# ΧΡΗΣΙΜΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ

**Νίκος Ιωσηφίδης, Τρεμπεσίνας 6, 591 00 ΒΕΡΟΙΑ**

**e-mail: iossifid@yahoo.gr**

***Το άρθρο αφιερώνεται στον αείμνηστο Θεόδωρο Καζαντζή που επέκτεινε τα όρια της ανάλυσης με δικές του αναφορές και επεξηγήσεις.***

***ΠΕΡΙΛΗΨΗ***

*Το επίπεδο των Πανελλαδικών εξετάσεων ώθησε τους συναδέλφους να αναβαθμίσουν το μάθημα των Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου με πολλές, δύσκολες και πρωτότυπες ασκήσεις. Για τον ίδιο σκοπό γράφτηκαν και θεωρήματα εκτός σχολικού βιβλίου που διευκολύνουν τους υποψήφιους να αντιμετωπίσουν καλύτερα κάποια θέματα.*

*Στο παρόν άρθρο θα παρουσιάσουμε μερικά ακόμη θεωρήματα και σημαντικές παρατηρήσεις που πιστεύουμε ότι θα συμβάλλουν θετικά στην παραπάνω προσπάθεια.*

***SUMMARY***

*The level of the Pan-Hellenic university entrance exams has pushed our colleagues to improve the exam standards of A-level Maths with a variety of difficult exercises. For the same reason, certain theorems were written that were outside the scope of the curriculum in order to help students meet the exam requirements.*

*In this article we will present a few more theorems along with important remarks that we believe will make a positive contribution to the above effort.*

Η εισήγηση αυτή είναι σχετική με άλλες εισηγήσεις μας που αφορούν την ύλη των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου. Αυτές είναι:

α) 4-3-07: Ημερίδα Ε.Μ.Ε Ημαθίας και 7-3-2007: Μαθηματική εβδομάδα Θεσ/νίκης:
**ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΕΥΚΡΙΝΙΣΕΙΣ ΜΕ ΑΦΟΡΜΗ ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

β) 18-1-2009: Ημερίδα διδακτικής των Μαθηματικών, Ε.Μ.Ε Ημαθίας:
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ. ΣΗΜΕΙΑ ΠΟΥ ΧΡΕΙΑΖΟΝΤΑΙ ΙΔΙΑΙΤΕΡΗ ΠΡΟΣΟΧΗ.**

γ) 15-3-2009: Ημερίδα Μαθηματικών Γ΄ Λυκείου: Ε.Μ.Ε Κοζάνης:
**ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ. ΣΗΜΕΙΑ ΠΟΥ ΧΡΕΙΑΖΟΝΤΑΙ ΙΔΙΑΙΤΕΡΗ ΠΡΟΣΟΧΗ.**

Στο χώρο της Ανάλυσης υπάρχουν πολλές θεωρίες που δεν μπορούν να καλυφθούν από το σχολικό βιβλίο, είναι όμως χρήσιμες και ενδεχομένως προβλημάτισαν μαθητές και συναδέλφους. Στην εισήγηση αυτή θα αναφερθούμε σε μερικές από αυτές.

Για την οικονομία του χώρου και το χρόνου που επιβάλουν οι όροι της συμμετοχής, δε θα δώσουμε τις αποδείξεις των προτάσεων που αναφέρουμε. Επίσης θα συντομεύσουμε τις παρατηρήσεις. Μπορείτε να λάβετε το πλήρες αρχείο με όλες τις αποδείξεις και τις σχετικές παρατηρήσεις αν επικοινωνήσετε με το e-mail μας. Με το ίδιο mail μπορείτε να προμηθευτείτε και τις 3 παραπάνω εισηγήσεις.

# ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

**Ορισμός**
**Το σύμβολο { ως άκρο ενός διαστήματος θα παριστάνει το σύμβολο ( ή το [. Αντίστοιχα, το σύμβολο } θα παριστάνει ) ή ].**

Έτσι το σύμβολο {α, β} θα παριστάνει οποιοδήποτε από τα διαστήματα (α, β) ή [α, β] ή (α, β] ή [α, β). Τα α και β επίσης θα παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς ή α = -∞ ή β = + ∞
Στη μελέτη των παραγώγων όταν θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\Delta_0$ σε συνδυασμό με το διάστημα Δ = {α, β} θα εννοούμε ότι το $\Delta_0$ είναι το εσωτερικό του διαστήματος Δ που ορίζεται ως το ανοιχτό διάστημα με τα ίδια άκρα με το Δ, δηλαδή

- αν Δ = [α, β] ή (α, β) ή [α, β) ή (α, β] τότε $\Delta_0$ = (α, β)
- αν Δ = (-∞, α] ή Δ = (-∞, α) τότε $\Delta_0$ = (-∞, α)
- αν Δ = [α, + ∞) ή Δ = (α, + ∞) τότε $\Delta_0$ = (α, + ∞)
- αν Δ = (-∞, + ∞) = R τότε $\Delta_0$ = R

## Γινόμενο συναρτήσεων ίσο με 0

Δίνουμε εδώ τον ορισμό της μηδενικής συνάρτησης:

**Μια συνάρτηση f: A→R λέγεται μηδενική και συμβολίζεται με f = 0 αν για κάθε x∈A ισχύει: f(x) = 0**

**ΠΡΟΣΟΧΗ:** Ο ορισμός δεν αποκλείει η f να μηδενίζεται για κάποιες τιμές του x, ακόμη και άπειρες. Π.χ

- Η συνάρτηση f: A→R με $f(x) = x^2-4$ δεν είναι μηδενική, αν και μηδενίζεται για x = 2 και x = -2, δηλαδή είναι $f \neq 0$.
- Το ίδιο και η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{αν } x \leq 0 \\ 0 & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ είναι μη μηδενική
- Το ίδιο και η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{αν } x \neq 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ είναι μη μηδενική, αν και υπάρχει μόνο μια τιμή που η f δε μηδενίζεται.

**Αν τώρα για τις συναρτήσεις f , g: A→R ισχύει f.g = 0, αυτό δε σημαίνει ότι f = 0 ή g = 0 όπως φαίνεται από το παρακάτω παράδειγμα όπου $f \neq 0$ και $g \neq 0$**

**Παράδειγμα**
**Οι συναρτήσεις f και g ορίζονται ως εξής:**

$$\mathbf{f(x)=\begin{cases}0 \quad \alpha\nu \;\; x\le 3\\ 2x \;\alpha\nu \;\; x>3\end{cases}} \quad , \quad \mathbf{g(x)=\begin{cases}3x\; \alpha\nu \;\; x\le 3\\ 0 \quad \alpha\nu \;\; x>3\end{cases}}$$

Είναι $f \neq 0$ και $g \neq 0$

Όμως: f(x).g(x) = $\begin{cases}0 \text{ αν } x\le 3\\ 0 \text{ αν } x>3\end{cases}$ δηλαδή f(x).g(x) = 0 για κάθε $x\in R$, άρα f.g = 0

Με τη βοήθεια της παραπάνω ιδιότητας μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

**Αν f , g: $A\rightarrow R$ και $f^2 = g^2$, δηλαδή $f^2(x) = g^2(x)$ για κάθε $x\in A$ τότε δεν ισχύει σίγουρα ότι f = g ή f = -g, δηλαδή f(x) = g(x) για κάθε $x\in A$ ή f(x) = -g(x) για κάθε $x\in A$.**

Αυτό που ισχύει είναι ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει ότι: f(x) = g(x) ή f(x) = -g(x)
Μπορεί όμως να είναι $f \neq g$ και $f \neq -g$ όπως φαίνεται από το παρακάτω

