ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΛΙΣΜΟΥ / Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	**05/03/2022**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 133

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 143

Α3. α. Σχολικό βιβλίο σελ. 216

β. Σχολικό βιβλίο σελ. 143

γ. Ψευδής

Αιτιολόγηση: Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3, & x<1 \\ (x-2)^2, & x\geq 1 \end{cases}$. Σχολικό βιβλίο σελ. 143-144.

Α4. α. Λ, **β.** Λ, **γ.** Σ, **δ.** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για κάθε $x\in[0,\pi]$, έχουμε $f'(x)=\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot e^x\right)'=-\eta\mu x\cdot e^x+\sigma\upsilon\nu x\cdot e^x=e^x\cdot(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x\cdot(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x \overset{x\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} x=\frac{\pi}{4}$.

Η f' είναι συνεχής και διατηρεί το πρόσημό της σε καθένα από τα διαστήματα $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right]$.

Επιλέγοντας τον αριθμό $x_1=0\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$, έχουμε $f'(0)=e^0\cdot(\sigma\upsilon\nu 0-\eta\mu 0)=1>0$.

Άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$.

Φροντιστήρια Εν-τάξη

Επιλέγοντας τον αριθμό $x_2 = \pi \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right]$, έχουμε $f'(\pi) = e^{\pi} \cdot (\sigma\upsilon\nu\pi - \eta\mu\pi) = -e^{\pi} < 0$.

Άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right]$.

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗		↘	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$.

Η f παρουσιάζει στο $x_0 = \frac{\pi}{4}$ τοπικό μέγιστο με τιμή $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}$.

Το $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ είναι ολικό μέγιστο διότι:

Για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ είναι $x < \frac{\pi}{4} \overset{f\ \gamma\nu\ \alpha\acute{\upsilon}\xi}{\Leftrightarrow} f(x) < f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ και

για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ είναι $x > \frac{\pi}{4} \overset{f\ \gamma\nu\ \phi\theta\iota\nu}{\Leftrightarrow} f(x) < f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Άρα τελικά $f(x) \le f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ για κάθε $x \in [0, \pi]$.

B2. Έστω $A_1 = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ και $A_2 = \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right]$. Έχουμε:

$$f(A_1) = f\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right) \overset{f\ \gamma\nu\ \alpha\acute{\upsilon}\xi}{=} \left[f(0), f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left[1, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}\right] \text{ και}$$

$$f(A_2) = f\left(\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right]\right) \overset{f\ \gamma\nu\ \phi\theta\iota\nu}{=} \left[f(\pi), \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x)\right) = \left[-e^{\pi}, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}\right).$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι: $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left[-e^{\pi}, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}\right]$.

Φροντιστήρια Εν-τάξη

Β'τρόπος για το σύνολο τιμών: βρίσκουμε τις τιμές στα άκρα του $[0,\pi]$ και σε συνδυασμό με το ολικό μέγιστο που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα, επιλέγουμε την χαμηλότερη και την υψηλότερη τιμή . Οι τιμές αυτές που θα βρούμε θα είναι τα άκρα του συνόλου τιμών. Άρα $f(0)=\sigma\upsilon\nu 0\cdot e^0=1$, $f(\pi)=\sigma\upsilon\nu\pi\cdot e^{\pi}=-e^{\pi}$ και από πριν $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$. Άρα $f(\pi)<f(0)<f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι: $f(A)=\left[-e^{\pi}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}\right]$.

Εφόσον $0\notin f(A_1)$ και $0\in f(A_2)$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ρίζα στο διάστημα A_2, η οποία είναι και μοναδική, αφού f είναι γνησίως μονότονη στο A_2.

