Η ΣΩΣΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ $\Rightarrow$ ΚΑΙ $\Leftrightarrow$[1]

Νικ. Ιωσηφίδης, Μαθηματικός – Φροντιστής, ΒΕΡΟΙΑ

e-mail: iossifid@yahoo.gr

Η εισήγηση αυτή φαίνεται αρχικά να μην έχει απόλυτη σχέση με τον τίτλο της ημερίδας "ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ". Επιλέξαμε όμως αυτό το ειδικό μέρος των μαθηματικών, επειδή περισσότερο από κάθε άλλη τάξη, υπάρχει η ανάγκη της ακριβολογίας, της αυστηρότητας και των λεπτομερειών στις Πανελλαδικές εξετάσεις και επειδή στα σχολικά βιβλία και τα βοηθήματα που κυκλοφορούν δε γίνεται ειδική μνεία για τα σύμβολα αυτά. Επίσης, είναι συχνό το αίτημα των μαθητών για τη σωστή χρήση των παραπάνω συμβόλων.
Αρκετά από τα παραδείγματα που δίνονται στην εισήγηση αυτή, είναι από την ύλη των Πανελλαδικών εξετάσεων, δηλαδή της Γ΄ Λυκείου. Δίνουμε όμως και παραδείγματα που ανήκουν στην ύλη άλλων τάξεων, αφού όλη η ύλη των προηγούμενων τάξεων είναι απαραίτητη για τις εξετάσεις της τελευταίας τάξης.

Ιστορικό:

Τα σύμβολα $\Rightarrow$ και $\Leftrightarrow$ έκαναν την εμφάνισή τους στα Ελληνικά βιβλία κυρίως τη δεκαετία 1970-80. Γύρω στο 2000 καταργήθηκαν από τα σχολικά εγχειρίδια και επανεμφανίστηκαν πάλι στο βιβλίο της Α΄ Λυκείου της σχολικής χρονιάς 2010-11.
Το γεγονός ότι τα σύμβολα αυτά δεν υπήρχαν στα βιβλία και οι λύσεις των ασκήσεων γίνονταν πολλές φορές με τρόπο που δεν εξασφάλιζε τη βεβαιότητα στο λύτη, είναι ένα γεγονός εντυπωσιακό. Δεν μπορούν να εννοηθούν μαθηματικά χωρίς τη χρήση των συμβόλων αυτών και αυτό θα φανεί στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Σημασία των συμβόλων $\Rightarrow$ και $\Leftrightarrow$

Αν p και q είναι δύο προτάσεις (ισότητες, ανισότητες, σχέσεις του περιέχεσθαι κ.λ.π) η σχέση p $\Rightarrow$ q, δηλώνει ότι από την αλήθεια της πρότασης p μπορούμε με σωστούς συλλογισμούς να καταλήξουμε στην πρόταση q.
Αυτό διαβάζεται:

Η πρόταση p συνεπάγεται την πρόταση q, η πιο απλά: **p συνεπάγεται q**.

Όταν γράφουμε:
$2x = 6 \Rightarrow x = 3$, αυτό σημαίνει ότι αν ισχύει η σχέση $2x = 6$, τότε θα ισχύει υποχρεωτικά και η σχέση $x = 3$

---
[1] Η όλη ανάπτυξη της παρούσας εισήγησης γίνεται χωρίς τη χρήση της Μαθηματικής Λογικής και είναι προσαρμοσμένη στις γνώσεις των μαθητών

Όταν γράφουμε:
$2x = 6 \Rightarrow 4x^2 = 36$, αυτό σημαίνει ότι αν ισχύει η σχέση $2x = 6$, τότε θα ισχύει και η σχέση $4x^2 = 36$

Όταν γράφουμε $4x^2 = 36 \Rightarrow 2x = \pm 6$, αυτό σημαίνει ότι αν ισχύει η $1^η$ σχέση τότε υποχρεωτικά θα είναι $2x = 6$ ή $2x = -6$

Όταν γράφουμε p $\Leftrightarrow$q, αυτό σημαίνει p $\Rightarrow$ q και q $\Rightarrow$ p, δηλαδή από την πρόταση p προκύπτει η πρόταση q και από την πρόταση q προκύπτει η πρόταση p.
Αυτό διαβάζεται:

Η πρόταση p είναι ισοδύναμη με την q.

Υπάρχουν και άλλες ισοδύναμες εκφράσεις όπως:

- **p συνεπάγεται q και αντίστροφα**
- **Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να ισχύει η p είναι να ισχύει η q**
- **Για να ισχύει η p πρέπει και αρκεί να ισχύει η q**
- **p αν και μόνον αν q**
- **p τότε και μόνον τότε αν q**
- **p ανν q (το ανν με δύο ν)**

Στον παρακάτω πίνακα δείχνουμε μερικές περιπτώσεις συνεπαγωγών και ισοδυναμιών στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών.

Από την Άλγεβρα
Ισότητες ($\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$)

- $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$
- $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma,\ \gamma \neq 0$
- $(\alpha = \beta \text{ και } \gamma = \delta) \Rightarrow (\alpha + \gamma = \beta + \delta)$. Η ισοδυναμία δεν ισχύει
- $(\alpha = \beta \text{ και } \gamma = \delta) \Rightarrow (\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \delta)$. Η ισοδυναμία δεν ισχύει
- $\alpha = \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta},\ \alpha \cdot \beta \neq 0$
- Αν ν = περιττός, τότε $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$

Μια πολύ χρήσιμη πρόταση είναι η παρακάτω:
Αν $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$
Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει. Αν δηλαδή $\alpha^2 = \beta^2 \not\Rightarrow \alpha = \beta$
Αυτό που ισχύει είναι ότι: Αν $\alpha^2 = \beta^2$ τότε $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$
Ειδικότερα, η εξίσωση $A^2(x) = B^2(x)$ είναι ισοδύναμη με το ζεύγος των εξισώσεων $A(x) = B(x)$ και $A(x) = -B(x)$
Αν όμως α, β ομόσημοι με την ευρεία έννοια, (δηλαδή $\alpha, \beta \geq 0$ ή $\alpha, \beta \leq 0$), τότε: $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2$ και γενικότερα $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^{2\nu} = \beta^{2\nu},\ \nu \in \mathbb{N}^*$

Θα χρησιμοποιήσουμε την πρόταση αυτή στη λύση άρρητων εξισώσεων

- $\alpha^2 = \beta^2 \Leftrightarrow |\alpha| = |\beta|$ χωρίς περιορισμούς για τα α και β
- Αν $\alpha = \beta \Rightarrow |\alpha| = |\beta|$. Η ισοδυναμία δεν ισχύει. Το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και στους μιγαδικούς, αν δηλ. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, τότε $z_1 = z_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2|$, ενώ δεν ισχύει η ισοδυναμία
- $\alpha = \beta \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} = \sqrt[\nu]{\beta}$
- Αν $\alpha > 0, \text{τότε}: \ x = y \Leftrightarrow \alpha^x = \alpha^y$ και ειδικότερα $x = y \Leftrightarrow e^x = e^y$
- $\alpha = \beta > 0 \Leftrightarrow \log\alpha = \log\beta$
- $\alpha = \beta > 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = \ln\beta$

Ανισότητες:

- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
- Αν $\gamma > 0$, τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
- Αν $\gamma < 0$, τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$
- Αν $\alpha, \beta > 0$ ή $\alpha, \beta < 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{1}{\beta}$
- Αν $\alpha, \beta > 0$, τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$
- Αν $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta, \ \theta > 0$
- Αν $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta, \ \theta > 0$
- Αν $|x| > \theta \Leftrightarrow (x < -\theta \text{ ή } x > \theta), \ \theta > 0$
- Αν $|x| \geq \theta \Leftrightarrow (x \leq -\theta \text{ ή } x \geq \theta), \ \theta > 0$
- Αν $\alpha, \beta > 0$, τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \log\alpha > \log\beta$
- Αν $\alpha, \beta > 0$, τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \ln\alpha > \ln\beta$

Από την Τριγωνομετρία

- $\alpha = \beta \Rightarrow \etaμ\alpha = \etaμ\beta$

  Ειδικότερα, αν $\alpha, \beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha = \beta \Leftrightarrow \etaμ\alpha = \etaμ\beta$
- $\alpha = \beta \Rightarrow συν\alpha = συν\beta$

  Ειδικότερα, αν $\alpha, \beta \in [0, \pi]$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha = \beta \Leftrightarrow συν\alpha = συν\beta$
- $\alpha = \beta \Rightarrow εφ\alpha = εφ\beta$

  Ειδικότερα, αν $\alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha = \beta \Leftrightarrow εφ\alpha = εφ\beta$
- $\alpha = \beta \Rightarrow σφ\alpha = σφ\beta$

  Ειδικότερα, αν $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha = \beta \Leftrightarrow σφ\alpha = σφ\beta$

Από την Ανάλυση:

- Αν f τυχαία συνάρτηση με πεδίο ορισμού A, $x_1, x_2 \in A$ και $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Η ισοδυναμία ισχύει μόνο όταν η f είναι 1:1

- Αν η συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα στο διάστημα Δ και $x_1, x_2 \in \Delta$, τότε $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
  Αν είναι γν. φθίνουσα, τότε $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$
  Βέβαια, για την απόδειξη της οποιασδήποτε μονοτονίας, ο ορισμός απαιτεί να ισχύει η συνεπαγωγή

- Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο διάστημα Δ και $\alpha, \beta \in \Delta$, τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta] \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta g(x)dx$
  Η ισοδυναμία δεν ισχύει

Οι παραπάνω συνεπαγωγές και ισοδυναμίες είναι γνωστές. Το ερώτημα που πρέπει να απαντήσουμε είναι πότε πρέπει να χρησιμοποιείται το σύμβολο ⇒ και πότε το ⇔.

