Μάθημα / Τάξη ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία
14-03-2022

Θέμα Α

Α1. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα.

Τι ονομάζουμε πηλίκο $\frac{f}{g}$ των συναρτήσεων f και g;

Μονάδες 7

Α2. Έστω f συνεχής στο [α, β] και G αρχική της f στο [α, β]. Να δείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 8

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι άρτια, τότε δεν είναι “1–1”.

β) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι “1–1” και το Μ(α, β) είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f, τότε το Μ΄(β, α) είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f^{-1}.

γ) Αν $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=1$ τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)=1$ ή $\lim_{x\to x_0} f(x)=-1$.

δ) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha, \beta]\to\mathbb{R}$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον x΄x την Cf και τις x=α, x=β είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

ε) Ισχύει η ισοδυναμία $\lim_{x\to x_o} f(x)= m \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o}(-f(x))= -m$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=(x^2+1)\ln x+\dfrac{1-x^2}{2},\ x>0$.

Β1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$.

Μονάδες 8

Β2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Μονάδες 10

Β3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των $C_{f^{-1}}$ του άξονα x'x και τις ευθείες x=0 και $x=f(e)$.

Μονάδες 7

Θέμα Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)=|\alpha\cdot\ln x-x+1|$ για $x>0$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι α=1.

Μονάδες 8

Γ2. Για α=1 να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι :
$f(x)=-\ln x+x-1,\quad x>0$

Μονάδες 7

Γ3. Για την συνάρτηση $f(x)=-\ln x+x-1$ να βρεθούν:

ι) η εφαπτομένη της στο σημείο της Α(e,f(e))

Μονάδες 3

ιι) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την c_f, την εφαπτομένη της στο σημείο Α και τον άξονα x΄x.

Μονάδες 7

Θέμα Δ

Έστω συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη με $g''(x_0)=-3$ και συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x_0+2h)-2g(x_0+h)+g(x_0)}{h^2}, & x=0\\ -e^x+x-2, & 0<x<1\\ \dfrac{\ln^2 x}{2}+x-\ln x-e-2, & x\geq 1\end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Μονάδες 4

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 4

Δ4. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\ln^2(x^2+2)-\ln^2(x^4+2)+2x^2<2\ln\left(\frac{x^2+2}{x^4+2}\right)+2x^4.$$

Μονάδες 6

Δ5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^e f(x)dx$.

Μονάδες 5

Απαντήσεις

Θέμα Α

Α1. Ορίζουμε ως πηλίκο $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τη συνάρτηση με τύπο $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ και πεδίο ορισμού της είναι το A ∩ B, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή g(x), δηλαδή το σύνολο

$$\{x \mid x\in A \ \ \text{και} \ \ x\in B \ \ \text{με} \ \ g(x)\neq 0\}$$

Α2. Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο [α,β]. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], θα υπάρχει $c\in R$ τέτοιο, ώστε $G(x)=F(x)+c$ (1)

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt+c=c$ οπότε $c=G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x)=F(x)+G(\alpha)$
οπότε, για $x=\beta$, έχουμε

$$G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+G(\alpha)$$

και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$

Α3. **α)** Σ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Σ

Θέμα Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο και άθροισμα παραγωγίσιμων με $f'(x)=2x\ln x+x+\frac{1}{x}-x=2x\ln x+\frac{1}{x}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο και άθροισμα και πηλίκο παραγωγίσιμων με $f''(x)=2\ln x+2-\frac{1}{x^2}$.

Η f'' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο, άθροισμα και πηλίκο παραγωγίσιμων με $f'''(x)=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^3}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ άρα η f'' είναι γνησίως αύξουσα. $\lim\limits_{x\to0^+}f''(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(2\ln x+2-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$ άρα υπάρχει $x_1>0$ "κοντά" στο 0 τέτοιο ώστε $f''(x_1)<0$. $f''(1)=2\ln1+2-\frac{1}{1^2}=1>0$.

