Μάθημα / Τάξη ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία
21-02-2022

Θέμα Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

Μονάδες 10

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $A=\Delta_1\cup\Delta_2$. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1,Δ_2 τότε είναι γνησίως φθίνουσα και στο Α.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 4)

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν x_0 εσωτερικό σημείο του Δ και f παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0)=0$ τότε η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0.

β) Αν για την συνάρτηση f είναι $f'(x)=0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ τότε η f σταθερή στο Δ.

γ) Κρίσιμα σημεία της f είναι όλες οι πιθανές θέσεις πιθανών ακροτάτων της f.

δ) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Δ λέγεται συνάρτηση 1-1 αν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\Delta$ ισχύει $x_1=x_2$ τότε $f(x_1)=f(x_2)$.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}-e^x+x-2, & 0\le x<1\\ \dfrac{\ln^2 x}{2}+x-\ln x-e-2, & x\ge 1\end{cases}$$

Β1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Μονάδες 5

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε την εφαπτομένη ευθεία της c_f στο $x_0=e$.

Μονάδες 5

Β4. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(3)=0$, $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε:

$f'(x)=-\dfrac{2}{f^2(x)+5}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το πρόσημο αυτής.

Μονάδες 10

Γ2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να προσδιορίσετε την f^{-1}.

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $3f(x)=3-x$ έχει τρεις τουλάχιστον διαφορετικές ρίζες $k_1,\ k_2,\ k_3\ \in\mathbb{R}$ με $k_1<k_2<k_3$.

Μονάδες 9

Θέμα Δ

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν: $f(0)=2$, $f(\mathbb{R})=[2+\infty)$ και

$$e^{f(x)}+f(x)=e^{f''(x)}+\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x+h)}{h}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $e^{f(x)}+f(x)=e^{f''(x)}+f''(x)$.

Μονάδες 7

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{x}+e^{-x}$.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0)=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \text{ και } f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<f(x_0)$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν σημεία της c_f από τα οποία άγονται κάθετες μεταξύ τους εφαπτόμενες.

Μονάδες 5

Απαντήσεις

Θέμα Α

Α1. Για $x \neq x_0$, ισχύει :

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε :

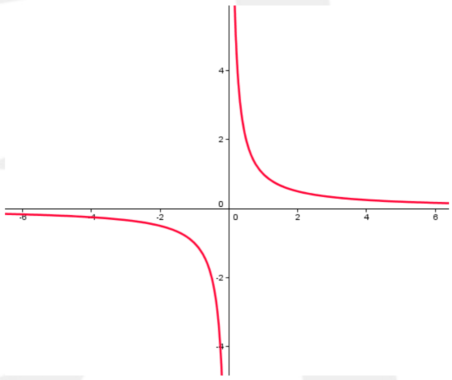
$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0)$$

δηλαδή

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Α2. α) Ψ

β Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ με πεδίο ορισμού $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα $(-\infty,0),(0,+\infty)$ όμως δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο A γιατί για $-10<10 \Rightarrow f(-10)<f(10)$ άρα δεν ισχύει για κάθε $x_1,x_2 \in A$ με $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$



Α3. α) Λ, **β)** Λ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Λ

Θέμα Β

Β1. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(-e^x+x-2)=-e-1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\ln^2 x}{2}+x-\ln x-e-2\right)=-e-1$$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-e-1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=-e-1$ και $f(1)=-e-1$ άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1)$ με $f'(x)=1-e^x$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-e^x>0 \Leftrightarrow x<0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1}{x}\ln x+1-\frac{1}{x}=\frac{\ln x+(x-1)}{x}>0$

για κάθε $x\in(1,+\infty)$ αφού $x-1>0$ και $\ln x>0$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,1)\cup(1,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών και στο $x_0=1$ από το ερώτημα α) άρα είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Τότε σύμφωνα με τον διπλανό πίνακα,
η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,1],
η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$,
η f παρουσιάζει για x=0 τοπικό μέγιστο
το $f(0)=-3$, η f παρουσιάζει για x=1 ολικό ελάχιστο το $f(1)=-e-1$.