Αν αντί να χρησιμοποιήσουμε το ⇔ χρησιμοποιήσουμε το ⇒, η απόδειξη είναι ελλιπής, επειδή έχουμε αποδείξει μόνο το ένα μέρος της άσκησης (δεν αποδείξαμε το αντίστροφο).
Αν πάλι αντί του ⇒ χρησιμοποιήσουμε το ⇔, εφόσον αυτό είναι σωστό, δεν έχουμε κάνει κάποιο λάθος, απλά αποδείξαμε κάτι περισσότερο από αυτό που ζητούσε η άσκηση (αποδείξαμε και το αντίστροφο της πρότασης).
Αν πάλι το ⇔ δεν ισχύει, τότε χωρίς κανένα λόγο έχουμε κάνει λάθος στην απόδειξη.

Δείχνουμε σε ποιες περιπτώσεις πρέπει να χρησιμοποιείται κάθε σύμβολο.

Χρήση του συμβόλου ⇒
Η χρήση του συμβόλου αυτού χρησιμοποιείται σε κάθε περίπτωση κατά την οποία δίνονται μία ή περισσότερες προτάσεις και ζητείται να αποδειχθεί μια νέα πρόταση. Η πρόταση δηλαδή που πρέπει να αποδείξουμε είναι της μορφής:

Αν ισχύουν οι προτάσεις $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ να αποδείξετε ότι ισχύει και η πρόταση q

Εδώ το μόνο σύμβολο που χρειάζεται είναι η ⇒

<u>Παράδειγμα 1ο</u>
Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1$, να αποδειχθεί ότι $-1 \le \alpha x + \beta y \le 1$

<u>Απόδειξη</u>
Το μόνο σύμβολο που θα χρειαστούμε μεταξύ των σχέσεων που θα χρησιμοποιήσουμε είναι το ⇒

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^2 + \beta^2 = 1\\ x^2 + y^2 = 1\end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = 1 \Rightarrow \alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 + \beta^2 y^2 = 1 \Rightarrow$$

$$(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + 2\alpha\beta xy) + (\alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 - 2\alpha\beta xy) = 1 \Rightarrow (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$(\alpha x + \beta y)^2 = 1 - (\alpha y - \beta x)^2 \le 1 \Rightarrow |\alpha x + \beta y| \le 1 \Rightarrow -1 \le \alpha x + \beta y \le 1$$

Παράδειγμα 2^{ο}

Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τις διχοτόμους των εσωτερικών γωνιών Β και Γ που τέμνονται στο Δ. Αν $\widehat{A}=60^{o}$, να αποδειχθεί ότι $\widehat{B\Delta\Gamma}=120^{o}$

Απόδειξη

Πάλι θα χρησιμοποιήσουμε μόνο το σύμβολο $\Rightarrow$

Είναι:

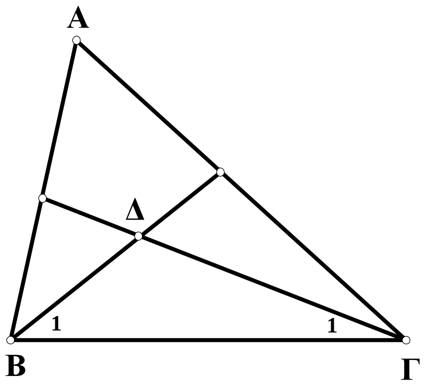
$$\left.\begin{array}{r}\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180^{o}\\ \widehat{A}=60^{o}\end{array}\right\}\overset{-}{\Rightarrow}\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=120^{o}\Rightarrow\frac{\widehat{B}}{2}+\frac{\widehat{\Gamma}}{2}=60^{o}$$

$$\Rightarrow\widehat{B_1}+\widehat{\Gamma_1}=60^{o} \qquad (1)$$

και επειδή στο τρίγωνο ΒΔΓ είναι

$$\widehat{B_1}+\widehat{\Gamma_1}+\widehat{\Delta}=180^{o}\overset{(1)}{\Rightarrow}\widehat{\Delta}=120^{o}$$

Εδώ το σύμβολο $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ έχει την έννοια ότι από τις δύο σχέσεις $\widehat{B_1}+\widehat{\Gamma_1}+\widehat{\Delta}=180^{o}$ και (1) προκύπτει η τελική ισότητα $\widehat{\Delta}=120^{o}$



Χρήση του συμβόλου $\Leftrightarrow$ στη λύση εξισώσεων, ανισώσεων και συστημάτων

Η πιο συνηθισμένη περίπτωση χρήσης του συμβόλου $\Leftrightarrow$ είναι στη λύση των εξισώσεων, ανισώσεων και συστημάτων.

Και για τις τρεις αυτές περιπτώσεις είναι απαραίτητη η χρήση του συμβόλου$\Leftrightarrow$.

Το σύμβολο $\Rightarrow$ δεν αρκεί όπως δείχνουμε στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Λύση εξισώσεων

Η λύση των εξισώσεων στηρίζεται στην αναγωγή των εξισώσεων σε άλλες ισοδύναμες, αλλά απλούστερες, από τις οποίες μπορούμε να προσδιορίσουμε τον άγνωστο.
(Ισοδύναμες λέγονται δύο εξισώσεις όταν έχουν τις ίδιες ρίζες)

Η όλη διαδικασία φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα. Εστιάσαμε το μεγαλύτερο μέρος της εργασίας αυτής στη λύση των εξισώσεων επειδή παρουσιάζονται πιο συχνά και είναι η βάση και για τη λύση των συστημάτων και όλων γενικά των σχέσεων.

Παράδειγμα 1^{ο}

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{2x+3}{3}+\frac{x-1}{2}=4$ **(1)**

Λύση

Αν ισχύει η (1) τότε θα ισχύουν και οι παρακάτω σχέσεις

$2(2x+3)+3(x-1)=24$	(απαλείψαμε τους παρονομαστές)	(2)
$4x+6+3x-3=24$	(εκτελέσαμε τους πολ/μούς)	(3)
$7x+3=24$	(αναγωγές)	(4)
$7x=21$	(μεταφορά)	(5)
$x=3$	(διαίρεση δια 7)	(6)

Η όλη διαδικασία έγινε με σκοπό από την αρχική εξίσωση να καταλήξουμε σε απλούστερη εξίσωση από την οποία να προσδιορίσουμε τον άγνωστο x.

Με μαθηματικούς συμβολισμούς θα λέγαμε ότι:

$(1) \Rightarrow (2)$

$(2) \Rightarrow (3)$

$(3) \Rightarrow (4)$

$(4) \Rightarrow (5)$

$(5) \Rightarrow (6)$

Η διαδικασία αυτή μας λέγει με άλλα λόγια ότι αν ισχύει η (1), τότε θα ισχύει και η (6), δηλαδή δεν υπάρχει άλλη δυνατότητα για τον x. Αυτό όμως δεν εξασφαλίζει ότι η τιμή x = 3 θα επαληθεύει την αρχική εξίσωση, ότι δηλαδή αν ισχύει η (6), τότε θα ισχύει και η (1).

Για να εξασφαλίσουμε ότι η τιμή x = 3 επαληθεύει την (1), πρέπει να δούμε αν από τη σχέση (6) προκύπτει η (1), αν δηλαδή $(6) \Rightarrow (1)$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση αυτό είναι δυνατό, επειδή όλες οι πράξεις για να καταλήξουμε από την (1) στην (6) είναι αντιστρεπτές, μπορούμε δηλαδή να γράψουμε:

$(6) \Rightarrow (5)$

$(5) \Rightarrow (4)$

$(4) \Rightarrow (3)$

$(3) \Rightarrow (2)$

$(2) \Rightarrow (1)$

Η παραπάνω λογική αποδεικνύει ότι για τη λύση της εξίσωσης δεν αρκούν οι συνεπαγωγές αλλά χρειάζονται ισοδυναμίες, δηλαδή η πλήρης λύση της εξίσωσης είναι:

$(1) \Leftrightarrow (2)$

$(2) \Leftrightarrow (3)$

$(3) \Leftrightarrow (4)$

$(4) \Leftrightarrow (5)$

$(5) \Leftrightarrow (6)$

Παράδειγμα 2ο

Λύση της εξίσωσης: $2x = 6$ **(1)**

$4x^2 = 36$ (Υψώσαμε τα μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο) (2)

$x^2 = 9$ (3)

$x = \pm 3$ (4)

Στην παραπάνω διαδικασία **δεν έχει γίνει κάποιο λάθος**. Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήξαμε είναι ότι αν ισχύει η (1) τότε **υποχρεωτικά** θα ισχύει και η (4), δηλαδή, αν $2x = 6$, τότε θα είναι $x = 3$ ή $x = -3$, δηλαδή δεν υπάρχει άλλη τιμή του x που να επαληθεύει την (1).

Αυτή η διαδικασία δεν εξασφαλίζει ότι κάποια από τις τιμές x που βρήκαμε επαληθεύει την (1), δηλαδή δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $(4) \Rightarrow (1)$. Έτσι η επαλήθευση είναι **ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΗ**

Αυτό έγινε επειδή από τη σχέση (1) προκύπτει η (2), αλλά από τη σχέση (2) δεν προκύπτει η σχέση (1), δηλαδή $(1) \Rightarrow (2)$, αλλά $(2) \not\Rightarrow (1)$ όπως αναφέρουμε στη χρήσιμη πρόταση.

