

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
19/02/2022

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω συνάρτηση f , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 , στο οποίο όμως είναι συνεχής. Να δείξετε ότι αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) . (7 μ)

A2. Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού (4 μ)

A3. Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός: «Αν για μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο A ».

Να χαρακτηρίσετε την πρόταση ως αληθή ή ψευδή αιτιολογώντας την απάντησή σας, είτε με αντιπαράδειγμα είτε με βασική πρόταση του σχολικού είτε με σχήμα (1 – 3 μ)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος.

1. Αν ισχύει ότι $f'(x) > 0$ και $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα κοινό σημείο.

2. Ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.

3. Για τη συνεχή συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ ισχύει $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = G(\alpha) - G(\beta)$, όπου G αρχική της f στο $[\alpha, \beta]$.

4. Αν μια συνεχής συνάρτηση f έχει μοναδική ρίζα, τότε είναι γνησίως μονότονη.

5. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) \cdot g(x)) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$.

(10 μ)

ΘΕΜΑ Β

B1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 1$. Στη συνέχεια να βρείτε τη ρίζα της f καθώς και το πρόσημό της. (3 – 1 – 2 μ)

B2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $g(x) = 2x \ln x + x^2 - 4x + 3$.

(7 μ)

B3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g . Στη συνέχεια να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $g(x) = a^2 + 3$, για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού a . (5 – 3 μ)

B4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^e f(x)dx$. (4 μ)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ x\sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$.

Γ1. Να εξετάσετε τη συνάρτηση ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 0$. (4 μ)

Γ2. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f . (6 μ)

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (8 μ)

Γ4. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$. (4 μ)

Γ5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^0 f(x)dx$. (3 μ)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (5 – 5 μ)

Δ2. Να λυθεί η εξίσωση $f(3^x + 4^x) = f(2 + 5x)$. (5 μ)

Δ3. Να λυθεί η εξίσωση $f(x^2) - \ln x = f(x^3)$ (5 μ)

Δ4. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = \ln \frac{e^2}{5}$. (5 μ)