x	0	1	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	↘		↗

Β3. Ο τύπος της εφαπτομένης στο x_0 είναι :

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ άρα για $x_0=e$ έχουμε $y-f(e)=f'(e)(x-e)$

$f(e)=\frac{\ln^2 e}{2}+e-\ln e-e-2=-2 \quad f'(e)=\frac{\ln e+(e-1)}{e}=1$ άρα

$y+2=x-e \Leftrightarrow y=x-e-2$

Β4. Έστω $\Delta_1=[0,1]$, $\Delta_2=(1,+\infty)$ και λόγω της μονοτονίας της f έχουμε:

$f(\Delta_1)=[f(1),f(0)]=[-e-1,-3]$ και $f(\Delta_2)=\left(f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-e-1,+\infty)$ αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln^2 x}{2}-e-2\right)=+\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x))=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln^2 x}{2}+x-\ln x-e-2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x\left(\frac{\ln x}{2}+\frac{x}{\ln x}-1-\frac{e+2}{\ln x}\right)\right)=+\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\right)\underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

Αν $\lambda < -e-1$ η $f(x)=\lambda$ αδύνατη.
Αν $\lambda = -e-1$ η $f(x)=\lambda$ έχει μία λύση αφού $\lambda \in f(\Delta_1)$ μόνο.
Αν $-e-1<\lambda<-3$ η $f(x)=\lambda$ έχει δύο λύσεις αφού $\lambda \in f(\Delta_1)$, $\lambda \in f(\Delta_2)$.
Αν $\lambda=-3$ η $f(x)=\lambda$ έχει δύο λύσεις αφού $\lambda \in f(\Delta_1)$, $\lambda \in f(\Delta_2)$.
Αν $\lambda>-3$ η $f(x)=\lambda$ έχει μία λύση αφού $\lambda \in f(\Delta_2)$ μόνο.

Θέμα Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = -\dfrac{2}{f^2(x)+5} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

Ισχύει $f(3)=0$ άρα για κάθε x με

$x<3 \Leftrightarrow f(x)>f(3) \Leftrightarrow f(x)>0$

$x>3 \Leftrightarrow f(x)<f(3) \Leftrightarrow f(x)<0$

x	-∞	3	+∞
f	+	0	−

Γ2. Αφού η f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ είναι και «1-1», άρα αντιστρέφεται.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $f'(x) = -\dfrac{2}{f^2(x)+5} \Leftrightarrow f'(x)f^2(x)+5f'(x)=-2 \Leftrightarrow$

$3f'(x)f^2(x)+15f'(x)+6=0$ άρα $\left(f^3(x)+15f(x)+6x\right)'=0$

και αφού η $f^3(x)+15f(x)+6x$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση άθροισμα και γινόμενο συνεχών από συνέπειες θεωρήματος μέσης τιμής θα ισχύει:
$f^3(x)+15f(x)+6x=c$, $c \in \mathbb{R}$ και αφού $f(3)=0$ παίρνουμε:

$f^3(3)+15f(3)+18=c \Leftrightarrow c=18$ άρα $f^3(x)+15f(x)+6x-18=0$

Στην παραπάνω σχέση θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ και έχουμε

$y^3+15y+6f^{-1}(y)-18=0, y \in \mathbb{R}$ (αφού $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$) ή

$f^{-1}(y)=3-\dfrac{y^3+15y}{6} \Leftrightarrow f^{-1}(y)=-\dfrac{y^3}{6}-\dfrac{5}{2}y+3$, $y \in \mathbb{R}$ επομένως

$f^{-1}(x)=-\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{5}{2}x+3$, $x \in \mathbb{R}$, αφού $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

Γ3. Έχουμε:

$$3f(x)=3-x \Leftrightarrow f(x)=1-\frac{1}{3}x \Leftrightarrow f^{-1}\big(f(x)\big)=f^{-1}\left(1-\frac{1}{3}x\right) \Leftrightarrow$$

$$x=-\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3}x\right)^3-\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{3}x\right)+3 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3}x\right)^3-\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{3}x\right)-x+3=0$$

