\neq 0$, δεν μηδενίζονται οι παρανομαστές των δύο παραστάσεων, οπότε αυτές ορίζονται. Με πράξεις στον παρανομαστή και στον αριθμητή της παράστασης $\mathrm{A}(x,y)$ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{A}(x,y)=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^3-y^3\right)\left(x^3+y^3\right)}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)}=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^6-y^6\right)}{x^6-y^6}=x^2+y^2.$$

Η απλοποίηση μπορεί επίσης να γίνει με χρήση της παραγοντοποίησης

$$x^6-y^6=\left(x^2\right)^3-\left(y^2\right)^3=\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+x^2y^2+y^4\right)$$

ή των παραγοντοποιήσεων

$$x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right),\qquad x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$$
$$x^4+y^4+x^2y^2=\left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2=\left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2-xy\right).$$

Έχουμε επίσης

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{4x^2+16y^2+16xy-25}{2x+4y+5}=\frac{(2x+4y)^2-5^2}{2x+4y+5}$$
$$=\frac{(2x+4y+5)(2x+4y-5)}{2x+4y+5}=2x+4y-5.$$

Επομένως η εξίσωση $\mathrm{A}(x,y)=\mathrm{B}(x,y)$ γίνεται:

$$x^2+y^2=2x+4y-5 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2-4y+5=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=0$$
$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ και } y-2=0 \text{ (διαφορετικά θα είχαμε} (x-1)^2+(y-2)^2>0)$$
$$\Leftrightarrow x=1,\ y=2.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ και σημεία Δ, E των πλευρών του $\mathrm{A\Gamma}$, AB αντίστοιχα, ώστε $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{AE}$. Οι κύκλοι $c_1(\mathrm{B}, \mathrm{BE})$ και $c_2(\Gamma, \Gamma\Delta)$ τέμνουν την ευθεία $\mathrm{B\Gamma}$ στα σημεία $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ και Γ_1, Γ_2, αντίστοιχα. Το σημείο B_1 βρίσκεται εκτός του τμήματος $\mathrm{B\Gamma}$ προς το μέρος του B και το σημείο Γ_2 βρίσκεται εκτός του τμήματος $\mathrm{B\Gamma}$ προς το μέρος του Γ.

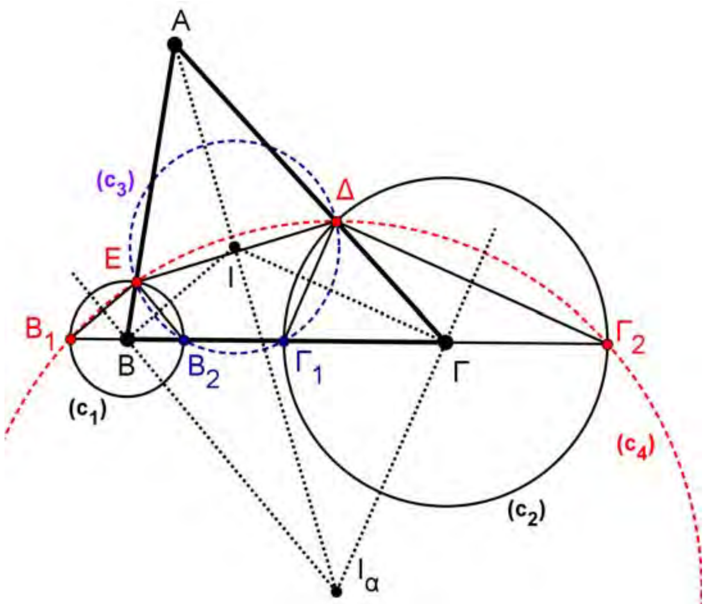
Να αποδείξετε ότι:

(α) Τα σημεία $\mathrm{E}, \mathrm{B}_2, \Gamma_1, \Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο, έστω c_3.

(β) Τα σημεία $\mathrm{E}, \mathrm{B}_1, \Gamma_2, \Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο, έστω c_4.

(γ) Το σημείο A και τα κέντρα των κύκλων c_3 και c_4, βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Το τρίγωνο BEB_2 είναι ισοσκελές (οι πλευρές BE και BB_2 είναι ακτίνες του κύκλου c_1), οπότε η μεσοκάθετη της πλευράς EB_2 είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ και κατά συνέπεια θα διέρχεται από το έκκεντρο I του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$. Επιπλέον ισχύει:

$$\mathrm{IE}=\mathrm{IB}_2 \qquad (1).$$

Το τρίγωνο $\Gamma\Delta\Gamma_1$ είναι ισοσκελές (οι πλευρές $\Gamma\Delta$ και $\Gamma\Gamma_1$ είναι ακτίνες του κύκλου c_2), οπότε η μεσοκάθετη της πλευράς $\Delta\Gamma_1$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ και κατά συνέπεια θα διέρχεται από το έκκεντρο I του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$. Επιπλέον ισχύει:

$$\mathrm{I}\Delta = \mathrm{I}\Gamma_1 \qquad (2).$$

Το τρίγωνο $\mathrm{AE}\Delta$ είναι ισοσκελές (διότι $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{AE}$), άρα η μεσοκάθετη της πλευράς $\mathrm{E}\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ και κατά συνέπεια θα διέρχεται από το έκκεντρο I του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$. Επιπλέον ισχύει:

$$\mathrm{I}\Delta = \mathrm{IE} \qquad (3).$$

Επομένως, οι μεσοκάθετες των τμημάτων $\mathrm{B_2E}$, $\mathrm{E}\Delta$, $\Delta\Gamma_1$ περνάνε από το έκκεντρο I του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, οπότε (σε συνδυασμό με τις ισότητες (1), (2), (3)) συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{I}\Delta = \mathrm{IE} = \mathrm{IB_2} = \mathrm{I}\Gamma_1 := r,$$

δηλαδή τα σημεία E, $\mathrm{B_2}$, Γ_1, Δ βρίσκονται επάνω σε κύκλο c_3 με κέντρο το I και ακτίνα r.

(β) Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι τα σημεία $\mathrm{E}, \mathrm{B_1}, \Gamma_2, \Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο c_4 με κέντρο το παράκεντρο I_α του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ και ακτίνα $r_\alpha := \mathrm{I}_\alpha\Delta = \mathrm{I}_\alpha\mathrm{E} = \mathrm{I}_\alpha\Gamma_2 = \mathrm{I}_\alpha\mathrm{B}_1$.

(γ) Τα κέντρα των παραπάνω κύκλων (c_3 και c_4) βρίσκονται επάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$, οπότε θα είναι συνευθειακά με τη κορυφή A.

Πρόβλημα 4

Δίνεται η εξίσωση

$$a^2x^2 + 2a\left(\sqrt{2}-1\right)x + \sqrt{x-2} + 3 - 2\sqrt{2} = 0,$$

όπου $x \in \mathbb{R}$ άγνωστος και $a \in \mathbb{R}$ παράμετρος. Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a.

Λύση

Για να ορίζεται η $\sqrt{x-2}$ πρέπει να είναι $x \geq 2$.
Η εξίσωση γράφεται στην ισοδύναμη μορφή

$$a^2x^2 + 2a\left(\sqrt{2}-1\right)x + 3 - 2\sqrt{2} = -\sqrt{x-2},\ x \geq 2. \qquad (1)$$

Για $a = 0$ έχουμε την εξίσωση

$$3 - 2\sqrt{2} = -\sqrt{x-2},\ x \geq 2, \text{ (αδύνατη, αφού } 3-2\sqrt{2} > 0 \text{)}.$$

Για $a \neq 0$, το πρώτο μέλος της (1) είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = 0$, οπότε η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως

$$\left(ax + \sqrt{2} - 1\right)^2 = -\sqrt{x-2},\ x \geq 2. \qquad (2)$$

Επειδή είναι $\left(ax + \sqrt{2} - 1\right)^2 \geq 0$ και $-\sqrt{x-2} \leq 0,\ x \geq 2,$ έπεται ότι η εξίσωση (2) έχει λύση, αν, και μόνον αν, $ax + \sqrt{2} - 1 = 0$ και $x - 2 = 0,\ x \geq 2 \Leftrightarrow x = 2,$ εφόσον $a = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Επομένως, η δεδομένη εξίσωση έχει μόνο για $a = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ τη λύση $x = 2.$

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| \geq 5 .$$

Να βρείτε τα ζεύγη (x, y) ακέραιων αριθμών με $x<0$ για τα οποία ισχύει ή ισότητα

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| = 5 .$$

Λύση

Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$|a| \geq a, \quad (\text{η ισότητα ισχύει όταν } a \geq 0) \text{ και}$$

$$|a| \geq -a, \ (\text{η ισότητα ισχύει όταν } a \leq 0).$$

Άρα έχουμε

$$|x+y-1| \geq -(x+y-1), \quad |x+2| \geq x+2 \quad \text{και} \quad |y+2| \geq y+2,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| \geq -(x+y-1)+x+2+y+2=5 .$$

Η ισότητα ισχύει, αν, και μόνον αν, και οι τρεις σχέσεις αληθεύουν ως ισότητες, δηλαδή, αν, και μόνον αν,

$$x+y-1 \leq 0 \quad \text{και} \quad x+2 \geq 0 \quad \text{και} \quad y+2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x+y \leq 1 \quad \text{και} \quad x \geq -2 \quad \text{και} \quad y \geq -2 .$$

Επειδή ζητάμε όλα τα ζεύγη των ακέραιων αριθμών (x, y) με $x<0$, για τα οποία ισχύει η ισότητα, έχουμε $x \in \{-2,-1\}$, $y \in \{-2,-1,0,1,2,....\}$, οπότε για να ισχύει η συνθήκη $x+y \leq 1$, πρέπει και αρκεί:

$$(x, y) \in \{(-2,-2),(-2,-1),(-2,0),(-2,1),(-2,2),(-2,3),(-1,-2),(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(-1,2)\}.$$

Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι

$$x^2\left(y^2-3y+2\right)<4y(y-1)\left(xy-2x+2y-y^2\right),$$

να αποδείξετε ότι: $|2y-3|<1$.

Λύση

Έχουμε ότι

$$x^2\left(y^2-3y+2\right)<4y(y-1)\left(xy-2x+2y-y^2\right)$$

$$\Rightarrow x^2\left(y^2-3y+2\right)-4y(y-1)\left(xy-2x+2y-y^2\right)<0$$

$$\Rightarrow x^2\left(y^2-3y+2\right)-4y(y-1)(y-2)x-4y(y-1)\left(2y-y^2\right)<0$$

$$\Rightarrow x^2\left(y^2-3y+2\right)-4y\left(y^2-3y+2\right)x+4y^2\left(y^2-3y+2\right)<0$$

$$\Rightarrow \left(y^2-3y+2\right)\left(x^2-4xy+4y^2\right) \leq 0 \Leftrightarrow \left(y^2-3y+2\right)(x-2y)^2<0$$

$$\Rightarrow y^2-3y+2<0, \text{ αφού ισχύει} (x-2y)^2 \geq 0,$$

$$\Rightarrow (y-1)(y-2)<0 \Rightarrow 1<y<2.$$

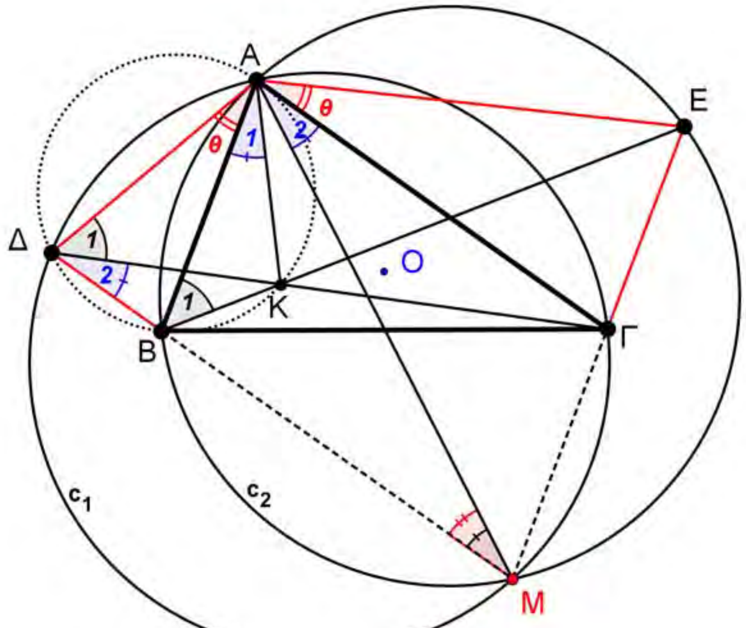
Από την τελευταία σχέση λαμβάνουμε

$$1<y<2 \Rightarrow 1-\frac{3}{2}<y-\frac{3}{2}<2-\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}<\frac{2y-3}{2}<\frac{1}{2} \Rightarrow -1<2y-3<1 \Rightarrow |2y-3|<1.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ$. Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε ισοσκελή τρίγωνα $ΑΒΔ$ ($ΑΒ = ΑΔ$) και $ΑΓΕ$ ($ΑΓ = ΑΕ$) με $Β\hat{Α}Δ = Γ\hat{Α}Ε = \hat{\theta} < 90^\circ$. Οι $ΒΕ$ και $ΓΔ$ τέμνονται στο σημείο $Κ$. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $ΑΔΓ$ και $ΑΒΕ$ τέμνονται στο σημείο $Μ$. Να αποδείξετε ότι $Β\hat{Α}Κ = Γ\hat{Α}Μ$.

Λύση



Σχήμα 4

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΑΒΕ$:

1. $ΑΔ = ΑΒ$ (διότι το τρίγωνο $ΑΔΒ$ είναι ισοσκελές).

2. $ΑΓ = ΑΕ$ (διότι το τρίγωνο $ΑΕΓ$ είναι ισοσκελές).

3. $Δ\hat{Α}Γ = Β\hat{Α}Ε = \hat{Α} + \hat{\theta}$

Άρα τα τρίγωνα $ΑΔΓ$, $ΑΒΕ$ είναι ίσα και κατά συνέπεια θα είναι ίσοι και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι τους c_1 και c_2.

Η γωνία $Α\hat{Μ}Δ$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_1 και βαίνει στο τόξο $ΑΔ$. Η γωνία $Α\hat{Μ}Β$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_2 και βαίνει στο τόξο $ΑΒ$. Επειδή όμως $ΑΔ = ΑΒ$ (διότι το τρίγωνο $ΑΔΒ$ είναι ισοσκελές) και οι κύκλοι c_1, c_2 είναι ίσοι, συμπεραίνουμε ότι: $Α\hat{Μ}Δ = Α\hat{Μ}Β$. Άρα τα σημεία $Δ, Β, Μ$ είναι συνευθειακά.

Από την ισότητα των τριγώνων $ΑΔΓ$ και $ΑΒΕ$, συμπεραίνουμε ότι $\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1$.

Άρα το τετράπλευρο $ΑΚΒΔ$ είναι εγγράψιμο, επομένως: (1)

$$\hat{Α}_1 = \hat{Δ}_2.$$

Η γωνία $\hat{Δ}_2$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_1 και βαίνει στο τόξο $ΜΓ$. Η γωνία $\hat{Α}_2$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_1 και βαίνει στο τόξο $ΜΓ$. Άρα έχουμε:

$$\hat{Α}_2 = \hat{Δ}_2. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε: $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$.

Πρόβλημα 4
Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες είναι ακέραιος ο αριθμός
$$\mathrm{A} = \sqrt{13-2x} + \sqrt{13+2x}\,.$$

Λύση
Ο αριθμός Α ορίζεται όταν $13-2x \geq 0$ και $13+2x \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{13}{2} \leq x \leq \frac{13}{2}$.
Αν υποθέσουμε ότι $\mathrm{A} = \sqrt{13-2x} + \sqrt{13+2x} = n \in \mathbb{Z}$, τότε θα είναι $\mathrm{A} = n > 0$ και ισχύει:
$$\mathrm{A} = \sqrt{13-2x} + \sqrt{13+2x} = n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \mathrm{A}^2 == 26 + 2\sqrt{13^2 - 4x^2} = n^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{13^2 - 4x^2} = \frac{n^2}{2} - 13 \qquad (1)$$
Επειδή $0 \leq \sqrt{13^2 - 4x^2} \leq 13$, λόγω της (1) και της υπόθεσης ότι $n \in \mathbb{Z}$, έπεται ότι:
$$0 \leq \frac{n^2}{2} - 13 \leq 13 \Leftrightarrow 13 \leq \frac{n^2}{2} \leq 13 + 13 \Leftrightarrow 26 \leq n^2 \leq 52 \Leftrightarrow n \in \{6, 7\}.$$

- Για $n = 6$ η εξίσωση (1) γίνεται
$$\sqrt{13^2 - 4x^2} = 5 \Leftrightarrow 169 - 4x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 6.$$
- Για $n = 7$ η εξίσωση (1) γίνεται
$$\sqrt{13^2 - 4x^2} = \frac{23}{2} \Leftrightarrow 169 - 4x^2 = \frac{23^2}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{147}{16} \Leftrightarrow x = \pm\frac{7\sqrt{3}}{4}.$$

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1
Στο σύνολο των ακεραίων, να λυθεί το σύστημα:
$$xy = z^2 + 2, \quad y^3 = x^3 + 2x^2 + 1.$$

Λύση
Επειδή είναι $2x^2 + 1 > 0$, για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{Z}$, έπεται ότι
$$y^3 > x^3 \Rightarrow (y-x)\left(y^2 + xy + x^2\right) > 0 \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow y > x,$$
αφού $y^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} > 0$ (η περίπτωση $x = y = 0$ δεν επαληθεύει τις εξισώσεις του συστήματος).
Επειδή οι x, y είναι ακέραιοι, από τη σχέση $y > x$, έπεται ότι
$$y \geq x + 1 \Leftrightarrow y^3 \geq (x+1)^3 \Leftrightarrow y^3 \geq x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \qquad (1)$$
Από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος και την (1) λαμβάνουμε
$$x^3 + 2x^2 + 1 \geq x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x \leq 0 \Leftrightarrow x \in \{-3, -2, -1, 0\}. \qquad (2)$$

- Για $x = -3$, λαμβάνουμε $y^3 = -8 \Leftrightarrow y = -2$.
- Για $x = -2$, λαμβάνουμε $y^3 = 1 \Leftrightarrow y = 1$ (απορρίπτεται, αφού $xy = z^2 + 2 > 0$).
- Για $x = -1$, λαμβάνουμε $y^3 = 2$ (αδύνατη στο $\mathbb{Z}$).
- Η τιμή $x = 0$, απορρίπτεται, αφού πρέπει $xy = z^2 + 2 > 0$.

