ΚΥΡΙΑΚΗ 13 ΜΑΡΤΙΟΥ 2022

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ**
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Επιμέλεια διαγωνίσματος:** ΙΩΑΝΝΑ ΚΑΤΣΙΠΟΥΛΑΚΗ

**ΘΕΜΑ Α**
**Α1.** Σχολικό βιβλίο σελ. 135
**Α2.** Σχολικό βιβλίο σελ. 140
**Α3. α)** Ψ
**β)** Σχολικό βιβλίο σελ. 136
**Α4. α)** Λ
**β)** Σ
**γ)** Λ
**δ)** Λ
**ε)** Σ

**ΘΕΜΑ Β**
**Β1.** Η $f$ συνεχής ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων.

$$f'(x)=\frac{\left(2e^x\right)'\left(e^x+1\right)-2e^x\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{2e^x\left(e^x+1\right)-2e^xe^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{\cancel{2e^{2x}}+2e^x-\cancel{2e^{2x}}}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}>0$$

Άρα η $f$ είναι γνησίως αύξουσα.
Για το σύνολο τιμών εργαζόμαστε ως εξής:

$$f(\mathbb{R})\underset{f\uparrow}{\overset{f_{\sigma\upsilon\nu}}{=}}\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,2)$$

γιατί:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^x}{e^x+1}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x}{e^x+1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x}{e^x}=2$

**Β2.** Από Β1. η $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ άρα η $f$ είναι «1-1» και αντιστρέφεται.
Αν $y\in f(\mathbb{R})=(0,2)$, τότε λύνουμε ως προς $x\in\mathbb{R}$ την εξίσωση $f(x)=y$.
Έχουμε:

$$f(x)=y\Leftrightarrow\frac{2e^x}{e^x+1}=y\Leftrightarrow 2e^x=y\left(e^x+1\right)\Leftrightarrow 2e^x=ye^x+y$$

$$\Leftrightarrow 2e^x-ye^x=y\Leftrightarrow e^x(2-y)=y\overset{y\neq 2}{\Leftrightarrow}e^x=\frac{y}{2-y}\quad(1)$$

Πρέπει $y \neq 2$ και $\dfrac{y}{2-y} > 0 \Leftrightarrow y(2-y) > 0 \Leftrightarrow (y-2)y < 0 \Leftrightarrow 0 < y < 2$ (2)

Η (1) γράφεται:

$$e^x = \frac{y}{2-y} \Leftrightarrow x = \ell\text{n}\left(\frac{y}{2-y}\right) \Leftrightarrow \ f^{-1}(y) = \ell\text{n}\left(\frac{y}{2-y}\right),\ y \in (0,2)$$

Άρα: $f^{-1}(x) = \ell\text{n}\left(\dfrac{x}{2-x}\right),\ x \in (0,2)$

**Β3.** Αν $x \in \mathbb{R}$ τότε:

$$f\left(f(x)\right) > \frac{2e}{e+1} \Leftrightarrow f\left(f(x)\right) > f(1) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x > 0$$

**Β4.** Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μοναδική λύση για $x \in (0,2)$.

Θεωρώ συνάρτηση $g(x) = f(x) - x = \dfrac{2e^x}{e^x+1} - x,\ x \in [0,2]$ .

- Η $g$ συνεχής στο $[0,2]$ ως πράξεις συνεχών.
- $g(0) = \dfrac{2e^0}{e^0+1} - 0 = \dfrac{2}{2} = 1 > 0$
- $g(2) = \dfrac{2e^2}{e^2+1} - 2 = \dfrac{\cancel{2e^2} - \cancel{2e^2} - 2}{e^2+1} = \dfrac{-2}{e^2+1} < 0$

Άρα από θ. Bolzano υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (0,2)$ τέτοια ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$

Βρίσκουμε την μονοτονία της $g$. Η $g$ παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων.

$$g'(x) = f'(x) - (x')' \overset{B1}{=} \frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2} - 1 = \frac{\cancel{2e^x} - e^{2x} - \cancel{2e^x} - 1}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$= \dfrac{-e^{2x}-1}{\left(e^x+1\right)^2} = \dfrac{-\left(e^{2x}+1\right)}{\left(e^x+1\right)^2} < 0$ και επειδή $g$ συνεχής η $g$ είναι γν. φθίνουσα.