Έστω $w(x)=-\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3}x\right)^3-\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{3}x\right)-x+3\ ,\ x\in\mathbb{R}$

Η w συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και διαφορά άρα και στο $[-3,0]$

$$w(-3)=-\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3}(-3)\right)^3-\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{3}(-3)\right)+3+3=-\frac{1}{3}<0$$

$$w(0)=-\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3}0\right)^3-\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{3}0\right)+3=-\frac{1}{6}-\frac{5}{2}+3=\frac{1}{3}>0$$

δηλαδή $w(-3)w(0)<0$

άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $k_1\in(-3,0)$ τέτοιο ώστε $w(k_1)=0 \Leftrightarrow 3f(k_1)=3-k_1$

Παρατηρούμε ότι: $w(3)=-\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3}3\right)^3-\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{3}3\right)-3+3=0$

έστω $k_2=3$ τότε $w(k_2)=0 \Leftrightarrow 3f(k_2)=3-k_2$

Η w συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και διαφορά άρα και στο $[6,12]$

$$w(6)=-\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3}6\right)^3-\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{3}6\right)-6+3=\frac{1}{6}+\frac{5}{2}-3=-\frac{1}{3}<0$$

$$w(12)=-\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3}12\right)^3-\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{3}12\right)-12+3=\frac{27}{6}+\frac{15}{2}-9=3>0$$

δηλαδή $w(6)w(12)<0$

άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $k_3 \in (6,12)$ τέτοιο ώστε $w(k_3)=0 \Leftrightarrow 3f(k_3)=3-k_3$

Άρα η εξίσωση $3f(x)=3-x$ έχει τρεις τουλάχιστον διαφορετικές ρίζες $k_1,\ k_2,\ k_3 \in \mathbb{R}$ με $k_1<k_2<k_3$

Θέμα Δ

Δ1. Έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x)+f'(x)-f'(x+h)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{h}+\frac{f'(x)-f'(x+h)}{h}\right)$$

αλλά αφού η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη

ισχύει: $$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{h}\right)\underset{\omega\to x}{\overset{x+2h=\omega}{=}}\lim_{\omega\to x}\left(\frac{f'(\omega)-f'(x)}{\frac{\omega-x}{2}}\right)=\lim_{\omega\to x}2\left(\frac{f'(\omega)-f'(x)}{\omega-x}\right)=2f''(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f'(x)-f'(x+h)}{h}\right)\underset{\omega\to x}{\overset{x+h=\omega}{=}}\lim_{\omega\to x}\left(\frac{f'(x)-f'(\omega)}{\omega-x}\right)=\lim_{\omega\to x}\left(-\frac{f'(\omega)-f'(x)}{\omega-x}\right)=-f''(x)$$

Συνεπώς $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+2h)-f'(x+h)}{h}=2f''(x)-f''(x)=f''(x)$ άρα

$$e^{f(x)}+f(x)=e^{f''(x)}+\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x+h)}{h}\Leftrightarrow e^{f(x)}+f(x)=e^{f''(x)}+f''(x)$$

Δ2. Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=e^x+x,\ x\in\mathbb{R}$. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων με:

$g'(x)=e^x+1>0$

άρα η g είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1. Από το ερώτημα α) έχουμε:

$$e^{f(x)}+f(x)=e^{f''(x)}+f''(x)\Leftrightarrow g(f(x))=g(f''(x))\overset{1-1}{\Leftrightarrow}f(x)=f''(x)$$

$$f(x)=f''(x)\Leftrightarrow f(x)+f'(x)=f''(x)+f'(x)\Leftrightarrow$$

$e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x f''(x)+e^x f'(x) \Leftrightarrow e^x f(x)+e^x f'(x)-\left(e^x f''(x)+e^x f'(x)\right)=0$ άρα

$\left(e^x f(x)-e^x f'(x)\right)'=0$

Η συνάρτηση $e^x f(x)-e^x f'(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη άρα $e^x f(x)-e^x f'(x)=c_1$ (1).

