ΣΩΣΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Νικ. Ιωσηφίδης, Μαθηματικός – Φροντιστής, ΒΕΡΟΙΑ

e-mail: iossifid@yahoo.gr

Στην εισήγηση αυτή θα παρουσιάσουμε τους τρόπους με τους οποίους πρέπει να χρησιμοποιούμε τα δεδομένα ενός προβλήματος για να φτάσουμε ασφαλέστερα στο ζητούμενο.
Χωρίσαμε το άρθρο αυτό σε 4 επιμέρους ενότητες.

- Χρήση αλγεβρικών και τριγωνομετρικών δεδομένων
- Χρήση γεωμετρικών δεδομένων
- Δυνατότητα εύρεσης κάποιου άγνωστου στοιχείου. Πλήρη και ελλιπή δεδομένα
- Ισοδυναμία δεδομένων

1. Χρήση αλγεβρικών και τριγωνομετρικών δεδομένων

<u>Παράδειγμα 1^{ο}</u>
Θα αποδείξουμε τη γνωστή ταυτότητα:
Αν $\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma}$

Η συνηθισμένη απόδειξη είναι η παρακάτω:
$\alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow \alpha+\beta=-\gamma \Rightarrow (\alpha+\beta)^3=(-\gamma)^3 \Rightarrow \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=-\gamma^3 \Rightarrow$
$\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\gamma^3$
και επειδή $\alpha+\beta=-\gamma$ έχουμε: $\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(-\gamma)=-\gamma^3 \Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$
Η παραπάνω απόδειξη που απευθύνεται σε μαθητές Γ΄ Γυμνασίου ή Α΄ Λυκείου παρουσιάζει δύο σοβαρά ερωτηματικά.
Το 1^{ο} είναι γιατί ξεκίνησε η απόδειξη με αυτόν τον τρόπο. Για τους μαθητές δεν υπάρχει καμιά λογική εξήγηση.
Το 2^{ο} είναι ότι η υπόθεση χρησιμοποιήθηκε δύο φορές. Την μια φορά όταν $\alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow \alpha+\beta=-\gamma$ και την άλλη φορά όταν αντικαταστήσαμε το $\alpha+\beta=-\gamma$
Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα έλεγε κανείς ότι δεν είναι παράξενη η παραπάνω απόδειξη, επειδή αυτή είναι αρκετά σύντομη και δεν έχουμε πολλές επιλογές.
Αν όμως η άσκηση ήταν πιο πολύπλοκη, πότε και πως θα χρησιμοποιούσαμε την υπόθεση $\alpha+\beta+\gamma=0$ και πόσες φορές;
Δείχνουμε μια απόδειξη που δεν σκοντάφτει στα παραπάνω ερωτήματα και εξηγούμε γιατί η απόδειξη αυτή είναι “σίγουρη 100%”.
Από τη σχέση $\alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow \alpha=-\beta-\gamma$

Άρα:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(-\beta-\gamma)^3+\beta^3+\gamma^3=-\beta^3-3\beta^2\gamma-3\beta\gamma^2-\gamma^3+\beta^3+\gamma^3=-3\beta^2\gamma-3\beta\gamma^2 \quad (1)$$

Επίσης: $3\alpha\beta\gamma=3(-\beta-\gamma)\beta\gamma=-3\beta^2\gamma-3\beta\gamma^2$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$

Εξηγούμε τώρα γιατί με την παραπάνω απόδειξη θα φτάσουμε σίγουρα στο συμπέρασμα.

Η σχέση $\alpha+\beta+\gamma=0$ πρέπει οπωσδήποτε να χρησιμοποιηθεί. Αυτό κάναμε και στις δύο αποδείξεις.

Στην 1η απόδειξη δεν είχαμε καμιά βεβαιότητα ότι θα φτάσουμε στο συμπέρασμα. Αυτό φάνηκε όταν αναγκαστήκαμε να ξαναχρησιμοποιήσουμε την ίδια σχέση για 2 φορά και ενδεχομένως έπρεπε να την ξαναχρησιμοποιήσουμε.

Στη 2η απόδειξη η σχέση χρησιμοποιήθηκε πλήρως, δηλαδή χρησιμοποιήθηκε με τέτοιο τρόπο ώστε να μην μπορεί να ξαναχρησιμοποιηθεί.

Πιο συγκεκριμένα:

Η σχέση $\alpha+\beta+\gamma=0$ συνδέει τρεις μεταβλητές α, β, γ. Οι μεταβλητές παίρνουν αυθαίρετες τιμές, πάντοτε όμως με τον περιορισμό $\alpha+\beta+\gamma=0$. Μπορούμε να δώσουμε στα β και γ τυχαίες τιμές, π.χ $\beta=2$, $\gamma=3$, όμως η τιμή του α είναι τώρα καθορισμένη, δηλαδή είναι $\alpha=-5$

Αν λοιπόν αντικαταστήσουμε στα δύο μέλη της ζητούμενης σχέσης όπου $\alpha=-\beta-\gamma$ θα έχουμε να αποδείξουμε τη σχέση $(-\beta-\gamma)^3+\beta^3+\gamma^3=3(-\beta-\gamma)\beta\gamma$ (3)

όπου τώρα οι μεταβλητές β και γ δεν υπόκεινται σε κανέναν περιορισμό. Επομένως η συνθήκη $\alpha+\beta+\gamma=0$ δεν μπορεί πλέον να ξαναχρησιμοποιηθεί. Με άλλα λόγια έχει γίνει πλήρης χρήση του δεδομένου $\alpha+\beta+\gamma=0$.

Αυτό σημαίνει ότι έχουμε να αποδείξουμε τη σχέση (3) χωρίς κανέναν περιορισμό για τα α, β, γ.

Αν λοιπόν εκτελέσουμε τις πράξεις σε κάθε μέλος ξεχωριστά, πρέπει να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Ισοδύναμα, μπορούμε ξεκινώντας από το 1ο μέλος να φτάσουμε στο 2ο χωρίς καμιά άλλη υπόθεση.

Αν με τον παραπάνω τρόπο δεν βρίσκαμε το ίδιο αποτέλεσμα και στα δύο μέλη της (3) δεν θα προσπαθούσαμε να κάνουμε κάποια άλλη απόδειξη. Θα συμπεράναμε ότι ή η άσκηση είναι λάθος ή κάναμε κάποιο λάθος στις πράξεις. Το συμπέρασμα που προκύπτει από τις παραπάνω παρατηρήσεις είναι πολύ χρήσιμο και είναι το εξής:

Αν δοθεί μια σχέση που περιέχει διάφορες μεταβλητές και ζητείται να αποδειχθεί μια άλλη σχέση, ένας σίγουρος τρόπος για να γίνει αυτό είναι να απαλείψουμε μια μεταβλητή από την αποδεικτέα σχέση.