Άρα η μοναδική αποδεκτή περίπτωση είναι $x = -3,\ y = -2$, οπότε προκύπτει $z^2 = 4 \Leftrightarrow z = \pm 2$, οπότε έχουμε τις λύσεις
$$(x, y, z) = (-3, -2, 2) \text{ ή } (x, y, z) = (-3, -2, -2).$$

Πρόβλημα 2

Να βρείτε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f\left(x^2\right)-y^2=f\left(x+y\right)\cdot f\left(x-y\right),\ \text{για κάθε } x,y\in\mathbb{R}.$$

.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τη δεδομένη σχέση για ειδικές τιμές των μεταβλητών.

Για $x=y=0$ λαμβάνουμε $f\left(0\right)=f\left(0\right)^2 \Leftrightarrow f\left(0\right)=0$ ή $f\left(0\right)=1$.

Για $x=y=2$ λαμβάνουμε $f\left(4\right)-4=f\left(4\right)f\left(0\right)$, οπότε, αν $f\left(0\right)=1$, τότε $-4=0$ (άτοπο), ενώ, αν $f\left(0\right)=0$, τότε $f\left(4\right)=4$. Άρα έχουμε $f\left(0\right)=0$ και $f\left(4\right)=4$.

Για $x=y=t\in\mathbb{R}$ έχουμε $f\left(t^2\right)-t^2=f\left(2t\right)f\left(0\right)=0\Rightarrow f\left(t^2\right)=t^2$, $t\in\mathbb{R}$. Επειδή για κάθε $x\geq 0$, υπάρχει $t\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $t^2=x$, έπεται ότι $f\left(x\right)=x$, για κάθε $x\geq 0$.

Για $x=0$, $y>0$, λαμβάνουμε $f\left(0\right)-y^2=f\left(y\right)f\left(-y\right)\Rightarrow yf\left(-y\right)=-y^2\Rightarrow f\left(-y\right)=-y$, για κάθε $y>0$, δηλαδή $f\left(x\right)=x$, για κάθε $x<0$.

Από την παραπάνω διαδικασία προκύπτει ότι $f\left(x\right)=x,\ x\in\mathbb{R},$ η οποία εύκολα επαληθεύουμε ότι ικανοποιεί τη δεδομένη σχέση.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ο αριθμός

$$\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x},$$

όπου $a>1$ πραγματική παράμετρος, παίρνει ακέραιες τιμές.

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι είναι δυνατόν να ορίσουμε την τιμή της παραμέτρου a έτσι ώστε ο αριθμός $\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}$ να είναι ακέραιος περισσότερες ή ίσες από K φορές, όπου K τυχόν θετικός ακέραιος.

Λύση

Η συνάρτηση $f\left(a,x\right)=\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}, a>1,$ ορίζεται για $x\in\left[-a,a\right]$ και παίρνει τιμές θετικές. Αν υποθέσουμε ότι $f\left(a,x\right)=\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}=n\in\mathbb{Z},$ τότε θα έχουμε

$$f\left(a,x\right)=\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}=n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2a+2\sqrt{a^2-x^2}=n^2\Leftrightarrow\sqrt{a^2-x^2}=\frac{n^2}{2}-a \qquad (1)$$

Επειδή $0\leq\sqrt{a^2-x^2}\leq a$, έχουμε $0\leq\frac{n^2}{2}-a\leq a\Leftrightarrow 2a\leq n^2\leq 4a\Leftrightarrow\sqrt{2a}\leq n\leq 2\sqrt{a}$.

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι για κάθε ακέραιο n του διαστήματος $\left[\sqrt{2a},2\sqrt{a}\right]$ η εξίσωση (1) έχει λύση ως προς x. Πράγματι, η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$a^2-x^2=\left(\frac{n^2}{2}-a\right)^2,\ x\in\left[-a,a\right]\Leftrightarrow x^2=a^2-\left(\frac{n^2}{2}-a\right)^2,\ x\in\left[-a,a\right]$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{n^2}{2}\left(2a-\frac{n^2}{2}\right),\ x\in\left[-a,a\right]\Leftrightarrow x^2=\frac{n^2\left(4a-n^2\right)}{4},\ x\in\left[-a,a\right]$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{n\sqrt{4a-n^2}}{2}.$$

Οι τιμές του x που βρήκαμε ανήκουν στο διάστημα $\left[-a,\, a\right]$, οπότε είναι αποδεκτές, λόγω της σχέσης $x^2 = a^2 - \left(\dfrac{n^2}{2} - a\right)^2 \le a^2$.

Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο αριθμός $\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε ακέραια τιμή n του διαστήματος $\left[\sqrt{2a}, 2\sqrt{a}\right]$, για $x = \pm\dfrac{n\sqrt{4a-n^2}}{2}$.

Επομένως, μπορούμε να βρούμε όσες θέλουμε δυνατές ακέραιες τιμές για το $n=\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}$, εφόσον επιτύχουμε να κάνουμε το μήκος του διαστήματος $\left[\sqrt{2a}, 2\sqrt{a}\right]$ οσοδήποτε μεγάλο θέλουμε, δίνοντας κατάλληλη τιμή στην παράμετρο a. Για παράδειγμα, για να περιέχει το διάστημα $\left[\sqrt{2a}, 2\sqrt{a}\right]$ Κ ή περισσότερους ακέραιους, αρκεί να ισχύει ότι

$$\left|2\sqrt{a}-\sqrt{2a}\right| \ge K \Leftrightarrow \left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{a} \ge K \Leftrightarrow a \ge \left(\frac{K}{2-\sqrt{2}}\right)^2.$$

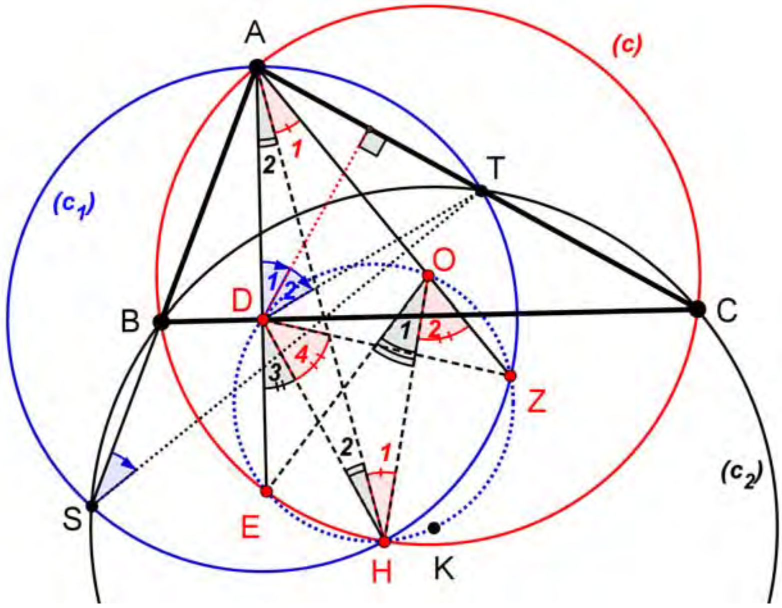
Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ABC ($AB<AC<BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Η προέκταση του ύψους του AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο E. Ο κύκλος $c_1(D,DA)$ τέμνει την πλευρά AC στο σημείο T, την ευθεία AB στο σημείο S, τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο H και την ευθεία OA στο σημείο Z. Να αποδείξετε ότι:

(α) Το τετράπλευρο $SBTC$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, έστω c_2.

(β) Τα σημεία O, D, E, Z, H και το κέντρο του κύκλου c_2, βρίσκονται επάνω στο ίδιο κύκλο.

Λύση



Σχήμα 5

(α) Η γωνία $A\hat{S}T = \hat{S}$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_1 και βαίνει στο τόξο AT. Η γωνία $A\hat{D}T$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της γωνίας $\hat{S}$, οπότε $A\hat{D}T = 2\hat{S}$.

Η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{D}T$ είναι κάθετος στην πλευρά AC, οπότε

$$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = \hat{C} = 90^o - D\hat{A}C\,.$$

Άρα $\hat{S} = \hat{C}$ και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $SBTC$ είναι εγγράψιμο.

(β) Η γωνία $E\hat{D}H = \hat{D}_3$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου DAH ($DA = DH$ και $\hat{A}_2 = \hat{H}_2$). Άρα έχουμε

$$\hat{D}_3 = 2\hat{A}_2\,. \qquad (1)$$

Η γωνία $E\hat{A}H = \hat{A}_2$ είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο c και η γωνία $E\hat{O}H = \hat{O}_1$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη, οπότε:

$$\hat{O}_1 = 2\hat{A}_2\,. \qquad (2)$$

Από τις ισότητες (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $\hat{O}_1 = \hat{D}_3$, οπότε τα σημεία O,D,E,H είναι ομοκυκλικά (ανήκουν στον ίδιο κύκλο).

Η γωνία $H\hat{O}Z = \hat{O}_2$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου OAH ($OA = OH$ και $\hat{A}_2 = \hat{H}_2$). Άρα έχουμε:

$$\hat{O}_2 = 2\hat{A}_1\,. \qquad (3)$$

Η γωνία $Z\hat{A}H = \hat{A}_1$ είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο c_1 και η γωνία $H\hat{D}Z = \hat{D}_4$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη, οπότε:

$$\hat{D}_4 = 2\hat{A}_1\,. \qquad (4)$$

Από τις ισότητες (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι $\hat{O}_2 = \hat{D}_4$, οπότε τα σημεία O,D,Z,H είναι ομοκυκλικά (ανήκουν στον ίδιο κύκλο).

Η μεσοκάθετη του τμήματος ST περνάει από το κέντρο D του κύκλου c_1. Η μεσοκάθετη του τμήματος BC περνάει από το κέντρο O του κύκλου c. Το σημείο τομής K των δύο μεσοκαθέτων, είναι το κέντρο του κύκλου c_2.

Θα αποδείξουμε ότι το σημείο K ανήκει στο κύκλο που ορίζουν τα σημεία O,D,Z,E,H, δηλαδή ότι: $D\hat{K}O = D\hat{H}O$.

Πράγματι, η γωνία $D\hat{K}O$ ισούται με τη γωνία που σχηματίζουν οι ST και BC (διότι έχουν τις πλευρές κάθετες), δηλαδή είναι:

$$D\hat{K}O = 180^o - \hat{S} - \hat{B}_{\varepsilon\xi} = \hat{B} - \hat{C}\,,$$

ενώ ακόμη ισχύει ότι:

$$D\hat{H}O = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = E\hat{A}O = 90^o - \frac{A\hat{O}E}{2} = 90^o - A\hat{C}E = 90^o - (\hat{C} + 90^o - \hat{B}) = \hat{B} - \hat{C}.$$

.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
Να βρείτε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{3}\right)^2:\left(3^2+2000^0-\frac{4}{9}:\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{3^4}\quad \text{και}\quad \mathrm{B}=\left(4-\frac{16}{81}\right):\left(\frac{60}{3^3}-\frac{19}{3^2}\right)+\frac{7}{9}.$$

Πρόβλημα 2
Αγρός έχει σχήμα τραπεζίου ΑΒΓΔ με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$, ύψος $\mathrm{AB}=800$ μέτρα, μικρή βάση ΑΔ, μεγάλη βάση ΒΓ και διαφορά βάσεων $\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{A\Delta}=800$ μέτρα. Δίνεται ακόμη ότι:

- Η περίμετρος του αγρού είναι μικρότερη από $2810+800\sqrt{2}$ μέτρα.
- Το εμβαδό του αγρού είναι μεγαλύτερο από 796 στρέμματα.
- Η μικρή βάση ΑΔ έχει μήκος x μέτρα, όπου x ακέραιος πολλαπλάσιος του 10.

Να βρείτε τα μήκη των βάσεων και το εμβαδόν του αγρού.
(*Δίνεται ότι 1 στρέμμα είναι ίσο με 1000 τετραγωνικά μέτρα*)

Πρόβλημα 3
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}}=30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma=90^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ τέμνει την ΑΓ στο μέσο της Κ, την ΑΒ στο σημείο Λ και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Μ. Έστω Ν το συμμετρικό του σημείου Λ ως προς την ευθεία ΑΓ. Να βρείτε:
(α) Τα μέτρα των γωνιών $\mathrm{K}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B}$ και $\mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Lambda$.
(β) Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΛΝ, συναρτήσει του μήκους $\alpha=\mathrm{A\Delta}$.

Πρόβλημα 4
Σε ένα σχολείο το 55% των μαθητών είναι αγόρια. Το πλήθος των αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά. Τα αγόρια που μιλούν γαλλικά, είναι τα $\frac{7}{11}$ των μαθητών που μιλούν γαλλικά. Τα κορίτσια που δεν μιλούν γαλλικά είναι 60. Βρείτε πόσους μαθητές έχει το σχολείο.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{x}{y}\right)^3,\ \ \mathrm{B}=\frac{243x^2+81y^2}{y}\ \text{ και }\ \Gamma=x^{-1}+y^{-1},\ \text{ όταν } x=3^{-3},\ y=3^{-4}.$$

Πρόβλημα 2
Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=16x^6-16x^4-x^2+1$ και $Q(x)=4x^4-5x^2+1$.

(α) Να γράψετε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ ως γινόμενα πολυωνύμων πρώτου ή το πολύ δευτέρου βαθμού.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{5}{2}\left(x^2+1\right)$.

Πρόβλημα 3
Δύο θετικοί ακέραιοι $x,\ y$ με $x>y$, έχουν άθροισμα 2014. Η διαίρεση του μεγαλύτερου με τον μικρότερο δίνει πηλίκο ω και υπόλοιπο 97. Να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές των x, y και ω.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}}=30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma=90^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ τέμνει την ΑΓ στο μέσο της Κ, την ΑΒ στο σημείο Λ και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Μ. Αν είναι $\mathrm{A\Delta}=\alpha$, να υπολογίσετε συναρτήσει του α:

(α) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

(β) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΜ και το μήκος της πλευράς ΒΓ .

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε τους αριθμούς $x=\dfrac{2}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt[4]{3}\right)\left(1+\sqrt[8]{3}\right)}$ και $y=\sqrt[4]{2}$.

Να συγκρίνετε τους αριθμούς $x+1$ και y.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$1-\frac{|x-1|}{3}\geq 0 \qquad \text{και} \qquad \left(|x|-2\right)\cdot\left(|x|-5\right)\leq 0.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}>\mathrm{B\Gamma}$. Ο κύκλος $c_1(\Gamma,\mathrm{B\Gamma})$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $\mathrm{B\Gamma}$) τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ. Ο κύκλος $c_2(\mathrm{A},\mathrm{A\Delta})$ (με κέντρο A και ακτίνα $\mathrm{A\Delta}$) τέμνει την πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο E και τον κύκλο $c_1(\Gamma,\mathrm{B\Gamma})$ στο σημείο Z. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_3 του τριγώνου $\mathrm{A\Delta Z}$ τέμνει την ευθεία BE στο σημείο M.

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Ε, Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AM είναι μεσοκάθετη της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε θετικούς πραγματικούς αριθμούς a,b που είναι τέτοιοι ώστε

$$a^2+4b^2=2a+12b-5.$$

Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $a+b$ και οι τιμές των a,b για τις οποίες αυτή λαμβάνεται.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$74^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε στο επίπεδο τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$ και Γ, έτσι ώστε τα σημεία Ο, Α και Β να μην είναι συνευθειακά και έστω $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\alpha}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\beta}, \overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = \vec{\gamma}$. Αν ισχύει η ισότητα

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\gamma}^2 = \overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}} \cdot \overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}},$$

να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ είναι κάθετο στη διαγώνιο ΟΔ του παραλληλογράμμου $\mathrm{OA\Delta B}$.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες η εξίσωση

$$x^3 - 2x^2 = 4ax^2 - 11ax + 6a$$

έχει όλες τις ρίζες της στους ακέραιους.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες πραγματικών αριθμών (x, y, z) που είναι λύσεις του συστήματος

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6a^2,$$
$$x + y = 3a,$$
$$y + z \geq 3a,$$

όπου a θετικός πραγματικός αριθμός.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και έστω I το έκκεντρο του τριγώνου. Θεωρούμε το μέσον N του τόξου BC που δεν περιέχει το A και το μέσον M του τόξου BC που περιέχει το A. Η ευθεία MI τέμνει τον κύκλο (O, R) στο σημείο D και τον κύκλο $(\mathrm{N}, \mathrm{NI})$ για δεύτερη φορά στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{E\hat{B}D} = \mathrm{I\hat{B}C}$.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$74^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014
Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες η εξίσωση

$$x^3 - 4x^2 = 5ax^2 - 26ax + 24a$$

έχει όλες τις ρίζες της στους ακέραιους.

Πρόβλημα 2

Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Oxy του επιπέδου δίνεται το χωρίο

$$D = \left\{ (x, y) : (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 8 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 .$$

(α) Να προσδιορίσετε τη μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $x + y$, όταν $(x, y) \in D$, και τις τιμές των x, y για τις οποίες λαμβάνεται.

(β) Βρείτε την ελάχιστη τιμή του k, για την οποία η ευθεία ε με εξίσωση $x + y = k$ είναι εφαπτομένη του κύκλου $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$, προσδιορίζοντας και το αντίστοιχο σημείο επαφής.