Η f'' είναι συνεχής στο $[x_1,1]$ ως γινόμενο, άθροισμα και πηλίκο συνεχών, $f''(x_1)''f(1)<0$ άρα ισχύει το Θεώρημα Bolzano, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(x_1,1)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$. Το x_0 μοναδικό αφού f'' είναι γνησίως αύξουσα άρα και "1-1".

B2. Για κάθε

$$x>x_0\overset{f''\nearrow}{\Leftrightarrow}f''(x)>f''(x_0)\Leftrightarrow f''(x)>0$$

$$0<x<x_0\overset{f''\nearrow}{\Leftrightarrow}f''(x)<f''(x_0)\Leftrightarrow f''(x)<0$$

x	0 $\quad x_0$	$+\infty$
f''	$-$	$+$
f'	$\searrow$	$\nearrow$

Αφού η f' συνεχής στο $(0,+\infty)$ και σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα η f' παρουσιάζει για x_0 ολικό ελάχιστο το $f'(x_0)=2x_0\ln x_0+\frac{1}{x_0}$. Ισχύει

$$f''(x_0)=0\Leftrightarrow 2\ln x_0+2-\frac{1}{{x_0}^2}=0.$$

Από τις δυο προηγούμενες σχέσεις έχουμε:

$$f'(x_0)=2x_0\ln x_0+\frac{1}{x_0}=x_0\left(\frac{1}{{x_0}^2}-2\right)+\frac{1}{x_0}=\frac{2}{x_0}-2x_0=2\left(\frac{1-{x_0}^2}{{x_0}^2}\right)>0 \text{ αφού}$$

$x_0\in(x_1,1)\subseteq(0,1)$.

Άρα $f'(x)\geq f'(x_0)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και αφού η f είναι συνεχής θα είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Β3. Το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι $E=\int_0^{f(e)}\left|f^{-1}(x)\right|dx$. Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο τιμών της f^{-1} άρα $f^{-1}(x)>0$. Άρα $E=\int_0^{f(e)}\left|f^{-1}(x)\right|dx=\int_0^{f(e)}f^{-1}(x)dx$

Θέτουμε $x=f(\omega)$ $\begin{cases} x=0\Leftrightarrow \omega=1 \\ x=f(e)\Leftrightarrow \omega=e \\ dx=f'(\omega)d\omega \end{cases}$

$$E=\int_1^e f^{-1}(f(\omega))f'(\omega)d\omega=\int_1^e \omega\left(2\omega\ln\omega+\frac{1}{\omega}\right)d\omega=\int_1^e(2\omega^2\ln\omega+1)d\omega=$$

$$\left[\frac{2\omega^3}{3}\ln\omega\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{2}{3}\omega^2\right)d\omega+[\omega]_1^e=\frac{2e^3}{3}-\frac{2e^3}{9}+\frac{2}{9}+e-1=\frac{4e^3+9e-7}{9}$$

Θέμα Γ

Γ1. Ισχύει για την συνάρτηση ότι : $f(x)\geq 0$ για κάθε x>0 και $f(1)=0$, επομένως παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$

Το $x_0=1$ είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της και είναι επίσης παραγωγίσιμη σε αυτό.

Συνεπώς ισχύει το θεώρημα του Fermat άρα: $f'(1)=0$. Είναι:

$$f'(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{|\alpha\cdot\ln x-x+1|}{|x-1|}=\lim_{x\to1^+}\left|\frac{\alpha\cdot\ln x-x+1}{x-1}\right|=|\alpha-1| \text{ γιατί:}$$

$x\to1^+\Leftrightarrow x>1\Leftrightarrow|x-1|=x-1$,επομένως καταλήγουμε ότι:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\alpha\cdot\ln x-x+1}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to1^+}\frac{(\alpha\cdot\ln x-x+1)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{\alpha}{x}-1\right)=\alpha-1\text{,συνεπώς:}$$

$f'(1)=0\Leftrightarrow|\alpha-1|=0\Leftrightarrow\alpha-1=0\Leftrightarrow\alpha=1$.

