



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ
Α. Φλωρόπουλου
 για μαθητές με απαιτήσεις

30 ΧΡΟΝΙΑ ΠΕΡΙΟΧΕΣ

http://www.floropoulos.gr - email: info@floropoulos.gr

• ΚΕΝΤΡΟ ΑΘΗΝΑΣ: Βερανζέρου 6, Πλατεία Κάνιγγος, Τηλ.: 210-38.14.584, 38.02.012, Fax: 210-330.42.42
 • ΑΓ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ: Λ. Βουλιαγμένης 244 (μετρό Δάφνης), Τηλ.: 210-9.76.76.76, 9.76.76.77

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Σάββατο 12 Μαρτίου 2022

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .

Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Δ .

Μονάδες 8

A2. α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

β) Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .

Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta] \subseteq \Delta$;

Μονάδες 3

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α) Ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$$

Μονάδες 2

β) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

γ) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$.

Μονάδες 2

δ) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 2

ε) Τα κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ είναι μόνο εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγός της είναι ίση με 0.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

β) Να λύσετε την ανίσωση $2f(x^2-1) < 1$.

Μονάδες 6

B2. α) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα.

β) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο καμπής και να δείξετε ότι $4f(x) - x \geq 2$ για κάθε $x < 0$.

Μονάδες 8

B3. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Μονάδες 6

B4. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από C_f , τον x ' x και τις ευθείες $x=0$, $x=1$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ όπου f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -2x \cdot f^2(x)$, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(0)=1$ και $g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να δείξετε ότι η g είναι σταθερή στο \mathbb{R} .

Μονάδες 7

Γ2. Αποδείξτε ότι $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Γ3. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x)\eta\mu 2x)$.

Μονάδες 5

Γ4. Να προσδιορίσετε το σημείο της C_f στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=a^x-\ln(x+1)$, $x > -1$, όπου $a > 0$ και $a \neq 1$.

Δ1. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $a=e$.

Μονάδες 6

Δ2. Για $a=e$,

i. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Μονάδες 4

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Μονάδες 4

Δ3. Αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x - 2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$.

Μονάδες 4

Δ4. Να δείξετε ότι $f(x+1)-f(x) < f'(x+1)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Μονάδες 7

Καλή επιτυχία!!!