Άρα η λύση $x_0 \in (0,2)$ είναι μοναδική.

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Η $f$ συνεχής για $x > 1$ και για $x < 1$ ως πράξεις συνεχών.

Ελέγχω αν η $f$ είναι συνεχής στο 1:

- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x + lnx}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 = f(1)$

Άρα η $f$ συνεχής στο 1.

- Για $x>1$, η $f$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$f'(x)=\left(\frac{x+\ell n x}{x}\right)'=\left(1+\frac{\ell n x}{x}\right)'=\frac{(\ell n x)' x-(x)' \ln x}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}x-\ell n x}{x^2}=\frac{1-\ell n x}{x^2}.$$

➡ $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-\ell n x}{x^2}>0 \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} \ell n x<1 \Leftrightarrow \ell n x<\ell n e \Leftrightarrow x<e \overset{x>1}{\Rightarrow} 1<x<e$

➡ $f'(x)<0 \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow x>e$

Η $f$ είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, επομένως η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$.

**Γ2.** Ελέγχω αν η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$:

- $$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{x+\ell n x}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\cancel{x}+\ell n x-\cancel{x}}{x(x-1)}=$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\ell n x}{x^2-x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}}{2x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x(2x-1)}=1$$

- $$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to1^-}(x+1)=2$$

Επομένως η $f$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, άρα δεν υπάρχει εφαπτομένη στο $x_0=1$.

**Γ3.** Έστω $y=\lambda x+\beta$ η ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$.

- $$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ell n x}{x^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$$

- $$\beta=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ell n x}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$$

Άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$.

**Γ4.** $$\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^e|f(x)|dx=\int_0^1|f(x)|dx+\int_1^e|f(x)|dx=$$

$$=\int_0^1|x^2|dx+\int_1^e\left|\frac{x+\ell n x}{x}\right|dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^e\frac{x+\ell n x}{x}dx \quad (1)$$

γιατί: $1\le x\le e \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(1)\le f(x)\le f(e)\Leftrightarrow 1\le f(x)\le \dfrac{1+e}{e}\Rightarrow f(x)>0$

Άρα (1):

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^1 x^2dx+\int_1^e \frac{x+\ell\mathrm{n}\,x}{x}dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\int_1^e\left(1+\frac{\ell\mathrm{n}\,x}{x}\right)dx=\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^1+\int_1^e 1dx+\int_1^e\frac{1}{x}\ell\mathrm{n}\,xdx$$

$$=\frac{1}{3}(1-0)+\left[x\right]_1^e+\int_1^e(\ell\mathrm{n}\,x)'\ell\mathrm{n}\,xdx=$$

$$=\frac{1}{3}+e-1+\int_1^e\left(\frac{\ell\mathrm{n}^2\,x}{2}\right)'dx=\frac{1}{3}+e-1+\frac{1}{2}\left[\ell\mathrm{n}^2\,x\right]_1^e=$$

$$=\frac{1}{3}+e-1+\frac{1}{2}\left(\ell\mathrm{n}^2\,e-\ell\mathrm{n}^2\,1\right)=\frac{1}{3}+e-1+\frac{1}{2}=e-\frac{1}{6}=\frac{6e-1}{6}\ \text{τ.μ.}$$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Η $f$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
Η $f$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων.

Η παράγωγος της $f$ είναι: $f'(x)=\left(\ell\mathrm{n}\left(x^2+1\right)\right)'=\dfrac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}=\dfrac{2x}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$

Ισχύουν: $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ και $f'(x)>0\Leftrightarrow x>0$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της $f$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

| | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | - | 0 | + | |
| $f$ | | ↘ | | ↗ | |

Ο.Ε. $f(0)=0$

**Δ2.** Έστω ότι ισχύει:

$\left|f'(x)\right|\le 1\Leftrightarrow\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|\le 1\Leftrightarrow 2|x|\le x^2+1\Leftrightarrow 2|x|\le|x|^2+1\Leftrightarrow\left(|x|-1\right)^2\ge 0$, αληθής $\forall x\in\mathbb{R}$

- Για $a<\beta$, η $f$ ικανοποιεί στο $\Delta=[a,\beta]$ της συνθήκες του Θ.Μ.Τ.