Με επαλήθευση βρίσκουμε ότι η τιμή x = 3 επαληθεύει την εξίσωση και είναι δεκτή, ενώ η τιμή x = -3 δεν επαληθεύει την εξίσωση και απορρίπτεται. Έτσι μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η x = 3

Λύση άρρητων εξισώσεων (εξισώσεων που περιέχουν μέσα στις ρίζες τον άγνωστο)

Παράδειγμα 3ο

Λύση της εξίσωσης $\sqrt{3x+1} = x+1$ **(1)**

Πρέπει $3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{3}$ (π)

για να έχει νόημα το ριζικό (για την ανάγκη των ισοδυναμιών στη λύση των ανισώσεων θα αναφερθούμε παρακάτω).

Αυτός είναι ένας περιορισμός ύπαρξης και δε σχετίζεται με περιορισμούς που προκύπτουν από τη διαδικασία της λύσης.

Υψώνουμε τα μέλη της (1) στο τετράγωνο.

$(1) \Rightarrow 3x + 1 = (x+1)^2$ (2)

$(2) \Rightarrow 3x + 1 = x^2 + 2x + 1$ (3)

$(3) \Rightarrow x^2 - x = 0$ (4)

$(4) \Rightarrow x(x-1) = 0$ (5)

$(5) \Rightarrow (x = 0 \text{ ή } x = 1)$ (6)

Οι συνεπαγωγές στην παραπάνω διαδικασία για να φτάσουμε από την (1) στην (6) **δεν εξασφαλίζουν** ότι κάποια από τις δύο ρίζες που βρήκαμε επαληθεύει την (1). Αναγκαστήκαμε να χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο $\Rightarrow$ στην (1) $\Rightarrow$ (2) λόγω της χρήσιμης πρότασης. Για το λόγο αυτό **χρειάζεται οπωσδήποτε επαλήθευση.**
Με επαλήθευση βρίσκουμε ότι και οι δύο τιμές του x είναι δεκτές (επαληθεύουν και τον περιορισμό (π))

Τη λογική αυτή της επαλήθευσης υιοθετεί και το σχολικό βιβλίο στη λύση των άρρητων εξισώσεων. Στο $5^{ο}$ παράδειγμα θα φανεί ότι η λύση αυτή με την επαλήθευση δεν είναι πάντοτε η ευκολότερη.

Παράδειγμα $4^{ο}$

Λύση της εξίσωσης $\sqrt{3x+1}=x-1$ **(1)**

Πρέπει πάλι $3x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\dfrac{1}{3}$ (π)

(1) $\Rightarrow$ $3x+1=(x-1)^2$ (2)

(2) $\Rightarrow$ $3x+1=x^2-2x+1$ (3)

(3) $\Rightarrow$ $x^2-5x=0$ (4)

(4) $\Rightarrow$ $x(x-5)=0$ (5)

(5) $\Rightarrow$ $(x=0 \text{ ή } x=5)$ (6)

Από τις τιμές αυτές μόνο η x = 5 είναι δεκτή, ενώ η τιμή x = 0 με επαλήθευση οδηγεί στη λάθος σχέση $\sqrt{1}=-1$ και απορρίπτεται.

Τα παρακάτω παραδείγματα τα λύνουμε με χρήση του συμβόλου $\Leftrightarrow$

Παράδειγμα $5^{ο}$

Λύση της εξίσωσης $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}=3$ **(1)**

Πρέπει αρχικά

$2x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\dfrac{1}{2}$ ($π_1$)

$x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$ ($π_2$)

Οι περιορισμοί ($π_1$) και ($π_2$) συναληθεύουν όταν $x\geq -\dfrac{1}{2}$ ($π_3$)

[Καλό είναι όταν υπάρχουν περισσότεροι του ενός περιορισμοί να βρίσκουμε που συναληθεύουν. Αν οι περιορισμοί δε συναληθεύουν, η εξίσωση είναι αδύνατη και η λύση σταματά]
Με τον περιορισμό ($π_3$), επειδή τα δύο μέλη της (1) είναι μη άρνητικά έχουμε:

(1) $\Leftrightarrow$ $(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2})^2=9 \Leftrightarrow 2x+1+x+2+2\sqrt{(2x+1)(x+2)}=9 \Leftrightarrow$

$2\sqrt{2x^2+5x+2}=6-3x$ (2)

Για να υψώσουμε στο τετράγωνο και να βρούμε ισοδύναμη εξίσωση πρέπει να μπει νέος περιορισμός που να εξασφαλίζει ότι τα δύο μέλη είναι ομόσημα με την ευρεία έννοια. Επειδή το 1ο μέλος είναι ≥ 0, πρέπει και το 2ο μέλος να είναι ≥ 0, δηλαδή $6-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ (π_4)

Οι περιορισμοί (π_3) και (π_4) συναληθεύουν όταν $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ (π_5)

Με τον περιορισμό (π_5), η (2) $\Leftrightarrow (2\sqrt{2x^2+5x+2})^2 = (6-3x)^2 \Leftrightarrow$

$4(2x^2+5x+2) = 36-36x+9x^2 \Leftrightarrow x^2-56x+28=0$

Από τη λύση της τελευταίας βρίσκουμε $x_{1,2} = 28 \pm \sqrt{756}$

Είναι: $27 < \sqrt{756} < 28$, επομένως η τιμή $x_1 = 28+\sqrt{756} > 2$ δεν επαληθεύει τον περιορισμό (π_5) και απορρίπτεται.

Η τιμή $x_2 = 28-\sqrt{756} \in (0,1)$, δηλαδή επαληθεύει τον περιορισμό (π_5) και είναι δεκτή.

Η επαλήθευση εδώ είναι πολύ δυσκολότερη από τη λύση. Αυτό καταδεικνύει την ανάγκη χρήσης των περιορισμών.

<u>Παράδειγμα 6ο</u>

Λύση της εξίσωσης $\sqrt[3]{7x+1} = x+1$ (1)

Πρέπει $7x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{7}$ (π_1)

[Για το σχολικό βιβλίο, επομένως και για όλα τα σχολικά βοηθήματα η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ορίζεται μόνον όταν $\alpha \geq 0$ και όταν το ν είναι περιττός. Ο ορισμός αυτός της νιοστής ρίζας δεν υιοθετείται από τα ξένα βιβλία]

Με τον περιορισμό (π_1) η (1) $\Leftrightarrow (\sqrt[3]{7x+1})^3 = (x+1)^3$ (2)

[Τονίζουμε ότι η σχέση $\alpha = \beta$ είναι ισοδύναμη με την $\alpha^\nu = \beta^\nu$ όταν το ν είναι περιττός και για το λόγο αυτό δε χρειάζεται πρόσθετος περιορισμός]

(2) $\Leftrightarrow 7x+1 = x^3+3x^2+3x+1 \Leftrightarrow x^3+3x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x^2+3x-4)=0 \Leftrightarrow$ $(x=0$ ή $x=1$ ή $x=-4)$

Από τις τιμές αυτές οι $x=0$ και $x=1$ επαληθεύουν τον περιορισμό και είναι δεκτές, ενώ η τιμή $x=-4$ απορρίπτεται.

<u>Παράδειγμα 7ο</u>

Λύση της εξίσωσης $\sqrt[3]{x^3+x^2+2x+4} = x+1$ (1)

Πρέπει πάλι: $x^3+x^2+2x+4 \geq 0$ (π_1)

Ο περιορισμός αυτός δεν είναι απαραίτητο να λυθεί ως προς x. Άλλωστε αυτό δεν μπορεί να γίνει με τις γνώσεις των μαθηματικών του Λυκείου. Μπορούμε όμως να δούμε αν οι τιμές του x που θα βρούμε επαληθεύουν τον (π_1) χωρίς να τον λύσουμε.

Η (1) $\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x^3+x^2+2x+4})^3=(x+1)^3 \Leftrightarrow x^3+x^2+2x+4=x^3+3x^2+3x+1 \Leftrightarrow$
$2x^2+x-3=0 \Leftrightarrow (x=1 \text{ ή } x=-\frac{3}{2})$

Από τις τιμές αυτές η $x=1$ επαληθεύει τον (π_1) και είναι δεκτή, ενώ η τιμή $x=-\frac{3}{2}$ δεν επαληθεύει τον (π_1) και απορρίπτεται.

