*Στις Πανελλήνιες εξετάσεις των Γενικών Λυκείων 2010, μια λύση του θέματος Γ3 οδηγεί στον υπολογισμό του ολοκληρώματος* $\int_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx$ *με αντικατάσταση* $u = x^2+1$, *όπου η συνάρτηση* $\varphi(x) = x^2+1$ *δεν είναι 1-1 στο διάστημα* $[-1,1]$.

*Στην εργασία αυτή θα δείξουμε ότι για την εγκυρότητα της λύσης δεν είναι αναγκαία συνθήκη η* $\varphi(x)$ *να είναι 1- 1, αρκεί όμως να ικανοποιούνται άλλες προϋποθέσεις:*

## Η ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΣΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ
**(Μελέτη περίπτωσης)**

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

***Μια συνάρτηση*** $\varphi$ ***είναι ορισμένη και έχει συνεχή παράγωγο σε ένα διάστημα*** $[\alpha,\beta]$.

***Αν η συνάρτηση*** $f$ ***είναι συνεχής στο*** $\varphi([\alpha,\beta])$ ***τότε είναι έγκυρη η ισότητα*** $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$

**Απόδειξη**

Το $\varphi([\alpha,\beta])$ είναι κλειστό διάστημα αφού η $\varphi$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και δεν είναι σταθερή.

Αν $F$ είναι μια παράγουσα της $f$ στο $\varphi([\alpha,\beta])$ θα ισχύει ότι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \varphi([\alpha,\beta])$ -Η $F$ υπάρχει επειδή η $f$ είναι συνεχής στο $\varphi([\alpha,\beta])$-

Η συνάρτηση $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και έτσι θα έχουμε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} F'(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} [F(\varphi(x))]'dx = [F(\varphi(x))]_{\alpha}^{\beta} =$$

$$F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} F'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

***<u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Α</u>***

**Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής** $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ **όπου η** $\varphi$ **είναι ορισμένη και έχει συνεχή παράγωγο σε ένα διάστημα** $[\alpha,\beta]$ **και η** $f$ **είναι συνεχής στο** $\varphi([\alpha,\beta])$ **τότε** $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$

**<u>Εφαρμογή 1 (Θέμα Πανελληνίων 2010_Γ4)</u>**

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx$

Λύση

Έχουμε ότι $\int_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \ln(x^2+1)(x^2+1)'\,dx$

Η συνάρτηση $\varphi(x) = x^2+1$ έχει συνεχή παράγωγο στο $[-1,1]$ με $\varphi([-1,1]) = [1,2]$, ενώ η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι συνεχής στο $\varphi([-1,1]) = [1,2]$ με $\varphi(-1) = 2$ και $\varphi(1) = 2$

Επομένως ισχύει ότι $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \ln(x^2+1)(x^2+1)'\,dx = \frac{1}{2}\int_{2}^{2} \ln(x)dx = \frac{1}{2}0 = 0$

***<u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Β</u>***

**Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής** $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ **. Αναζητούμε συνάρτηση** $\varphi$ **με συνεχή παράγωγο σε ένα διάστημα** $[\gamma,\delta]$ **τέτοια ώστε** $\varphi(\gamma) = \alpha$ **,** $\varphi(\delta) = \beta$ **και** $f$ **συνεχής στο** $\varphi([\gamma,\delta])$**, τότε ισχύει ότι**

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\gamma}^{\delta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

*Μίλτος Παπαγρηγοράκης*

**Η πληροφορία ότι η $\varphi$ είναι γνήσια μονότονη άρα 1-1, απλουστεύει τους υπολογισμούς μας, τόσο στην εύρεση των $\gamma$, $\delta$ και του $\varphi([\gamma,\delta])$ όσο και στην περίπτωση που χρειαστεί να λύσουμε ως προς την νέα μεταβλητή ολοκλήρωσης**

**Εφαρμογή 2**

Για τον υπολογισμό του $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$ .

***1^{ος} Τρόπος***

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(t)=\eta\mu t$ .

Έχουμε ότι $\varphi(0)=0$ και $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$, ενώ η $\varphi$ έχει συνεχή παράγωγο στο $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$.

Επειδή η $\varphi$ είναι γνήσια αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ το $\varphi\left(\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\right)=\left[0,\frac{1}{2}\right]$

Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ είναι συνεχής στο $\varphi\left(\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\right)=\left[0,\frac{1}{2}\right]$

Επομένως

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1-\eta\mu^2x}\,(\eta\mu x)'\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2x}\,\sigma\upsilon\nu x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}|\sigma\upsilon\nu x|\sigma\upsilon\nu x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sigma\upsilon\nu^2x\,dx=\ldots=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$$

***2^{ος} Τρόπος***

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(t)=\eta\mu t$ .

Έχουμε ότι $\varphi(0)=0$ και $\varphi\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ ενώ η $\varphi$ έχει συνεχή παράγωγο στο $\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]$.

Ακόμα ισχύει ότι $\varphi\left(\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]\right)=[0,1]$.

Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ είναι συνεχής στο $\varphi\left(\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]\right)=[0,1]$

Επομένως

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{5\pi}{6}}\sqrt{1-\eta\mu^2x}\,(\eta\mu x)'\,dx=\int_0^{\frac{5\pi}{6}}\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2x}\,\sigma\upsilon\nu x\,dx=\int_0^{\frac{5\pi}{6}}|\sigma\upsilon\nu x|\sigma\upsilon\nu x\,dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sigma\upsilon\nu x|\sigma\upsilon\nu x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}}|\sigma\upsilon\nu x|\sigma\upsilon\nu x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^2x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}}\sigma\upsilon\nu^2x\,dx=\ldots=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$$

***Σχόλιο.***

***Όπως φαίνεται από τους δύο τρόπους λύσης, η τιμή του ολοκληρώματος είναι η ίδια και στις δύο περιπτώσεις, όμως οι υπολογισμοί είναι απλούστεροι στον 1^ο τρόπο όπου η φ είναι γνήσια μονότονη.***

**Εφαρμογή 3**

**Να υπολογιστεί το** $I=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$ , θεωρώντας τη συνάρτηση $\varphi(t)=\varepsilon\varphi t$

*Μίλτος Παπαγρηγοράκης*
*Χανιά*
*Μάιος 2010*


Βιβλιογραφία:

Spivak M. 1995 Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός ΠΕΚ
Thomas G- Finley R 1995 Απειροστικός Λογισμός ΠΕΚ
Καζαντζής Θ.Ν. 1994 Ολοκληρώματα, Μαθηματική Βιβλιοθήκη
Καζαντζής Θ.Ν. 1995 1000 Ασκήσεις Ολοκληρωμάτων, Μαθηματική Βιβλιοθήκη
Περιοδικό Ευκλείδης Β ΕΜΕ
Τζιρώνης Κ. Τζουβάρας Θ. 1996 Παράγωγοι Ολοκληρώματα , Σαββάλας