Επομένως υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\xi\in(a,\beta)$ τέτοιος ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(a)-f(\beta)}{a-\beta}\Leftrightarrow(a-\beta)f'(\xi)=\ell\mathrm{n}\left(a^2+1\right)-\ell\mathrm{n}\left(\beta^2+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(a-\beta)f'(\xi)=\ell\mathrm{n}\left(\frac{a^2+1}{\beta^2+1}\right)\underset{a\ne\beta}{\Leftrightarrow}f'(\xi)=\ell\mathrm{n}\left(\frac{a^2+1}{\beta^2+1}\right)\cdot\frac{1}{a-\beta}$$

Είναι $\left|f'(x)\right|\le 1\Rightarrow\left|\ell\mathrm{n}\left(\dfrac{a^2+1}{\beta^2+1}\right)\cdot\dfrac{1}{a-\beta}\right|\le 1\Leftrightarrow\left|\ell\mathrm{n}\left(\dfrac{a^2+1}{\beta^2+1}\right)\right|\le|a-\beta|,\ a,\beta\in\mathbb{R},\ a<\beta$

**Δ3.** Η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $f$ είναι:

$$f''(x)=\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'=\frac{(2x)'\cdot(x^2+1)-2x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

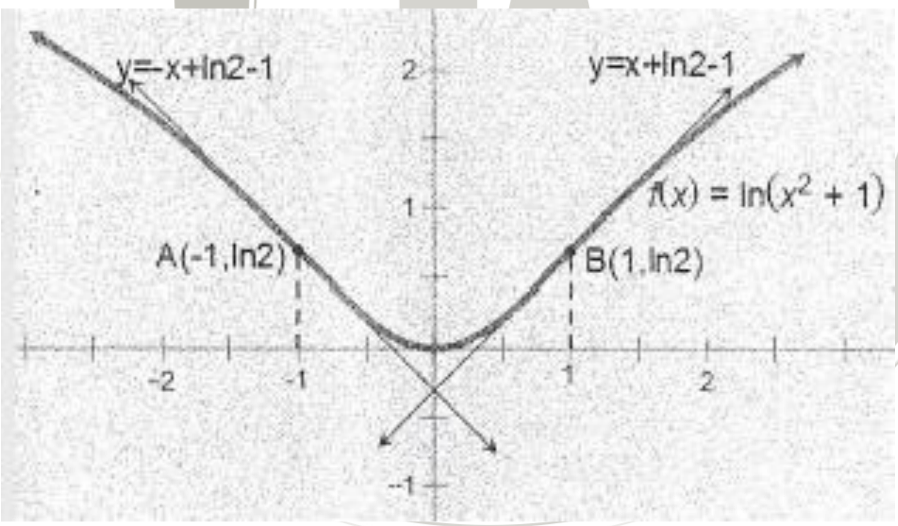
$$=\frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2},\ x\in\mathbb{R}$$

- $f''(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$

Το πρόσημο της $f''(x)$, τα διαστήματα κυρτότητας και τα σημεία καμπής φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

| $x$ | $-\infty$ | -1 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | - | 0 | + | 0 | - | |
| $f(x)$ | $\frown$ | | $\smile$ | | $\frown$ | |
| | | Σ.Κ. Α(-1, $\ell n 2$) | | Σ.Κ. Β(1, $\ell n 2$) | | |

**Δ4.** Οι εφαπτόμενες της $C_f$ στα σημεία καμπής Α και Β αντίστοιχα είναι:
$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ και $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ δηλ.
$y=x+\ell n 2-1$ και $y=-x+\ell n 2-1$




Για $x\geq 1$, η $f$ είναι κοίλη, οπότε η καμπύλη βρίσκεται «κάτω» από την εφαπτομένη.

Επομένως ισχύει: $f(x)\leq x+\ell n 2-1\Leftrightarrow \ell n(x^2+1)\leq x+\ell n 2-1\Leftrightarrow$

$$\ell n(x^2+1)-\ell n 2\leq x-1\Leftrightarrow \ell n\left(\frac{x^2+1}{2}\right)\leq x-1,\ x\geq 1.$$