Γ2. Θεωρούμε συνάρτηση: $g(x)=\ln x-x+1, x>0$, παραγωγίσιμη ως πράξεις των

παραγωγίσιμων συναρτήσεων: $\ln x, -x+1$ με: $g'(x)=(\ln x-x+1)'=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$

$g'(x)>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 1-x>0 \Leftrightarrow 0<x<1$

$g'(x)<0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 1-x<0 \Leftrightarrow x>1$

Επομένως για τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g(x) έχουμε:

X	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$-$
$g(x)$	↗		↘

Η συνάρτηση g(x) παρουσιάζει μέγιστο για x=1 με τιμή: $g(1)=\ln 1-1+1=0$

Επομένως: $g(x)\le g(1) \Leftrightarrow g(x)\le 0 \Leftrightarrow \ln x-x+1\le 0$

δηλαδή: $|\ln x-x+1|=-\ln x+x-1$

και τελικά είναι: $f(x)=-\ln x+x-1$

Γ3. ι) Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις των παραγωγίσιμων

συναρτήσεων $-\ln x, x-1$ με: $f'(x)=(-\ln x+x-1)'=-\frac{1}{x}+1$

Είναι : $f(e)=-\ln e+e-1=e-2$ $\quad f'(e)=-\frac{1}{e}+1=\frac{e-1}{e}$

επομένως η εφαπτομένη έχει τύπο

$$y-f(e)=f'(e)\cdot(x-e)\Leftrightarrow y-(e-2)=\frac{e-1}{e}\cdot(x-e)\Leftrightarrow y=\frac{e-1}{e}\cdot x-1$$

ii) Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις των παραγωγίσιμων

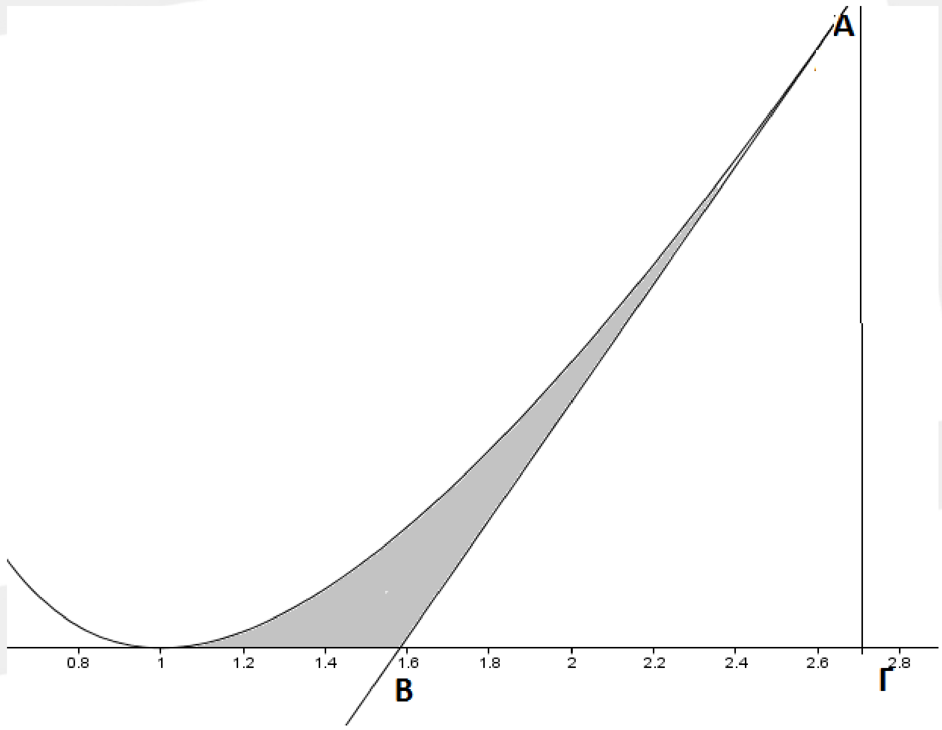
συναρτήσεων με: $f''(x)=(-\frac{1}{x}+1)'=\frac{1}{x^2}>0, x>0$

άρα η f(x) είναι κυρτή άρα: $f(x)\geq y, x>0$.