**<u>Παράδειγμα</u>**
**Οι συναρτήσεις f , g: $R\rightarrow R$ ορίζονται ως εξής:**

$$\mathbf{f(x)=\begin{cases}2x, \;\; \alpha\nu \;\; x<3\\ -2x, \; \alpha\nu \;\; x\ge 3\end{cases}} \quad \textbf{και} \quad \mathbf{g(x)=\begin{cases}2x, \;\; \alpha\nu \;\; x<1\\ -2x, \; \alpha\nu \;\; x\ge 1\end{cases}}$$

Ισχύει προφανώς ότι $f^2(x) = 4x^2$ για κάθε $x\in R$ και $g^2(x) = 4x^2$ για κάθε $x\in R$.
Επομένως $f^2 = g^2$. Όμως προφανώς είναι $f \neq g$ και $f \neq -g$

Η απόδειξη της πρότασης αυτής γίνεται ως εξής:
$f^2 = g^2 \Leftrightarrow f^2 - g^2 = 0 \Leftrightarrow (f + g)(f - g) = 0$
Από την τελευταία σχέση δεν προκύπτει υποχρεωτικά ότι f + g = 0 ή f – g = 0
Οι συναρτήσεις f και g μπορεί να είναι οι παραπάνω.

Σαν εφαρμογή του παραπάνω δίνουμε το εξής παράδειγμα:

**Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις f : $R\rightarrow R$ με την ιδιότητα: $f^2(x) = x^2$**

**<u>Λύση</u>**
Σύμφωνα με τα όσα γράψαμε παραπάνω, για κάθε $x\in R$ θα είναι: f(x) = x ή f(x) = -x
Αυτό δίνει ως λύσεις άπειρες συναρτήσεις που ορίζονται ως εξής:
$f(x)=\begin{cases}x, & \text{αν } x\in A\\ -x, & \text{αν } x\notin A\end{cases}$ όπου A οποιοδήποτε υποσύνολο του R.

Δύο από τις συναρτήσεις αυτές είναι βέβαια και οι f(x) = x για κάθε $x\in R$ και f(x) = -x για κάθε $x\in R$

**<u>Πρόταση</u>**
**Αν η συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα στα διαστήματα {α, β] και [β, γ}, τότε η f είναι γν. αύξουσα και στο διάστημα {α, β]$\cup$[β, γ} = {α, γ}**
**Αντίστοιχα ισχύει η πρόταση για γν. φθίνουσα συνάρτηση.**

**Η ίδια πρόταση ισχύει και για συναρτήσεις αύξουσες ή φθίνουσες.**

**Απόδειξη**
Αποδεικνύουμε μόνο την πρώτη πρόταση. Οι άλλες αποδεικνύονται με τον ίδιο τρόπο.
Έστω $x_1, x_2 \in \{\alpha, \gamma\}$ με $x_1 < x_2$
Αν $x_1, x_2 \in \{\alpha, \beta]$ τότε προφανώς $f(x_1) < f(x_2)$ αφού η f είναι γν. αύξουσα στο $\{\alpha, \beta]$
Αν $x_1, x_2 \in [\beta, \gamma\}$ τότε προφανώς $f(x_1) < f(x_2)$ αφού η f είναι γν. αύξουσα στο $[\beta, \gamma\}$
Αν $x_1 \in \{\alpha, \beta]$ και $x_2 \in [\beta, \gamma\}$ τότε

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \le \beta \Rightarrow f(x_1) \le f(\beta) \\ \beta \le x_2 \Rightarrow f(\beta) \le f(x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

Το ίσον ισχύει στις παραπάνω σχέσεις όταν ισχύουν συγχρόνως $x_1 = \beta$ και $\beta = x_2$, δηλαδή όταν $x_1 = x_2$
Επομένως με $x_1 < x_2$ ισχύει μόνο $f(x_1) < f(x_2)$ και η f είναι γν. αύξουσα και στο $\{\alpha, \gamma\}$

**Παρατήρηση**
Η παραπάνω πρόταση δεν ισχύει αν τα διαστήματα $\{\alpha, \beta\}$ και $\{\beta, \gamma\}$ δεν είναι και τα δύο κλειστά στο β όπως δείχνουμε στο παρακάτω