<u>Παράδειγμα 8ο</u>

Λύση της εξίσωσης $\sqrt{x+21}=\sqrt{2x+28}-1$ (1)

Πρέπει $x+21\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -21$
και $2x+28\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -14$

Οι δύο περιορισμοί συναληθεύουν όταν $x\geq -14$ (π_1)

Η επόμενη πράξη θα ήταν λογικά να υψώσουμε την (1) στο τετράγωνο. Κάτι τέτοιο όμως θα απαιτούσε τον πρόσθετο περιορισμό να είναι τα μέλη της (1) ομόσημα, δηλαδή $\sqrt{2x+28}-1\geq 0$.
Για να αποφύγουμε τον περιορισμό αυτό γράφουμε την εξίσωση με τη μορφή $\sqrt{x+21}+1=\sqrt{2x+28}$ (2)
ώστε και τα δύο μέλη της να είναι ≥ 0. Τώρα μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο χρησιμοποιώντας το σύμβολο $\Leftrightarrow$
Η (2) $\Leftrightarrow (\sqrt{x+21}+1)^2=(\sqrt{2x+28})^2 \Leftrightarrow x+21+1+2\sqrt{x+21}=2x+28 \Leftrightarrow$
$2\sqrt{x+21}=x+6$ (3)
Πριν υψώσουμε στο τετράγωνο χρειάζεται ο περιορισμός να είναι τα μέλη της (3) ομόσημα, και επειδή το 1ο μέλος είναι ≥ 0, πρέπει και το 2ο μέλος να είναι ≥ 0, δηλαδή $x+6\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -6$ (π_2)
Οι περιορισμοί (π_1) και (π_2) συναληθεύουν όταν $x\geq -6$ (π_2)
Με τον τελευταίο περιορισμό, η (3) $\Leftrightarrow (2\sqrt{x+21})^2=(x+6)^2 \Leftrightarrow$
$4(x+21)=x^2+12x+36 \Leftrightarrow x^2+8x-48=0 \Leftrightarrow (x=4 \text{ ή } x=-12)$
Από τις δύο τιμές που βρήκαμε, μόνον η $x=4$ επαληθεύει τον περιορισμό (π_2) και είναι δεκτή, ενώ η τιμή $x=-12$ δεν επαληθεύει τον περιορισμό και απορρίπτεται (η τιμή αυτή επαληθεύει τη σχέση $2\sqrt{x+21}=-(x+6)$)

Δίνουμε ακόμη ένα παράδειγμα λύσης άρρητης εξίσωσης

<u>Παράδειγμα 9ο</u>

Λύση της εξίσωσης $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-11}=\sqrt{x+10}-\sqrt{x-6}$ (1)

Πρέπει:
$x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$
$x-11\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 11$
$x+10\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -10$
$x-6\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 6$
Οι 4 περιορισμοί συναληθεύουν όταν $x\geq 11$ (π_1)

Για να υψώσουμε τώρα στο τετράγωνο χρειάζονται πρόσθετοι περιορισμοί και πιο συγκεκριμένα ότι τα δύο μέλη της (1) είναι ομόσημα, δηλαδή
$(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-11})(\sqrt{x+10}-\sqrt{x-6})\geq 0$
Για να αποφύγουμε τον περιορισμό αυτό (που δεν είναι απαραίτητο να τον λύσουμε), γράφουμε την εξίσωση με τη μορφή:
$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-6}=\sqrt{x+10}+\sqrt{x-11}$ (2)
οπότε τα μέλη της είναι ομόσημα (≥ 0) και μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο με ισοδυναμίες.
Η (2) $\Leftrightarrow$ $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-6})^2=(\sqrt{x+10}+\sqrt{x-11})^2 \Leftrightarrow$
$x+1+x-6+2\sqrt{(x+1)(x-6)}=x+10+x-11+2\sqrt{(x+10)(x-11)} \Leftrightarrow$
$\sqrt{x^2-5x-6}-\sqrt{x^2-x-110}=2$ (3)

Η ύψωση της (3) στο τετράγωνο θα οδηγούσε σε αρκετές πράξεις και επιπλέον θα απαιτούσε νέο περιορισμό $\sqrt{x^2-5x-6}-\sqrt{x^2-x-110}\geq 0$. Γι αυτό γράφουμε την (3) με τη μορφή
$\sqrt{x^2-5x-6}=\sqrt{x^2-x-110}+2$ (4)
οπότε δε χρειάζονται περιορισμοί για να υψώσουμε στο τετράγωνο και οι πράξεις είναι λιγότερες (τους περιορισμούς για τα υπόρριζα τους έχουμε ήδη πάρει)
Η (4) $\Leftrightarrow$ $(\sqrt{x^2-5x-6})^2=(\sqrt{x^2-x-110}+2)^2 \Leftrightarrow$
$x^2-5x-6=x^2-x-110+4+4\sqrt{x^2-x-110} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-110}=25-x$ (5)
Πρέπει $25-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 25$ (π_2)
Οι περιορισμοί (π_1) και (π_2) συναληθεύουν όταν $11\leq x\leq 25$ (π_3)
Η (5) $\Leftrightarrow$ $(\sqrt{x^2-x-110})^2=(25-x)^2 \Leftrightarrow x^2-x-110=625-50x+x^2 \Leftrightarrow x=15$
Η τιμή αυτή επαληθεύει τον τελευταίο περιορισμό (π_3) και είναι δεκτή.

Παράδειγμα 10^o

Λύση της εξίσωσης $(1+i)^\nu=-8i$, $\nu\in\mathbb{N}$ **(1)**

Η (1) $\Rightarrow$ $\left|(1+i)^\nu\right|=|-8i|$ (2)

Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο $\Leftrightarrow$ όπως έχουμε αναφέρει. Για το λόγο αυτό θα χρειαστεί **οπωσδήποτε** επαλήθευση. Στη συνέχεια της λύσης όλες οι $\Leftrightarrow$ είναι σωστές, αλλά δεν έχει νόημα να τις χρησιμοποιήσουμε, αφού έτσι ή αλλιώς η τελική σχέση δεν θα είναι ισοδύναμη με την αρχική.

(2) $\Rightarrow |1+i|^\nu=8 \Rightarrow (\sqrt{2})^\nu=8 \Rightarrow 2^{\frac{\nu}{2}}=2^3 \Rightarrow \dfrac{\nu}{2}=3 \Rightarrow \nu=6$

Επαλήθευση
Για ν = 6 έχουμε $(1+i)^6 = [(1+i)^2]^3 = (1+2i+i^2)^3 = (2i)^3 = 8i^3 = -8i$, δηλαδή η αρχική εξίσωση αληθεύει και η τιμή $\nu = 6$ είναι δεκτή.

Παράδειγμα 11ο
Λύση της εξίσωσης $(1+i)^\nu = 8$, $\nu \in \mathbb{N}$

Εργαζόμενοι όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε $\nu = 6$
Η τιμή όμως αυτή δεν επαληθεύει την εξίσωση και απορρίπτεται. Έτσι η εξίσωση είναι αδύνατη.

Σημαντική παρατήρηση
Οι ισοδυναμίες στη λύση των εξισώσεων είναι απαραίτητες σε κάθε είδος εξισώσεων, είτε είναι αλγεβρικές εξισώσεις στο ℝ, είτε στο ℂ, είτε είναι διαφορικές εξισώσεις, είτε οποιασδήποτε άλλης μορφής (εξισώσεις πολυωνύμων, διανυσμάτων, πινάκων κ.λ.π).
Οι συνεπαγωγές δεν αρκούν και όταν ακόμη βρούμε μια μόνο τιμή. Και αυτή ίσως να απορρίπτεται και η εξίσωση να είναι αδύνατη.

Για τις εξισώσεις του 2ου βαθμού, στη θεωρία αποδεικνύεται ότι οι ρίζες που βρίσκονται με τον γνωστό τύπο επαληθεύουν την εξίσωση και για τον λόγο αυτό δεν κάνουμε επαλήθευση.

Λύση ανισώσεων

Η λύση των ανισώσεων ακολουθεί τους ίδιους κανόνες με τις εξισώσεις. Για το λόγο αυτό για τη λύση των ανισώσεων οι ισοδυναμίες είναι απαραίτητες.
Ειδικά η λύση των άρρητων ανισώσεων (ανισώσεις που περιέχουν ρίζα με άγνωστο) παρουσιάζουν μεγαλύτερες δυσκολίες.

Η λύση των άρρητων ανισώσεων στηρίζεται στις εξής ιδιότητες των ανισοτήτων

- **Αν $\alpha, \beta \geq 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$**
- **Αν $\alpha, \beta \leq 0$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $\nu =$ άρτιος, τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu < \beta^\nu$**
- **Αν $\nu =$ περιττός $\in \mathbb{N}^*$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$ χωρίς περιορισμό για τα α και β**
- **$\alpha^2 < \beta^2 \Leftrightarrow |\alpha| < |\beta|$ που με τη σειρά της οδηγεί στη λύση του συστήματος $-|\beta| < \alpha < |\beta|$**

Λύση συστημάτων

Ισοδύναμα λέγονται δύο συστήματα όταν έχουν τις ίδιες λύσεις, επαληθεύονται δηλαδή από τις ίδιες τιμές των αγνώστων.

Για τους ίδιους λόγους που αναφέραμε στις εξισώσεις, για τη λύση των συστημάτων απαραίτητη είναι η χρήση των ισοδυναμιών. Εδώ όμως υπάρχει μια πρόσθετη δυσκολία:

Ποια συστήματα είναι ισοδύναμα και πως από ένα σύστημα οδηγούμαστε σε ένα άλλο ισοδύναμο;

Με μια πρώτη ματιά, η λύση των συστημάτων φαίνεται να στηρίζεται στις συνεπαγωγές και όχι στις ισοδυναμίες (προσθέτουμε δύο εξισώσεις για να βρούμε μια νέα, ή αντικαθιστούμε την τιμή ενός αγνώστου σε μια άλλη εξίσωση ή συνδυάζουμε περισσότερες εξισώσεις κ.λ.π). Ο τρόπος λύσης τους προβληματίζει πολλούς μαθητές για την ορθότητά του.

Η λύση των συστημάτων στηρίζεται στην εξής πολύ βασική

Πρόταση

Αν Α και Β είναι δύο παραστάσεις των αγνώστων, το σύστημα των δύο εξισώσεων $\begin{cases} \mathbf{A = 0} \\ \mathbf{B = 0} \end{cases}$ **είναι ισοδύναμο με το σύστημα** $\begin{cases} \mathbf{A = 0} \\ \mathbf{\lambda A + \mu B = 0,\ \mu \neq 0} \end{cases}$

Το $2^{ο}$ σύστημα δηλαδή προκύπτει αντικαθιστώντας τη μία από τις δύο εξισώσεις με ένα γραμμικό συνδυασμό των δύο εξισώσεων. Η μέθοδος αυτή λέγεται μέθοδος του γραμμικού συνδυασμού ή μέθοδος των αντίθετων συντελεστών.
Η πρόταση αυτή δεν ισχύει μόνο για τα γραμμικά συστήματα, ισχύει για κάθε σύστημα δύο εξισώσεων.