Πρόβλημα 3

Έστω $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, όπου $\mathbb{N}^*$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών χωρίς το 0, μία συνάρτηση που είναι 1-1 και έστω k ένας θετικός ακέραιος. Αν ο αριθμός

$$3\left[\left(f(1) - 1 \right)^2 + \left(f(2) - 1 \right)^2 + \ldots + \left(f(k+1) - 1 \right)^2 \right]$$

είναι κύβος φυσικού αριθμού, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $a \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$ τέτοιο, ώστε

$$f(a) \geq k + 2 .$$

Πρόβλημα 4

Δίνονται κύκλος $c(\mathrm{O}, R)$, δύο άνισες (μη τεμνόμενες εντός του κύκλου) και μη παράλληλες μεταξύ τους χορδές AB, $\Gamma\Delta$ και τα μέσα τους K, M, αντίστοιχα. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_1 του τριγώνου OKM τέμνει το κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ στα σημεία E, Z (το σημείο E ανήκει στο μικρό τόξο AB). Η EZ τέμνει τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία Λ, N, αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

(i) Τα σημεία $\mathrm{K}, \Lambda, \mathrm{M}$ και N ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

(ii) Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\mathrm{K}\Lambda\mathrm{E}$ εφάπτεται στον κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$74^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Να βρείτε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{3}\right)^2:\left(3^2+2000^0-\frac{4}{9}:\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{3^4} \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\left(4-\frac{16}{81}\right):\left(\frac{60}{3^3}-\frac{19}{3^2}\right)+\frac{7}{9}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{3}\right)^2:\left(3^2+2000^0-\frac{4}{9}:\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{3^4}=\frac{4}{9}:\left(9+1-\frac{4}{9}\cdot 3+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{81}$$

$$=\frac{4}{9}:\left(10-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{81}=\frac{4}{9}:9+\frac{77}{81}=\frac{4}{81}+\frac{77}{81}=1.$$

$$\mathrm{B}=\left(4-\frac{16}{81}\right):\left(\frac{60}{3^3}-\frac{19}{3^2}\right)+\frac{7}{9}=\frac{308}{81}:\frac{(60-3\cdot 19)}{27}+\frac{7}{9}=\frac{308}{81}:\frac{3}{27}+\frac{7}{9}=$$

$$=\frac{308}{81}\cdot 9+\frac{7}{9}=\frac{308+7}{9}=\frac{315}{9}=35.$$

Πρόβλημα 2

Αγρός έχει σχήμα τραπεζίου ΑΒΓΔ με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$, ύψος $\mathrm{AB}=800$ μέτρα, μικρή βάση $\mathrm{A\Delta}$, μεγάλη βάση $\mathrm{B\Gamma}$ και διαφορά βάσεων $\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{A\Delta}=800$ μέτρα. Δίνεται ακόμη ότι:

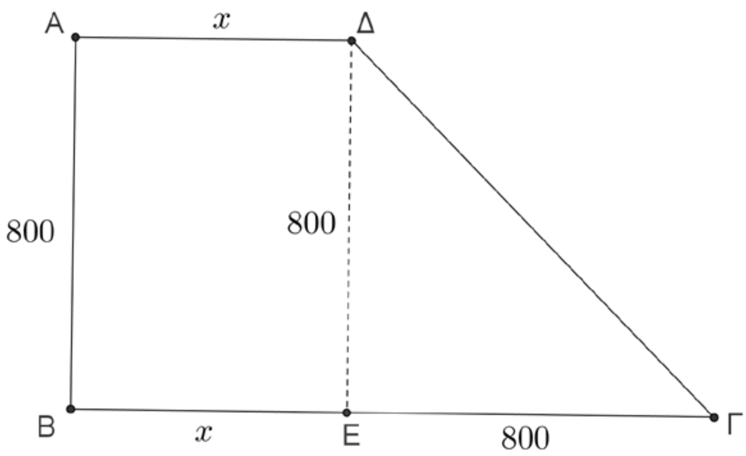
- Η περίμετρος του αγρού είναι μικρότερη από $2810+800\sqrt{2}$ μέτρα.
- Το εμβαδό του αγρού είναι μεγαλύτερο από 796 στρέμματα.
- Η μικρή βάση ΑΔ έχει μήκος x μέτρα, όπου x ακέραιος πολλαπλάσιος του 10.

Να βρείτε τα μήκη των βάσεων και το εμβαδόν του αγρού.

(*Δίνεται ότι 1 στρέμμα είναι ίσο με 1000 τετραγωνικά μέτρα*)

Λύση

Από τις υποθέσεις του προβλήματος είναι $\mathrm{A\Delta}=x$ μέτρα, $\mathrm{B\Gamma}=800+x$ μέτρα, $\mathrm{AB}=800$ μέτρα. Αν φέρουμε τη $\Delta\mathrm{E}\perp\mathrm{B\Gamma}$, τότε είναι ΑΒΕΔ ορθογώνιο με $\mathrm{BE}=x$, $\Delta\mathrm{E}=800$, οπότε θα είναι $\mathrm{E\Gamma}=\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{BE}=\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{A\Delta}=800$. Έτσι το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε ότι $\Gamma\Delta=800\sqrt{2}$ μέτρα.



Σχήμα 1

Επομένως, η περίμετρος και το εμβαδό του αγρού θα είναι:

$$\Pi(x) = x + 800 + x + 800 + 800\sqrt{2} = 2x + 1600 + 800\sqrt{2}$$

$$\mathrm{E}(x) = \frac{2x+800}{2} \cdot 800 = (x+400) \cdot 800 = 800x + 320000 .$$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος προκύπτουν οι ανισώσεις:

$$2x + 1600 + 800\sqrt{2} < 2810 + 800\sqrt{2} \Leftrightarrow 2x < 1210 \Leftrightarrow x < 605$$

$$800x + 320000 > 796000 \Leftrightarrow 800x > 476000 \Leftrightarrow x > 595$$

Επομένως έχουμε $595 < x < 605$ και αφού ο αριθμός x είναι ακέραιος πολλαπλάσιος του 10, έπεται ότι $x = 600$ μέτρα.

Άρα τα μήκη των βάσεων είναι $\mathrm{A\Delta} = 600$ μέτρα, ΒΓ=1400 μέτρα και το εμβαδό του αγρού είναι $800 \cdot 600 + 320000 = 480000 + 320000 = 800000$ τετραγωνικά μέτρα, δηλαδή 800 στρέμματα.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}} = 30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ τέμνει την ΑΓ στο μέσο της Κ, την ΑΒ στο σημείο Λ και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Μ. Έστω Ν το συμμετρικό του σημείου Λ ως προς την ευθεία ΑΓ. Να βρείτε:

(α) Τα μέτρα των γωνιών $\mathrm{K}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B}$ και $\mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Lambda$.

(β) Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΛΝ συναρτήσει του μήκους $\alpha = \mathrm{A\Delta}$.

Λύση

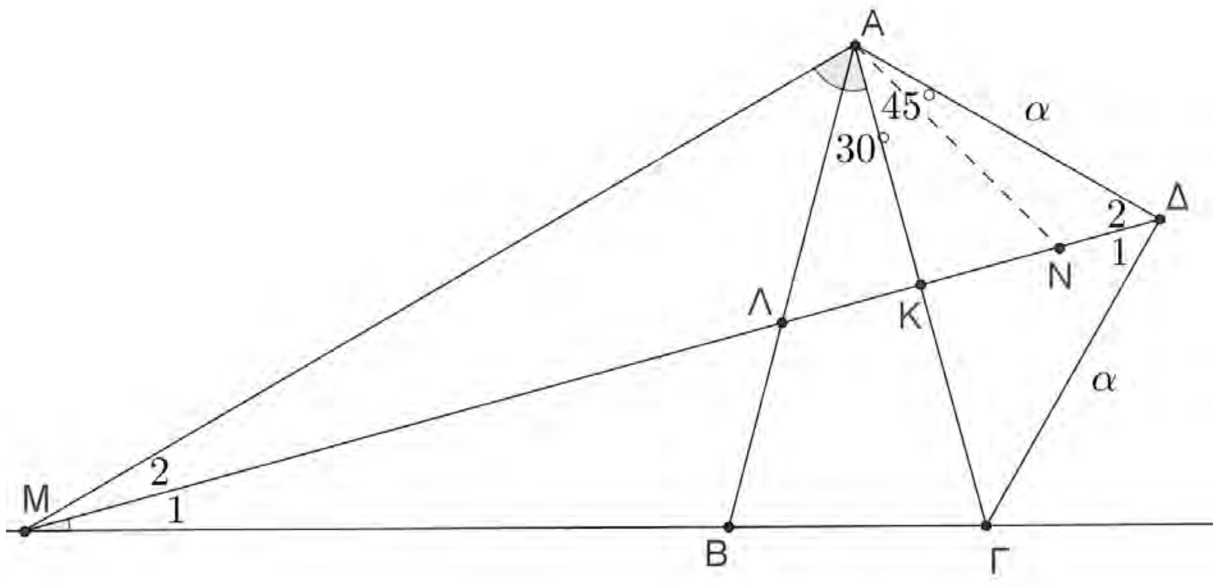
(α) Το τρίγωνο ΜΚΓ είναι ορθογώνιο στο Κ και έχει τη γωνία

$$\hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \hat{\mathrm{A}}}{2} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

Επομένως θα είναι και $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 75^\circ$, οπότε έχουμε $\mathrm{K}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B} = \mathrm{M}_1 = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

Επειδή κάθε σημείο της μεσοκάθετης ΜΔ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ ισαπέχει από τα άκρα του Α και Γ το τρίγωνο ΜΑΓ είναι ισοσκελές και έχει

$$\mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{M}\hat{\Gamma}\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Lambda + \hat{\mathrm{A}} = \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Lambda = \hat{\Gamma} - \hat{\mathrm{A}} = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ .$$



Σχήμα 2

(β) Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε

$$\mathrm{А\Gamma}^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow \mathrm{А\Gamma} = \alpha\sqrt{2},$$

οπότε θα είναι:

$$\mathrm{AK} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

Επειδή τα σημεία Λ και Ν είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ΑΓ, έπεται ότι $\mathrm{\Lambda K} = \mathrm{KN}$. Όμως και τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΛ και ΑΝ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ΑΓ, οπότε $\mathrm{A\Lambda} = \mathrm{AN}$ και ομοίως $\mathrm{\Lambda\hat{A}K} = \mathrm{N\hat{A}K} = 30^\circ$. Άρα είναι $\mathrm{\Lambda\hat{A}N} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΛΑΝ είναι ισόπλευρο και έχουμε $\mathrm{\Lambda N} = \mathrm{A\Lambda}$. Αν είναι $\mathrm{A\Lambda} = \mathrm{\Lambda N} = x$, τότε θα είναι $\mathrm{\Lambda K} = \frac{\mathrm{\Lambda N}}{2} = \frac{x}{2}$, οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΛΚ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{A\Lambda}^2 - \mathrm{\Lambda K}^2 = \mathrm{AK}^2 \Leftrightarrow = x^2 - \frac{x^2}{4} = \left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{4} = \frac{2\alpha^2}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{2\alpha^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha\sqrt{6}}{3}.$$

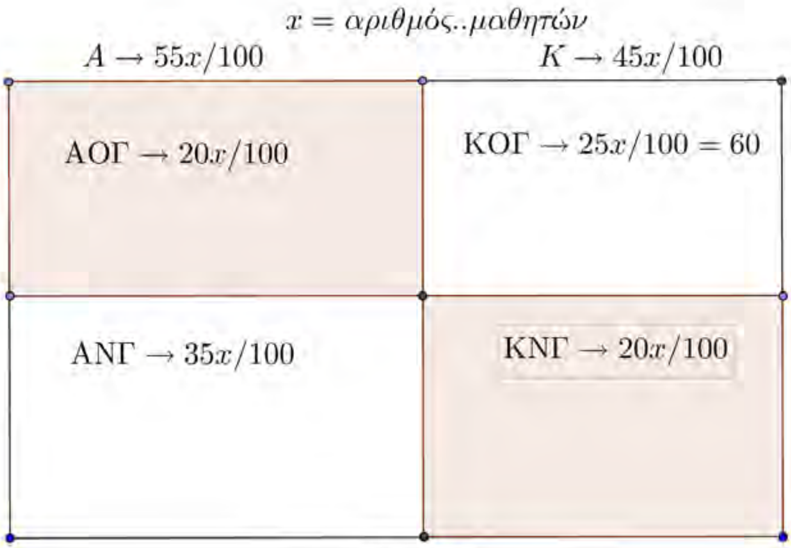
Πρόβλημα 4

Σε ένα σχολείο το 55% των μαθητών είναι αγόρια. Το πλήθος των αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά. Τα αγόρια που μιλούν γαλλικά, είναι τα $\frac{7}{11}$ των μαθητών που μιλούν γαλλικά. Τα κορίτσια που δεν μιλούν γαλλικά είναι 60. Βρείτε πόσους μαθητές έχει το σχολείο.

Λύση

Αφού το πλήθος των αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά, έπεται ότι το πλήθος των μαθητών που μιλούν γαλλικά ισούται με το 55% του συνόλου των μαθητών. Επομένως το ποσοστό των αγοριών που μιλούν γαλλικά επί του συνόλου των μαθητών του σχολείου είναι $\frac{7}{11}\cdot\frac{55}{100} = \frac{35}{100}$, δηλαδή το 35% επί του συνόλου των μαθητών. Επομένως $(55-35) = 20\%$ είναι το ποσοστό επί του συνόλου των μαθητών των αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά, αλλά και των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά. Επομένως το ποσοστό των κοριτσιών που δεν μιλούν γαλλικά είναι $(100-55-20) = 25\%$, οπότε το 25% των κοριτσιών που δεν μιλούν γαλλικά αντιστοιχεί σε 60 μαθητές. Άρα το πλήθος των μαθητών του σχολείου είναι $60\cdot\dfrac{100}{25}=240$.

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να περιγραφεί με το σχήμα που ακολουθεί, ως εξής:



Σχήμα 3

Συμβολικά έχουμε:

Α = σύνολο αγοριών σχολείου με $|\mathrm{A}|=\dfrac{55x}{100}$.

Κ = σύνολο κοριτσιών σχολείου με $|\mathrm{K}|=\dfrac{45x}{100}$.

ΑΟΓ = σύνολο αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά.

ΑΝΓ = σύνολο αγοριών που μιλούν γαλλικά.

ΚΟΓ = σύνολο αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά.

ΚΝΓ = σύνολο αγοριών που μιλούν γαλλικά.

Από την υπόθεση έχουμε ότι το **πλήθος των στοιχείων των συνόλων** ΑΟΓ **και** ΚΝΓ **είναι το ίδιο**, δηλαδή:

$$|\mathrm{ΑΟΓ}|=|\mathrm{ΚΝΓ}|,$$

οπότε έχουμε τα λογικά βήματα:

$$(\text{αριθμός μαθητών που μιλούν γαλλικά})\,|\mathrm{ΚΝΓ}|+|\mathrm{ΑΝΓ}|=|\mathrm{ΑΟΓ}|+|\mathrm{ΑΝΓ}|=\frac{55x}{100}(\text{αριθμός αγοριών}),$$

$$|\mathrm{ΑΝΓ}|=\frac{7}{11}\cdot\frac{55x}{100}=\frac{35x}{100},$$

$$|\mathrm{ΑΟΓ}|=(55-35)\frac{x}{100}=\frac{20x}{100}=|\mathrm{ΚΝΓ}|,$$

$$|\mathrm{ΚΟΓ}|=(45-20)\frac{x}{100}=\frac{25x}{100}=60\Leftrightarrow x=240$$

2^{ος} τρόπος

Έστω x το πλήθος των αγοριών και y το πλήθος των κοριτσιών.

Έστω ακόμη α το πλήθος των αγοριών που γνωρίζουν γαλλικά και κ το πλήθος των κοριτσιών που γνωρίζουν γαλλικά.

Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις.

Εφόσον το 55% των μαθητών είναι αγόρια, θα ισχύει:

$$x=\frac{55}{100}(x+y)\Leftrightarrow 100x=55x+55y\Leftrightarrow 9x=11y\Leftrightarrow y=\frac{9}{11}x \qquad (1).$$

Εφόσον το πλήθος των αγοριών που δεν μιλούν Γαλλικά είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν Γαλλικά, θα ισχύει:

$$x-a=\kappa\Leftrightarrow x=\kappa+a \qquad (2).$$

Τα αγόρια που μιλούν γαλλικά είναι τα $\frac{7}{11}$ των μαθητών που μιλούν γαλλικά.

Άρα:

$$\frac{7}{11}(\kappa+a)=a\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\frac{7}{11}x=a \qquad (3).$$

Επειδή (τέλος) το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά είναι *60*, θα ισχύει η ισότητα:

$$y=\kappa+60.$$

Προσθέτοντας και στα δύο μέλη (της τελευταίας ισότητας) το a, έχουμε:

$$y=\kappa+60\Leftrightarrow y+a=\kappa+a+6\overset{(2)}{\Leftrightarrow} y+\alpha=x+60\overset{(1),(3)}{\Leftrightarrow}\frac{9}{11}x+\frac{7}{11}x=x+60\Leftrightarrow\frac{5}{11}x=60\Leftrightarrow x=132.$$

Άρα το πλήθος των αγοριών είναι 132, το πλήθος των κοριτσιών $y=\frac{9}{11}x=\frac{9}{11}\cdot 132=108$, οπότε το συνολικό πλήθος των μαθητών είναι 240.

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{x}{y}\right)^3,\quad \mathrm{B}=\frac{243x^2+81y^2}{y}\quad \text{και}\quad \Gamma=x^{-1}+y^{-1},\ \text{όταν}\ x=3^{-3}, y=3^{-4}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{A}=\left(\frac{\left(3^{-3}\right)^3}{\left(3^{-4}\right)^3}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{3^{-3}}{3^{-4}}\right)^3=\left(\frac{3^{-9}}{3^{-12}}+\frac{1}{3}\right):\left(3^{-3+4}\right)^3=\left(3^{-9+12}+\frac{1}{3}\right):\left(3^1\right)^3$$

$$=\left(3^3+\frac{1}{3}\right):3^3=1+\frac{1}{3^4}=\frac{3^4+1}{3^4}=\frac{82}{81}.$$

$$\mathrm{B}=\frac{243\cdot\left(3^{-3}\right)^2 11+81\cdot\left(3^{-4}\right)^2}{3^{-4}}=\frac{3^5\cdot 3^{-6}+3^4\cdot 3^{-8}}{3^{-4}}=\frac{3^{-1}+3^{-4}}{3^{-4}}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^4}}{\frac{1}{3^4}}=\frac{\frac{3^3+1}{3^4}}{\frac{1}{3^4}}=3^3+1=28.$$

$$\Gamma=3^3+3^4=27+81=108.$$

Πρόβλημα 2

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=16x^6-16x^4-x^2+1$ και $Q(x)=4x^4-5x^2+1$.

(α) Να γράψετε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ ως γινόμενα πολυωνύμων πρώτου ή το πολύ δευτέρου βαθμού.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{5}{2}\left(x^2+1\right)$.

Λύση

(α) Έχουμε

$$P(x)=16x^6-16x^4-x^2+1=16x^4\left(x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)=\left(16x^4-1\right)\left(x^2-1\right)=$$
$$=\left(4x^2+1\right)\left(4x^2-1\right)\left(x^2-1\right)=\left(4x^2+1\right)(2x-1)(2x+1)(x-1)(x+1).$$
$$Q(x)=4x^4-5x^2+1=4x^4-4x^2-x^2+1=4x^2\left(x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)$$
$$=\left(4x^2-1\right)\left(x^2-1\right)=(2x-1)(2x+1)(x-1)(x+1).$$

(β) Έχουμε

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{5}{2}\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow 4x^2+1=\frac{5}{2}\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1,$$

με τον περιορισμό $Q(x)\neq 0\Leftrightarrow x\neq\pm\dfrac{1}{2}$ και $x\neq\pm 1$.

Επομένως η δεδομένη εξίσωση δεν έχει λύση.