Στο συμπέρασμα θα φτάσουμε όποια και αν είναι η μεταβλητή που θα απαλείψουμε. Συμφέρει βέβαια να απαλείψουμε την μεταβλητή που δημιουργεί τις λιγότερες πράξεις.

Έτσι, αν δοθεί π.χ η σχέση $\alpha+2\beta+3\gamma=4$ (4)

και ζητείται οποιαδήποτε σχέση με α, β, γ (ισότητα ή ανισότητα), μπορούμε:

- Να απαλείψουμε το α από την αποδεικτέα γράφοντας $\alpha=4-2\beta-3\gamma$
- Να απαλείψουμε το β γράφοντας $\beta=\dfrac{4-\alpha-3\gamma}{2}$

- Να απαλείψουμε το γ γράφοντας $\gamma = \dfrac{4-\alpha-2\beta}{3}$

Και με τους τρεις τρόπους θα καταλήξουμε **σίγουρα** στο συμπέρασμα

Επεκτείνουμε την παραπάνω λογική για περισσότερες από μια σχέσεις.
Θα λέμε ότι δύο ή περισσότερες σχέσεις είναι ανεξάρτητες, αν καμία από αυτές δεν μπορεί να προκύψει με συνδυασμό των υπολοίπων.

Έτσι οι δύο σχέσεις

$\alpha+\beta-2x=0$ και

$3\alpha-\beta+4y=2$

είναι ανεξάρτητες, επειδή δεν μπορούμε από την 1^{η} με κανέναν τρόπο να καταλήξουμε στη 2^{η} (πως θα δημιουργήσουμε το y;)

Αντίθετα οι σχέσεις

$\alpha+2\beta+3\gamma=1$

$2\alpha-\beta+2\gamma=2$ και

$3\alpha+\beta+5\gamma=3$

δεν είναι ανεξάρτητες επειδή η 3^{η} από αυτές μπορεί να προκύψει με πρόσθεση των δύο άλλων.
Τα δεδομένα ενός προβλήματος πρέπει να είναι **ανεξάρτητα**, δηλαδή δεν πρέπει κάποιο δεδομένο να προκύπτει ως λογική συνέπεια των υπολοίπων, αλλιώς το πρόβλημα δεν είναι καλώς ορισμένο (βλ. εκτενέστερη ανάλυση παρακάτω). Πρέπει δηλαδή να θεωρούμε ότι όταν σε ένα πρόβλημα δίνονται δύο η περισσότερες σχέσεις αυτές είναι ανεξάρτητες.
Αν δοθούν τρεις σχέσεις και κάποια από αυτές προκύπτει από τις υπόλοιπες 2 που είναι ανεξάρτητες, τα πραγματικά δεδομένα είναι μόνο οι δύο ανεξάρτητες σχέσεις.
Η λογική λοιπόν που αναφέραμε για την περίπτωση που δίνεται μια σχέση, επεκτείνεται για περισσότερες σχέσεις ως εξής:

Αν δοθούν δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες σχέσεις και ζητείται να αποδείξουμε μια άλλη σχέση, ένας σίγουρος τρόπος για να γίνει αυτό είναι να απαλείψουμε από την αποδεικτέα σχέση, τόσες μεταβλητές όσες είναι και οι σχέσεις που δίνονται.

<u>Παράδειγμα 2^o</u>

Αν

$\mathbf{2\alpha+3\beta=x-y}$ **(1)**

$\mathbf{4\alpha+\beta=x+2y}$ **(2)**

να αποδειχθεί ότι $\mathbf{16\alpha^2+18\alpha\beta+16\beta^2=2x^2-xy+8y^2}$ **(3)**

<u>Απόδειξη</u>

Αν ονομάσουμε $\gamma=2\alpha+3\beta$, $\delta=4\alpha+\beta$, $\kappa=x-y$ και $\lambda=x+2y$

η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε προκύπτει από την προφανή ισότητα

$2\gamma^2+\delta^2-\gamma\delta=2\kappa^2+\lambda^2-\kappa\lambda$, δηλ.

$$2(2\alpha+3\beta)^2+(4\alpha+\beta)^2-(2\alpha+3\beta)(4\alpha+\beta)=2(x-y)^2+(x+2y)^2-(x-y)(x+2y)$$

Πως όμως θα μπορούσε κανείς να οδηγηθεί σ' αυτήν την λογική, να συνδυάσει δηλαδή τις δοσμένες σχέσεις με τον παραπάνω τρόπο για να φτάσει στο αποτέλεσμα που θέλουμε;

Τα πράγματα θα ήταν ακόμη πιο δύσκολα αν ανακατεύαμε τις μεταβλητές και γράφαμε τις σχέσεις ως εξής:

$2\alpha+y=x-3\beta$ και

$4\alpha-x=2y-\beta$

Σύμφωνα με όσα έχουμε πει, ένας σίγουρος τρόπος για να αποδείξουμε τη σχέση (3) είναι να αντικαταστήσουμε 2 μεταβλητές συναρτήσει των άλλων.

Αυτό γίνεται εύκολα αν λύσουμε το σύστημα των (1) και (2) με αγνώστους x και y και αντικαταστήσουμε στο 2^o μέλος της αποδεικτέας τα x και y συναρτήσει των α και β.

Από τη λύση του συστήματος των (1) και (2) βρίσκουμε

$$x=\frac{8\alpha+7\beta}{3},\ y=\frac{2\alpha-2\beta}{3}$$

Έτσι το 2^o μέλος της (3) είναι ίσο με

$$2x^2-xy+8y^2=2\left(\frac{8\alpha+7\beta}{3}\right)^2-\frac{8\alpha+7\beta}{3}\cdot\frac{2\alpha-2\beta}{3}+8\left(\frac{2\alpha-2\beta}{3}\right)^2=(\text{μετά τις πράξεις})=$$

$16\alpha^2+18\alpha\beta+16\beta^2$ και η πρόταση αποδείχθηκε.

Θα ήταν εξίσου σίγουρη η λύση αν λύναμε το σύστημα των (1) και (2) ως προς οποιουσδήποτε 2 αγνώστους μεταξύ των α, β, x και y.

Αν όμως λύναμε το σύστημα ως προς α και x, θα έπρεπε να κάνουμε αντικατάσταση και στα δύο μέλη της (3), ενώ με την λύση που κάναμε είχαμε να δουλέψουμε μόνο με το ένα μέλος.