Η ισοδυναμία των δύο συστημάτων είναι προφανής (κάθε λύση του $1^{ου}$ είναι και λύση του $2^{ου}$ και κάθε λύση του $2^{ου}$ είναι και λύση του $1^{ου}$)

Για τη λύση συστημάτων περισσοτέρων των δύο εξισώσεων εφαρμόζουμε την παραπάνω πρόταση περισσότερες φορές, δηλαδή αντικαθιστούμε ένα ζεύγος εξισώσεων με ένα άλλο ζεύγος που είναι απλούστερο από το προηγούμενο. Στο σημείο αυτό υπάρχει η μεγαλύτερη σύγχυση που παρατηρούμε στους μαθητές, δηλαδή χάνουν τον έλεγχο στην επιλογή των εξισώσεων που πρέπει να πάρουν ώστε να έχουν ένα ισοδύναμο σύστημα.
Η παραπάνω ισοδυναμία εξασφαλίζει ότι το τελικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το αρχικό.

Δείχνουμε δύο παραδείγματα λύσης συστημάτων

Παράδειγμα $1^{ο}$

Λύση του συστήματος $\quad (\Sigma_1)\ \begin{cases} \mathbf{2x - y + \omega = 3} & \mathbf{(1)} \\ \mathbf{x + 2y + \omega = 8} & \mathbf{(2)} \\ \mathbf{3x + 2y + 3\omega = 16} & \mathbf{(3)} \end{cases}$

Για καλύτερη κατανόηση των όσων γράφουμε παρακάτω, γράφουμε το σύστημα με τη μορφή

$$\begin{cases} 2x-y+\omega-3 = 0 \\ x+2y+\omega-8 = 0 \\ 3x+2y+3\omega-16=0 \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ \Gamma=0 \end{cases}$$

Μεταξύ των εξισώσεων (1) και (2) απαλείφουμε έναν άγνωστο, π.χ τον x με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. Πολ/ζουμε την (2) επί -2 και την προσθέτουμε στην (1). Βρίσκουμε: $-5y-\omega+13=0 \Leftrightarrow 5y+\omega=13$

Το σύστημα (Σ_1) τώρα ισοδυναμεί με το $(\Sigma_2)\ \begin{cases} 2x-y+\omega=3 & (1) \\ 5y+\omega=13 & (4) \\ 3x+2y+3\omega=16 & (3) \end{cases}$

Αντικαταστήσαμε δηλαδή το σύστημα $\begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$ των δύο πρώτων εξισώσεων με το ισοδύναμο σύστημα $\begin{cases} A=0 \\ A-2B=0 \end{cases}$

Μεταξύ των εξισώσεων (1) και (3) απαλείφουμε τον ίδιο άγνωστο x. Πολ/ζουμε την (1) επί -3 και την (3) επί 2 και προσθέτουμε κατά μέλη.
Βρίσκουμε: $7y+3\omega=23$
Το σύστημα (Σ_2) τώρα ισοδυναμεί με το

$$(\Sigma_3)\ \begin{cases} 2x-y+\omega=3 & (1) \\ 5y+\omega=13 & (4) \\ 7y+3\omega=23 & (5) \end{cases}$$

Αντικαταστήσαμε δηλαδή το σύστημα $\begin{cases} A=0 \\ \Gamma=0 \end{cases}$ με το ισοδύναμο $\begin{cases} A=0 \\ -3A+2\Gamma=0 \end{cases}$

Μεταξύ των εξισώσεων (4) και (5) απαλείφουμε τον y. Πολ/ζουμε την (4) επί 7 και την (5) επί -5 και προσθέτουμε κατά μέλη.
Βρίσκουμε: $-8\omega=-24 \Leftrightarrow \omega=3$

Το σύστημα τώρα (Σ_3) ισοδυναμεί με το $(\Sigma_4)\ \begin{cases} 2x-y+\omega=3 & (1) \\ 5y+\omega=13 & (4) \\ \omega=3 & (6) \end{cases}$

Αντικαθιστούμε το ω από την (6) στην (4). Βρίσκουμε $5y=10 \Leftrightarrow y=2$

Η αντικατάσταση αυτή δικαιολογείται ως αντικατάσταση του συστήματος $\begin{cases} \Delta=0 \\ E=0 \end{cases}$ των (4) και (6) από το ισοδύναμο σύστημα $\begin{cases} \Delta-E=0 \\ E=0 \end{cases}$

Έτσι το σύστημα (Σ_4) ισοδυναμεί με το $(\Sigma_5)\ \begin{cases} 2x-y+\omega=3 & (1) \\ y=2 & (7) \\ \omega=3 & (6) \end{cases}$

Αντικαθιστούμε το ω από την (6) στην (1). Βρίσκουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$(\Sigma_6)\begin{cases} 2x - y \quad = 0 & (8) \\ \quad y \quad = 2 & (7) \\ \quad\quad \omega = 3 & (6) \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε τέλος το y από την (7) στην (8). Βρίσκουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$(\Sigma_7)\begin{cases} x \quad\quad = 1 & (9) \\ \quad y \quad = 2 & (7) \\ \quad\quad \omega = 3 & (6) \end{cases}$$

Από το τελευταίο ισοδύναμο σύστημα προκύπτει ότι η λύση του αρχικού συστήματος είναι η $(x, y, \omega) = (1, 2, 3)$

Παράδειγμα 2^{o}

Λύση του συστήματος $(\mathbf{\Sigma_1})\begin{cases} \mathbf{x + 2y + 3\omega = 14} & \mathbf{(1)} \\ \mathbf{2x - y + \omega \;\; = 3} & \mathbf{(2)} \\ \quad\quad \mathbf{y + \omega = 5} & \mathbf{(3)} \end{cases}$

Εργαζόμαστε όπως και πριν

Μεταξύ των (1) και (2) απαλείφουμε τον x. Αντικαθιστούμε το σύστημα των δύο πρώτων εξισώσεων $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ με το ισοδύναμο σύστημα $\begin{cases} A = 0 \\ 2A - B = 0 \end{cases}$

Έχουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$(\Sigma_2)\begin{cases} x + 2y + 3\omega = 14 & (1) \\ \quad\quad y + \omega = 5 & (4) \\ \quad\quad y + \omega = 5 & (3) \end{cases}$$

Επειδή οι εξισώσεις (4) και (3) είναι ισοδύναμες, το σύστημα (Σ_2) είναι ισοδύναμο με το σύστημα των (1) και (3), δηλαδή με το

$$(\Sigma_3)\begin{cases} x + 2y + 3\omega = 14 & (1) \\ \quad\quad y + \omega = 5 & (3) \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} A = 0 \\ \Gamma = 0 \end{cases}$$

Απαλείφουμε τον άγνωστο y. Αντικαθιστούμε το σύστημα $\begin{cases} A = 0 \\ \Gamma = 0 \end{cases}$ με το $\begin{cases} A = 0 \\ A - 2\Gamma = 0 \end{cases}$

Βρίσκουμε έτσι το ισοδύναμο σύστημα

$$(\Sigma_4)\begin{cases} x + \quad\quad \omega = 4 & (4) \\ \quad\quad y + \omega = 5 & (3) \end{cases}$$

Για κάθε τιμή του $\omega \in \mathbb{R}$ από τις (4) και (3) βρίσκουμε μια τιμή του x και μία τιμή του y που επαληθεύουν το τελευταίο σύστημα (Σ_4), άρα και το ισοδύναμο αρχικό (Σ_1). Αν δηλαδή θέσουμε $\omega = \kappa \in \mathbb{R}$ (τυχαία τιμή) βρίσκουμε $x = 4 - \kappa$ και $y = 5 - \kappa$

Έτσι το αρχικό σύστημα έχει την απλή απειρία λύσεων

$(x, y, \omega) = (4 - \kappa, 5 - \kappa, \kappa),\ \kappa \in \mathbb{R}$

Μια ενδιαφέρουσα κατηγορία συστημάτων είναι η εξής:

Σύστημα (Σ) $\begin{cases} \mathbf{A \cdot B = 0} \\ \mathbf{\Gamma = 0} \end{cases}$ **όπου Α, Β, Γ παραστάσεις των αγνώστων**

Το σύστημα (Σ) είναι ισοδύναμο με τα δύο συστήματα

$$(\Sigma_1) \begin{cases} \mathbf{A = 0} \\ \mathbf{\Gamma = 0} \end{cases} \quad \textbf{και} \quad (\Sigma_2) \begin{cases} \mathbf{B = 0} \\ \mathbf{\Gamma = 0} \end{cases}$$

δηλαδή κάθε λύση του συστήματος (Σ) είναι και λύση ενός τουλάχιστον των συστημάτων (Σ_1) και (Σ_2)· και αντίστροφα, κάθε λύση των (Σ_1) και (Σ_2) είναι και λύση του (Σ). Με άλλα λόγια, για να λύσουμε το (Σ), λύνουμε τα (Σ_1) και (Σ_2) και παίρνουμε όλες τις λύσεις τους.