Το σημείο τομής τη εφαπτομένης με τον άξονα x΄x είναι το $B\left(\frac{e}{e-1},0\right)$ καθώς:

$$y=0\Leftrightarrow 0=\frac{e}{e-1}\cdot x-1\Leftrightarrow x=\frac{e-1}{e}$$

ενώ η προβολή του σημείου επαφής πάνω στον x΄x είναι το σημείο $\Gamma(e,0)$.



Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι το : $E(\Omega)=\int_1^e f(x)\cdot dx-(AB\Gamma)$

Είναι: $\int_1^e f(x)\cdot dx=\int_1^e(-\ln x+x-1)\cdot dx=-\int_1^e(x)'\cdot\ln x\cdot dx+\int_1^e(x-1)\cdot dx=$

$$=-\left[x\cdot\ln x\right]_1^e+\int_1^e x\cdot(\ln x)'\cdot dx+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^e=-e+\left[x\right]_1^e+\left(\frac{e^2}{2}-2\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=$$

$$=-e+e-1+\frac{e^2}{2}-2+\frac{1}{2}=\frac{e^2-5}{2}$$

Επίσης:

$$(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{A\Gamma})\cdot(\mathrm{B\Gamma})=\frac{1}{2}\cdot(e-2)\cdot\left(e-\frac{e}{e-1}\right)=\frac{e-2}{2}\cdot\frac{e^2-2e}{e-1}=\frac{e^3-4e^2+4e}{2e-2}$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι το :

$$E(\Omega)=\frac{e^2-5}{2}-\frac{e^3-4e^2+4e}{2e-2}=\frac{2e^3-2e^2-10e+10-e^3+4e^2-4e}{2e-2}=\frac{e^3+2e^2-14e+10}{2e-2}$$

τ. μ

Θέμα Δ

Δ1. $$\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+2h)-2g(x_0+h)+g(x_0)}{h^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}\lim_{h\to 0}\frac{2g'(x_0+2h)-2g'(x_0+h)}{2h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g'(x_0+2h)-g'(x_0+h)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g'(x_0+2h)-g'(x_0)-g'(x_0+h)+g'(x_0)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{g'(x_0+2h)-g'(x_0)}{h}-\frac{g'(x_0+h)-g'(x_0)}{h}\right)\quad (1)\ \text{αλλά}$$

- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g'(x_0+h)-g'(x_0)}{h}=g''(x_0)$
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g'(x_0+2h)-g'(x_0)}{h}\overset{2h=\omega}{=}\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{g'(x_0+\omega)-g'(x_0)}{\frac{\omega}{2}}=$

$$\lim_{\omega\to 0}2\frac{g'(x_0+\omega)-g'(x_0)}{\omega}=2g''(x_0)$$

αφού η g δυο φορές παραγωγίσιμη. Τότε η (1) γίνεται:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+2h)-2g(x_0+h)+g(x_0)}{h^2}=2g''(x_0)-g''(x_0)=g''(x_0)=-3$$

Συνεπώς $f(x)=\begin{cases}-3, & x=0\\ -e^x+x-2, & 0<x<1\\ \dfrac{\ln^2 x}{2}+x-\ln x-e-2, & x\geq 1\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-e^x+x-2)=-3$ και $f(0)=-3$ άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(-e^x+x-2)=-e-1$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\ln^2 x}{2}+x-\ln x-e-2\right)=-e-1$$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=-e-1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-e-1$ και $f(1)=-e-1$ άρα $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Η f είναι συνεχής στο (0,1) ως διαφορά εκθετικής και πολυωνυμικής.
Η f είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ ως σύνθεση διαφορά και άθροισμα λογαριθμικής και πολυωνυμικής.
Συνεπώς η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Δ2. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-e^x+x-2+e+1}{x-1}\underset{D.L.H}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-e^x+1}{1}=1-e$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{\ln^2 x}{2}+x-\ln x-e-2+e+1}{x-1}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}\ln x+1-\frac{1}{x}}{1}=0$$

άρα $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Δ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f'(x)=1-e^x$

$f'(x)>0\Leftrightarrow 1-e^x>0\Leftrightarrow x<0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{1}{x}\ln x+1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\ln x+(x-1)}{x}>0$

για κάθε $x\in(1,+\infty)$ αφού $x-1>0$ και $\ln x>0$.
Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$. Τότε σύμφωνα με τον διπλανό πίνακα:

x	0	1	$+\infty$
f′	−		+
f	↘		↗

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,1],
η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$,
η f παρουσιάζει για x=0 τοπικό μέγιστο το $f(0)=-3$, η f παρουσιάζει για x=1 ολικό ελάχιστο το $f(1)=-e-1$.