Β3. Έχουμε: $I=\int_0^{\pi}f(x)dx=\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu x\cdot e^x dx=\int_0^{\pi}(\eta\mu x)'\cdot e^x dx=\left[\eta\mu x\cdot e^x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\eta\mu x\cdot(e^x)'dx$

$$=\underbrace{\eta\mu\pi\cdot e^{\pi}-\eta\mu 0\cdot e^0}_{0}-\int_0^{\pi}\eta\mu x\cdot e^x dx=\int_0^{\pi}-\eta\mu x\cdot e^x dx=\int_0^{\pi}(\sigma\upsilon\nu x)'\cdot e^x dx=$$

$$=\left[\sigma\upsilon\nu x\cdot e^x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu x\cdot(e^x)'dx=\sigma\upsilon\nu\pi\cdot e^{\pi}-\sigma\upsilon\nu 0\cdot e^o-\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu x\cdot e^x dx=-e^{\pi}-1-I.$$

Άρα $I=-e^{\pi}-1-I \Leftrightarrow 2I=-e^{\pi}-1 \Leftrightarrow I=\frac{-e^{\pi}-1}{2} \Leftrightarrow \int_0^{\pi}f(x)dx=-\frac{e^{\pi}+1}{2}$.

Β4. Έχουμε $f''(x)=\left(e^x\cdot(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)\right)'=(e^x)'(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)+e^x\cdot(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)'=$

$$=e^x(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)+e^x\cdot(-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)=e^x(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)=-2\eta\mu x\cdot e^x.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, ισχύει:

$$2\left[f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\right]>xf'(x)\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\frac{2\left[f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{x}>f'(x)\Leftrightarrow\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}>f'(x)$$

$$\Leftrightarrow\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x-\frac{x}{2}}>f'(x).$$

Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $\left[\frac{x}{2},x\right]$,

οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(\frac{x}{2},x\right)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x-\frac{x}{2}}$.

Όμως $f''(x)=-2\eta\mu x\cdot e^{x}<0$ για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, άρα f ' γνησίως φθίνουσα και επειδή

$\xi\in\left(\frac{x}{2},x\right)$, τότε θα έχουμε $\xi<x \overset{f'\ \text{γν φθίν}}{\Leftrightarrow} f'(\xi)>f'(x) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x-\frac{x}{2}}>f'(x)$

$\Leftrightarrow 2\left[f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\right] > xf'(x)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εφόσον η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=0$ το 2 , το 0 είναι εσωτερικό του R σημείο και η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat θα πρέπει να ισχύει $f'(0)=0$. Έχουμε $f'(x)=\left(\int_0^1 t^2g(t)dt\right)\cdot e^{x}-\lambda$.

Συνεπώς: $f'(0)=0\Leftrightarrow\left(\int_0^1 t^2g(t)dt\right)\cdot e^{0}-\lambda=0\Leftrightarrow \lambda=\int_0^1 t^2g(t)dt$.

Όμως επίσης ισχύει f(0) = 2. Άρα $f(0)=2\Leftrightarrow\int_0^1 t^2g(t)dt=2$.

Οπότε $\lambda=\int_0^1 x^2g(x)dx=2$.

Γ2. **α.** $\int_0^1 x^3g'(x)dx=\left[x^3g(x)\right]_0^1-\int_0^1\left(x^3\right)'g(x)dx=1^3\cdot g(1)-0^3\cdot g(0)-\int_0^1 3x^2g(x)dx=$

$=g(1)-3\int_0^1 x^2g(x)dx=6-3\cdot 2=0$

β. Για $\lambda=\int_0^1 x^2g(x)dx=2$ προκύπτει $f(x)=2e^{x}-2x$. Είναι $f'(x)=2e^{x}-2=2\left(e^{x}-1\right)$,

οπότε δεδομένου ότι το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘		↗	

η f παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ ελάχιστο με τιμή f(0)=2.

Άρα κοντά στο 0 είναι $f(x) > 2 \Leftrightarrow f(x) - 2 > 0$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{f(x)-2}\right) = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-2\right) = 0$ και $f(x)-2>0$ κοντά στο 0.

Γ3. Για κάθε x<0 έχουμε $h'(x) = \int_{2022}^{2021} g(t)dt + 2\cdot\ln\left(\kappa^2+1\right)\left(f(x)-2\right)\cdot f'(x)$. Έχουμε:

$g(t) > 0$ για κάθε $t \in R$, οπότε $\int_{2021}^{2022} g(t)\,dt > 0 \Leftrightarrow -\int_{2022}^{2021} g(t)\,dt > 0 \Leftrightarrow \int_{2022}^{2021} g(t)\,dt < 0$

$\kappa^2+1>1 \Leftrightarrow \ln\left(\kappa^2+1\right) > \ln 1 \Leftrightarrow 2\ln\left(\kappa^2+1\right) > 0$, $f(x)-2>0$ (όπως δείξαμε στο Γ2) και

$f'(x) = 2\left(e^x - 1\right) < 0$ για κάθε x<0 .