Σύστημα (Σ) $\begin{cases} \mathbf{A \cdot B = 0} \\ \mathbf{\Gamma \cdot \Delta = 0} \end{cases}$ **όπου Α, Β, Γ, Δ παραστάσεις των αγνώστων**

Το (Σ) είναι ισοδύναμο με τα 4 συστήματα

$$(\Sigma_1) \begin{cases} \mathbf{A = 0} \\ \mathbf{\Gamma = 0} \end{cases} \quad (\Sigma_2) \begin{cases} \mathbf{A = 0} \\ \mathbf{\Delta = 0} \end{cases} \quad (\Sigma_3) \begin{cases} \mathbf{B = 0} \\ \mathbf{\Gamma = 0} \end{cases} \quad (\Sigma_4) \begin{cases} \mathbf{B = 0} \\ \mathbf{\Delta = 0} \end{cases}$$

Δηλαδή κάθε λύση του (Σ) είναι λύση ενός τουλάχιστον των 4 συστημάτων και αντίστροφα. Με άλλα λόγια, για να λύσουμε το (Σ), λύνουμε και τα 4 συστήματα και παίρνουμε όλες τις λύσεις τους.

Τέτοιο σύστημα μπορεί π.χ να προκύψει από τη λύση του εξής προβλήματος:

Να βρεθούν όλοι οι μιγαδικοί z με την ιδιότητα $\mathbf{z^3 = \bar{z}}$

Αν θέσουμε $z = x + yi$ βρίσκουμε: $(x + yi)^3 = x - yi \Leftrightarrow$

$$x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = x - yi \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 - x = 0 \\ 3x^2y - y^3 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 3y^2 - 1) = 0 \\ y(3x^2 - y^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

Το τελευταίο σύστημα ισοδυναμεί με τα εξής 4 συστήματα

$$(\Sigma_1) \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$(\Sigma_2) \begin{cases} x = 0 \\ 3x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$(\Sigma_3) \begin{cases} x^2 - 3y^2 - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$(\Sigma_4) \begin{cases} x^2 - 3y^2 - 1 = 0 \\ 3x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Η λύση του (Σ_1) είναι προφανώς η $(x,y)=(0,0)$
Οι λύσεις του (Σ_2) είναι οι $(x,y)=(0,1)$ και $(x,y)=(0,-1)$
Οι λύσεις του (Σ_3) είναι οι $(x,y)=(1,0)$ και $(x,y)=(-1,0)$
Για τη λύση του (Σ_4), απαλείφουμε τον άγνωστο x^2 με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

Βρίσκουμε το ισοδύναμο σύστημα $\begin{cases} x^2-3y^2-1=0 \\ y^2=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ το οποίο είναι αδύνατο λόγω της $2^{ης}$ εξίσωσης.

Τελικά λοιπόν έχουμε τις 5 λύσεις: $z_1=0+0i=0$, $z_2=i$, $z_3=-i$, $z_4=1$, $z_5=-1$

Άλλες περιπτώσεις ισοδυναμιών

Απόδειξη μια συνεπαγωγής με ισοδυναμίες
Πολλές φορές είναι δύσκολο να αποδείξουμε ότι από την πρόταση p προκύπτει η πρόταση q, δηλαδή είναι δύσκολο να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$. Μπορούμε όμως να αποδείξουμε πιο εύκολα τη συνεπαγωγή $q \Rightarrow p$. Στις περιπτώσεις αυτές ακολουθείται η εξής λύση:
Θεωρούμε δεδομένο το συμπέρασμα (δηλαδή την πρόταση q) και προσπαθούμε από την q να αποδείξουμε την p. Εφόσον η απόδειξη μπορεί να γίνει με ισοδυναμίες, έχουμε αποδείξει και τη συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ που θέλουμε.
Η όλη διαδικασία εξηγείται στο επόμενο

<u>Παράδειγμα</u>

Αν $\alpha,\beta>0$ να αποδειχθεί ότι $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}\geq 2$ (1)

Επειδή δε γνωρίζουμε πως πρέπει να ξεκινήσουμε την απόδειξη, θεωρούμε δεδομένο το συμπέρασμα, δηλαδή υποθέτουμε ότι ισχύει η (1) και προσπαθούμε από την (1) να καταλήξουμε σε σχέση που ισχύει.

Από την (1) έχουμε διαδοχικά

$\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}\geq 2 \Rightarrow$

$\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta \Rightarrow$

$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geq 0 \Rightarrow$

$(\alpha-\beta)^2\geq 0$

Αυτό που συνήθως λέμε είναι ότι: Αφού η τελευταία σχέση στην οποία φτάσαμε ισχύει, θα ισχύει και η (1).
Είναι όμως αυτό σωστό;

Ο ισχυρισμός μας ότι θα ισχύει υποχρεωτικά και η (1) δικαιολογείται από το ότι μπορούμε να ξεκινήσουμε από την τελευταία σχέση $(\alpha-\beta)^2 \geq 0$ και με την αντίστροφη σειρά των πράξεων να καταλήξουμε στην (1).
Μπορούμε δηλαδή να γράψουμε:

$$(\alpha-\beta)^2 \geq 0 \Rightarrow$$
$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \geq 0 \Rightarrow$$
$$\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta \Rightarrow$$
$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} \geq 2$$

Για να γίνει αυτό, πρέπει όλες οι πράξεις που κάναμε στην απόδειξη να είναι αντιστρεπτές, πρέπει δηλαδή να μπορούμε αντί των $\Rightarrow$ να χρησιμοποιήσουμε $\Leftrightarrow$

Επειδή στο συγκεκριμένο παράδειγμα αυτό είναι αληθές, δηλαδή όλες οι $\Rightarrow$ μπορούν να αντικατασταθούν με $\Leftrightarrow$, ο ισχυρισμός ότι ισχύει η (1) είναι αληθής.

Το συμπέρασμα λοιπόν είναι ότι για αποδείξεις του είδους αυτού, όταν δηλαδή από το συμπέρασμα καταλήγουμε στην υπόθεση, απαραίτητη είναι η χρήση $\Leftrightarrow$

Έτσι η ολοκληρωμένη λύση του προβλήματος είναι η παρακάτω:

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \geq 0$$

Επειδή η τελευταία σχέση ισχύει, ισχύει και η (1)

Εξίσωση γραμμής

Εξίσωση γραμμής σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων λέγεται μια σχέση ως προς x και y που επαληθεύεται από όλα τα σημεία (x,y) της γραμμής και μόνο από αυτά.

Αν δηλαδή $f(x,y)=0$ είναι η εξίσωση μιας γραμμής (c) ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων, αυτό σημαίνει ότι:

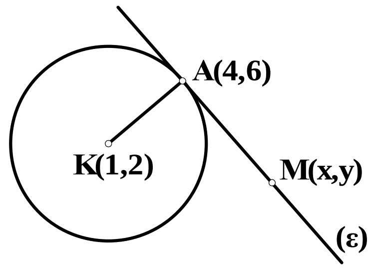
$$\mathbf{M(x,y) \in (c) \Leftrightarrow f(x,y)=0}$$

Στον ορισμό αυτό στηρίζεται η εύρεση της εξίσωσης μιας γραμμής. Δηλαδή για να βρούμε την εξίσωσή της σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, πρέπει να γράψουμε την χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της γραμμής (δηλαδή τη συνθήκη που πρέπει και αρκεί να ισχύει για να ανήκει ένα σημείο στη γραμμή) και με **ισοδυναμίες** να μετατρέψουμε τη σχέση αυτή σε εξίσωση ως προς x και y.
Η λογική αυτή δεν είναι πολύ κατανοητή από τους μαθητές και δυσκολεύονται να καταλάβουν γιατί μια εξίσωση ως προς x και y είναι πράγματι η εξίσωση μιας γραμμής.

Η λογική αυτή χρησιμοποιείται π.χ από το σχολικό βιβλίο Κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου για την εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$
Για τον ίδιο λόγο, ακατανόητη είναι η εύρεση της εξίσωσης της έλλειψης, δηλαδή πως από τη σχέση $\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}+\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}=2\alpha$ καταλήγουμε στη γνωστή εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$
Η δυσκολία εδώ έγκειται στην ανάγκη της χρήσης των περιορισμών ώστε κάθε φορά η νέα εξίσωση να είναι **ισοδύναμη** με την προηγούμενη.

Δείχνουμε δύο παραδείγματα εύρεσης εξίσωσης μιας γραμμής

Εύρεση της εφαπτομένης του κύκλου $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ στο σημείο του Α(4,6)



Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο Κ(1,2)
Ένα σημείο Μ ανήκει στην εφαπτομένη (ε) του κύκλου στο σημείο Α αν και μόνο αν
$AM \perp AK \Leftrightarrow \overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow$
$(1-4, 2-6)\cdot(x-4, y-6)=0 \Leftrightarrow -3(x-4)-4(y-6)=0$
$\Leftrightarrow 3x+4y=36$ είναι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του Α(4,6)

Εξίσωση μεσοκάθετης ευθ. τμήματος
Ο συνηθισμένος τρόπος για την εύρεση της εξίσωσης της μεσοκάθετης (ε) του ευθ. τμήματος ΑΒ με Α(2,3) και Β(0,5) είναι να βρούμε πρώτα τις συντεταγμένες του μέσου Ρ του ΑΒ, κατόπιν να βρούμε το συντελεστή διεύθυνσης λ του ΑΒ και από αυτόν τον συντελεστή διεύθυνσης λ' της (ε) και κατόπιν με τη βοήθεια του τύπου $y-y_P=\lambda'(x-x_P)$ να βρούμε την εξίσωση της (ε).

Δείχνουμε εδώ πως μπορούμε να βρούμε την ίδια εξίσωση με τη βοήθεια της χαρακτηριστικής ιδιότητας της μεσοκάθετης ευθ. τμήματος.