Αφού $f(\mathbb{R})=[2+\infty)$ και $f(0)=2$ ισχύει $f(x)\ge f(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f παρουσιάζει στο x=0 ακρότατο. Η f είναι παραγωγίσιμη στο x=0 , το x=0 είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$ άρα ισχύει το θεώρημα Fermat άρα $f'(0)=0$.

Τότε για x=0 στην (1) έχουμε: $e^0 f(0)-e^0 f'(0)=c_1 \Leftrightarrow c_1=2$ άρα

$e^x f(x)-e^x f'(x)=2 \Leftrightarrow f'(x)-f(x)+2e^{-x}=0 \Leftrightarrow$

$e^{-x} f'(x)-e^{-x} f(x)+2e^{-2x}=0$ άρα $\left(f(x)e^{-x}-e^{-2x}\right)'=0$

Η συνάρτηση $f(x)e^{-x}-e^{-2x}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη άρα $f(x)e^{-x}-e^{-2x}=c_2$.

Για x=0 στην παραπάνω σχέση έχουμε $f(0)e^0-e^0=c_2 \Leftrightarrow c_2=1$ άρα

$f(x)e^{-x}-e^{-2x}=1 \Leftrightarrow f(x)e^{-x}=e^{-2x}+1 \Leftrightarrow f(x)=e^{-x}+e^x$, $x\in\mathbb{R}$

Δ3. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως άθροισμα και σύνθεση συνεχών άρα παίρνει μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m άρα ισχύει $m\le f(x)\le M$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Τότε για x=α έχουμε: $m\le f(\alpha)\le M$ και για x=β $m\le f(\beta)\le M$ που με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$2m\le f(\alpha)+f(\beta)\le 2M \Leftrightarrow m\le \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\le M$$

άρα το $\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\in f\left([\alpha,\beta]\right)=[m,M]$ συνεπώς από ορισμό συνάρτησης

υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

Η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$ ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ ως άθροισμα και σύνθεση

παραγωγίσιμων.

Άρα ισχύει το θεώρημα Μέσης Τιμής άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$x_1 \in \left(\alpha, \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) = \dfrac{f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\dfrac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \dfrac{f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\dfrac{\beta-\alpha}{2}}$

Η f είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ ως άθροισμα και σύνθεση παραγωγίσιμων.
Άρα ισχύει το θεώρημα Μέσης Τιμής

άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \dfrac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{f(\beta) - f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\dfrac{\beta-\alpha}{2}}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x - e^{-x}$.
Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων με

$f''(x) = e^x + e^{-x} > 0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Τότε έχουμε:

$$x_1 < x_2 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x_1) < f'(x_2) \Leftrightarrow \frac{f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\dfrac{\beta-\alpha}{2}} < \frac{f(\beta) - f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\dfrac{\beta-\alpha}{2}} \Leftrightarrow$$

$$2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\alpha) + f(\beta) \Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(x_0)$$

Δ4. Από ερώτημα γ) η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα για το σύνολο τιμών έχουμε: $f'(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x - e^{-x}\right), \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x - e^{-x}\right)\right) = (-\infty, +\infty)$

άρα υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) = c \neq 0$ και $x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$f'(x_2) = -\frac{1}{c}$ συνεπώς $f'(x_1)f'(x_2) = -1$ άρα στα σημεία $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ οι εφαπτόμενες της c_f είναι κάθετες.

Από το Μαθηματικό Τμήμα των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργάστηκαν :
Γ. Ανδρουλιδάκης, Μ. Βελιβασάκη, Ρ. Βραχνάκη,
Μ. Βυνιχάκης, Δ. Δημητρίου, Α. Δουλγεράκης,
Μ. Μπαρμπούνη, Ζ. Μπομπότη, Γ. Παπαδοσπυριδάκης
Η. Σπυρόπουλος , Γ. Φαρσάρης