Πρόβλημα 3

Δύο θετικοί ακέραιοι x, y με $x>y$, έχουν άθροισμα 2014. Η διαίρεση του μεγαλύτερου με τον μικρότερο δίνει πηλίκο ω και υπόλοιπο 97. Να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές των x, y και ω.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση είναι $x=2014-y$ και

$$2014-y=\omega y+97,\ \text{με } y>97 \text{ και } \omega\geq 1$$
$$\Leftrightarrow (1+\omega)y=1917,\ \text{ με } y>97 \text{ και } 1+\omega\geq 2$$
$$\Leftrightarrow (1+\omega)y=3^3\cdot 71,\ \text{ με } y>97 \text{ και } 1+\omega\geq 2.$$

Επομένως ο y είναι διαιρέτης του $1917=3^3\cdot 71$ μεγαλύτερος από το 97, οπότε οι δυνατές τιμές του είναι

$$y=3\cdot 71=213 \text{ ή } \ y=3^2\cdot 71=639 \text{ ή } \ y=3^3\cdot 71=1917$$

- Για $y=213$, είναι $x=1801$ και $\omega=8$.
- Για $y=639$, είναι $x=1375$ και $\omega=2$.
- Για $y=1917$, είναι $x=97<y=1917$, άτοπο.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}}=30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma=90^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ τέμνει την ΑΓ στο μέσο της Κ, την ΑΒ στο σημείο Λ και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Μ. Αν είναι $\mathrm{A\Delta}=\alpha$, να υπολογίσετε συναρτήσει του α:

(α) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

(β) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΜ και το μήκος της πλευράς ΒΓ.

Λύση

(α) Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε

$$\mathrm{A\Gamma}^2=\alpha^2+\alpha^2=2\alpha^2\Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma}=\alpha\sqrt{2},$$

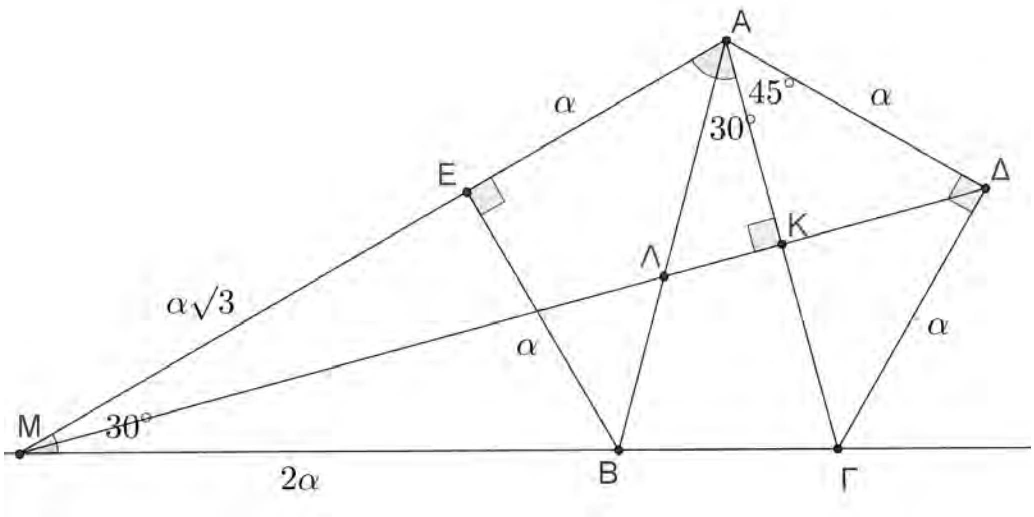
οπότε θα είναι: $\mathrm{AK} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{2} = \dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2}$.

Επιπλέον, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΛ με $\mathrm{K\hat{A}\Lambda} = 30^\circ$, αν $\mathrm{K\Lambda} = x$, έχουμε

$$x = \mathrm{K\Lambda} = \mathrm{A\Lambda}\cdot \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{A\Lambda} \Rightarrow \mathrm{A\Lambda} = 2x,$$

οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε:

$$\mathrm{AK}^2 + x^2 = (2x)^2 \Leftrightarrow 3x^2 = \mathrm{AK}^2 \Leftrightarrow 3x^2 = \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{\sqrt{6}} = \frac{\alpha\sqrt{6}}{6}.$$



Σχήμα 4

(β) Επειδή κάθε σημείο της μεσοκάθετης ΜΔ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ ισαπέχει από τα άκρα του Α και Γ το τρίγωνο ΜΑΓ είναι ισοσκελές με

$$\mathrm{MA} = \mathrm{M\Gamma} \text{ και } \mathrm{M\hat{A}\Gamma} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ,$$

οπότε $\mathrm{M\hat{A}\Gamma} = 75^\circ \Leftrightarrow \mathrm{M\hat{A}B} + 30^\circ = 75^\circ \Leftrightarrow \mathrm{M\hat{A}B} = 45^\circ$.

Από το σημείο Β φέρουμε ευθεία κάθετη προς την ευθεία ΜΑ που την τέμνει, έστω στο Ε, οπότε σχηματίζονται δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΒ και ΒΕΜ.

Το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο ισοσκελές και ίσο με το τρίγωνο ΑΓΔ, γιατί έχουν ίσες υποτείνουσες $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$. Άρα είναι $\mathrm{AE} = \alpha$ και $\mathrm{BE} = \alpha$.

Το τρίγωνο ΒΜΕ έχει

$$\mathrm{M\hat{B}E} = \mathrm{B\hat{M}A} = 180^\circ - 2\cdot\hat{\Gamma} = 180^\circ - 2\cdot 75^\circ = 30^\circ,$$

οπότε θα είναι

$$\mathrm{BE} = \mathrm{BM}\cdot \eta\mu 30^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{BM} \Rightarrow \mathrm{BM} = 2\alpha \text{ και}$$

$$\mathrm{ME} = \mathrm{BM}\cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ \Rightarrow \mathrm{ME} = 2\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha\sqrt{3}.$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{AM} = \mathrm{AE} + \mathrm{ME} = \alpha\left(1+\sqrt{3}\right).$$

Τέλος από την ισότητα $\mathrm{M\Gamma} = \mathrm{MA}$ λαμβάνουμε:

$$2\alpha + \mathrm{B\Gamma} = \alpha\sqrt{3} + \alpha \Leftrightarrow \mathrm{B\Gamma} = \alpha\left(\sqrt{3}-1\right).$$

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε τους αριθμούς $x=\dfrac{2}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt[4]{3}\right)\left(1+\sqrt[8]{3}\right)}$ και $y=\sqrt[4]{2}$.

Να συγκρίνετε τους αριθμούς $x+1$ και y.

Λύση

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρανομαστή του κλάσματος επί $\sqrt[8]{3}-1$ και εκτελώντας διαδοχικά τις εμφανιζόμενες διαφορές τετραγώνων, λαμβάνουμε

$$x=\frac{2\left(\sqrt[8]{3}-1\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt[4]{3}\right)\left(1+\sqrt[8]{3}\right)\left(\sqrt[8]{3}-1\right)}=\frac{2\left(\sqrt[8]{3}-1\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt[4]{3}-1\right)}=\frac{2\left(\sqrt[8]{3}-1\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\sqrt[8]{3}-1.$$

Επομένως έχουμε

$$x+1=\sqrt[8]{3}<\sqrt[8]{4}=\sqrt[4]{2}=y\,.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$1-\frac{|x-1|}{3}\geq 0 \qquad \text{και} \qquad \left(|x|-2\right)\cdot\left(|x|-5\right)\leq 0\,.$$

Λύση

Έχουμε

$$1-\frac{|x-1|}{3}\geq 0 \Leftrightarrow |x-1|\leq 3 \Leftrightarrow -3\leq x-1\leq 3 \Leftrightarrow -2\leq x\leq 4. \qquad (1)$$

Για την ανίσωση $\left(|x|-2\right)\left(|x|-5\right)\leq 0$ έχουμε:

$$\left(|x|-2\right)\left(|x|-5\right)\leq 0 \Leftrightarrow \left(|x|-2\geq 0 \text{ και } |x|-5\leq 0\right) \text{ ή } \left(|x|-2\leq 0 \text{ και } |x|-5\geq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\leq |x\leq 5| \text{ ή } \left(|x|\leq 2 \text{ και } |x|\geq 5\right), \text{ αδύνατη} \Leftrightarrow 2\leq |x|\leq 5.$$

Όμως $|x|\geq 2 \Leftrightarrow x\leq -2$ ή $x\geq 2$ και $|x|\leq 5 \Leftrightarrow -5\leq x\leq 5$, οπότε η ανίσωση αληθεύει όταν

$$-5\leq x\leq -2 \text{ ή } 2\leq x\leq 5 \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι το δεδομένο σύστημα ανισώσεων αληθεύει για

$$x=-2 \text{ ή } 2\leq x\leq 4.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με ($\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}>\mathrm{B\Gamma}$). Ο κύκλος $c_1(\Gamma,\mathrm{B\Gamma})$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $\mathrm{B\Gamma}$) τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ. Ο κύκλος $c_2(\mathrm{A},\mathrm{A\Delta})$ (με κέντρο A και ακτίνα $\mathrm{A\Delta}$) τέμνει την πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο E και τον κύκλο $c_1(\Gamma,\mathrm{B\Gamma})$ στο σημείο Z. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_3 του τριγώνου $\mathrm{A\Delta Z}$ τέμνει την ευθεία BE στο σημείο M.

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, E, Z είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

(β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AM είναι μεσοκάθετη της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$.

Λύση

(α) Ισχύουν οι παρακάτω ισότητες τμημάτων:

$$\Gamma B=\Gamma\Delta=\Gamma Z \qquad (1) \qquad (\text{ακτίνες του κύκλου } c_1(\Gamma,B\Gamma))$$

$$A\Delta=AE=AZ \qquad (2) \qquad (\text{ακτίνες του κύκλου } c_2(A,A\Delta))$$

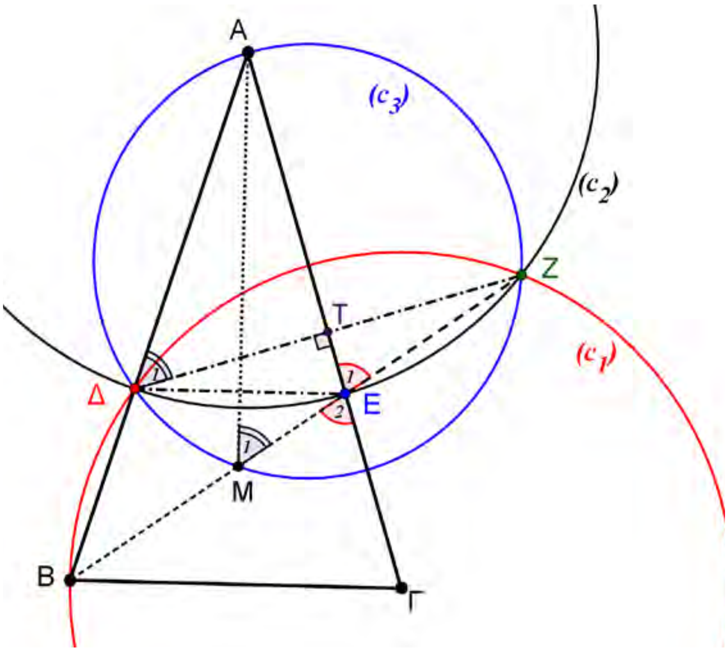
Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές θα ισχύει: $\hat{B}=\hat{\Gamma}=90^o-\frac{\hat{A}}{2}$ και ομοίως από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΕ έχουμε: $A\hat{\Delta}E=A\hat{E}\Delta=90^\circ-\frac{\hat{A}}{2}$.

Συγκρίνουμε τώρα τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και ΓBE. Αυτά έχουν:

(α) η πλευρά $B\Gamma$ είναι κοινή, (β) $B\Delta=\Gamma E$, (γ) $\Delta\hat{B}\Gamma=E\hat{\Gamma}B=90^o-\frac{\hat{A}}{2}$.

Άρα τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και ΓBE είναι ίσα, οπότε $BE=\Delta\Gamma\overset{(1)}{=}B\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια

$$\hat{E}_2=\hat{\Gamma}=90^o-\frac{\hat{A}}{2}. \qquad (3)$$



Σχήμα 5

Εφόσον $A\Delta=AZ$ και $\Gamma\Delta=\Gamma Z$, η $A\Gamma$ (διάκεντρος των δύο κύκλων) είναι μεσοκάθετη της ΔZ (κοινή χορδή των δύο κύκλων). Επομένως τα σημεία Δ και Ζ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ΑΓ και ισχύει:

$$\hat{E}_1=A\hat{E}Z=A\hat{E}\Delta=90^\circ-\frac{\hat{A}}{2} \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έπεται ότι:

$$\hat{E}_2=B\hat{E}\Gamma=A\hat{E}Z=\hat{E}_1=90^\circ-\frac{\hat{A}}{2}, \qquad (5)$$

οπότε, δεδομένου ότι τα σημεία Α, Ε, Γ βρίσκονται πάνω στην ευθεία ΑΓ, έπεται ότι οι ημιευθείες ΕΒ και ΕΖ ή είναι αντικείμενες ημιευθείες με αρχή το Ε ή είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία ΑΓ. Το τελευταίο αποκλείεται, γιατί τότε θα είχαμε τις ευθείες ΕΔ και ΕΒ να συμπίπτουν, ως συμμετρικές και οι δύο με την ΕΖ ως προς την ευθεία ΑΓ, άτοπο.

Επομένως οι ημιευθείες ΕΒ και ΕΖ είναι αντικείμενες, δηλαδή τα σημεία Β, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να φθάσουμε θεωρώντας το άθροισμα

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Delta + \Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A} + \mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = \hat{\mathrm{A}} + \left(90^\circ - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}\right) + \left(90^\circ - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}\right) = 180^\circ,$$

οπότε η γωνία $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$ είναι ευθεία γωνία και τα σημεία Β, Ε και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{A}\hat{\mathrm{T}}\Delta$, έχουμε: $\hat{\Delta}_1 = 90^o - \hat{\mathrm{A}}$. Όμως οι γωνίες $\hat{\Delta}_1$ και $\hat{\mathrm{M}}_1$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c_3 = (\mathrm{A}, \Delta, \mathrm{Z})$ και βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AZ}}$, οπότε έχουμε: $\hat{\mathrm{M}}_1 = \hat{\Delta}_1 = 90^o - \hat{\mathrm{A}}$. Επειδή η γωνία $\hat{\mathrm{E}}_1$, είναι εξωτερική στο τρίγωνο AEM, έχουμε:

$$\hat{\mathrm{E}}_1 = \hat{\mathrm{M}}_1 + \mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} \Leftrightarrow \mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \hat{\mathrm{E}}_1 - \hat{\mathrm{M}}_1 = 90^o - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} - \left(90^o - \hat{\mathrm{A}}\right) = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2},$$

οπότε η ευθεία ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$. Όμως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$, οπότε η ευθεία ΑΜ είναι και μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, b που είναι τέτοιοι ώστε

$$a^2 + 4b^2 = 2a + 12b - 5.$$

Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή το αθροίσματος $a+b$ και οι τιμές των a, b για τις οποίες αυτή λαμβάνεται.

Λύση

Θέτουμε $s = a + b$, οπότε η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$a^2 + 4(s-a)^2 = 2a + 12(s-a) - 5.$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 - (8s-10)a + 4s^2 - 12s + 5 = 0 \qquad (1)$$

Για να έχει η εξίσωση (1) λύση ως προς a στους πραγματικούς αριθμούς, πρέπει να έχει μη αρνητική διακρίνουσα, δηλαδή πρέπει:

$$\Delta = (8s-10)^2 - 20(4s^2 - 12s + 5) \geq 0 \Leftrightarrow 4\left[(4s-5)^2 - 5(4s^2 - 12s + 5)\right] \geq 0 \Leftrightarrow -4s^2 + 20s \geq 0$$

$$\Leftrightarrow s(s-5) \leq 0 \Leftrightarrow (s \geq 0 \text{ και } s - 5 \leq 0) \text{ ή } (s \leq 0 \text{ και } s - 5 \geq 0) \Leftrightarrow 0 \leq s \leq 5.$$

Επομένως η μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $s = a + b$ είναι 5. Για $s = 5$ είναι $\Delta = 0$, οπότε από την εξίσωση προκύπτει η λύση $a = 3$ και στη συνέχεια βρίσκουμε $b = 2$.

Β΄ τάξη Λυκείου

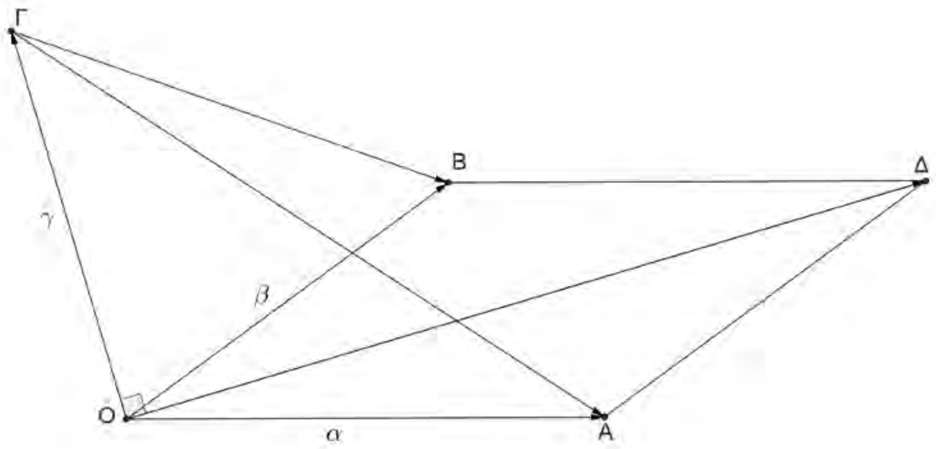
Πρόβλημα 1

Θεωρούμε στο επίπεδο τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$ και Γ, έτσι ώστε τα σημεία Ο, Α και Β να μην είναι συνευθειακά και έστω $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = \vec{\gamma}$. Αν ισχύει ή ισότητα

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\gamma}^2 = \overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}} \cdot \overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}},$$

να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ είναι κάθετο στη διαγώνιο ΟΔ του παραλληλογράμμου $\mathrm{OA\Delta B}$.

Λύση



Σχήμα 6

Από τις ισότητες $\overrightarrow{\Gamma A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\beta} - \vec{\gamma}$, έχουμε:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\gamma}^2 = \overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B} \Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\gamma}^2 = \left(\vec{\alpha} - \vec{\gamma}\right)\cdot\left(\vec{\beta} - \vec{\gamma}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\gamma}^2 = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\gamma}^2 - \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)\cdot\vec{\gamma} \Rightarrow \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)\cdot\vec{\gamma} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{0} \text{ ή } \vec{\gamma} \perp \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}\,(\text{αδύνατο,αφού}\, O, A, B\, \text{μη}\, \text{συνευθειακά}) \text{ ή } \vec{\gamma} \perp \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \overrightarrow{O\Delta}$$

$\Rightarrow \vec{\gamma}$ κάθετο στη διαγώνιο ΟΔ του παραλληλογράμμου ΟΑΔΒ.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες η εξίσωση

$$x^3 - 2x^2 = 4ax^2 - 11ax + 6a$$

έχει όλες τις ρίζες της στους ακέραιους.