Ένα σημείο Μ ανήκει στη μεσοκάθετη ενός ευθ. τμήματος, αν και μόνον αν ισαπέχει από τα άκρα του, δηλ. $M(x,y)\in(\varepsilon) \Leftrightarrow (MA)=(MB) \Leftrightarrow$
$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-5)^2} \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-3)^2=(x-0)^2+(y-5)^2 \Leftrightarrow$
$x-y+3=0$ είναι η εξίσωση της μεσοκάθετης του ΑΒ.

Εύρεση γεωμετρικού τόπου

Στο κεφάλαιο των μιγαδικών υπάρχουν δύο παραπλήσιες έννοιες που πολλές φορές συγχέονται. Είναι οι έννοιες: **“Γεωμετρικός τόπος”** και **“γραμμή στην οποία κινείται ένα σημείο”**.

Επεξήγηση των εννοιών
Όταν λέμε ότι ο γεωμετρικός τόπος (γ.τ) των σημείων Μ (ή του σημείου Μ) που έχουν μια κοινή ιδιότητα (p) είναι η γραμμή (c), εννοούμε ότι:

α) Κάθε σημείο που έχει την ιδιότητα (p) ανήκει στη γραμμή (c).
β) Κάθε σημείο που ανήκει στη γραμμή (c) έχει την ιδιότητα (p).

Για να βρούμε λοιπόν ένα γ.τ πρέπει να κάνουμε δύο αποδείξεις

α) Να αποδείξουμε ότι οι συντεταγμένες του τυχαίου σημείου που έχει την ιδιότητα (p) επαληθεύουν την εξίσωση της γραμμής (c).
β) Να αποδείξουμε ότι αν οι συντεταγμένες ενός σημείου Μ επαληθεύουν την εξίσωση (c), τότε το σημείο έχει την ιδιότητα (p).

Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι ένα σημείο ανήκει σε μια γραμμή (c), αρκεί να αποδείξουμε ότι οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της γραμμής (c). Δεν χρειάζεται το αντίστροφο.

<u>Παράδειγμα 1^ο</u>
Να βρεθεί ο γ.τ των εικόνων των μιγαδικών z που έχουν την ιδιότητα:
$$\mathbf{z^2 + (\bar{z})^2 = 2} \qquad \mathbf{(1)}$$

<u>Λύση</u>
Έστω Μ(x, y) τυχαίο σημείο που επαληθεύει την (1)
Θέτοντας όπου $z = x + yi$, η (1) $\Rightarrow$ $(x+yi)^2 + (x-yi)^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 - 2y^2 = 2 \Rightarrow$
$$x^2 - y^2 = 1 \qquad (2)$$
Η τελευταία εξίσωση παριστάνει μια υπερβολή (c).
Το συμπέρασμα μέχρι εδώ είναι ότι κάθε σημείο που έχει την ιδιότητα (1) ανήκει στην υπερβολή (c). Αυτό δεν μας λέει ότι ο ζητούμενος γ.τ είναι η γραμμή (c). Μπορεί να υπάρχουν σημεία της (c) που να μην έχουν την ιδιότητα (1), δηλαδή ο γ.τ να είναι ένα υποσύνολο της (c).
Για να αποδείξουμε ότι ο ζητούμενος γ.τ είναι ολόκληρη η (c), πρέπει να αποδείξουμε ότι κάθε σημείο της (c), είναι σημείο του γ.τ, έχει δηλαδή την ιδιότητα (1). Με άλλα λόγια πρέπει να αποδείξουμε ότι κάθε σημείο Μ(x,y) που επαληθεύει τη (2) είναι εικόνα ενός μιγαδικού z με την ιδιότητα (1). Αυτό μπορεί να γίνει αν με τις αντίστροφες συνεπαγωγές από τη σχέση (2) αποδείξουμε την (1).
Στο συγκεκριμένο παράδειγμα όλες οι συνεπαγωγές είναι αντιστρεπτές, δηλαδή $(2) \Rightarrow (1)$
Το τελευταίο αποδεικνύει ότι η (c) είναι πράγματι ο ζητούμενος γ.τ.
Οι δύο αποδείξεις μπορούν να συγχωνευθούν, αν αντί για $\Rightarrow$ στην απόδειξη (1)$\Rightarrow$(2) χρησιμοποιούσαμε ισοδυναμίες, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε
$$z^2 + (\bar{z})^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1$$
Η τελευταία ισοδυναμία αποδεικνύει ότι ο ζητούμενος γ.τ είναι η υπερβολή (c).
Το τελικό συμπέρασμα είναι ότι:

Για να αποδείξουμε ότι ο γ.τ σημείων που έχουν μια ιδιότητα (p) είναι η γραμμή (c) πρέπει από την ιδιότητα (p) με <u>ισοδυναμίες</u> να καταλήξουμε στην εξίσωση της (c).

Παράδειγμα 2ο

Να βρεθεί η γραμμή στην οποία κινούνται (ή το ίδιο ανήκουν) οι εικόνες των μιγαδικών z με την ιδιότητα $z^{100}\cdot(\overline{z})^{40}=1$ (1)

Λύση

Η (1) $\Rightarrow \left|z^{100}\cdot(\overline{z})^{40}\right|=1 \Rightarrow |z|^{100}\cdot|\overline{z}|^{40}=1 \Rightarrow |z|^{100}\cdot|z|^{40}=1 \Rightarrow |z|^{140}=1 \Rightarrow |z|=1$

Η τελευταία σχέση που αποδείχθηκε με $\Rightarrow$ το μόνο που αποδεικνύει είναι ότι όλες οι εικόνες των μιγαδικών ανήκουν (η το ίδιο κινούνται) στο μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή στον κύκλο με κέντρο το (0,0) και ακτίνα 1.
Αυτό δεν εξασφαλίζει ότι ο γ.τ είναι ολόκληρος ο κύκλος. Και τελικά υπάρχουν μόνο 60 μιγαδικοί που έχουν την ιδιότητα (1), δηλαδή μόνο 60 σημεία του κύκλου επαληθεύουν την (1).

Από το παραπάνω παράδειγμα φαίνεται η διαφορά μεταξύ γ. τ και γραμμής στην οποία κινείται ένα σημείο.

Το τελικό συμπέρασμα είναι ότι:

Για να αποδείξουμε ότι ένα σημείο που έχει μια ιδιότητα (p) ανήκει σε μια γραμμή (c), αρκεί από την ιδιότητα (p) με συνεπαγωγές να καταλήξουμε στην εξίσωση της γραμμής (c).

Σημαντική παρατήρηση

Στο παράδειγμα 2 χρησιμοποιήσαμε επίτηδες τη λάθος έκφραση
"Να βρεθεί η γραμμή στην οποία κινούνται οι εικόνες των μιγαδικών z με την ιδιότητα…"
Η έκφραση αυτή **δεν είναι σωστή** επειδή το πλήθος των σημείων είναι πεπερασμένο και υπάρχουν άπειρες γραμμές στις οποίες μπορούν να βρίσκονται τα αναφερόμενα σημεία.
Θα μπορούσαμε να πούμε π.χ ότι τα 60 σημεία που επαληθεύουν την (1) βρίσκονται στην περίμετρο ενός κανονικού 60γώνου εγγεγραμμένου στον μοναδιαίο κύκλο (αυτό μπορεί να αποδειχθεί).
Θα μπορούσαμε επίσης να κατασκευάσουμε μια γραμμή με τυχαίο τρόπο που να περνά από τα 60 σημεία.
Η σωστή έκφραση είναι:
"Αποδείξτε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z με την ιδιότητα (1) ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο"
Χρησιμοποιήσαμε όμως την λάθος έκφραση επειδή τη συναντούμε συχνά και θέλουμε να δείξουμε τη διαφορά μεταξύ των δύο εκφράσεων.

Συναρτήσεις 1-1

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται 1-1 αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Από τον ορισμό προκύπτει η εξής ισοδύναμη πρόταση:

Μια συνάρτηση $\mathbf{f : A \to \mathbb{R}}$ είναι 1-1, αν για κάθε $\mathbf{x_1, x_2 \in A}$ με $\mathbf{f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$

Από τον παραπάνω ορισμό και την πρόταση, προκύπτει ότι για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι 1-1, αρκεί να αποδείξουμε την παραπάνω $\Rightarrow$
Τα πράγματα αλλάζουν όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση δεν είναι 1-1. Στην περίπτωση αυτή χρειαζόμαστε $\Leftrightarrow$

Τα δύο παραδείγματα που ακολουθούν δείχνουν αυτή τη διαφορά.

<u>Παράδειγμα 1ο</u>
Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\mathbf{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ με $\mathbf{f(x) = 3x + 1}$ είναι 1-1

<u>Λύση</u>
Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 1 = 3x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$
Σύμφωνα λοιπόν με την πρόταση η f είναι 1-1

<u>Παράδειγμα 2ο</u>
Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $\mathbf{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ με $\mathbf{f(x) = x^2 - 3x + 4}$ είναι 1-1

<u>Λύση</u>
Έστω πάλι $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 - 3x_1 + 4 = x_2^2 - 3x_2 + 4 \Rightarrow$
$x_1^2 - x_2^2 - 3x_1 + 3x_2 = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 3(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow$
$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 3) = 0 \qquad (1)$
Μέχρις εδώ δεν έχουμε αποδείξει ούτε ότι η f είναι 1-1 ούτε ότι δεν είναι 1-1.