**Παράδειγμα**
Η συνάρτηση f ορίζεται ως εξής: $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } x \in [1,3) \\ x-1, & \text{αν } x \in [3,5] \end{cases}$

Είναι φανερό ότι η f είναι γν. αύξουσα και στο [1, 3) και στο [3, 5]. Όμως η f δεν είναι γν. αύξουσα στην ένωση $[1, 3) \cup [3, 5] = [1, 5]$, αφού $f(2) = 4$ και $f(4) = 3$, δηλαδή $f(2) > f(4)$

# Ολικά ακρότατα

Ένα συνηθισμένο λάθος είναι αν για τη συνάρτηση $f: A \to R$ ισχύει $f(x) \le M$, τότε το M είναι το ολικό μέγιστο της f (αντίστοιχα να θεωρούμε ότι αν $f(x) \ge m$, τότε το m είναι το ολικό μέγιστο της f).
Αυτό δεν είναι σωστό επειδή η σχέση $f(x) \le M$ δεν εξασφαλίζει ότι η συνάρτηση f μπορεί να πάρει την τιμή M.

Για να είναι το M το ολικό μέγιστο της f πρέπει η συνάρτηση να παίρνει την τιμή M, δηλαδή πρέπει να υπάρχει $x_0 \in A$ με $f(x_0) = M$

Έτσι π.χ ενώ για κάθε $x \in R$ ισχύουν οι σχέσεις $\left.\begin{array}{r} -1 \le \eta\mu x \le 1 \\ -1 \le \sigma\upsilon\nu x \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow -2 \le \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \le 2$,

δεν μπορούμε να πούμε ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ είναι το 2 και η ελάχιστη το -2, επειδή δεν υπάρχει $x \in R$ με $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 2$, αφού τότε θα έπρεπε να ισχύουν ταυτόχρονα $\eta\mu x = 1$ και $\sigma\upsilon\nu x = 1$, πράγμα άτοπο, αφού

$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$

Για τον ίδιο λόγο δεν μπορούμε να πούμε ότι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι το -2.

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι $f(x) = ημx + συνx = \sqrt{2}ημ(x+\frac{π}{4})$ από την οποία προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή της f είναι το $\sqrt{2}$ και η ελάχιστη το $-\sqrt{2}$.

Άλλο σχετικό λάθος που γίνεται πολλές φορές είναι να θεωρούμε ότι αν $f(x) \geq α$, τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $[α, \infty)$.

Αυτό δεν είναι σωστό για δύο λόγους:

Ο πρώτος λόγος είναι ότι **δεν είναι σίγουρο ότι η μικρότερη τιμή της f είναι το α** και αν ακόμη είναι έτσι, ο δεύτερος λόγος είναι ότι **δεν είναι σίγουρο ότι η f παίρνει κάθε τιμή μεγαλύτερη του α.**

Έτσι π.χ ενώ $ημx \geq -1$ δεν μπορούμε να πούμε ότι η συνάρτηση $f(x) = ημx$ έχει σύνολο τιμών το $[-1, +\infty)$ (το σύνολο τιμών της f είναι ως γνωστό το $[-1, 1]$)
Στο σχολικό βιβλίο, στο πρώτο κεφάλαιο της Ανάλυσης, δεν εξηγείται επαρκώς πως βρίσκεται το σύνολο τιμών αν και αυτό χρειάζεται για την εύρεση της αντίστροφης μιας συνάρτησης. Αυτό γίνεται παρακάτω με τη βοήθεια της συνέχειας και της μονοτονίας.