Λύση

Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι:

$$x^3 - 2x^2 = 4ax^2 - 11ax + 6a \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 = 4ax^2 - 8ax - 3ax + 6a$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x-2\right) = 4ax\left(x-2\right) - 3a\left(x-2\right) \Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(x^2 - 4ax + 3a\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ ή } x^2 - 4ax + 3a = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x^2 - 4ax + 3a = 0.$$

Επομένως η δεδομένη εξίσωση έχει τη ρίζα $x = 2$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, οπότε αρκεί να προσδιορίσουμε τα $a \in \mathbb{R}$ για τα οποία η εξίσωση $x^2 - 4ax + 3a = 0$ έχει όλες τις ρίζες της α-κέραιες.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 16a^2 - 12a = 4a\left(4a-3\right)$ και πρέπει να είναι μη αρνητική, δηλαδή $4a\left(4a-3\right) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 0$ ή $a \geq \dfrac{3}{4}$. Αν υποθέσουμε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες $u, v \in \mathbb{Z}$, τότε από τους τύπους του Vieta θα έχουμε:

$$u + v = 4a \text{ και } uv = 3a \Rightarrow 3\left(u+v\right) = 4uv \Rightarrow 3u + 3v - 4uv = 0 \Rightarrow u\left(3 - 4v\right) = -3v,$$

οπότε αφού $4u - 3 \neq 0$ λαμβάνουμε:

$$u = \frac{3v}{4v-3} = \frac{1}{4}\left(\frac{12v}{4v-3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{12v - 9 + 9}{4v-3}\right) = \frac{1}{4}\left(3 + \frac{9}{4v-3}\right) \Rightarrow 4u - 3 = \frac{9}{4v-3} \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως, πρέπει $4v - 3 \in \{9, -9, 3, -3, 1, -1\}$, οπότε προκύπτουν αποδεκτές τιμές οι:

$$v=3 \text{ ή } v=0 \text{ ή } v=1.$$

- Για $v=3$ ή $v=1$ προκύπτει $u=1$ ή $u=3$ και $a=1$.
- Για $v=0$ προκύπτει $u=0$ και $a=0$.

Επομένως για $a=0$ ή $a=1$ η δεδομένη εξίσωση έχει όλες τις ρίζες της ακέραιες.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες πραγματικών αριθμών (x,y,z) που είναι λύσεις του συστήματος

$$x^2+y^2+z^2=6a^2,$$
$$x+y=3a,$$
$$y+z\geq 3a,$$

όπου a θετικός πραγματικός αριθμός.

Λύση

Θέτουμε $s=y+z$, οπότε θα είναι $z=s-y$. Επίσης έχουμε $x=3a-y$, οπότε από την πρώτη εξίσωση του συστήματος λαμβάνουμε

$$(3a-y)^2+y^2+(s-y)^2=6a^2 \Leftrightarrow 3y^2-2(3a+s)y+s^2+3a^2=0 \qquad (1)$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ως προς y λύση στο $\mathbb{R}$, αν, και μόνον αν,

$$\Delta=4\left[(3a+s)^2-3(s^2+3a^2)\right]\geq 0 \Leftrightarrow -2s^2+6as\geq 0 \Leftrightarrow 0\leq s\leq 3a.$$

Όμως από την ανίσωση του συστήματος έχουμε: $s\geq 3a,$ οπότε λαμβάνουμε ότι: $s=3a$. Τότε προκύπτει $\Delta=0$ και η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση $y=\frac{3a+s}{3}=2a$, οπότε θα είναι $x=3a-y=a$ και $z=3a-y=a$. Επομένως, μοναδική λύση του συστήματος είναι η

$$(x,y,z)=(a,2a,a).$$

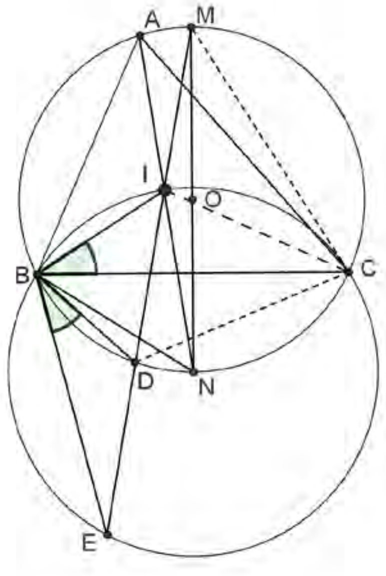
Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και έστω I το έκκεντρο του τριγώνου. Θεωρούμε το μέσον N του τόξου BC που δεν περιέχει το A και το μέσον M του τόξου BC που περιέχει το A. Η ευθεία MI τέμνει τον κύκλο (O,R) στο σημείο D και τον κύκλο (N,NI) για δεύτερη φορά στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{D}=\mathrm{I}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{C}$.

Λύση

Ο κύκλος (N,NI) περνάει από τα σημεία B και C. Πράγματι, η γωνία $\mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\mathrm{N}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο AIB, οπότε $\mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\mathrm{N}=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}+\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$. Επίσης $\mathrm{N}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{I}=\mathrm{N}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{C}+\mathrm{C}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{I}=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}+\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$, οπότε $\mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\mathrm{N}=\mathrm{N}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{I}$, οπότε $\mathrm{NB}=\mathrm{NI}$.

Επιπλέον, επειδή η κάθετος από το κέντρο O του κύκλου προς την πλευρά BC περνάει από τα μέσα των αντίστοιχων τόξων, έπεται ότι η NM είναι διάμετρος του κύκλου (O,R), οπότε $\mathrm{N}\hat{\mathrm{D}}\mathrm{M}=90^\circ$. Επομένως στον κύκλο (N,NI) το σημείο D είναι μέσο της χορδής IE.



Σχήμα 7

Από το τρίγωνο BED έχουμε $\mathrm{E\hat{B}D} = \mathrm{B\hat{D}M} - \mathrm{B\hat{E}I}$. Όμως $\mathrm{B\hat{D}M} = 90^\circ - \mathrm{B\hat{A}N} = 90^\circ - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}$ και $\mathrm{B\hat{E}I} = \frac{\hat{\mathrm{C}}}{2}$ (βαίνουν στο ίδιο τόξο του κύκλου $(\mathrm{N}, \mathrm{NI})$). Επομένως έχουμε

$$\mathrm{E\hat{B}D} = 90^\circ - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} - \frac{\hat{\mathrm{C}}}{2} = \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} = \mathrm{I\hat{B}C}.$$

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες η εξίσωση

$$x^3 - 4x^2 = 5ax^2 - 26ax + 24a$$

έχει όλες τις ρίζες της στους ακέραιους.

Λύση

Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι:

$$x^3 - 4x^2 = 5ax^2 - 26ax + 24a \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 = 5ax^2 - 20ax - 6ax + 24a = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-4) = 5ax(x-4) - 6a(x-4) \Leftrightarrow (x-4)(x^2 - 5ax + 6a) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = 0 \text{ ή } x^2 - 5ax + 6a = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x^2 - 5ax + 6a = 0.$$

Επομένως η δεδομένη εξίσωση έχει τη ρίζα $x = 4$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, οπότε αρκεί να προσδιορίσουμε τα $a \in \mathbb{R}$ για τα οποία η εξίσωση $x^2 - 5ax + 6a = 0$ έχει όλες τις ρίζες της ακέραιες. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 25a^2 - 24a = a(25a - 24)$ και πρέπει να είναι μη αρνητική, δηλαδή $a(25a-24) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 0$ ή $a \geq \frac{24}{25}$. Αν υποθέσουμε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες $u, v \in \mathbb{Z}$, τότε από τους τύπους του Vieta θα έχουμε:

$$u + v = 5a \text{ και } uv = 6a \Rightarrow 6(u+v) = 5uv \Rightarrow 6u + 6v - 5uv = 0 \Rightarrow u(6 - 5v) = -6v,$$

οπότε αφού $6 - 5v \neq 0$ λαμβάνουμε:

$$u = \frac{6v}{5v-6} = \frac{1}{5}\left(\frac{30v}{5v-6}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{30v - 36 + 36}{5v-6}\right) = \frac{1}{5}\left(6 + \frac{36}{5v-6}\right) \Rightarrow 5u - 6 = \frac{36}{5v-6} \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως, πρέπει

$$5v-6\in\{36,-36,18,-18,12,-12,9,-9,6,-6,4,-4,3,-3,2,-2,1,-1\},$$

οπότε προκύπτουν αποδεκτές τιμές οι:

$$v=-6 \text{ ή } v=3 \text{ ή } v=0 \text{ ή } v=1 \text{ ή } v=2.$$

- Για $v=-6$ ή $v=1$ προκύπτει $u=1$ ή $u=-6$, αντίστοιχα, και $a=-1$.
- Για $v=3$ ή $v=2$ προκύπτει $u=2$ ή $u=3$, αντίστοιχα, και $a=1$
- Για $v=0$ προκύπτει $u=0$ και $a=0$.

Επομένως για $a=0$ ή $a=\pm1$ η δεδομένη εξίσωση έχει όλες τις ρίζες της ακέραιες.

Πρόβλημα 2

Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Oxy του επιπέδου δίνεται το χωρίο

$$D=\left\{(x,y):(x-1)^2+(y-2)^2\le 8\right\}\subseteq\mathbb{R}^2.$$

(α) Να προσδιορίσετε τη μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $x+y,$ όταν $(x,y)\in D$, και τις τιμές των x,y για τις οποίες λαμβάνεται.

(β) Βρείτε την ελάχιστη τιμή του k, για την οποία η ευθεία ε με εξίσωση $x+y=k$ είναι εφαπτομένη του κύκλου C: $(x-1)^2+(y-2)^2=8$, προσδιορίζοντας και το αντίστοιχο σημείο επαφής.

Λύση

(α) Έστω $S=x+y$. Τότε η ανίσωση που ορίζει το χωρίο D γράφεται:

$$(x-1)^2+(S-x-2)^2\le 8 \Leftrightarrow .$$

$$2x^2+2(1-S)x+S^2-4S-3\le 0. \qquad (1)$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta=4\left[(1-S)^2-2\left(S^2-4S-3\right)\right]=4\left(1-2S+S^2-2S^2+8S+6\right)$$

$$=-4\left(S^2-6S-7\right)=-4(S+1)(S-7).$$

Επομένως η ανίσωση (1) αληθεύει για τιμές του x μεταξύ των ριζών του τριωνύμου του πρώτου μέλους της (1), όταν: $\Delta\ge0\Leftrightarrow -1\le S\le 7$, οπότε η μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος S είναι η $S_{\max}=7$. Για $S=7$ η ανίσωση (1) γράφεται $x^2-6x+9\le0\Leftrightarrow(x-3)^2\le0$ και αληθεύει μόνο για $x=3$, οπότε $y=S_{\max}-x=7-3=4$.

(β) Αρκεί να βρούμε την ελάχιστη τιμή του $k\in\mathbb{R}$ για την οποία η ευθεία $\varepsilon: x+y=k$ είναι εφαπτομένη του κύκλου με εξίσωση $C:(x-1)^2+(y-2)^2=8$. Η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου C για εκείνα τα k, για τα οποία το σύστημα

$$(x-1)^2+(y-2)^2=8,\ x+y=k,$$

έχει διπλή λύση, δηλαδή όταν η ευθεία ε έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο C.

Ισοδύναμα, αυτό ισχύει όταν η εξίσωση

$$2x^2+2(1-k)x+k^2-4k-3=0. \qquad (2)$$

έχει μοναδική λύση ως προς x, δηλαδή όταν έχει διακρίνουσα $\Delta=-4\left(k^2-6k-7\right)=0\Leftrightarrow$ $k=-1$ ή $k=7$, οπότε η ελάχιστη τιμή του k είναι $k_{\min}=-1$. Το αντίστοιχο σημείο επαφής προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης (2) για $k=-1$. Επειδή είναι $\Delta=0$ η εξίσωση (2) έχει μοναδική λύση $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = \dfrac{k-1}{2} = -1$, οπότε $y = 0$. Επομένως το ζητούμενο σημείο επαφής είναι το $(x, y) = (-1,\ 0)$.

Πρόβλημα 3

Έστω $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, όπου $\mathbb{N}^*$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών χωρίς το 0, μία συνάρτηση που είναι 1-1 και έστω k ένας θετικός ακέραιος. Αν ο αριθμός

$$3\left[\left(f(1)-1\right)^2 + \left(f(2)-1\right)^2 + \ldots + \left(f(k+1)-1\right)^2\right]$$

είναι κύβος φυσικού αριθμού, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $a \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$ τέτοιο, ώστε $f(a) \geq k+2$.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι για κάθε $a = 1, 2, \ldots, k+1$, ισχύει ότι $f(a) < k+2$. Τότε $f(a) \leq k+1$ για κάθε $a = 1, 2, \ldots, k+1$. Αφού επιπλέον η f είναι 1-1, έπεται ότι οι αριθμοί

$$f(1)-1,\ f(2)-1,\ \ldots,\ f(k+1)-1,$$

είναι (με κάποια διαφορετική ενδεχομένως σειρά) οι αριθμοί $1-1, 2-1, \ldots, k+1-1$.

Επομένως

$$3\left[\left(f(1)-1\right)^2 + \left(f(2)-1\right)^2 + \ldots + \left(f(k+1)-1\right)^2\right] = 3\left[1^2 + 2^2 + \ldots + (k+1)^2\right]$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{2} = \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{2} = k^3 + \frac{3}{2}k^2 + k.$$

Όμως $k^3 < k^3 + \frac{3}{2}k^2 + k < (k+1)^3$, οπότε ο παραπάνω αριθμός δεν μπορεί να είναι κύβος φυσικού αριθμού, (άτοπο). Επομένως υπάρχει $a \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$ τέτοιο ώστε $f(a) \geq k+2$.

Πρόβλημα 4

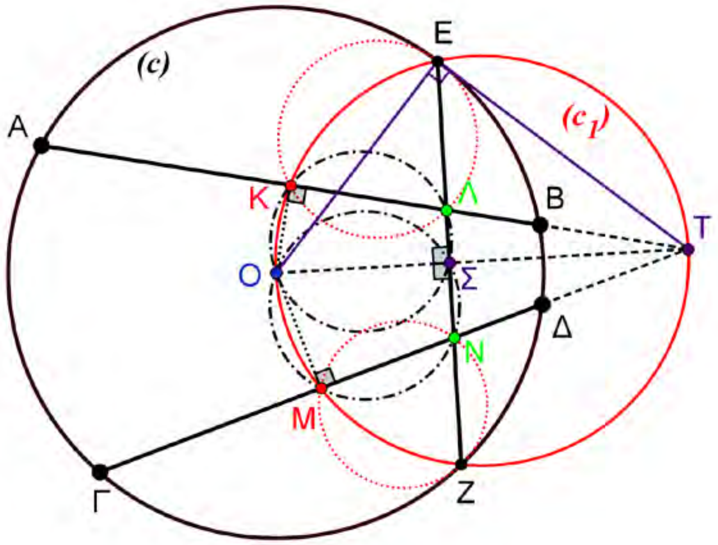
Δίνονται κύκλος $c(\mathrm{O}, R)$, δύο άνισες (μη τεμνόμενες εντός του κύκλου) και μη παράλληλες μεταξύ τους χορδές AB, $\Gamma\Delta$ και τα μέσα τους K, M, αντίστοιχα. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_1 του τριγώνου OKM τέμνει το κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ στα σημεία E, Z (το σημείο E ανήκει στο μικρό τόξο AB). Η EZ τέμνει τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία Λ, N, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

(i) Τα σημεία $\mathrm{K}, \Lambda, \mathrm{M}$ και N ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

(ii) Οι περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\mathrm{K}\Lambda\mathrm{E}$ εφάπτεται στον κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$.

Λύση

(i) Επειδή K, M είναι μέσα των χορδών AB και $\Gamma\Delta$, αντίστοιχα, θα ισχύουν οι καθετότητες: $\mathrm{OK} \perp \mathrm{AB}$ και $\mathrm{OM} \perp \Gamma\Delta$.



Σχήμα 8

Έστω T το κοινό σημείο της προέκτασης της χορδής AB και του κύκλου c_1. Τότε το σημείο T είναι το αντιδιαμετρικό του O στο κύκλο c_1 (διότι $\hat{\mathrm{K}} = 90^o$) . Το σημείο T είναι επίσης το κοινό σημείο της προέκτασης της χορδής $\Gamma\Delta$ και του κύκλου c_1.

Άρα η OT είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής EZ.

Επειδή $\hat{\mathrm{K}} = \hat{\Sigma} = 90^o$, το τετράπλευρο $\mathrm{O\Sigma\Lambda K}$ είναι εγγράψιμο, οπότε:

$$\mathrm{T\Lambda} \cdot \mathrm{TK} = \mathrm{T\Sigma} \cdot \mathrm{TO} \qquad (1).$$

Επειδή $\hat{\mathrm{N}} = \hat{\Sigma} = 90^o$, το τετράπλευρο $\mathrm{O\Sigma NM}$ είναι εγγράψιμο, οπότε:

$$\mathrm{TN} \cdot \mathrm{TM} = \mathrm{T\Sigma} \cdot \mathrm{TO} \qquad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε $\mathrm{T\Lambda} \cdot \mathrm{TK} = \mathrm{TN} \cdot \mathrm{TM}$, οπότε το τετράπλευρο $\mathrm{K\Lambda NM}$ είναι εγγράψιμο.

(ii) Το τρίγωνο OET είναι ορθογώνιο στο E (διότι η OT είναι διάμετρος του κύκλου c_1), οπότε η TE είναι εφαπτόμενη του κύκλου $c(\mathrm{O}, R)$. Άρα έχουμε:

$$\mathrm{ET}^2 = \mathrm{T\Sigma} \cdot \mathrm{TO}. \qquad (3)$$

Από την ισότητα (3) (σε συνδυασμό με την ισότητα (1)), έχουμε:

$$\mathrm{ET}^2 = \mathrm{T\Lambda} \cdot \mathrm{TK}. \qquad (4)$$

Άρα η ET εφάπτεται στο περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $\mathrm{K\Lambda E}$. Επομένως οι κύκλοι $c(\mathrm{O}, R)$ και $(\mathrm{K}, \Lambda, \mathrm{E})$ έχουν στο σημείο τους E κοινή εφαπτομένη, οπότε εφάπτονται στο σημείο E.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
17 Ιανουαρίου 2015
Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Υπολογίστε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{A}=\left(\frac{7}{3}-\frac{49}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right)^{-2}:\left(2-\frac{11}{10}\right)^{-2}$.

Πρόβλημα 2. Μία οικογένεια αγόρασε ένα ψυγείο με έκπτωση $11\frac{1}{9}\%$ πάνω στην τιμή πώλησης και ένα πλυντήριο με έκπτωση $14\frac{2}{7}\%$ πάνω στην τιμή πώλησης. Η συνολική τιμή πώλησης ψυγείου και πλυντηρίου ήταν 3150 ευρώ. Η συνολική έκπτωση που έγινε ήταν 390 ευρώ. Να βρείτε την τιμή πώλησης του ψυγείου και του πλυντηρίου.