<u>Παράδειγμα 3^o</u> (Απόδειξη ανισότητας)

Αν $\alpha+\beta+\gamma=1$ (1)

να αποδειχθεί ότι $(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2\geq\frac{4}{3}$ (2)

<u>Απόδειξη</u>

Μια σύντομη απόδειξη είναι η παρακάτω

$$(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2\overset{(1)}{=}(1-\gamma)^2+(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2=$$

$$3-2(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\overset{(1)}{=}1+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \quad (3)$$

Όμως[1]: $\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3} \geq \left(\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \dfrac{1}{3}$ και η (3) $\Rightarrow$

$(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2 \geq \dfrac{4}{3}$

Στην παραπάνω λύση χρησιμοποιήσαμε 5 φορές τη σχέση $\alpha+\beta+\gamma=1$.
Αν και η λύση αυτή είναι σύντομη, υπάρχει το ερώτημα:
Πως φανταστήκαμε τη σχέση $\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3} \geq \left(\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^2$;

Θα δώσουμε μια απόδειξη σύμφωνα με τα όσα έχουμε πει προηγουμένως.
Επειδή δόθηκε μια σχέση, στη σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε απαλείφουμε μια μεταβλητή. Π.χ αντικαθιστούμε το $\gamma=1-\alpha-\beta$. **Μια σχέση με 2 μεταβλητές είναι πιο εύκολα διαχειρίσιμη από μια σχέση με 3 μεταβλητές.**
Η (2) γράφεται: $(\alpha+\beta)^2+(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2 \geq \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \alpha^2+(\beta-1)\alpha+\beta^2-\beta+\dfrac{1}{3} \geq 0$
Το 1ο μέλος θεωρούμενο ως τριώνυμο έχει διακρίνουσα

$$\Delta=(\beta-1)^2-4(\beta^2-\beta+\frac{1}{3})=-\frac{1}{3}(9\beta^2-6\beta+1)=-\frac{1}{3}(3\beta-1)^2 \leq 0$$

Άρα $\alpha^2+(\beta-1)\alpha+\beta^2-\beta+\dfrac{1}{3} \geq 0$ για κάθε α και η πρόταση αποδείχθηκε.

<u>**Παράδειγμα 4ο**</u> **(Απόδειξη Τριγωνομετρικής ταυτότητας με υπόθεση)**
Στο παρακάτω παράδειγμα ακολουθούμε την ίδια ακριβώς λογική που εκθέσαμε και στα αλγεβρικά παραδείγματα.

Αν $\boldsymbol{\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}}$ να αποδειχθεί ότι $\boldsymbol{(1+\varepsilon\varphi\alpha)(1+\varepsilon\varphi\beta)=2}$

<u>**Απόδειξη**</u>

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \beta=\dfrac{\pi}{4}-\alpha$

Άρα:

$$(1+\varepsilon\varphi\alpha)(1+\varepsilon\varphi\beta)=(1+\varepsilon\varphi\alpha)\left(1+\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{4}-\alpha)\right)=(1+\varepsilon\varphi\alpha)\left(1+\frac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\varepsilon\varphi\alpha}\right)=$$

$$(1+\varepsilon\varphi\alpha)\left(1+\frac{1-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi\alpha}\right)=(1+\varepsilon\varphi\alpha)\cdot\frac{1+\varepsilon\varphi\alpha+1-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi\alpha}=2$$

---

1 $\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3} \geq \left(\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^2 \Leftrightarrow$ (μετά τις πράξεις)

$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2 \geq 0$ η οποία ισχύει.

2. Χρήση γεωμετρικών δεδομένων

Με τα παραπάνω 4 παραδείγματα δείξαμε πως μπορούμε να κάνουμε σωστή χρήση αλγεβρικών και τριγωνομετρικών δεδομένων.
Τα πράγματα είναι διαφορετικά όταν πρόκειται για γεωμετρικά δεδομένα, επειδή στη Γεωμετρία τα δεδομένα συνήθως δεν είναι αλγεβρικές ισότητες.
Πρέπει να γνωρίζουμε τα εξής:

α) Όπως αναφέραμε και στα προηγούμενα, στα προβλήματα των μαθηματικών δεν δίνουμε περισσότερα δεδομένα από αυτά που απαιτούνται (αν και αυτός ο κανόνας πολλές φορές παραβιάζεται, ειδικά στα Μαθηματικά της Γ΄ Λυκείου).
Έτσι π.χ δεν δίνουμε και τις τρεις γωνίες ενός τριγώνου, αφού από τις δύο γωνίες μπορούμε να υπολογίσουμε την 3η.
Ή, δεν δίνουμε και τις τρεις πλευρές ορθογωνίου τριγώνου, αφού από τις δύο πλευρές μπορούμε με το Πυθαγόρειο θεώρημα να υπολογίσουμε την 3η πλευρά.
Προβλήματα στα οποία δίνονται περισσότερα δεδομένα από αυτά που απαιτούνται για τη λύση του προβλήματος, λέμε ότι δεν είναι **"καλώς ορισμένα"**.

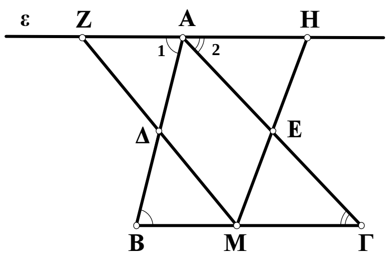
β) Όλα τα δεδομένα του προβλήματος πρέπει να χρησιμοποιηθούν. Αν ένα δεδομένο δεν χρησιμοποιηθεί, αυτό σημαίνει ότι

- ή το δεδομένο αυτό δεν χρειάζεται και τότε το πρόβλημα δεν είναι "καλώς ορισμένο"
- ή έχουμε κάνει κάποιο λάθος στην απόδειξη
- ή το δεδομένο αυτό έχει χρησιμοποιηθεί χωρίς να το αντιληφθούμε. Στα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν θα δείξουμε πως μπορεί να γίνει αυτό.

Το μεγάλο δίλημμα του μαθητή είναι αν κάποιο στοιχείο μπορεί να υπολογιστεί ώστε να προσπαθήσει να το υπολογίσει.
Αν και αυτό είναι πολύ απλό να το καταλάβει, η αντίστοιχη υποδομή δεν υπάρχει. Το αποτέλεσμα είναι να προσπαθεί να βρει κάτι που δεν βρίσκεται ή να αποδείξει κάτι που δεν ισχύει. Μετά 2-3 δοκιμές ο εγκαταλείπει την προσπάθεια πιστεύοντας ότι το στοιχείο αυτό δεν υπολογίζεται, ενώ στην πραγματικότητα μπορεί να υπολογιστεί ή μπορεί να θεωρήσει ότι ισχύει κάτι και να προσπαθεί να το αποδείξει για να συνεχίσει τη λύση του προβλήματος, ενώ αυτό δεν ισχύει.
Ή και αντίθετα, επειδή δεν μπορεί να αποδείξει κάτι να θεωρεί ότι αυτό δεν ισχύει και να εγκαταλείπει την προσπάθεια.
Για όλα τα παραπάνω υπάρχουν απλοί κανόνες ώστε πριν από κάθε προσπάθεια να γνωρίζει ο μαθητής αν κάτι ισχύει ή όχι.
Στα παραδείγματα που ακολουθούν εξηγούμε όλα τα παραπάνω.