# Συναρτήσεις 1-1

**Αν οι συναρτήσεις f και g είναι 1-1, κανένα συμπέρασμα δεν προκύπτει για τις συναρτήσεις f+g, f-g, f.g και $\frac{f}{g}$ (αν είναι ή δεν είναι 1-1).**

**Η σύνθεση $g \circ f$ όμως είναι 1-1**

Πράγματι οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$, $x \in R$ και $g(x) = -x$, $x \in R$ είναι 1-1, όμως οι συναρτήσεις
$(f + g)(x) = x^3 - x$, $x \in R$, $(f \cdot g)(x) = -x^4$, $x \in R$, $(\frac{f}{g})(x) = -x^2$, $x \in R^*$ δεν είναι 1-1
Αν όμως επιλέξουμε $f(x) = x^3$, $x \in R$ και $g(x) = x$, $x \in R$, οι f και g είναι 1-1 και η $(f + g)(x) = x^3 + x$, $x \in R$ ως γν. αύξουσα είναι επίσης 1-1.

Το ότι η $g \circ f$ είναι σε κάθε περίπτωση 1-1 αποδεικνύεται ως εξής:
Έστω Γ το πεδίο ορισμού της $g \circ f$.

Αν $x_1, x_2 \in Γ$ με $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow g(f(x_1) = g(f(x_2) \overset{g:1-1}{\Rightarrow} f(x_1) = f(x_2) \overset{f:1-1}{\Rightarrow} x_1 = x_2$
Άρα η $g \circ f$ είναι 1-1

# Μονοτονία, συνέχεια και 1-1 συναρτήσεις

Είναι γνωστό ότι αν μια συνάρτηση είναι γν. μονότονη στο διάστημα Δ τότε είναι και 1-1 στο Δ. Η απόδειξη της πρότασης είναι εύκολη και ευρέως γνωστή.

Το ερώτημα είναι αν ισχύει το αντίστροφο, δηλαδή:

**Αν μια συνάρτηση είναι 1-1 στο διάστημα Δ είναι γν. μονότονη;**

Η απάντηση είναι αρνητική. Δηλαδή:

**Μια συνάρτηση που είναι 1-1 στο διάστημα Δ δεν είναι απαραίτητα γν. μονότονη στο Δ.**

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί με κατάλληλα αντιπαραδείγματα, είναι όμως πολύ εύκολο να το δούμε με τη βοήθεια μιας γραφικής παράστασης.
Το ερώτημα είναι αν μπορούμε να σχεδιάσουμε μια γραφική παράσταση συνάρτησης που να είναι 1-1 και να μην είναι γν. μονότονη.
Αν προσπαθήσουμε να σχεδιάσουμε μια τέτοια γραμμή, θα διαπιστώσουμε ότι ο μόνος τρόπος για να γίνει αυτό, είναι να διακόψουμε τη γραμμή και να την συνεχίσουμε από άλλο σημείο, δηλαδή θα μπορούσαμε να το κάνουμε αυτό μόνο με μη συνεχή συνάρτηση.

Ισχύει λοιπόν η εξής πρόταση:

**Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα Δ και 1-1, τότε είναι γν. μονότονη στο Δ.**

**<u>Απόδειξη</u>**

Έστω ότι η f δεν είναι γν. μονότονη. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 < x_3$ και $f(x_1) < f(x_2)$ και $f(x_2) > f(x_3)$ ή ( $f(x_1) > f(x_2)$ και $f(x_2) < f(x_3)$ )
Έστω ότι ισχύει η πρώτη περίπτωση και έστω ακόμη $f(x_1) < f(x_3)$
Έχουμε δηλαδή $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα $(x_1, x_2)$ θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ με $f(\xi) = f(x_3)$, άρα η f δεν είναι 1-1, άτοπο.
Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο και στην περίπτωση $f(x_1) > f(x_2)$ και $f(x_2) < f(x_3)$
Επομένως η f είναι γν. μονότονη.