Δ4. $\ln^2(x^2+2)-\ln^2(x^4+2)+2x^2>2\ln\left(\dfrac{x^2+2}{x^4+2}\right)+2x^4\Leftrightarrow$

$$\ln^2(x^2+2)-\ln^2(x^4+2)+2x^2>2\ln(x^2+2)-2\ln(x^4+2)+2x^4\Leftrightarrow$$
$$\ln^2(x^2+2)-2\ln(x^2+2)+2x^2>\ln^2(x^4+2)-2\ln(x^4+2)+2x^4\Leftrightarrow$$
$$\frac{\ln^2(x^2+2)}{2}-\ln(x^2+2)+x^2>\frac{\ln^2(x^4+2)}{2}-\ln(x^4+2)+x^4\Leftrightarrow$$
$$f(x^2+2)>f(x^4+2)\underset{x^4+2>1}{\overset{x^2+2>1}{\Leftrightarrow}}x^2+2>x^4+2\Leftrightarrow x^2(1-x^2)>0\Leftrightarrow x\in(-1,0)\cup(0,1)$$

Δ5. $\displaystyle\int_0^e f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^e f(x)dx$

$$\bullet\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(-e^x+x-2)dx=\left[-e^x+\frac{x^2}{2}-2x\right]_0^1=$$
$$\left(-e^{-1}+\frac{1}{2}-2\right)-(-1)=-e^{-1}-\frac{1}{2}$$
$$\bullet\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left(\frac{\ln^2 x}{2}+x-\ln x-e-2\right)dx=$$
$$\int_1^e\left(\frac{\ln^2 x}{2}\right)dx-\int_1^e \ln x dx+\int_1^e(x-e-2)dx$$
$$\bullet\int_1^e\left(\frac{\ln^2 x}{2}\right)dx-\int_1^e \ln x dx=\int_1^e\left(x'\frac{\ln^2 x}{2}\right)dx-\int_1^e \ln x dx=$$
$$\left[x\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e-\int_1^e\left(x2\ln x\frac{1}{x}\right)dx-\int_1^e \ln x dx=\frac{e}{2}-3\int_1^e \ln x dx=$$

$$\frac{e}{2}-3\int_1^e x'\ln x dx=\frac{e}{2}-3\left(\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e 1dx\right)=\frac{e}{2}-3\left(e-\left[x\right]_1^e\right)=\frac{e}{2}-3$$

$$\bullet\int_1^e (x-e-2)dx=\left[\frac{x^2}{2}-ex-2x\right]_1^e=\left(\frac{e^2}{2}-e^2-2e\right)-\left(\frac{1^2}{2}-e-2\right)=\frac{3}{2}-\frac{e^2}{2}-e$$

Συνεπώς $\int_0^e f(x)dx=-e^{-1}-\frac{1}{2}+\frac{e}{2}-3+\frac{3}{2}-\frac{e^2}{2}-e=-\frac{e^2+e+2e^{-1}+4}{2}$

Από το Μαθηματικό Τμήμα των Φροντιστηρίων Πουκαμισάς Ηρακλείου συνεργάστηκαν :
Γ. Ανδρουλιδάκης, Μ. Βελιβασάκη, Ρ. Βραχνάκη, Μ. Βυνιχάκης, Δ. Δημητρίου, Α. Δουλγεράκης, Μ. Μπαρμπούνη, Ζ. Μπομπότη, Γ. Παπαδοσπυριδάκης, Η. Σπυρόπουλος , Γ. Φαρσάρης