<u>Παράδειγμα 1ο</u>

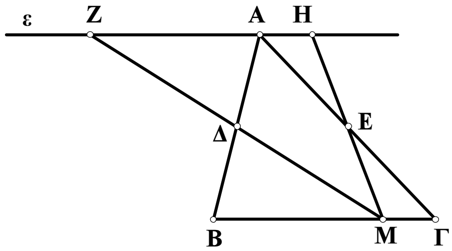
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από την κορυφή Α φέρνουμε ευθεία $\varepsilon \parallel ΒΓ$. Έστω Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα και Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ. Οι ΜΔ και ΜΕ τέμνουν την (ε) στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι ΖΗ = ΒΓ



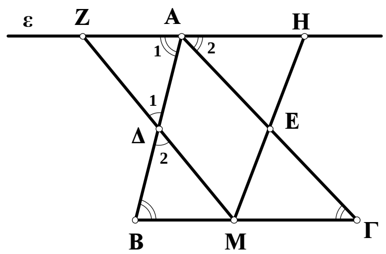
Λύση

Η πρώτη σκέψη που έρχεται στο μυαλό ενός μαθητή είναι να αποδείξει ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΜΖΗ είναι ίσα.

Η προσπάθεια αυτή δεν θα καρποφορήσει για δύο λόγους.
Ο ένας λόγος είναι ότι τα τρίγωνα δεν είναι ίσα
(Το σχήμα που κάναμε είναι λίγο παραπλανητικό. Τα τρίγωνα μοιάζουν να είναι ίσα).
Αυτό θα μπορούσε να το καταλάβει αν έκανε ένα διαφορετικό σχήμα ή άλλαζε τη θέση του σημείου Μ ή ακόμη και αν σύγκρινε τις άλλες πλευρές των τριγώνων με ένα υποδεκάμετρο. Στο επόμενο σχήμα αλλάξαμε τη θέση του σημείου Μ πάνω στη ΒΓ.
Από το σχήμα αυτό γίνεται φανερό, χωρίς χρήση των γεωμετρικών οργάνων, ότι τα τρίγωνα δεν είναι ίσα, αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, ενώ το ΜΑΗ είναι αμβλυγώνιο.



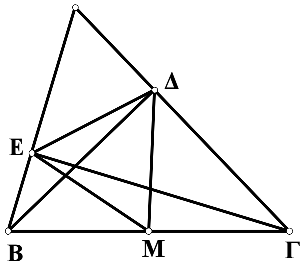
Ο άλλος λόγος είναι ότι και αν τα τρίγωνα είναι ίσα, κάτι τέτοιο δεν μπορεί να αποδειχθεί άμεσα, δηλαδή με απευθείας σύγκριση των τριγώνων ΑΒΓ και ΜΖΗ επειδή τα στοιχεία που δόθηκαν, δηλ. $\varepsilon \parallel B\Gamma$, Δ= μέσο της ΑΒ και Ε = μέσο της ΑΓ δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν.
Έχουμε πει ότι όλα τα στοιχεία που δόθηκαν πρέπει να χρησιμοποιηθούν, δηλ.
$\varepsilon \parallel B\Gamma$, άρα $\widehat{A_1} = \widehat{B}$, $\widehat{A_2} = \widehat{\Gamma}$ και ίσως και άλλες ισότητες



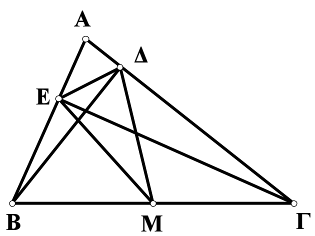
Δ = μέσο ΑΒ, άρα $A\Delta = \Delta B$
Ε = μέσο ΑΓ, άρα $AE = E\Gamma$
Τα δεδομένα αυτά συγκεντρώνονται στα τρίγωνα ΑΔΖ , ΒΔΜ , ΑΕΗ , ΓΕΜ.
Είναι τώρα $\overset{\triangle}{A\Delta Z} = \overset{\triangle}{B\Delta M}$ διότι $A\Delta = \Delta B$, $\Delta_1 = \Delta_2$ και
$\widehat{A_1} = \widehat{B}$, άρα $AZ = BM$ (1)
Όμοια, από την ισότητα των τριγώνων ΑΕΗ και ΜΕΓ προκύπτει $AH = M\Gamma$ (2)
Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει $ZH = B\Gamma$

<u>Παράδειγμα 2ο</u>
Δίνεται το μη ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.

<u>Απόδειξη</u>
Το 1ο ερώτημα είναι ποιες πλευρές του τριγώνου ΜΔΕ είναι ίσες.
Στο σχήμα που κάναμε αυτό είναι οπτικά δυσδιάκριτο.
Αυτό όμως μπορεί εύκολα να ξεπεραστεί με τον ίδιο τρόπο που αναφέραμε στο 1ο παράδειγμα.



Κατασκευάζουμε δηλαδή ένα άλλο τρίγωνο, διαφορετικό από το αρχικό όπως το επόμενο. Στο τρίγωνο αυτό η γωνία $\widehat{A}$ είναι κοντά στην ορθή και τα ίχνη των υψών από τα Β και Δ βρίσκονται κοντά στην κορυφή Α.
Στο τρίγωνο αυτό είναι ολοφάνερο (οπτικά) ότι οι ίσες πλευρές είναι οι ΜΔ και ΜΕ.
Μια άλλη λογική με την οποία θα μπορούσαμε να καταλάβουμε ποιες πλευρές του τριγώνου ΜΔΕ είναι ίσες είναι η εξής:

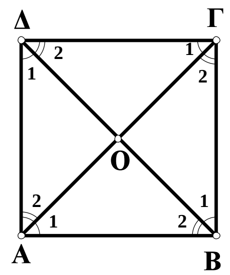


Αν ήταν $ΜΔ = ΔΕ$ για τον ίδιο λόγο θα έπρεπε να ήταν και $ΜΕ = ΔΕ$, αφού μπορούμε στο ίδιο τρίγωνο να αλλάξουμε τη θέση των κορυφών Β και Γ και τότε η ΜΔ γίνεται ΜΕ
Με πιο απλά λόγια θα μπορούσαμε να πούμε: Τι περισσότερο έχει το ύψος ΒΔ από το ύψος ΓΕ ώστε να είναι $ΜΔ = ΔΕ$ και όχι $ΜΕ = ΔΕ$;

Τώρα που γνωρίζουμε ποιες πλευρές είναι ίσες η απόδειξη είναι εύκολη (βλ. το 2ο σχήμα).
Είναι $ΔΜ = \frac{1}{2}ΒΓ$ ως διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΒΔΓ και $ΕΜ = \frac{1}{2}ΒΓ$ ως διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΒΕΓ. Επομένως $ΔΜ = ΕΜ$ και η πρόταση αποδείχθηκε.
Το ότι $ΔΜ = \frac{1}{2}ΒΓ$ χρησιμοποιεί πλήρως ότι το ΒΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ και το ότι $ΕΜ = \frac{1}{2}ΒΓ$ χρησιμοποιεί πλήρως ότι το ΓΕ είναι επίσης ύψος του τριγώνου ΑΒΓ.