Μια άλλη χρήσιμη παρατήρηση είναι ότι:

**Μια πολυωνυμική συνάρτηση που είναι 1-1 μπορεί να έχει περισσότερες από μία ρίζες.**

**ΠΡΟΣΟΧΗ:**

Η παρατήρηση αυτή ισχύει για πολυωνυμικές συναρτήσεις.
Πράγματι, η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι προφανώς 1-1, έχει όμως τρεις ρίζες ίσες με 0.
Θυμίζουμε το

**Θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας:**

**Μια πολυωνυμική εξίσωση βαθμού ν με συντελεστές από το C έχει ακριβώς ν ρίζες.**

Για τις πολυωνυμικές συναρτήσεις, στο πλήθος των ριζών προσμετράται και ο βαθμός πολλαπλότητάς τους, δηλαδή η εξίσωση $x^3 = 0$ έχει ακριβώς 3 ρίζες και όχι μόνο μία.

Για μη πολυωνυμικές συναρτήσεις, μπορεί επίσης να οριστεί βαθμός πολλαπλότητας με τη βοήθεια των παραγώγων, αυτό όμως δεν θα μας απασχολήσει εδώ.

# Μονοτονία της αντίστροφης μιας συνάρτησης

Είναι γνωστή η πρόταση:

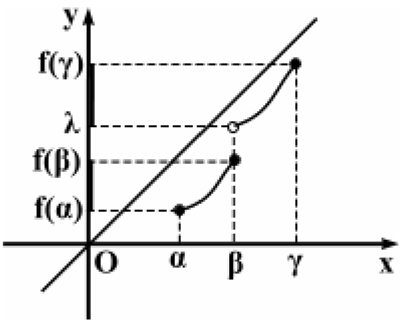
**Αν η συνάρτηση f είναι γν. μονότονη, τότε και η αντίστροφή της είναι επίσης γν. μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.**

Η πρόταση αυτή δεν είναι σωστή σε όλες τις περιπτώσεις και αυτό επειδή ο ορισμός του σχολικού βιβλίου για τις μονότονες συναρτήσεις δίνεται σε διάστημα.
(υιοθετήσαμε τους ορισμούς του σχολικού βιβλίου. Με διαφορετικούς ορισμούς οι προτάσεις μπορούν να αλλάξουν)
Ο ορισμός αυτός είναι ο εξής: [1]
Μία συνάρτηση f λέγεται:

- **Γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$**

- **Γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$**

Ο ορισμός αυτός δεν επιτρέπει να μιλάμε για μονοτονία της $f^{-1}$, επειδή το διάστημα Δ δεν απεικονίζεται πάντοτε σε διάστημα μέσω της f.




Στο παραπάνω σχήμα το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $[\alpha, \beta] \cup (\beta, \gamma] = [\alpha, \gamma]$ και η f είναι γν. αύξουσα, άρα υπάρχει η αντίστροφή της $f^{-1}$.

[1] Στο προηγούμενο σχολικό βιβλίο ο ορισμός της μονοτονίας δίνονταν σε οποιοδήποτε υποσύνολο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης και όχι απαραίτητα σε διάστημα.

Το σύνολο τιμών της όμως, που είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της, είναι το $f(A) = [f(\alpha), f(\beta)] \cup (\lambda, f(\gamma)]$ το οποίο δεν είναι διάστημα. Έτσι δεν μπορούμε να μιλάμε για μονοτονία της $f^{-1}$.

**Η παραπάνω πρόταση, ότι δηλαδή όταν υπάρχει η αντίστροφη μιας μονότονης συνάρτησης αυτή έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f ισχύει όταν η f είναι συνεχής, οπότε η εικόνα του διαστήματος Δ μέσω της f είναι επίσης διάστημα.**

**<u>Απόδειξη</u>**

Έστω ότι η f είναι γν. αύξουσα και συνεχής στο διάστημα Δ.
Τότε υπάρχει η αντίστροφή της και ορίζεται στο f(Δ) που είναι επίσης διάστημα.
Έστω $y_1, y_2 \in f(\Delta)$ με $y_1 < y_2$. Θα αποδείξουμε ότι $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

Επειδή $y_1, y_2$ υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $f(x_1) = y_1$ και $f(x_2) = y_2$, άρα $x_1 = f^{-1}(y_1)$ και $x_2 = f^{-1}(y_2)$

Αν $x_1 \geq x_2$, επειδή η f είναι γν. αύξουσα θα είναι και $f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow y_1 \geq y_2$, άτοπο.
Άρα $x_1 < x_2$ δηλαδή $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ και η $f^{-1}$ είναι γν. αύξουσα.