Για να αποδείξουμε ότι η f δεν είναι 1-1 πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$
Αν επιλέξουμε $x_1 \neq x_2$ με $x_1 + x_2 - 3 = 0$, π.χ $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$, τότε ισχύει η (1). Εμείς όμως ενδιαφερόμαστε για το αν ισχύει η $f(x_1) = f(x_2)$, Αυτό δεν προκύπτει από τις συνεπαγωγές στις παραπάνω σχέσεις.
Αν όμως αντί του $\Rightarrow$ χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο $\Leftrightarrow$, τότε έχουμε
$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 3) = 0 \qquad (2)$
Οι ισοδυναμίες αποδεικνύουν ότι αν ισχύει η (2) με $x_1 \neq x_2$, τότε ισχύει και η $f(x_1) = f(x_2)$, άρα η f δεν είναι 1-1

Το συμπέρασμα είναι ότι:

Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση f είναι 1-1, αρκεί από τη σχέση $\mathbf{f(x_1) = f(x_2)}$ να φτάσουμε με συνεπαγωγές στη $\mathbf{x_1 = x_2}$, ενώ για να αποδείξουμε ότι

η f δεν είναι 1-1, πρέπει να αποδείξουμε με ισοδυναμίες ότι η σχέση $f(x_1)=f(x_2)$ οδηγεί σε σχέση που ισχύει και όταν $x_1 \neq x_2$

Επισημαίνουμε ότι από τη σχέση $f(x_1)=f(x_2)$ σίγουρα θα καταλήξουμε και στη σχέση $x_1=x_2$, (αφού αυτή είναι μια λύση της $f(x_1)=f(x_2)$), αυτό όμως που χρειάζεται για να αποδείξουμε ότι η f δεν είναι 1-1, είναι να αποδείξουμε ότι η σχέση $f(x_1)=f(x_2)$ ισχύει και για $x_1 \neq x_2$ με κατάλληλα x_1 και x_2.

Η ισοδυναμία $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f'(x)=g'(x)$

Ένα συνηθισμένο πρόβλημα στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου είναι η εύρεση μιας συνάρτησης f. Πολλές φορές η συνάρτηση αυτή πρέπει να βρεθεί με αντιπαραγώγιση από μια συναρτησιακή σχέση που περιέχει την f και τις παραγώγους της (διαφορική εξίσωση) ή με παραγώγιση από μια σχέση με συναρτήσεις που ορίζονται από ολοκληρώματα.
Στην $1^η$ περίπτωση η εύρεση της f συνήθως απαιτεί μια αρχική συνθήκη (ένα δεδομένο από το οποίο θα επιλέξουμε τη μοναδική f που πληρεί τα δεδομένα του προβλήματος).
Στη $2^η$ περίπτωση (σχέση με ολοκληρώματα) μια αρχική συνθήκη μπορεί να βρεθεί από τη σχέση που δόθηκε και δε δίνεται.

Η εύρεση της f στηρίζεται στις παρακάτω προτάσεις:

<u>**Πρόταση 1**</u>
Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε υπάρχει σταθερή $c \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x)=c$ για κάθε $x \in \Delta$

<u>**Πρόταση 2**</u>
Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε υπάρχει σταθερή $c \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x)=g(x)+c$ για κάθε $x \in \Delta$

Προσθέτουμε εδώ μια χρήσιμη πρόταση για την εύρεση της f

<u>**Πρόταση 3**</u>
Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο διάστημα Δ, υπάρχει $x_0 \in \Delta$ με $f(x_0)=g(x_0)$ και ισχύει $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε $f(x)=g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$

Δηλαδή με την προϋπόθεση $f(x_0)=g(x_0)$ (και την προϋπόθεση της συνέχειας) ισχύει η ισοδυναμία : $\mathbf{f'(x)=g'(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)}$

Απόδειξη

Σύμφωνα με την πρόταση 2, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$ (1)

Η (1) ισχύει και για $x = x_0$, δηλαδή $f(x_0) = g(x_0) + c$ και επειδή $f(x_0) = g(x_0)$, προκύπτει c = 0, άρα $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$

Δίνουμε τρία παραδείγματα με τα οποία καταφαίνεται η χρησιμότητα της παραπάνω πρότασης:

Παράδειγμα 1ο

Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$\int_0^x f(t)dt = \text{συν}x + 2$ **(1)**

Λύση

Η (1) $\Rightarrow (\int_0^x f(t)dt)' = (\text{συν}x + 2)' \Rightarrow f(x) = -\text{ημ}x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Οι συνεπαγωγές δεν αποδεικνύουν ότι η $f(x) = -\text{ημ}x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι λύση της (1)

Για τον λόγο αυτό, χρειάζεται επαλήθευση.

Για $x = 0$ η (1) δίνει: 0 = 3

Επομένως η $f(x) = -\text{ημ}x$ δεν είναι λύση της (1) και η (1) είναι αδύνατη

Παράδειγμα 2ο

Αν ισχύει $\int_\alpha^x f(t)dt = 2x^2 - 8$ **(1)**

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί η f και ο $\alpha > 0$

Λύση

Η (1) $\Rightarrow (\int_\alpha^x f(t)dt)' = (2x^2 - 8)' \Rightarrow f(x) = 4x$, $x \in \mathbb{R}$

Οι συνεπαγωγές δείχνουν ότι η $f(x) = 4x$ είναι η μόνη συνάρτηση που θα μπορούσε να επαληθεύει την (1)

Για να είναι η f λύση της (1) πρέπει να την επαληθεύει. Θέτοντας στην (1) όπου $f(t) = 4t$ το 1ο μέλος της γίνεται:

$$\int_\alpha^x 4tdt = [2t^2]_\alpha^x = 2x^2 - 2\alpha^2$$

Για να αληθεύει λοιπόν η (1) πρέπει και αρκεί: $2x^2 - 2\alpha^2 = 2x^2 - 8 \Leftrightarrow \alpha = 2$

Η επαλήθευση μπορεί να αποφευχθεί αν χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 3.

Αν ονομάσουμε $g(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ και $h(x) = 2x^2 - 8$, η (1) γράφεται:

$g(x) = h(x)$ (2)

Για τη λύση της (2) εμείς λύσαμε την εξίσωση $g'(x) = h'(x)$ που δεν είναι πάντοτε ισοδύναμη με την $g(x) = h(x)$

Επειδή όμως $g(2) = h(2)$, σύμφωνα με την πρόταση 3, θα ισχύει και

$g(x) = h(x) \Leftrightarrow g'(x) = h'(x)$, δηλαδή η $f(x) = 4x$ είναι λύση της (1)

Παράδειγμα 3ο

Να βρεθεί η συνάρτηση $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αν $\mathbf{f(x)=2x-\int_0^x f(t)dt}$ (1)
για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbb{R}$

Λύση

Η (1) $\Rightarrow$ $f'(x)=(2x-\int_0^x f(t)dt)'$ $\Rightarrow$ $f'(x)=2-f(x)$ $\Rightarrow$ $f'(x)+f(x)=2$ $\Rightarrow$
$e^x f'(x)+e^x f(x)=2e^x$ $\Rightarrow$ $(e^x f(x))'=(2e^x)'$ $\Rightarrow$ $e^x f(x)=2e^x+c$ $\Rightarrow$
$f(x)=2+ce^{-x}$ (2)
Η (2) δεν είναι σίγουρα λύση της (1), αφού βρέθηκε από την (1) με $\Rightarrow$
Για να είναι λύση της (1) πρέπει να την επαληθεύει, δηλαδή
$2+ce^{-x}=2x-\int_0^x(2+ce^{-t})dt$ $\Leftrightarrow$ $2+ce^{-x}=2x-[2t-ce^{-t}]_0^x$ $\Leftrightarrow$
$2+ce^{-x}=2x-(2x-ce^{-x}+c)$ $\Leftrightarrow$ $c=-2$
Άρα $f(x)=2-2e^{-x}$

Η επαλήθευση μπορεί να αποφευχθεί αν χρησιμοποιήσουμε την πρόταση (3).
Επειδή δηλαδή η λύση που βρήκαμε επαληθεύει την $f'(x)=(2x-\int_0^x f(t)dt)'$, αρκεί η σχέση $f(x)=2x-\int_0^x f(t)dt$ να ισχύει για μια τιμή του x. Επειδή για $x=0$ η τελευταία δίνει $f(0)=0$, για να είναι η $f(x)=2+ce^{-x}$ αρκεί $f(0)=0$ $\Leftrightarrow$ $2+c=0$ $\Leftrightarrow$ $c=-2$, άρα $f(x)=2-2e^{-x}$ είναι η λύση της (1)

ΑΛΛΕΣ ΕΙΣΗΓΗΣΕΙΣ ΜΑΣ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΜΕ ΤΗΝ ΥΛΗ ΤΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

- Ημερίδα Ε.Μ.Ε Ημαθίας, 4-3-2007 και
  Μαθηματική εβδομάδα Θεσ/νίκης 7-3-2007
  ΑΝΑΛΥΣΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ. ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΕΥΚΡΙΝΙΣΕΙΣ ΜΕ ΑΦΟΡΜΗ ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

- Ημερίδα Ε.Μ.Ε Κοζάνης, 18-1-2009
  ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ. ΣΗΜΕΙΑ ΠΟΥ ΧΡΕΙΑΖΟΝΤΑΙ ΙΔΙΑΙΤΕΡΗ ΠΡΟΣΟΧΗ

- Ημερίδα Ε.Μ.Ε Ημαθίας, 11-10-2009
  ΧΡΗΣΙΜΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ

- 26ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, 14-11-2009, Θεσ/νίκη και
  Ημερίδα Ε.Μ.Ε Ημαθίας 18-4-2010
  ΧΡΗΣΙΜΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

Οι ενδιαφερόμενοι μπορούν να προμηθευτούν τις παραπάνω εισηγήσεις μας, αρκεί να μας στείλουν mail στη διεύθυνση που αναγράφεται στην 1η σελίδα και να μας τις ζητήσουν.