Παράδειγμα 3ο
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και κάποια δεδομένα ακόμη και ζητείται να αποδείξουμε μια πρόταση.
Το ερώτημα είναι πως θα χρησιμοποιήσουμε το δεδομένο ότι το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Λύση



Μια λάθος σκέψη που κυριαρχεί στο μυαλό των μαθητών είναι ότι όσο περισσότερα δεδομένα έχουμε τόσο πιο εύκολα θα λύσουμε το πρόβλημα.
Η αλήθεια είναι από την απέναντι πλευρά. Δηλαδή όσο περισσότερα στοιχεία δοθούν τόσο πιο δύσκολο το πρόβλημα, επειδή πρέπει να χρησιμοποιηθούν όλα τα δεδομένα συνδυαζόμενα κατάλληλα.
Στις περιπτώσεις αυτές (όταν δηλαδή δίνονται πολλά στοιχεία) δεν είναι εύκολο να γίνει σωστή χρήση τους. Το σύνηθες είναι να χρησιμοποιούνται τα δεδομένα μερικώς, επομένως να μην μπορεί να λυθεί το πρόβλημα ή να χρησιμοποιούνται τα ίδια δεδομένα με διαφορετικούς τρόπους και αυτό δημιουργεί περισσότερα προβλήματα.
Τα δεδομένα πρέπει να χρησιμοποιηθούν με τέτοιο τρόπο, ώστε από τη χρήση τους να συνεπάγονται όλες οι υποθέσεις του προβλήματος.
Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το δεδομένο ότι το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο οδηγεί σε πολλές σχέσεις και πρέπει να γίνει σωστή επιλογή μερικών από αυτές ώστε να λυθεί το πρόβλημα.
Μερικά στοιχεία που μπορούν να χρησιμοποιηθούν είναι (βλ. σχήμα):

Δοκιμή 1η
$ΑΒ \parallel ΓΔ$, $ΑΔ \parallel ΒΓ$, $ΟΑ = ΟΓ$, $ΟΒ = ΟΔ$, $\widehat{Α} = \widehat{Γ}$, $\widehat{Β} = \widehat{Δ}$
Τα στοιχεία δεν είναι αρκετά. Το πρόβλημα δεν θα λυθεί

Δοκιμή 2η
Χρησιμοποιούμε όλα τα στοιχεία της 1ης δοκιμής και επιπλέον ότι
$AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$
Το πρόβλημα πάλι δεν θα λυθεί

Δοκιμή 3η
Χρησιμοποιούμε όλα τα στοιχεία της 2ης δοκιμής και επιπλέον ότι
$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta} = 90^0$
Το πρόβλημα πάλι δεν θα λυθεί

Δοκιμή 4η
Χρησιμοποιούμε όλα τα στοιχεία της 3ης δοκιμής και επιπλέον ότι $A\Gamma = B\Delta$
Το πρόβλημα ούτε τώρα μπορεί να λυθεί.

Δοκιμή 5η
Χρησιμοποιούμε μόνον ότι $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A$ και $\widehat{A} = 90^0$
Τώρα είναι δυνατό να λυθεί το πρόβλημα

Δοκιμή 6η
Χρησιμοποιούμε ότι $OA = O\Gamma$, $OB = O\Delta$, $A\Gamma = B\Delta$, $A\Gamma \perp B\Delta$
Και πάλι είναι δυνατό να λυθεί το πρόβλημα.

Θα φανεί ίσως παράξενο γιατί ενώ στις 4 πρώτες δοκιμές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε περισσότερα στοιχεία το πρόβλημα δεν λύνεται, ενώ μπορούμε (πιθανόν) να το λύσουμε χρησιμοποιώντας πολύ λιγότερα στοιχεία με την 5η και 6η δοκιμή.

Εξηγούμε τον λόγο:

Δοκιμή 1η
Όλα τα στοιχεία που χρησιμοποιούμε απλά εξασφαλίζουν ότι το ΑΒΓΔ είναι ένα οποιοδήποτε παραλληλόγραμμο. Όμως το ΑΒΓΔ δεν είναι ένα οποιοδήποτε παραλληλόγραμμο. Είναι τετράγωνο. Επομένως το δεδομένο του προβλήματος ότι δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο δεν χρησιμοποιείται πλήρως. Αν δεν χρησιμοποιήσουμε πρόσθετα στοιχεία το πρόβλημα δεν θα λυθεί.

Δοκιμή 2η
Τα δεδομένα αυτά, αν και περισσότερα από αυτά της 1ης δοκιμής δεν μας λένε τίποτα περισσότερο. Το ΑΒΓΔ συνεχίζει να είναι ένα τυχαίο παραλληλόγραμμο.

Δοκιμή 3η
Πήραμε επιπλέον υπόψη ότι $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta} = 90^0$. Τα επιπλέον αυτά στοιχεία αυτό που λένε είναι ότι το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. Θα αρκούσε μόνο ότι $\widehat{A} = 90^0$ για να μας πει το ίδιο πράγμα.
Ούτε λοιπόν με τα πρόσθετα αυτά στοιχεία το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο. Το πρόβλημα ακόμη δεν μπορεί να λυθεί.

Δοκιμή 4η

Προσθέσαμε ακόμη ότι $ΑΓ = ΒΔ$. Το δεδομένο αυτό δεν προσθέτει τίποτα περισσότερο. Με τα μέχρι τώρα στοιχεία που χρησιμοποιούνται το ΑΒΓΔ είναι ένα οποιοδήποτε ορθογώνιο..

Με τις δοκιμές λοιπόν 1, 2, 3 και 4 δεν είναι δυνατόν να λύσουμε το πρόβλημα. Χρειάζονται επιπλέον στοιχεία τα οποία να εξασφαλίζουν ότι το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.
Ένα ορθογώνιο για να είναι τετράγωνο αρκεί δύο διαδοχικές πλευρές του να είναι ίσες. Αν λοιπόν προσθέσουμε στην τελευταία δοκιμή και το στοιχείο $ΑΒ = ΒΓ$ τότε το πρόβλημα ίσως λυθεί.
Μπορούμε εναλλακτικά να προσθέσουμε ότι $\widehat{Α_1} = \widehat{Α_2}$ το οποίο εξασφαλίζει ότι το ΑΒΓΔ είναι ταυτόχρονα και ρόμβος, άρα τετράγωνο.