Σημείωση: *Οι αριθμοί* $11\frac{1}{9}$ *και* $14\frac{2}{7}$ *είναι μεικτοί.*

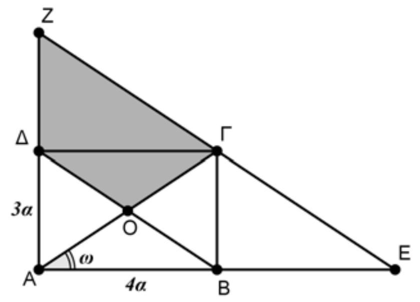
Πρόβλημα 3.

Τέσσερα χωριά Α, Β, Γ και Δ πλήρωσαν πέρυσι για τη μεταφορά των μαθητών τους στο Γυμνάσιο του Δήμου τους συνολικά 9690 ευρώ. Τα χρήματα που πλήρωσε κάθε χωριό ήταν ανάλογα προς τον αριθμό των μαθητών του χωριού που φοιτούσαν στο Γυμνάσιο. Να βρείτε πόσα χρήματα πλήρωσε κάθε χωριό, αν είναι γνωστό ότι ο αριθμός των μαθητών του χωριού Β ισούται με τα $3/4$ του αριθμού των μαθητών του χωριού Γ, ο αριθμός των μαθητών του χωριού Α ισούται με τα $2/3$ του αριθμού των μαθητών του χωριού Β και ο αριθμός των μαθητών του χωριού Δ ισούται με το άθροισμα των μαθητών των χωριών Α και Γ.

Πρόβλημα 4

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}=\omega$ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Από την κορυφή Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διαγώνιο ΒΔ η οποία τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ε και την ευθεία ΑΔ στο σημείο Ζ. Δίνεται ότι:

$$\mathrm{AB}=4\alpha\ cm\ ,\ \mathrm{A\Delta}=3\alpha\ cm\ .$$



1.Βρείτε τη γωνία $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{Z}$ συναρτήσει της γωνίας ω.
2.Αποδείξετε ότι: $\mathrm{A\Gamma}=\Gamma\mathrm{Z}=\Gamma\mathrm{E}$.
3.Βρείτε το ύψος και το εμβαδόν του τραπεζίου ΔΟΓΖ.

Σημείωση. *Να σχεδιάσετε το σχήμα του προβλήματος στο τετράδιο σας. Να αιτιολογήσετε κάθε απάντησή σας.*

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***

Καλή επιτυχία.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
17 Ιανουαρίου 2015

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, όπου a,b,c πραγματικοί αριθμοί.

(α) Βρείτε το πολυώνυμο: $Q(x) = \mathrm{P}(2x) - 19\mathrm{P}(-x)$.

(β) Βρείτε το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$, αν ισχύει ότι: $Q(x) = 3x(3x+2)^2$.

Πρόβλημα 2
Οι πραγματικοί αριθμοί a,b είναι τέτοιοι ώστε $ab(a+b)(a-b) \neq 0$ και

$$\frac{b(a-b)}{a(a+b)} + \frac{b(a+b)}{a(a-b)} = \frac{3ab-b^2}{a^2-b^2}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $a^2 = b(a+2b)$

(β) Να βρείτε την τιμή του λόγου $\frac{a}{b}$.

Πρόβλημα 3
Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 43 και υπόλοιπο 9. Επίσης ο αριθμός $\overline{zyx} = 100z + 10y + x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 30 και υπόλοιπο 6. Να βρεθεί ο αριθμός $\overline{xyz}$.

Πρόβλημα 4
Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ, \hat{\Gamma} = 60^\circ$ και υποτείνουσα $\mathrm{B\Gamma} = \alpha$. Η μεσοκάθετη στο μέσον M της ΒΓ τέμνει τη διχοτόμο ΒΔ (το Δ είναι σημείο της $\mathrm{A\Gamma}$) στο σημείο K και την ευθεία ΑΓ στο σημείο Ν. Έστω Λ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος $\mathrm{K\Delta}$.

1. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{N\Lambda} \perp \mathrm{B\Delta}$.

2. Θεωρούμε τον κύκλο ω με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα BN, ο οποίος δίνεται ότι περνάει από τα σημεία A, Λ και M. Έστω E το χωρίο που έχει πλευρές τις $\mathrm{M\Gamma}$, $\mathrm{A\Gamma}$ και το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AM}}$ του κύκλου ω. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου E συναρτήσει της πλευράς $\mathrm{B\Gamma} = \alpha$.

Σημείωση: *Το χωρίο E είναι στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ και εξωτερικά του κύκλου ω.*

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***

Καλή επιτυχία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
17 Ιανουαρίου 2014
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η παράσταση: $\mathrm{A}=\dfrac{\alpha^2-1}{n^2+\alpha n}\cdot\left(\dfrac{n^2}{n-1}-n\right)\cdot\dfrac{\alpha+n-\alpha n^3-n^4}{1-\alpha^2}$, με α πραγματικό αριθμό μεγαλύτερο του 1 και n θετικό ακέραιο, $n>1$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{A}=n^2+n+1$

(β) Δεν είναι δυνατόν ο Α να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Πρόβλημα 2

Στις εξετάσεις του Α. Σ. Ε.Π. τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 40. Αν παραλείψουμε το μικρότερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 46. Αν παραλείψουμε το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 28, ενώ, αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 32. Να βρείτε τον αριθμό των μαθημάτων, το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του υποψηφίου.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $\mathrm{AB}=\mathrm{B}\Delta=\Gamma\Delta$. Φέρουμε το ύψος του $\Delta\mathrm{E}$, όπου E σημείο της πλευράς AB. Έστω Z το συμμετρικό της κορυφής A ως προς κέντρο το σημείο Ε. Έστω επίσης Κ το συμμετρικό της κορυφής Γ ως προς κέντρο το σημείο Ζ και Λ το συμμετρικό της κορυφής Β ως προς κέντρο το σημείο Α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.

Πρόβλημα 4

Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{xyzw}=1000x+100y+10z+w$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 327 και υπόλοιπο 14. Επίσης ο αριθμός $\overline{wzyx}=1000w+100z+10y+x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 227 και υπόλοιπο 16. Να βρεθεί ο αριθμός $\overline{xyzw}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
17 Ιανουαρίου 2015

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-1}=3.$$

Πρόβλημα 2
Έστω $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7$ θετικοί ακέραιοι που είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Δίνεται επίσης ότι το άθροισμά τους είναι τέλειος κύβος και το άθροισμα των 5 μεσαίων όρων $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$, είναι τέλειο τετράγωνο. Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του όρου α_4.

Πρόβλημα 3
Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $ABCD$ τέτοιο ώστε $AB=BD=CD$ και με τη γωνία $\hat{A}=75^\circ$. Φέρουμε το ύψος του DE, όπου E σημείο της πλευράς AB. Έστω Z το συμμετρικό της κορυφής A ως προς κέντρο το σημείο E. Έστω επίσης K το συμμετρικό της κορυφής C ως προς κέντρο το σημείο Z και L το συμμετρικό της κορυφής B ως προς κέντρο το σημείο A. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $K\hat{D}L$.

Πρόβλημα 4
Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=4x^2+kx+m$ και υποθέτουμε ότι οι ρίζες του είναι διακεκριμένες και ανήκουν στο διάστημα $(0,1)$. Να αποδειχθεί ότι τουλάχιστον ένας από τους k,m δεν είναι ακέραιος.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
17 Ιανουαρίου 2015

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στις εξετάσεις του Α. Σ. Ε.Π. τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι και 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 50. Αν παραλείψουμε το μικρότερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 56. Αν παραλείψουμε το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 40, ενώ, αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 45. Να βρείτε τον αριθμό των μαθημάτων, το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του υποψηφίου.

Πρόβλημα 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί a,b ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{a}{b+a}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}=\frac{3}{2},$$

να αποδειχθεί ότι: $a=b$.

Πρόβλημα 3

Να βρεθεί ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος k με την ακόλουθη ιδιότητα: Ο αριθμός 2018 γράφεται ως άθροισμα k τετραγώνων διαφορετικών ακεραίων.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ABC με $AB<AC<BC$. Στη προέκταση της AB (προς το μέρος του B), θεωρούμε σημείο K και στη συνέχεια θεωρούμε τον κύκλο $c(K,KA)$ (με κέντρο το K και ακτίνα KA). Ο κύκλος (c) τέμνει την ευθεία AB στο σημείο D και την ευθεία AC στο σημείο E. Σε τυχόν σημείο M εσωτερικό της πλευράς AB θεωρούμε κάθετη προς την ευθεία AB, η οποία τέμνει την ευθεία AC στο σημείο N. Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου KME (έστω (c_1)) τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Z, να αποδείξετε ότι οι ευθείες MN, DE, AZ περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
17 Ιανουαρίου 2015
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Υπολογίστε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{7}{3}-\frac{49}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right)^{-2}:\left(2-\frac{11}{10}\right)^{-2}.$$

Λύση. Έχουμε :

$$\mathrm{A}=\left(\frac{7}{3}-\frac{49}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right)^{-2}:\left(2-\frac{11}{10}\right)^{-2}=\left(\frac{21}{9}-\frac{49}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{10}\right)^{-2}:\left(\frac{9}{10}\right)^{-2}$$

$$=\left(-\frac{28}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{10}\right)^{-2}:\left(\frac{9}{10}\right)^{-2}=-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\left(\frac{10}{3}\right)^{2}:\left(\frac{10}{9}\right)^{2}=\frac{100}{9}\cdot\frac{81}{100}=\frac{81}{9}=9.$$

Πρόβλημα 2. Μία οικογένεια αγόρασε ένα ψυγείο με έκπτωση $11\frac{1}{9}\%$ πάνω στην τιμή πώλησης και ένα πλυντήριο με έκπτωση $14\frac{2}{7}\%$ πάνω στην τιμή πώλησης. Η συνολική τιμή πώλησης ψυγείου και πλυντηρίου ήταν 3150 ευρώ. Η συνολική έκπτωση που έγινε ήταν 350 ευρώ. Να βρείτε την τιμή πώλησης του ψυγείου και του πλυντηρίου.

Σημείωση: *Οι αριθμοί* $11\frac{1}{9}\%$ *και* $14\frac{2}{7}\%$ *είναι μεικτοί.*

Λύση

Έστω x ευρώ η τιμή πώλησης του ψυγείου, οπότε η τιμή πώλησης του πλυντηρίου θα είναι $3150-x$ ευρώ. Η έκπτωση για το ψυγείο ήταν $11\frac{1}{9}\%=\frac{100}{9}\%$, οπότε η έκπτωση για το ψυγείο ήταν $x\cdot\dfrac{100/9}{100}=\dfrac{x}{9}$ ευρώ. Επίσης, η έκπτωση για το πλυντήριο ήταν $14\frac{2}{7}\%=\frac{100}{7}\%$, οπότε η αντίστοιχη έκπτωση για το πλυντήριο ήταν $(3150-x)\cdot\dfrac{100/7}{100}=\dfrac{3150-x}{7}=450-\dfrac{x}{7}$. Άρα έχουμε

$$\frac{x}{9}+450-\frac{x}{7}=390\Leftrightarrow\frac{x}{9}-\frac{x}{7}=-60\Leftrightarrow\frac{2x}{63}=60\Leftrightarrow x=63\cdot 30\Leftrightarrow x=1890.$$

Επομένως, η τιμή πώλησης του ψυγείου ήταν 1890 ευρώ και η τιμή πώλησης του πλυντηρίου ήταν $3150-1890=1260$ ευρώ.

Πρόβλημα 3. Τέσσερα χωριά Α, Β, Γ και Δ πλήρωσαν πέρυσι για τη μεταφορά των μαθητών τους στο Γυμνάσιο του Δήμου τους συνολικά 9690 ευρώ. Τα χρήματα που πλήρωσε κάθε χωριό ήταν ανάλογα προς τον αριθμό των μαθητών του χωριού που φοιτούσαν στο Γυμνάσιο. Να βρείτε πόσα χρήματα πλήρωσε κάθε χωριό, αν είναι γνωστό ότι ο αριθμός των μαθητών του χωριού Β ισούται με τα $3/4$ του αριθμού των μαθητών του χωριού Γ, ο αριθμός των μαθητών του χωριού Α ισούται με τα $2/3$ του αριθμού των μαθητών του χωριού Β και ο αριθμός των μαθητών του χωριού Δ είναι το άθροισμα των μαθητών των χωριών Α και Γ.

Λύση

Έστω ότι τα χωριά Α, Β, Γ και Δ πλήρωσαν τα ποσά $\alpha,\beta,\gamma,\delta,$ αντίστοιχα. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε:

$$\beta=\frac{3\gamma}{4},\ \alpha=\frac{2\beta}{3},\ \delta=\alpha+\gamma\Rightarrow\alpha=\frac{2\beta}{3},\ \gamma=\frac{4\beta}{3},\ \delta=\frac{6\beta}{3}=2\beta$$

$$\frac{3\alpha}{2}=\beta=\frac{3\gamma}{4}=\frac{\delta}{2}\ \Rightarrow\ \frac{\alpha}{2/3}=\frac{\beta}{1}=\frac{\gamma}{4/3}=\frac{\delta}{2}\ \Rightarrow\ \frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{3}=\frac{\gamma}{4}=\frac{\delta}{6}.$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος το ποσό των 9690 ευρώ πρέπει να διαμεριστεί σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ οποίοι, όπως διαπιστώνουμε από την τελευταία σχέση είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς $2,3,4$ και 6. Επομένως, αρκεί να διαμερίσουμε το ποσό των 9690 ευρώ σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 2,3,4 και 6. Έτσι, αν διαιρέσουμε τον αριθμό 9690 σε $2+3+4+6=15$ ίσα μέρη έχουμε μερίδιο το ποσό $9690:15=646$ ευρώ. Επομένως, το χωριό Α πλήρωσε $646\cdot 2=1292$ ευρώ, το χωριό Β πλήρωσε $646\cdot 3=1938$ ευρώ, το χωριό Γ πλήρωσε $646\cdot 4=2584$ ευρώ και το χωριό Δ πλήρωσε $646\cdot 6=3876$ ευρώ.

Διαφορετικά, από τις ισότητες

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{3}=\frac{\gamma}{4}=\frac{\delta}{6}=\omega\Rightarrow\alpha=2\omega,\ \beta=3\omega,\ \gamma=4\omega,\ \delta=6\omega,$$

οπότε από την υπόθεση $\alpha+\beta+\gamma+\delta=9690$ με αντικατάσταση λαμβάνουμε:

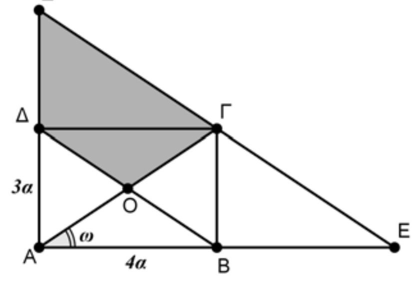
$$2\omega+3\omega+4\omega+6\omega=9690\Leftrightarrow 15\omega=9690\Leftrightarrow\omega=646.$$

Άρα είναι: $\alpha=2\omega=1292,\ \beta=3\omega=1938,\ \gamma=4\omega=2584,\ \delta=6\omega=3876$ ευρώ.

Πρόβλημα 4

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με $\Gamma\hat{A}B=\omega$ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Από την κορυφή Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διαγώνιο ΒΔ η οποία τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ε και την ευθεία ΑΔ στο σημείο Ζ. Δίνεται ότι:

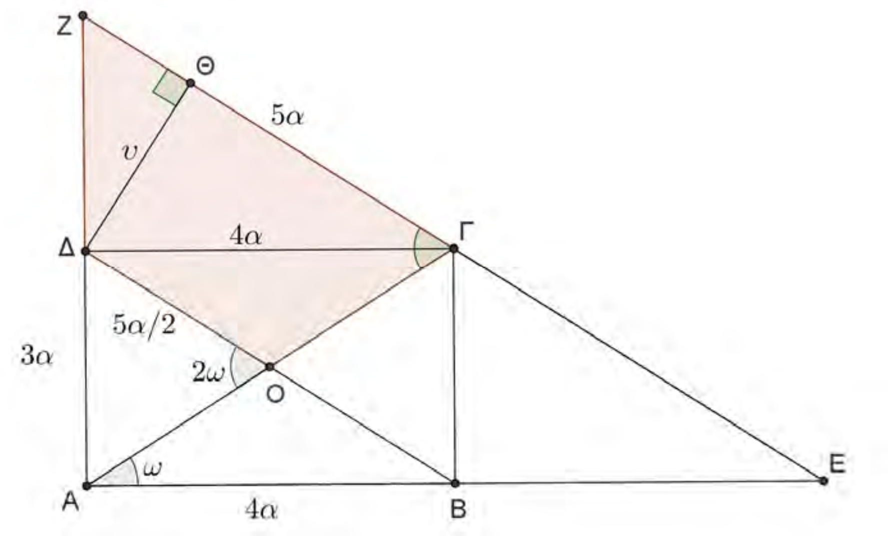
$$AB=4\alpha\ cm,\ A\Delta=3\alpha\ cm.$$



1.Βρείτε τη γωνία $A\hat{\Gamma}Z$ συναρτήσει της γωνίας ω.
2.Αποδείξετε ότι: $A\Gamma=\Gamma Z=\Gamma E$.
3.Βρείτε το ύψος και το εμβαδόν του τραπεζίου ΔΟΓΖ.

Σημείωση. *Να σχεδιάσετε το σχήμα του προβλήματος στο τετράδιο σας. Να αιτιολογήσετε κάθε απάντησή σας.*

Λύση



Σχήμα 2

1. Επειδή οι διαγώνιες ορθογωνίου είναι ίσες και διχοτομούνται, έπεται ότι $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ$, οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές με $Ο\hat{Β}Α = \omega = Ο\hat{Α}Β$. Η γωνία $Α\hat{Ο}Δ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΟΒ, οπότε θα είναι $Α\hat{Ο}Δ = Ο\hat{Α}Β + Ο\hat{Β}Α = 2\omega$. Από την παραλληλία $ΕΖ \parallel ΒΔ$, επειδή οι γωνίες $Α\hat{Γ}Ζ$ και $Α\hat{Ο}Δ$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά, έχουμε: $Α\hat{Γ}Ζ = 2\omega$.

2. Επειδή $ΕΖ \parallel ΒΔ$ και $ΓΔ \parallel ΑΕ$, $ΒΓ \parallel ΑΖ$, τα τετράπλευρα ΔΒΕΓ και ΔΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες. Άρα είναι: $ΒΔ = ΓΖ = ΓΕ$ Όμως οι διαγώνιες παραλληλογράμμου είναι ίσες, οπότε $ΑΓ = ΒΔ$. Επομένως, θα είναι και $ΑΓ = ΓΖ = ΓΕ$.