Από τα παραπάνω προκύπτει $h'(x) = \int_{2022}^{2021} g(t)dt + 2\cdot\ln\left(\kappa^2+1\right)\left(f(x)-2\right)\cdot f'(x) < 0$ για κάθε x<0. Εφόσον η συνάρτηση h(x) είναι συνεχής στο 0, τότε θα είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

Γ4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (-2x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x - 2x + 2x = \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 0$.

Άρα η ευθεία $y = -2x$ ή $y + 2x = 0$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη, συνεπώς η δοθείσα με παραγώγιση κατά μέλη γίνεται:

$$\left(f^5(x) + f^3(x) + 4f(x)\right)' = (6-x)' \Leftrightarrow 5f^4(x)\cdot f'(x) + 3f^2(x)\cdot f'(x) + 4f'(x) = -1$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\cdot\left(5f^4(x) + 3f^2(x) + 4\right) = -1 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{5f^4(x) + 3f^2(x) + 4} < 0.$$

Άρα f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Στην αρχική επίσης αν θέσουμε όπου x το 6 προκύπτει:

Φροντιστήρια Εν-τάξη

$f^5(6)+f^3(6)+4f(6)=0 \Leftrightarrow f(6)\left(f^4(6)+f^2(6)+4\right)=0 \Leftrightarrow f(6)=0$, αφού ισχύει ότι $f^4(6)+f^2(6)+4>0$. Άρα για την συνεχή συνάρτηση f, η x=6 είναι ρίζα και εφόσον είναι γνησίως φθίνουσα η ρίζα αυτή θα είναι και μοναδική.

Για την εύρεση προσήμου της f έχουμε:

Για $x<6 \overset{f\ \text{γν. φθιν}}{\Leftrightarrow} f(x)>f(6) \Leftrightarrow f(x)>0$ και για $x>6 \overset{f\ \text{γν. φθιν}}{\Leftrightarrow} f(x)<f(6) \Leftrightarrow f(x)<0$.

Άρα το πρόσημο της f φαίνεται στον απλό πίνακα που ακολουθεί:

x	$-\infty$		6		$+\infty$
f(x)		+	0	−	

Δ2. Αφού $f'(x)=-\dfrac{1}{5f^4(x)+3f^2(x)+4}$ και f παραγωγίσιμη, τότε το 2° μέλος της ισότητας αποτελεί πράξεις παραγωγίσιμων στο R συναρτήσεων. Συνεπώς και η f ' (το 1° μέλος δηλαδή) θα είναι παραγωγίσιμη. Άρα η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη. Είναι λοιπόν:

$$f''(x)=\left(-\frac{1}{5f^4(x)+3f^2(x)+4}\right)'=-\frac{-\left(5f^4(x)+3f^2(x)+4\right)'}{\left(5f^4(x)+3f^2(x)+4\right)^2}=\frac{20f^3(x)\cdot f'(x)+6f(x)\cdot f'(x)}{\left(5f^4(x)+3f^2(x)+4\right)^2}$$

$$=\frac{2f'(x)\cdot f(x)\cdot\left(10f^2(x)+3\right)}{\left(5f^4(x)+3f^2(x)+4\right)^2}.$$

Είναι $f'(x)<0$, $10f^2(x)+3>0$ και $\left(5f^4(x)+3f^2(x)+4\right)^2>0$, άρα η f '' έχει το ίδιο σημείο μηδενισμού με την f. Συνεπώς:

$f''(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow x=6$.