Δοκιμή 5η

Τα στοιχεία που χρησιμοποιούμε $ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ$ και $\widehat{Α} = 90^0$ εξασφαλίζουν ότι το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, επομένως με τη χρήση των στοιχείων αυτών ίσως το πρόβλημα λυθεί (βέβαια πρέπει να χρησιμοποιηθεί και ο,τιδήποτε άλλο έχει δοθεί).

Δοκιμή 6η

Και πάλι τα στοιχεία που χρησιμοποιούμε στην δοκιμή αυτή
$ΟΑ = ΟΓ$, $ΟΒ = ΟΔ$, $ΑΓ = ΒΔ$, $ΑΓ \perp ΒΔ$ εξασφαλίζουν ότι το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, άρα είναι δυνατό με τη χρήση των στοιχείων αυτών να λύσουμε το πρόβλημα.

3. Δυνατότητα εύρεσης κάποιου άγνωστου στοιχείου. Πλήρη και ελλιπή δεδομένα

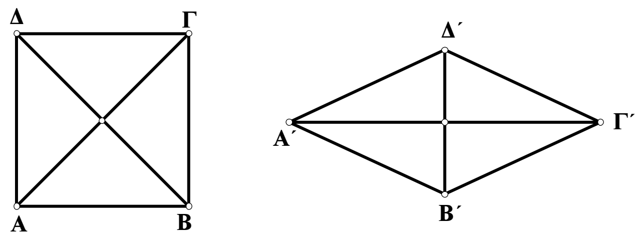
Ένα άλλο ερώτημα που δημιουργείται κατά τη λύση των προβλημάτων είναι το αν ένα μέγεθος (μήκος ευθ. τμήματος, μέτρο γωνίας, εμβαδόν κ.λ.π) μπορεί να υπολογιστεί από τα υπάρχοντα στοιχεία (δεδομένα).
Λέει π.χ ο μαθητής: "Αν μπορέσω να υπολογίσω τη διάμεσο ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ μετά μπορώ να λύσω το πρόβλημα". Δεν γνωρίζει όμως αν η διάμεσος μπορεί να υπολογιστεί. Ίσως κάνει 2-3 δοκιμές για τον υπολογισμό της διαμέσου, όμως η διάμεσος να μην μπορεί να υπολογιστεί. Έτσι χάνει πολύτιμο χρόνο.
Ίσως πάλι ενώ η διάμεσος μπορεί να υπολογιστεί, μετά μερικές δοκιμές ο μαθητής εγκαταλείπει τις προσπάθειες πιστεύοντας ότι κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό.
Είναι λοιπόν πολύ σημαντικό να γνωρίζει πριν από οποιαδήποτε προσπάθεια αν μπορεί να υπολογιστεί κάποιο στοιχείο ή όχι ώστε να μην κάνει άσκοπες δοκιμές.
Η απάντηση είναι απλή και θα την δώσουμε με παραδείγματα.

Αν δώσουμε σε 10 μαθητές τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ, π.χ $α = 5cm$, $β = 6cm$, $γ = 8cm$ και ζητήσουμε να σχεδιάσουν (κατασκευάσουν) το τρίγωνο, και τα 10 σχήματα που θα πάρουμε θα είναι ταυτόσημα. Δεν μπορεί δηλαδή ένας μαθητής με τα ίδια στοιχεία να κατασκευάσει ένα διαφορετικό τρίγωνο.
Λέμε ότι από τις 3 πλευρές ενός τριγώνου, το τρίγωνο είναι ορισμένο.

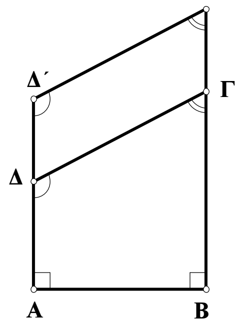
Αν ζητήσουμε από τους μαθητές να μετρήσουν με το μοιρογνωμόνιο την γωνία $\widehat{A}$, όλοι θα μας δώσουν την ίδια απάντηση περίπου 38-39^o.
Λέμε ότι η γωνία $\widehat{A}$ είναι ορισμένη.
Για τον ίδιο λόγο κάθε στοιχείο του τριγώνου είναι ορισμένο.
Π.χ όλα τα παρακάτω στοιχεία του τριγώνου είναι ορισμένα:
Η διάμεσος μ_β, η διχοτόμος δ_α, η ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου, το εμβαδόν του Ε, η απόσταση του σημείου επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου με την πλευρά ΒΓ από το ίχνος του ύψους ΒΕ.
Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι καθένα από τα παραπάνω στοιχεία μπορεί να υπολογιστεί από τις πλευρές του τριγώνου α, β, γ.
Υπάρχουν δηλαδή τύποι που δίνουν τα στοιχεία αυτά συναρτήσει των α, β, γ.
Π.χ είναι $\delta_\alpha = \dfrac{2}{\beta+\gamma}\sqrt{\beta\gamma\tau(\tau-\alpha)}$
Το πως μπορεί να γίνει αυτό δεν είναι πάντοτε εύκολο. Αρκούμαστε εδώ να πούμε ότι αυτό είναι δυνατό.
Για τον ίδιο λόγο αν δοθούν οι πλευρές β και γ και η περιεχόμενη γωνία $\widehat{A}$, το τρίγωνο είναι ορισμένο και κάθε στοιχείο του τριγώνου μπορεί να υπολογιστεί.
Υπάρχει δηλαδή τύπος που δίνει το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές τα ίχνη των διχοτόμων του συναρτήσει των β , γ και $\widehat{A}$. Το ποιος είναι ο τύπος αυτός δεν μας ενδιαφέρει προς το παρόν. Μας αρκεί ότι αυτό μπορεί να γίνει.

Αν δοθούν οι 4 πλευρές ενός τετραπλεύρου α, β, γ, δ το τετράπλευρο δεν είναι ορισμένο. Υπάρχουν δηλαδή διάφορα τετράπλευρα, άνισα μεταξύ τους που έχουν πλευρές α, β, γ, και δ. π.χ στα παρακάτω σχήματα το τετράγωνο ΑΒΓΔ και ο ρόμβος $A'B'\Gamma'\Delta'$ έχουν ίσες πλευρές, όμως δεν είναι ίσα σχήματα. Η γωνία A' του ρόμβου δεν είναι ίση με τη γωνία Α του τετραγώνου. Επίσης η διαγώνιος $A'\Gamma'$ του ρόμβου δεν είναι ίση με την διαγώνιο ΑΓ του τετραγώνου.
Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορεί να υπολογιστεί κάθε στοιχείο του τετραπλεύρου συναρτήσει των πλευρών του α, β, γ, δ.