3. Το τρίγωνο ΑΓΖ είναι ισοσκελές με ΑΓ = ΓΖ, οπότε το ύψος του $ΓΔ = ΑΒ = 4\alpha\ cm$ είναι και διάμεσος. Αρα είναι: $ΑΖ = 2 \cdot ΑΔ = 6\alpha\ cm$ και $ΔΖ = 3\alpha\, cm$.
Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$ΒΔ^2 = ΑΒ^2 + ΑΔ^2 \Rightarrow ΒΔ^2 = (4\alpha)^2 + (3\alpha)^2 = 25\alpha^2 \Rightarrow ΒΔ = 5\alpha\ cm.$$

Άρα είναι: $ΟΔ = \dfrac{ΒΔ}{2} = \dfrac{5\alpha}{2}$ και $ΓΖ = 5\alpha\, cm$.
Για το ύψος $\upsilon = ΔΘ$ έχουμε ότι:

$$Ε(ΓΔΖ) = \frac{ΔΓ \cdot ΔΖ}{2} = \frac{ΓΖ \cdot ΔΘ}{2} \Leftrightarrow \frac{4\alpha \cdot 3\alpha}{2} = \frac{ΓΖ \cdot \upsilon}{2} \Leftrightarrow \upsilon = \frac{12\alpha}{5}.$$

Επομένως, είναι:

$$Ε(ΔΟΓΖ) = \frac{(ΔΟ + ΓΖ)}{2} \cdot \upsilon = \frac{\left(\frac{5\alpha}{2} + 5\alpha\right)}{2} \cdot \frac{12\alpha}{5} = 9\alpha^2\ cm^2.$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, όπου a, b, c πραγματικοί αριθμοί.

(α) Βρείτε το πολυώνυμο: $Q(x) = \mathrm{P}(2x) - 19\mathrm{P}(-x)$.

(β) Βρείτε το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$, αν ισχύει ότι: $Q(x) = 3x(3x+2)^2$.

Λύση. (α) Έχουμε

$$Q(x) = \mathrm{P}(2x) - 19\mathrm{P}(-x) = (2x)^3 + a(2x)^2 + b\cdot 2x + c - 19\left((-x)^3 + a(-x)^2 + b(-x) + c\right)$$

$$= 8x^3 + 4ax^2 + 2bx + c + 19x^3 - 19ax^2 + 19bx - 19c = 27x^3 - 15ax^2 + 21bx - 18c.$$

(β) Από την ισότητα $Q(x) = 3x(3x+2)^2$ έχουμε:

$$27x^3 - 15ax^2 + 21bx - 18c = 3x(3x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 - 15ax^2 + 21bx - 18c = 3x\left(9x^2 + 12x + 4\right)$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 - 15ax^2 + 21bx - 18c = 27x^3 + 36x^2 + 12x$$

$$\Leftrightarrow \{-15a = 36,\ 21b = 12,\ -18c = 0\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{a = -\frac{12}{5},\ b = \frac{4}{7}, c = 0\right\}.$$

Άρα είναι: $\mathrm{P}(x) = x^3 - \dfrac{12}{5}x^2 + \dfrac{4}{7}x.$

Πρόβλημα 2. Οι πραγματικοί αριθμοί a, b είναι τέτοιοι ώστε $ab(a+b)(a-b) \neq 0$ και

$$\frac{b(a-b)}{a(a+b)} + \frac{b(a+b)}{a(a-b)} = \frac{3ab - b^2}{a^2 - b^2}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $a^2 = b(a+2b)$

(β) Να βρείτε την τιμή του λόγου $\dfrac{a}{b}$.

Λύση

(α) Έχουμε:

$$\frac{b(a-b)}{a(a+b)} + \frac{b(a+b)}{a(a-b)} = \frac{3ab - b^2}{a^2 - b^2} \Leftrightarrow b(a-b)^2 + b(a+b)^2 = a\left(3ab - b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow b\left[(a-b)^2 + (a+b)^2\right] - ab(3a-b) = 0 \Leftrightarrow b\left(2a^2 + 2b^2\right) - ab(3a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow b\left(2a^2 + 2b^2 - 3a^2 + ab\right) = 0 \overset{b\neq 0}{\Leftrightarrow} 2b^2 - a^2 + ab = 0 \Leftrightarrow a^2 = b(a+2b).$$

(β) Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$a^2 - ab - 2b^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0,\ x = \frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 - x - 1 = 0,\quad x = \frac{a}{b} \Leftrightarrow (x-1)(x+1) - (x+1) = 0,\ x = \frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)=0,\quad x=\frac{a}{b} \Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=2,\ x=\frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b}=-1 \text{ (απορρίπτεται, γιατί } a\neq -b) \text{ ή } \frac{a}{b}=2 \Leftrightarrow \frac{a}{b}=2.$$

Πρόβλημα 3.

Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{xyz}=100x+10y+z$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 43 και υπόλοιπο 9. Επίσης ο αριθμός $\overline{zyx}=100z+10y+x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 30 και υπόλοιπο 6. Να βρεθεί ο αριθμός $\overline{xyz}$.

Λύση

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$\overline{xyz}=100x+10y+z=43(x+y+z)+9 \qquad (1)$$

$$\overline{zyx}=100z+10y+x=30(x+y+z)+6, \qquad (2)$$

από τις οποίες για τη διαφορά των δύο αριθμών προκύπτει ότι:

$$\overline{xyz}-\overline{zyx}=99(x-z)=13(x+y+z)+3. \qquad (3)$$

Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι $10\le x+y+z\le 23$, γιατί, αν ήταν $x+y+z\ge 24$, τότε θα είχαμε $\overline{xyz}>43\cdot 24+9=1041$, άτοπο. Επομένως για το δεύτερο μέλος της σχέσης (3) έχουμε:

$$10\cdot 13+3\le 13(x+y+z)+3\le 23\cdot 13+3$$
$$\Rightarrow 133\le 13(x+y+z)+3\le 302$$
$$\Rightarrow 133\le 99(x-z)\le 302,$$

οπότε οι δυνατές τιμές για τη διαφορά των δύο ακραίων ψηφίων είναι 2 ή 3.

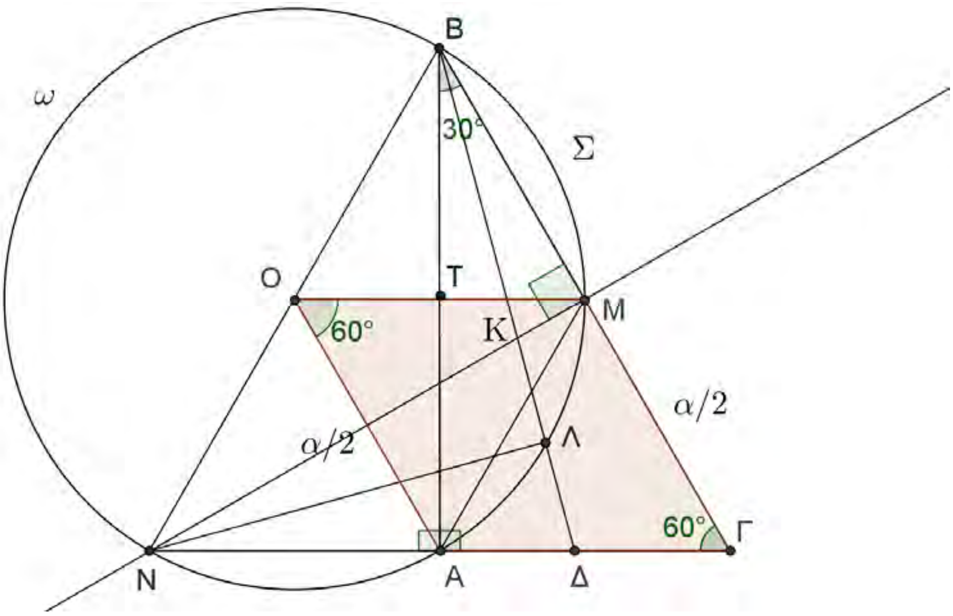
- Για $x-z=2$, από την (3) προκύπτει: $x+y+z=15$ οπότε από τις (1) και (2) λαμβάνουμε $\overline{xyz}=654$ και $\overline{zyx}=456$.
- Για $x-z=3$, από την (3) δεν προκύπτει ακέραια λύση για το άθροισμα των ψηφίων $x+y+z$.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^\circ, \hat{\Gamma}=60^\circ$ και υποτείνουσα $B\Gamma=\alpha$. Η μεσοκάθετη στο μέσον Μ της ΒΓ τέμνει τη διχοτόμο ΒΔ (το Δ είναι σημείο της ΑΓ) στο σημείο Κ και την ευθεία ΑΓ στο σημείο Ν. Έστω Λ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΔ.

1. Να αποδείξετε ότι: $N\Lambda \perp B\Delta$.
2. Θεωρούμε τον κύκλο ω με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΒΝ, ο οποίος δίνεται ότι περνάει από τα σημεία Α, Λ και Μ. Έστω E το χωρίο που έχει πλευρές τις ΜΓ, ΑΓ και το τόξο $\overset{\frown}{AM}$ του κύκλου ω. Να υπολογίσετε το εμβαδό χωρίου E συναρτήσει της πλευράς $B\Gamma=\alpha$.

Σημείωση: *Το χωρίο Ε είναι στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ και εξωτερικά του κύκλου ω.*



Σχήμα 2

Λύση

1. Έστω ότι οι ευθείες $\mathrm{KM}, \mathrm{A\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο N. Τότε

$$\mathrm{N\hat{K}\Delta} = \mathrm{B\hat{K}M} = 90^\circ - \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} = 75^\circ.$$

Επίσης η γωνία $\mathrm{N\hat{\Delta}K}$ ως εξωτερική του τριγώνου $\mathrm{\Delta\Gamma B}$ ισούται με

$$\mathrm{N\hat{\Delta}K} = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} = 60^\circ + \frac{30^\circ}{2} = 75^\circ.$$

Συνεπώς το τρίγωνο $\mathrm{NK\Delta}$ είναι ισοσκελές με $\mathrm{NK} = \mathrm{N\Delta}$. Αφού το Λ είναι μέσον της βάσης $\mathrm{K\Delta}$ του ισοσκελούς τριγώνου $\mathrm{NK\Delta}$, έπεται ότι: $\mathrm{N\Lambda} \perp \mathrm{B\Delta}$.

2. Το τρίγωνο $\mathrm{B\Gamma N}$ είναι ισοσκελές με $\mathrm{N\Gamma} = \mathrm{NB}$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επομένως, το τρίγωνο $\mathrm{B\Gamma N}$ είναι ισόπλευρο, οπότε $\mathrm{BN} = \alpha$. ΟΙ ΒΑ και ΝΜ είναι ύψη και διάμεσοι αυτού, οπότε $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{M\Gamma} = \frac{\alpha}{2}$ Ο κύκλος διαμέτρου BN έχει κέντρο, έστω Ο και περνάει από τα σημεία Α, Λ και Μ. Το τρίγωνο ΟΑΜ είναι ισοσκελές και έχει

$$\mathrm{A\hat{O}M} = 2 \cdot \mathrm{A\hat{B}\Gamma} = 2 \cdot \left(90^\circ - 60^\circ\right) = 60^\circ.$$

Επίσης $\mathrm{A\hat{O}B} = 2 \cdot \mathrm{\Gamma\hat{N}B} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$, οπότε $\mathrm{M\hat{O}B} = 60^\circ$ και το τρίγωνο ΟΜΒ είναι ισόπλευρο πλευράς $\frac{\alpha}{2}$. Άρα το τετράπλευρο ΑΓΒΟ είναι ρόμβος που αποτελείται από δύο ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς $\frac{\alpha}{2}$, οπότε το ύψος του ΑΤ ισούται με το ύψος ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς $\frac{\alpha}{2}$, δηλαδή

$$\mathrm{AT} = \frac{\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.$$

Το εμβαδόν του χωρίου E δίνεται από τη σχέση

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{\Gamma}\widehat{\mathrm{AM}}\right) = \mathrm{E}\left(\mathrm{A\Gamma BO}\right) - \mathrm{E}_{\kappa.\tau o\mu\acute{\epsilon}\alpha}\left(\mathrm{O}\widehat{\mathrm{AM}}\right). \qquad (1)$$

Έχουμε

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{A\Gamma MO}\right)=\left(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\right)\cdot\left(\acute{\upsilon}\psi o\varsigma\right)=\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8} \qquad (2)$$

Επίσης

$$\mathrm{E}_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(\mathrm{O}\widehat{\mathrm{AM}}\right)=\frac{60^\circ}{360^\circ}\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{\pi\alpha^2}{24} \qquad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$\mathrm{E}\left(\Gamma\widehat{\mathrm{AM}}\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{A\Gamma BO}\right)-\mathrm{E}_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(\mathrm{O}\widehat{\mathrm{AM}}\right)=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi\alpha^2}{24}=\frac{\left(3\sqrt{3}-\pi\right)\alpha^2}{24}.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η παράσταση: $\mathrm{A}=\dfrac{\alpha^2-1}{n^2+\alpha n}\cdot\left(\dfrac{n^2}{n-1}-n\right)\cdot\dfrac{\alpha+n-\alpha n^3-n^4}{1-\alpha^2}$, με α πραγματικό αριθμό μεγαλύτερο του 1 και n θετικό ακέραιο, $n>1$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{A}=n^2+n+1$

(β) Δεν είναι δυνατόν ο Α να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{n(n+\alpha)}\cdot\left(\frac{n^2}{n-1}-n\right)\cdot\frac{(\alpha+n)-n^3(\alpha+n)}{-(\alpha-1)(\alpha+1)}\\&=-\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{n(n+\alpha)}\cdot\left(\frac{n^2-n^2+n}{n-1}\right)\cdot\frac{(\alpha+n)(1-n^3)}{(\alpha-1)(\alpha+1)}\\&=-\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{n(n+\alpha)}\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)\cdot\frac{(\alpha+n)(1-n^3)}{(\alpha-1)(\alpha+1)}\\&=-\frac{n(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha+n)(1-n^3)}{n(n+\alpha)(n-1)(\alpha-1)(\alpha+1)}=\frac{n^3-1}{n-1}=n^2+n+1.\end{aligned}$$

(β) Παρατηρούμε ότι: $n^2<\mathrm{A}=n^2+n+1<n^2+2n+1=(n+1)^2$, δηλαδή ο ακέραιος Α βρίσκεται μεταξύ των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακέραιων, οπότε δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο κάποιου ακέραιου.

Πρόβλημα 2

Στις εξετάσεις του Α.Σ.Ε.Π. τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 40. Αν παραλείψουμε το μικρότερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 46. Αν παραλείψουμε το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 28, ενώ, αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 32. Να βρείτε τον αριθμό των μαθημάτων, το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του υποψηφίου.

Λύση

Έστω ότι τα εξεταζόμενα μαθήματα ήταν n και οι βαθμοί του υποψηφίου ήταν οι $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ με τη διάταξη: $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 40n \qquad (1)$$

$$x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 46(n-1) \qquad (2)$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = 28(n-1) \qquad (3)$$

$$x_2 + \ldots + x_{n-1} = 32(n-2) \qquad (4)$$

Με αφαίρεση των (2), (3) και (4) από την εξίσωση (1) λαμβάνουμε:

$$x_1 = 46 - 6n, \qquad x_n = 12n + 28, \qquad x_1 + x_n = 8n + 64,$$

από τις οποίες προκύπτει η εξίσωση:

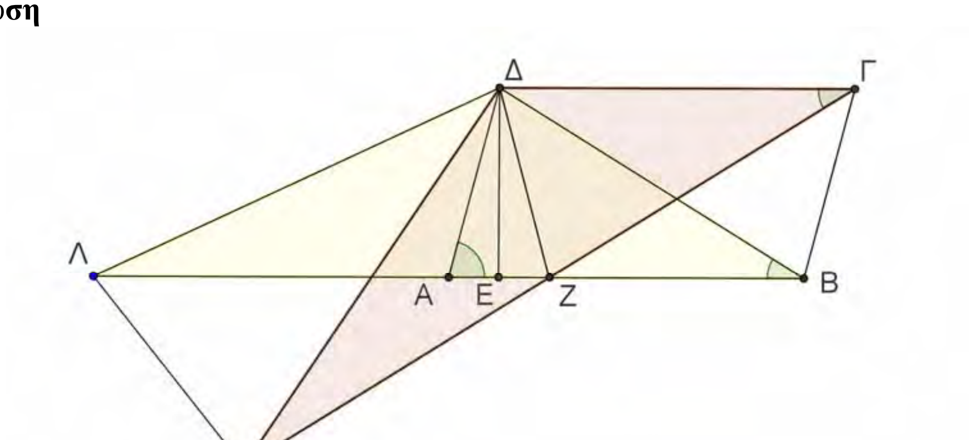
$$x_1 + x_n = (46 - 6n) + (12n + 28) = 8n + 64 \Leftrightarrow 2n = 10 \Leftrightarrow n = 5,$$

οπότε θα είναι $x_1 = 16$ και $x_5 = 88$.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $\mathrm{AB} = \Gamma\Delta = \mathrm{B}\Delta$. Φέρουμε το ύψος του ΔΕ, όπου Ε σημείο της πλευράς ΑΒ. Έστω Ζ το συμμετρικό της κορυφής Α ως προς κέντρο το σημείο Ε. Έστω επίσης Κ το συμμετρικό της κορυφής Γ ως προς κέντρο το σημείο Ζ και Λ το συμμετρικό της κορυφής Β ως προς κέντρο το σημείο Α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.

Λύση



Σχήμα 3

Έχουμε $\Delta\mathrm{Z} = \Delta\mathrm{A}$, λόγω συμμετρίας ως προς την ευθεία του ύψους ΔΕ. Επίσης είναι $\Delta\mathrm{A} = \mathrm{B}\Gamma$, από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Επομένως θα είναι $\Delta\mathrm{Z} = \mathrm{B}\Gamma$. Επιπλέον

$$\Delta\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = 180^\circ - \Delta\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{A} = 180^\circ - \Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma.$$

Επομένως τα τρίγωνα ΔΖΒ και ΖΒΓ έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία (ΔΖ = ΒΓ και ΖΒ κοινή) και τις περιεχόμενες γωνίες των πλευρών αυτών ίσες. Άρα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

- $\Delta\mathrm{B} = \mathrm{Z}\Gamma \Rightarrow \mathrm{AB} = \mathrm{Z}\Gamma \Rightarrow 2\cdot\mathrm{AB} = 2\cdot\mathrm{Z}\Gamma \Rightarrow \mathrm{B}\Lambda = \Gamma\mathrm{K}$

- $Z\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{Z}B \Rightarrow Z\hat{B}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}Z$, αφού από $\Delta\Gamma \parallel ZB$ ισχύει ότι: $\Gamma\hat{Z}B = \Delta\hat{\Gamma}Z$.

Έτσι τα τρίγωνα ΔΒΛ και ΔΓΚ έχουν: $\Delta B = \Delta\Gamma$, ΒΛ=ΓΚ και $\Delta\hat{\Gamma}K = \Delta\hat{B}\Lambda$, οπότε είναι ίσα. Άρα θα έχουν και τις πλευρές τους ΔΛ και ΔΚ ίσες.