Όμοια γίνεται η απόδειξη και αν η συνάρτηση f είναι γν. φθίνουσα.

**<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>**

Η πρόταση μπορεί να τροποποιηθεί ως εξής ώστε να ισχύει γενικότερα.

**Αν η συνάρτηση $f: A \to R$ έχει την ιδιότητα: Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, τότε υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}$ και για κάθε $y_1, y_2 \in f(A)$ με $y_1 < y_2$ ισχύει $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$**

Η απόδειξη είναι όμοια με την προηγούμενη

Για τη μονοτονία της σύνθεσης δύο συναρτήσεων θα υπέθετε κανείς ότι ισχύει αντίστοιχο συμπέρασμα, δηλαδή η παρακάτω γνωστή πρόταση δεν ισχύει.

**<u>Πρόταση</u>**

**Η σύνθεση δύο γν. μονότονων συναρτήσεων με το ίδιο είδος μονοτονίας είναι γν. αύξουσα, ενώ η σύνθεση μια γν. αύξουσας συνάρτησης με μια γν. φθίνουσα (ή αντίστροφα) είναι γν. φθίνουσα**

Η παραπάνω πρόταση είναι όμως σωστή όπως αποδεικνύουμε αμέσως. Η απόδειξη είναι γνωστή, αλλά τις περισσότερες φορές είναι ελλιπής, επειδή δεν αποδεικνύεται ότι το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι διάστημα.

Έστω ότι οι συναρτήσεις $f: A \to R$ και $g: B \to R$ είναι γν. αύξουσες (όμοια απόδειξη γίνεται και στην περίπτωση που οι f και g είναι γν. φθίνουσες ή οι f και g έχουν διαφορετικά είδη μονοτονίας) και ότι ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$. Επειδή οι f και g είναι γν. μονότονες, τα πεδία ορισμού τους A και B είναι διαστήματα.
Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι το $\Gamma = \{x \in A$ και $f(x) \in B\}$. Θα αποδείξουμε ότι το Γ είναι διάστημα.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $x_1$ και $x_2$ με $x_1 < x_2$ είναι δύο στοιχεία του Γ, τότε κάθε x με $x_1 < x < x_2$ είναι επίσης στοιχείο του Γ.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $x \in A$ και $f(x) \in B$.

Επειδή το Α είναι διάστημα και $x_1, x_2 \in A$ και $x_1 < x < x_2$ θα είναι και $x \in A$.

Επειδή η f είναι γν. αύξουσα και $x_1 < x < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x) < f(x_2)$.

Όμως $f(x_1), f(x_2) \in B$ και το Β είναι διάστημα, άρα και $f(x) \in B$, επομένως $x \in \Gamma$

Έτσι το Γ είναι διάστημα.

Επειδή τώρα $x_1 < x_2 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2) \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(f(x_1)) < g(f(x_2))$, άρα η $g \circ f$ είναι γν. αύξουσα.

# Κοινά σημεία των $c_f$ και $c_{f^{-1}}$

Για τα κοινά σημεία των $c_f$ και $c_{f^{-1}}$ ισχύει η παρακάτω πρόταση:

**Αν η συνάρτηση $f: A \to R$ έχει την ιδιότητα: Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ (οπότε υπάρχει η αντίστροφή της), τότε τα κοινά σημεία των $c_f$ και $c_{f^{-1}}$ εφόσον υπάρχουν τέτοια, βρίσκονται πάνω στη διχοτόμο $y = x$ της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.**

<u>**Απόδειξη**</u>

Αν $x_0$ είναι κοινό σημείο των $c_f$ και $c_{f^{-1}}$, θα ισχύει: $f(x_0) = f^{-1}(x_0)$ (1)

Θα αποδείξουμε ότι $f(x_0) = x_0$

Για κάθε $y_1, y_2 \in f(A)$ με $y_1 < y_2$ ισχύει $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

Αν τώρα υποθέσουμε $f(x_0) > x_0 \Rightarrow f^{-1}(f(x_0)) > f^{-1}(x_0) \Rightarrow x_0 > f^{-1}(x_0)$ και λόγω της (1): $x_0 > f(x_0)$, άτοπο.