ΠΡΟΣΟΧΗ όμως: Αυτό δεν αποκλείει κάποια στοιχεία του τετραπλεύρου να μπορούν να υπολογιστούν συναρτήσει των α, β, γ, δ.



Είναι χρήσιμο το εξής:
Για να είναι ορισμένο ένα νίγωνο, χρειάζονται $2\nu-3$ ανεξάρτητα στοιχεία του, δηλαδή κανένα από τα στοιχεία αυτά να μην ορίζεται από τα υπόλοιπα.
Έτσι για να οριστεί ένα τρίγωνο χρειάζονται $2\cdot 3-3=3$ ανεξάρτητα στοιχεία του.
Για να ορίζεται ένα τετράπλευρο χρειάζονται $2\cdot 4-3=5$ ανεξάρτητα στοιχεία του κ.ο.κ.



ΓΔ // Γ΄Δ΄

ΠΡΟΣΟΧΗ και πάλι: Αν δοθούν οι 4 γωνίες ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ και μια πλευρά του, π.χ η ΑΒ, το τετράπλευρο δεν είναι

ορισμένο, επειδή τα 5 στοιχεία που δίνονται δεν είναι ανεξάρτητα. Η γωνία $\widehat{Δ}$ μπορεί να υπολογιστεί αν δοθούν οι άλλες 3 γωνίες του. Έτσι τα δύο τετράπλευρα ΑΒΓΔ και $ΑΒΓ'Δ'$ έχουν μια κοινή πλευρά και 4 γωνίες ίσες, όμως δεν είναι ίσα.
Όπως είπαμε όμως, μπορεί ένα σχήμα να μην είναι ορισμένο, όμως κάποια στοιχεία του να μπορούν να υπολογιστούν.

Έτσι π.χ ένα τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ορισμένο από τις γωνίες του $\widehat{B}$ και $\hat{Γ}$, όμως η γωνία των διχοτόμων του από τις κορυφές Β και Γ μπορεί να υπολογιστεί και είναι ίση με $90^0 + \frac{\widehat{A}}{2} = 90^0 + \frac{180^0 - \widehat{B} - Γ}{2} = \frac{360 - \widehat{B} - \hat{Γ}}{2}$

Επίσης ένα τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ορισμένο μόνο από την πλευρά του α, όμως το μήκος του ευθ. τμήματος που συνδέει τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ μπορεί να υπολογιστεί και είναι ίσο με $\frac{α}{2}$.

Συμπερασματικά
Αν ένα σχήμα είναι ορισμένο όταν δοθούν κάποια στοιχεία του, κάθε στοιχείο του σχήματος είναι ορισμένο. Θεωρητικά δηλ. μπορεί να υπολογιστεί από τα δοσμένα στοιχεία.
Αν ένα σχήμα δεν είναι ορισμένο από κάποια στοιχεία του, τότε κάποια στοιχεία του σχήματος ίσως είναι ορισμένα, δηλαδή μπορούν να υπολογιστούν.

Επεκτείνουμε τα παραπάνω και στην Αναλυτική Γεωμετρία:

Ένα σημείο στο επίπεδο είναι ορισμένο αν είναι γνωστές οι συντεταγμένες του.
Επομένως αν δοθούν δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τότε

- η απόστασή τους (ΑΒ) είναι ορισμένη. Υπάρχει δηλαδή τύπος που δίνει την (ΑΒ) συναρτήσει των x_1, y_1, x_2, y_2
- οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι επίσης ορισμένες
- η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με τον άξονα των x είναι ορισμένη

Αν δοθούν οι συντεταγμένες των κορυφών ενός τριγώνου ΑΒΓ, το τρίγωνο είναι ορισμένο και κάθε στοιχείο του μπορεί να υπολογιστεί.
Το ίδιο συμπέρασμα έχουμε και για την περίπτωση ενός τετραπλεύρου. Αν δηλαδή δοθούν οι συντεταγμένες των 4 κορυφών ενός τετραπλεύρου, το τετράπλευρο είναι ορισμένο (αντίθετα με την περίπτωση όπου δίνονταν οι 4 πλευρές του οπότε το τετράπλευρο δεν ήταν ορισμένο).

Αν δοθεί η εξίσωση μιας γραμμής η γραμμή είναι ορισμένη. Επομένως αν δοθούν οι εξισώσεις δύο ευθειών, η γωνία τους (οξεία ή ορθή) μπορεί να υπολογιστεί.
Αν δοθεί η εξίσωση μιας ευθείας και οι συντεταγμένες ενός σημείου του επιπέδου, η απόσταση του σημείου από την ευθεία μπορεί να υπολογιστεί.

4. Ισοδυναμία δεδομένων

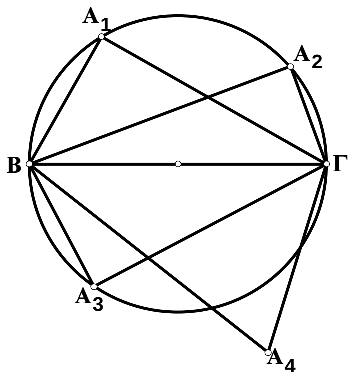
Ένα άλλο πρόβλημα που απασχολεί τους μαθητές είναι το πώς θα χρησιμοποιήσουν τα δεδομένα του προβλήματος όταν υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να γίνει αυτό.
Η απάντηση είναι πάλι απλή.

Πρέπει από τον τρόπο με τον οποίο θα χρησιμοποιηθούν οι διάφορες σχέσεις να συνεπάγονται όλα τα δεδομένα του προβλήματος.
Αναφέρουμε ένα

Παράδειγμα

Ζητούνται οι συντεταγμένες της κορυφής Α ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{A}=90^0$) του οποίου δίνονται οι συντεταγμένες των $B(3,1)$, $\Gamma(1,5)$ και κάποιο άλλο στοιχείο (αδιάφορο προς στιγμή).

Για τη λύση του προβλήματος έστω $A(x,y)$. Είναι σίγουρό ότι οι συντεταγμένες του Α δεν μπορούν να βρεθούν μόνο από τις συντεταγμένες των Β και Γ αφού υπάρχουν άπειρα ορθογώνια τρίγωνα με βάση την ΒΓ όπως τα $A_1B\Gamma$, $A_2B\Gamma$, $A_3B\Gamma$ του διπλανού σχήματος.



Όλες οι κορυφές A_1, A_2, A_3 ... βρίσκονται σε κύκλο με διάμετρο την ΒΓ. Όμως η θέση της κορυφής Α δεν είναι εντελώς τυχαία. Σε οποιαδήποτε θέση η γωνία $\widehat{BA_4\Gamma}$ δεν είναι ορθή. Αυτό σημαίνει ότι μεταξύ των συντεταγμένων της κορυφής Α υπάρχει κάποια σχέση. Αυτήν την σχέση θα αναζητήσουμε.
Για να βρεθεί η σχέση αυτή πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ότι $\widehat{A}=90^0$.
Αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί με διάφορους τρόπους.
Αυτό που θα φανεί παρακάτω είναι το αναμενόμενο, δηλαδή οποιαδήποτε σχέση λέει ότι η γωνία Α είναι ορθή πρέπει να οδηγεί στην ίδια πάντοτε σχέση μεταξύ των x και y.
Παραθέτουμε κάποιους από αυτούς.