Πρόβλημα 4

Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{xyzw} = 1000x + 100y + 10z + w$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 327 και υπόλοιπο 14. Επίσης ο αριθμός $\overline{wzyx} = 1000w + 100z + 10y + x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 227 και υπόλοιπο 16. Να βρεθεί ο αριθμός $\overline{xyzw}$.

Λύση

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$\overline{xyzw} = 1000x + 100y + 10z + w = 327(x + y + z + w) + 14 \qquad (1)$$

$$\overline{wzyx} = 1000w + 100z + 10y + x = 227(x + y + z + w) + 16, \qquad (2)$$

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\overline{xyzw} - \overline{wzyx} = 999(x - w) + 90(y - z) = 100(x + y + z + w) - 2. \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $17 \le x + y + z + w \le 30$, οπότε

$$1698 \le 100(x + y + z + w) - 2 \le 2998$$

$$\Rightarrow 1698 \le 999(x - w) + 90(y - z) \le 2998.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $x - w \in \{1, 2, 3\}$, οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- Για $x - w = 1$ πρέπει $y - z \in \{8, 9\}$, οπότε από την (3) δεν προκύπτει ακέραια λύση για το άθροισμα $x + y + z + w$.
- Για $x - w = 2$, από την (3) λαμβάνουμε:

  $$9(y - z) = 10(x + y + z + w - 20) = \text{πολλαπλάσιο του} 10,$$

  οπότε πρέπει: $y - z = 0$ και $x + y + z + w = 20$. Τότε από τις (1) και (2) έχουμε:

  $$\overline{xyzw} = 6554 \text{ και } \overline{wzyx} = 4556.$$
- Για $x - w = 3$ πρέπει $y - z = 0$, οπότε από την (3) δεν προκύπτει ακέραια λύση για το άθροισμα $x + y + z + w$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-1} = 3.$$

Λύση (1^ος^ τρόπος)

Για $x \in \mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$ έχουμε:

$$\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-1}=3 \Leftrightarrow \frac{1}{x-3}-1+\frac{2}{x-2}-1+\frac{3}{x-1}-1=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{4-x}{x-3}+\frac{4-x}{x-2}+\frac{4-x}{x-1}=0 \Leftrightarrow (4-x)\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 4-x=0 \text{ ή } \frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}=0 \Leftrightarrow x=4 \text{ ή } 3x^2-12x+11=0$$
$$\Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=\frac{12\pm\sqrt{12}}{6} \Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=\frac{6\pm\sqrt{3}}{3}.$$

2^ος^ τρόπος

Για $x \in \mathbb{R}-\{1,2,3\}$ με απαλοιφή παρανομαστών έχουμε:
$$3(x-1)(x-2)(x-3)=(x-1)(x-2)+2(x-1)(x-3)+3(x-2)(x-3)$$
$$\Leftrightarrow 3\left(x^3-6x^2+11x-6\right)=x^2-3x+2+2\left(x^2-4x+3\right)+3\left(x^2-5x+6\right)$$
$$\Leftrightarrow 3x^3-18x^2+33x-18=6x^2-26x+26 \Leftrightarrow 3x^3-24x^2+59x-44=0$$
Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της τελευταίας εξίσωσης είναι: $\pm1, \pm2, \pm4, \pm11, \pm22, \pm44$, από τις οποίες μόνο το 4 ικανοποιεί την εξίσωση. Έτσι με το σχήμα Horner έχουμε
$$3x^3-24x^2+59x-44=(x-4)\left(3x^2-12x+11\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x-4=0 \text{ ή } 3x^2-12x+11=0 \Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=\frac{6\pm\sqrt{3}}{3}.$$

Πρόβλημα 2

Έστω $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7$ θετικοί ακέραιοι που είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Δίνεται επίσης ότι το άθροισμά τους είναι τέλειος κύβος και το άθροισμα των 5 μεσαίων όρων $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,$ είναι τέλειο τετράγωνο. Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του όρου α_4.

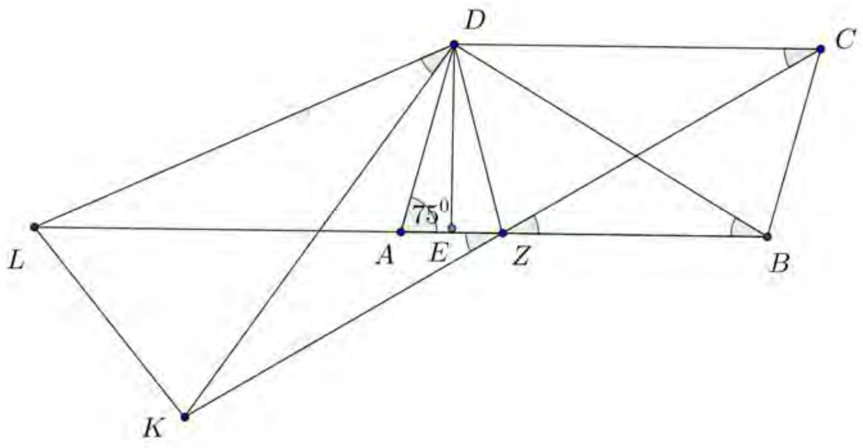
Λύση

Έστω x ο τέταρτος στη σειρά αριθμός. Τότε οι δεδομένοι αριθμοί θα έχουν τη μορφή:
$$\alpha_1=x-3d, \alpha_2=x-2d, \alpha_3=x-d, \alpha_4=x, \alpha_5=x+d, \alpha_6=x+2d, \alpha_7=x+3d.$$
Επομένως το άθροισμά τους ισούται με $7x$ και το άθροισμα των 5 μεσαίων ισούται με $5x$. Επομένως, θα πρέπει να βρούμε το ελάχιστο φυσικό αριθμό x που είναι τέτοιος, ώστε ο $7x$ ναι είναι τέλειος κύβος και ο $5x$ να είναι τέλειο τετράγωνο.
Για να είναι ο $7x$ τέλειος κύβος, θα πρέπει ο x να είναι πολλαπλάσιο του 7^2, ενώ για να είναι και ο $5x$ να είναι τέλειο τετράγωνο, θα πρέπει ο x να είναι πολλαπλάσιο του 5. Για να παραμείνει όμως το $7x$ τέλειος κύβος, θα πρέπει το x να είναι πολλαπλάσιο του 5^3. Τελικά, το x πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του $5^3\cdot7^2$, οπότε η ελάχιστη τιμή του όρου α_4 είναι $5^3\cdot7^2$.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $ABCD$ τέτοιο ώστε $AB=BD=CD$ και με τη γωνία $\hat{A}=75^\circ$. Φέρουμε το ύψος του DE, όπου E σημείο της πλευράς AB. Έστω Z το συμμετρικό της κορυφής A ως προς κέντρο το σημείο E. Έστω επίσης K το συμμετρικό της κορυφής C ως προς κέντρο το σημείο Z και L το συμμετρικό της κορυφής B ως προς κέντρο το σημείο A. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $K\hat{D}L$.

Λύση



Σχήμα 4

Έχουμε $DZ = DA$, λόγω συμμετρίας ως προς την ευθεία του ύψους DE. Επίσης είναι $DA = BC$, από το παραλληλόγραμμο $ABCD$. Επομένως θα είναι $DZ = BC$. Επιπλέον

$$D\hat{Z}B = 180^\circ - D\hat{Z}A = 180^\circ - D\hat{A}B = A\hat{B}C.$$

Επομένως τα τρίγωνα DZB και ZBC έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία ($DZ = BC$ και τη ZB κοινή) και τις περιεχόμενες γωνίες των πλευρών αυτών ίσες. Άρα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

- $DB = ZC \Rightarrow AB = ZC \Rightarrow 2 \cdot AB = 2 \cdot ZC \Rightarrow BL = CK$
- $Z\hat{B}D = CZB \Rightarrow Z\hat{B}D = D\hat{C}Z$, αφού από $DC \parallel ZB$ ισχύει ότι: $C\hat{Z}B = D\hat{C}Z$.

Έτσι τα τρίγωνα DBL και DCK έχουν: $DB = DC$, $BL = CK$ και $D\hat{C}K = D\hat{B}L$, οπότε είναι ίσα. Άρα θα έχουν και τις πλευρές τους DL και DK ίσες και επιπλέον $D\hat{L}B = D\hat{K}C$, οπότε το τετράπλευρο $DLKZ$ είναι εγγράψιμο. Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} K\hat{D}L = K\hat{Z}L = B\hat{Z}C &\quad \text{(ως κατά κορυφή)} \\ = Z\hat{B}D &\quad \text{(από τα ίσα τρίγωνα } DZB \text{ και } ZBC\text{)} \\ = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ &\quad \text{(από το ισοσκελές τρίγωνο } ABD\text{).} \end{aligned}$$

Σημείωση. *Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι με το μετασχηματισμό στροφής με κέντρο το σημείο D κατά γωνία $B\hat{D}C = 30^\circ$, το τρίγωνο CDK θα συμπέσει με το τρίγωνο BDL, οπότε $K\hat{D}L = 30^\circ$.*

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 4x^2 + kx + m$ και υποθέτουμε ότι οι ρίζες του είναι διακεκριμένες και ανήκουν στο διάστημα $(0,1)$. Να αποδειχθεί ότι τουλάχιστον ένας από τους k, m δεν είναι ακέραιος.

Λύση

Έστω $0 < x_1 < x_2 < 1$ οι ρίζες του $f(x)$. Τότε:

$$f(x) = 4(x - x_1)(x - x_2) \qquad (1).$$

Υποθέτουμε ότι οι k, m είναι ακέραιοι. Τότε οι αριθμοί $f(0) = m$ και $f(1) = 4 + k + m$ είναι ακέραιοι . Αφού το πρόσημο του τριωνύμου είναι ομόσημο του 4 εκτός των ριζών και οι αριθμοί 0 και 1 είναι εκτός των ριζών, έπεται ότι $f(0) > 0$ και $f(1) > 0$, οπότε, αφού είναι ακέραιοι, θα είναι $f(0) \geq 1$ και $f(1) \geq 1$. Από την (1) για $x = 0$ και $x = 1$ παίρνουμε: $4x_1x_2 \geq 1$ και $4(1 - x_1)(1 - x_2) \geq 1$. Πολλαπλασιάζοντας τις δύο σχέσεις έχουμε:

$$16x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2) \geq 1. \qquad (2)$$

Όμως ισχύουν:

$$4x_1(1 - x_1) \leq 1 \Leftrightarrow (2x_1 - 1)^2 \geq 0 \text{ και } 4x_2(1 - x_2) \leq 1 \Leftrightarrow (2x_2 - 1)^2 \geq 0 \qquad (3)$$

οπότε με πολλαπλασιασμό των δύο τελευταίων κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$16x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2) \leq 1. \qquad (4)$$

Επομένως πρέπει να έχουμε ισότητα:

$$16x_1\left(1 - x_1\right)x_2\left(1 - x_2\right) = 1, \qquad (5)$$

η οποία, λόγω των (3), ισχύει μόνον όταν $x_1 = x_2 = \dfrac{1}{2}$. Αυτό όμως είναι άτοπο καθώς υποθέσαμε ότι οι ρίζες είναι διακεκριμένες.
Επομένως, δεν είναι δυνατόν να είναι και δύο αριθμοί k και m ακέραιοι.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στις εξετάσεις του Α.Σ.Ε.Π. τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι και 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 50. Αν παραλείψουμε το μικρότερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 56. Αν παραλείψουμε το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 40, ενώ, αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 45. Να βρείτε τον αριθμό των μαθημάτων, το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του υποψηφίου.

Λύση

Έστω ότι τα εξεταζόμενα μαθήματα ήταν n και οι βαθμοί του υποψηφίου ήταν οι $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ με τη διάταξη: $x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n$. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n &= 50n && (1)\\ x_2 + ... + x_{n-1} + x_n &= 56(n-1) && (2)\\ x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} \qquad &= 40(n-1) && (3)\\ x_2 + ... + x_{n-1} \qquad &= 45(n-2) && (4) \end{aligned}$$

Με αφαίρεση των (2), (3) και (4) από την εξίσωση (1) λαμβάνουμε:

$$x_1 = 56 - 6n, \qquad x_n = 10n + 40, \qquad x_1 + x_n = 5n + 90,$$

από τις οποίες προκύπτει η εξίσωση:

$$x_1 + x_n = (56-6n) + \left(10n+40\right) = 5n+90 \Leftrightarrow n = 6,$$

οπότε θα είναι $x_1 = 20$ και $x_6 = 100$.

Πρόβλημα 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί a, b ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{a}{b+a} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \frac{3}{2},$$

να αποδειχθεί ότι: $a = b$.

Λύση

Θέτουμε $\sqrt[3]{\frac{b}{a}} = x$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $x = 1$. Η δοσμένη σχέση τότε γίνεται:

$$\frac{1}{1+x^3} + x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 + 2x(x^3+1) = 3(x^3+1) \Leftrightarrow 2x^4 - 3x^3 + 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^4 - x^3) - (x^3 - x) + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^3 - x^2 - x + 1) = 0$$

Όμως $2x^3 - x^2 - x + 1 = x^3 + (x^3 - x^2) - (x-1) = x^3 + (x-1)^2(x+1) > 0$. Επομένως πρέπει $x = 1$ και άρα $a = b$.

Πρόβλημα 3

Να βρεθεί ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος k με την ακόλουθη ιδιότητα: Ο αριθμός 2018 γράφεται ως άθροισμα k τετραγώνων διαφορετικών ακεραίων.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι ο μεγαλύτερος τέτοιος k είναι ο n και $a_1, a_2, ..., a_n$ είναι διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους ακέραιοι ώστε $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 2018$. Τότε

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \geq 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ οπότε } 2018 \geq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Παρατηρούμε ότι για $n = 18$ η τιμή της παράστασης στο δεξί μέλος ισούται με 2109 επομένως $n \leq 17$. Θα αποδείξουμε τώρα ότι το 2018 γράφεται ως άθροισμα 17 τετραγώνων, διαφορετικών ανά δύο ακεραίων.

Έχουμε ότι $1^2 + ... + 19^2 = 2470$, οπότε αν βρούμε δύο τετράγωνα με άθροισμα $2470 - 2018 = 452$, τότε το 2018 θα γράφεται ως το άθροισμα των υπόλοιπων 17 τετραγώνων. Γράφουμε:

$$452 = 2^2 \cdot 113 = 2^2 \cdot (8^2 + 7^2) = 16^2 + 14^2,$$

οπότε $2018 = 1^2 + 2^2 + ... + 13^2 + 15^2 + 17^2 + 18^2 + 19^2$, που είναι το ζητούμενο.

Πρόβλημα 4

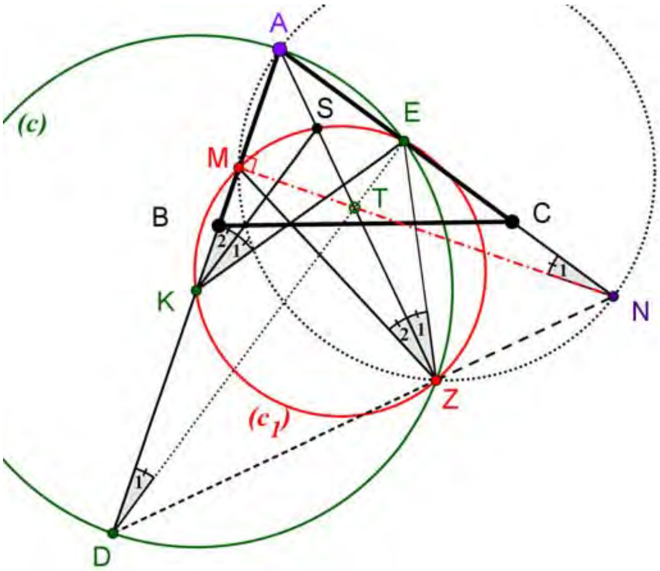
Δίνεται τρίγωνο ABC με $AB < AC < BC$. Στη προέκταση της AB (προς το μέρος του B), θεωρούμε σημείο K και στη συνέχεια θεωρούμε τον κύκλο $c(K, KA)$ (με κέντρο το K και ακτίνα KA). Ο κύκλος (c) τέμνει την ευθεία AB στο σημείο D και την ευθεία AC στο σημείο E. Σε τυχόν σημείο M εσωτερικό της πλευράς AB θεωρούμε κάθετη προς την ευθεία AB η οποία τέμνει την ευθεία AC στο σημείο

N. Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου KME (έστω (c_1)) τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Z, να αποδείξετε ότι οι ευθείες MN, DE, AZ περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

Λύση

Έστω ότι η AZ, τέμνει τον κύκλο (c_1) στο σημείο S. Από τα ορθογώνια τρίγωνα AED και AMN έχουμε:

$$A\hat{D}E = \hat{D}_1 = \hat{N}_1 = 90^o - \hat{A}. \qquad (1)$$



Σχήμα 5

Οι γωνίες $\hat{D}_1$ και $\hat{Z}_1$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c) και βαίνουν στο τόξο AE, άρα:

$$\hat{D}_1 = \hat{Z}_1 \qquad (2)$$

Οι γωνίες $\hat{K}_1$ και $\hat{Z}_1$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c_1) και βαίνουν στο τόξο SE, άρα:

$$\hat{K}_1 = \hat{Z}_1 \qquad (3)$$

Από τις ισότητες $(1),(2),(3)$ συμπεραίνουμε ότι $\hat{K}_1 = 90^o - \hat{A}$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο KAE ($KA = KE$ ως ακτίνες του κύκλου (c)) έχουμε:

$$A\hat{K}E = \hat{K}_1 + \hat{K}_2 = 180 - 2\hat{A}.$$

Επειδή όμως $\hat{K}_1 = 90^\circ - A$, συμπεραίνουμε ότι $\hat{K}_2 = 90^\circ - A$.

Οι γωνίες $\hat{K}_2$ και $\hat{Z}_2$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c_1) και βαίνουν στο τόξο SM, άρα:

$$\hat{K}_2 = \hat{Z}_2. \qquad (4)$$

Τελικά συμπεραίνουμε ότι $\hat{Z}_2 = \hat{N}_1$, οπότε το τετράπλευρο $AMZN$ είναι εγγράψιμο και κατά συνέπεια $A\hat{Z}N = A\hat{M}N = 90^\circ$.

Η τελευταία ισότητα ($A\hat{Z}N = 90^\circ$) σε συνδυασμό με την ισότητα $A\hat{Z}D = 90^o$ (η γωνία $A\hat{Z}D$ βαίνει στη διάμετρο AD του κύκλου (c)), αποδεικνύει ότι τα σημεία D, Z, N είναι συνευθειακά.

Οι ευθείες MN, DE, AZ περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν), διότι είναι ύψη του τριγώνου ADN.