Όμοια, αν υποθέσουμε ότι $f(x_0) < x_0$ καταλήγουμε σε άτοπο.

Επομένως ισχύει $f(x_0) = x_0$, δηλαδή κάθε κοινό σημείο των $c_f$ και $c_{f^{-1}}$ βρίσκεται στη διχοτόμο $y = x$.

<u>**ΠΡΟΣΟΧΗ:**</u>

Αν η f δεν είναι γν. αύξουσα, είναι δυνατό να υπάρχουν κοινά σημεία των $c_f$ και $c_{f^{-1}}$ που δε βρίσκονται στην ευθεία $y = x$.

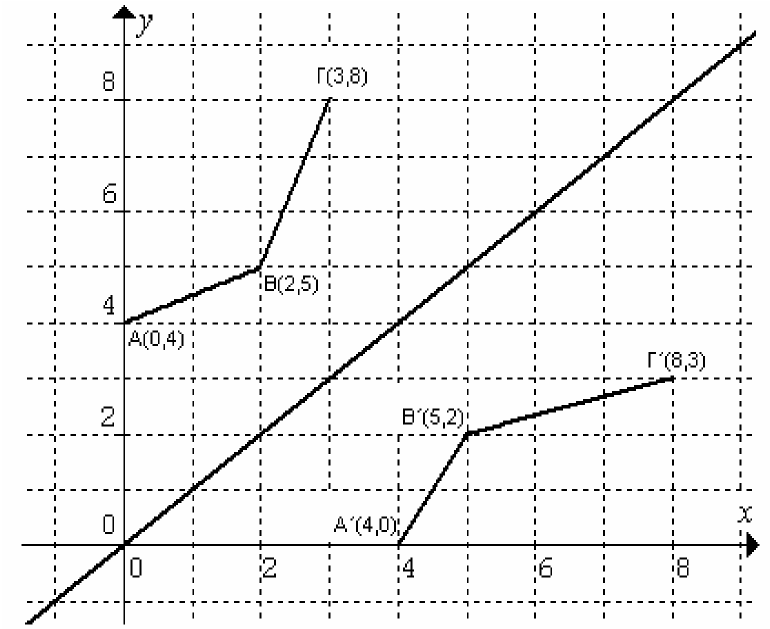
Π.χ για τη συνάρτηση

$$\mathbf{f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+8), & \text{αν } x \in [0,2] \\ \frac{1}{3}(x+1), & \text{αν } x \in [5,8] \end{cases}}$$ **(Γ. Ιωσηφίδης)**

είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι η f είναι αντιστρέψιμη με

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}3x-1, & \text{αν } x\in[2,3]\\ 2x-8, & \text{αν } x\in[4,5]\end{cases}$$

Τα κοινά σημεία των $c_f$ και $c_{f^{-1}}$ είναι τα Β(2, 5) και Β΄(5, 2) και κανένα από αυτά δε βρίσκεται στη διχοτόμο y = x όπως προκύπτει από τη γραφική παράσταση των f και $f^{-1}$ (μπορεί όμως να προκύψει και χωρίς τη χρήση του σχήματος, αλλά με αλγεβρικές πράξεις)




Βλέπε επίσης: Κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και $f^{-1}$, Δημ. Γεωργακίλας, περιοδικό ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ του Παραρτήματος της Ε.Μ.Ε Ημαθίας, τεύχος 2, σελ. 39-43)