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2f'(x)\cdot f(x)\cdot\left(10f^2(x)+3\right)}{\left(5f^4(x)+3f^2(x)+4\right)^2}>0 \Leftrightarrow 2f'(x)\cdot f(x)>0 \overset{2f'(x)<0}{\Leftrightarrow} f(x)<0 \overset{\Delta 1}{\Leftrightarrow} x>6$$

$$f''(x)<0 \Leftrightarrow \frac{2f'(x)\cdot f(x)\cdot\left(10f^2(x)+3\right)}{\left(5f^4(x)+3f^2(x)+4\right)^2}<0 \Leftrightarrow 2f'(x)\cdot f(x)<0 \overset{2f'(x)<0}{\Leftrightarrow} f(x)>0 \overset{\Delta 1}{\Leftrightarrow} x<6$$

Συνεπώς η εξίσωση $f''(x)=0$, έχει μοναδική ρίζα στο R, την x=6.

Δ3. Με βάση τα παραπάνω το πρόσημο της f '' φαίνεται στον απλό πίνακα που ακολουθεί:

Φροντιστήρια Εν-τάξη

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Έχουμε $0<\rho<1 \overset{+5}{\Leftrightarrow} \rho+5<6$, άρα $\rho+5\in(-\infty,6)$, διάστημα δηλαδή όπου η f'' είναι αρνητική. Άρα $f''(\rho+5)<0$.

Επίσης $\int_{\alpha-1}^{\alpha+1}2t\,dt=\left[t^2\right]_{\alpha-1}^{\alpha+1}=(\alpha+1)^2-(\alpha-1)^2=4\alpha$. Όμως $\alpha>\frac{3}{2} \overset{\cdot 4}{\Leftrightarrow} 4\alpha>6$, άρα

$\int_{\alpha-1}^{\alpha+1}2t\,dt\in(6,+\infty)$, διάστημα δηλαδή όπου η f'' είναι θετική. Άρα $f''\left(\int_{\alpha-1}^{\alpha+1}2t\,dt\right)>0$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $f''(\rho+5)<f''\left(\int_{\alpha-1}^{\alpha+1}2t\,dt\right)$.

Δ4. α. Η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, οπότε είναι και 1 – 1, άρα αντιστρέφεται.

Εφόσον $f(R)=R$, τότε για κάθε $x,y\in R$ ισχύει ότι: $y=f(x)\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$.

Η δοθείσα λοιπόν γίνεται: $y^5+y^3+4y=6-f^{-1}(y)\Leftrightarrow f^{-1}(y)=6-y^5-y^3-4y$.

Άρα η αντίστροφη της f έχει τύπο: $f^{-1}(x)=6-x^5-x^3-4x \quad ,x\in R$.

β. Για το $\int_0^6 f(x)dx$, θέτουμε $f(x)=u$, οπότε θα είναι:

$$f(x)=u\Leftrightarrow x=f^{-1}(u)\Leftrightarrow dx=\left(f^{-1}\right)'(u)du\Leftrightarrow dx=\left(6-u^5-u^3-4u\right)'du$$

$$\Leftrightarrow dx=\left(-5u^4-3u^2-4\right)du.$$

Τα νέα άκρα ολοκλήρωσης θα είναι:

αν $x_1=6$, τότε $f(x_1)=u_1\Leftrightarrow f(6)=u_1\Leftrightarrow u_1=0$

αν $x_1=0$, τότε $f(x_2)=u_2\Leftrightarrow f(0)=u_2\Leftrightarrow 0=f^{-1}(u_2)\Leftrightarrow f^{-1}(1)=f^{-1}(u_2)$

$$\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(1)\right)=f\left(f^{-1}(u_2)\right)\Leftrightarrow u_2=1$$

Το ολοκήρωμα γίνεται:

$$\int_0^6 f(x)dx=\int_1^0 u\left(f^{-1}\right)'(u)du=\int_1^0 u\cdot\left(-5u^4-3u^2-4\right)du=\int_1^0 -5u^5-3u^3-4u\,du=$$

$$=\int_0^1 5u^5+3u^3+4u\,du=\left[\frac{5u^6}{6}+\frac{3u^4}{4}+2u^2\right]_0^1=\frac{5}{6}+\frac{3}{4}+2=\frac{43}{12}.$$

Φροντιστήρια Εν-τάξη