$1^{ος}$ τρόπος (Πυθαγόρειο θεώρημα)

$$\widehat{A}=90^0 \Leftrightarrow (AB)^2+(A\Gamma)^2=(B\Gamma)^2 \qquad (1)$$

Η ισοδυναμία αυτή είναι απαραίτητη γιατί αυτό που πρέπει να εξασφαλίσουμε είναι ότι από τη σχέση που θα χρησιμοποιήσουμε πρέπει να προκύπτει η υπόθεση $\widehat{A}=90^0$
Η (1) $\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2+(x-1)^2+(y-5)^2=(3-1)^2+(1-5)^2$ η οποία μετά τις πράξεις καταλήγει: $x^2+y^2-4x-6y+8=0$

$2^{ος}$ τρόπος: Η διάμεσος $AM=\frac{1}{2}B\Gamma$

Το μέσο Μ της ΒΓ είναι $M\left(\frac{x_B+x_\Gamma}{2},\frac{y_B+y_\Gamma}{2}\right)$, δηλαδή $M(2,3)$

Άρα η σχέση $AM=\frac{1}{2}B\Gamma \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-3)^2=\frac{1}{4}[(3-1)^2+(1-5)^2] \Leftrightarrow$

$x^2+y^2-4x-6y+8=0$

$3^{ος}$ τρόπος: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0$

Είναι: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A\,,y_B-y_A)=(3-x\,,1-y)$

$\overrightarrow{A\Gamma} = (x_\Gamma - x_A\,, y_\Gamma - y_A) = (1-x\,,5-y)$

Επίσης

$\widehat{A} = 90^0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = 0 \Leftrightarrow (3-x\,,1-y)\cdot(1-x\,,5-y) = 0 \Leftrightarrow$

$(3-x)(1-x)+(1-y)(5-y) = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-6y+8=0$

4ος τρόπος: $\lambda_{AB}\cdot\lambda_{A\Gamma} = -1$

Παραβλέποντας την περίπτωση όπου κάποιος συντελεστής των ευθειών ΑΒ ή ΑΓ δεν ορίζεται (και αυτό στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι δυνατό), για να είναι

$\widehat{A} = 90^0 \Leftrightarrow \lambda_{AB}\cdot\lambda_{A\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \dfrac{y-1}{x-3}\cdot\dfrac{y-5}{x-1} = -1 \Leftrightarrow$ (μετά τις πράξεις)

$x^2+y^2-4x-6y+8=0$

5ος τρόπος: Ο κύκλος διαμέτρου ΒΓ διέρχεται από το Α

Επειδή $\widehat{A} = 90^0 \Leftrightarrow$ το Α ανήκει σε κύκλο με διάμετρο ΒΓ. Το κέντρο του κύκλου αυτού είναι το $M(2,3)$ και η ακτίνα του κύκλου είναι $\frac{1}{2}B\Gamma = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{5}$

Επομένως η εξίσωση του κύκλου είναι $(x-2)^2+(y-3)^2 = 5$ και επειδή το σημείο $A(x\,,y)$ ανήκει στον παραπάνω κύκλο οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την ίδια εξίσωση η οποία μετά τις πράξεις καταλήγει $x^2+y^2-4x-6y+8=0$

Συμπερασματικά

Όλοι οι ισοδύναμοι τρόποι χρήσης του δεδομένου $\widehat{A} = 90^0$ οδηγούν στην ίδια σχέση.

Τα πράγματα διαφέρουν φαινομενικά στη χρήση των δεδομένων σε προβλήματα Γεωμετρίας. Ουσιαστικά όμως η βάση της λογικής είναι η ίδια.
Αναφέρουμε μερικά γεωμετρικά παραδείγματα.

<u>Παράδειγμα 1ο</u>

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\beta = \gamma$) και ζητείται να αποδείξουμε κάτι.

Το ερώτημα είναι πάλι πως θα χρησιμοποιήσουμε το δεδομένο $\beta = \gamma$.
Υπάρχουν διάφοροι ισοδύναμοι τρόποι για να γίνει αυτό.

1ος τρόπος

Χρησιμοποιούμε $\beta = \gamma$

2ος τρόπος

$\beta = \gamma \Leftrightarrow \widehat{B} = \widehat{\Gamma}$

Μπορούμε δηλαδή αντί να χρησιμοποιήσουμε την ισότητα των πλευρών να χρησιμοποιήσουμε την ισότητα των γωνιών

3ος τρόπος

$\beta = \gamma \Leftrightarrow \upsilon_\beta = \upsilon_\gamma$

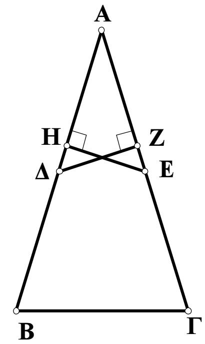
Μπορούμε δηλαδή αντί να χρησιμοποιήσουμε την ισότητα των πλευρών να χρησιμοποιήσουμε την ισότητα των αντίστοιχων υψών.

4^{ος} τρόπος

$\beta = \gamma \Leftrightarrow \mu_\beta = \mu_\gamma$

Μπορούμε δηλαδή αντί να χρησιμοποιήσουμε την ισότητα των πλευρών να χρησιμοποιήσουμε την ισότητα των αντίστοιχων διαμέσων.

5^{ος} τρόπος



$\beta = \gamma \Leftrightarrow$ τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ ισαπέχουν από τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, δηλ. $\Delta Z = EH$ (βλ. διπλανό σχήμα)

Πράγματι, αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές, από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΖ και ΑΕΗ προκύπτει $\Delta Z = EH$ και αντίστροφα, αν $\Delta Z = EH$ από τα ίδια τρίγωνα προκύπτει

$A\Delta = AE \Rightarrow \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}A\Gamma \Rightarrow AB = A\Gamma$, δηλαδή η υπόθεση ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές χρησιμοποιείται ισοδύναμα.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Τα μέσα Δ και Ε των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα απέχουν εξίσου από την ΒΓ. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει, αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο τα μέσα δύο πλευρών απέχουν εξίσου από την 3^{η} πλευρά, δεν προκύπτει ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Αυτό ισχύει σε κάθε τρίγωνο και όχι μόνο στο ισοσκελές.

Από το διπλανό σχήμα αυτό γίνεται (οπτικά) φανερό χωρίς απόδειξη.