ΑΝΑΛΥΣΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Λάθη οφειλόμενα στους ορισμούς και τα θεωρήματα της Ανάλυσης

Εισήγηση Νικ. Ιωσηφίδη

Ημερίδα Ελληνογαλλικής σχολής ΚΑΛΑΜΑΡΙ
Σάββατο 3 Δεκεμβρίου 2016
Θεσσαλονίκη

ΛΑΘΗ ΟΦΕΙΛΟΜΕΝΑ ΣΤΟΥΣ ΟΡΙΣΜΟΥΣ ΚΑΙ ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Νίκος Ιωσηφίδης, Μαθηματικός, ΒΕΡΟΙΑ

e-mail: iossifid@yahoo.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ:
Η εισήγηση αυτή αποτελείται από συρραφή επιλεγμένων τμημάτων άλλων εισηγήσεών μας καθώς και από νέες προσθήκες στα πλαίσια του ομώνυμου τίτλου.
Οι εισηγήσεις αυτές αναφέρονται στο τέλος της εισήγησης. Σ' αυτές υπάρχουν πρόσθετα παραδείγματα, αντιπαραδείγματα, αποδείξεις και αναλύσεις, που εδώ, λόγω του περιορισμένου χρόνου και έκτασης της εισήγησης δεν μπορούμε να αναφέρουμε λεπτομερώς. Παραπέμπουμε σχετικά σε κάθε περίπτωση.
Τις εισηγήσεις αυτές, καθώς και άλλες σχετικές που αναφέρονται στην ύλη της Γ΄ Λυκείου, μπορείτε να τις κατεβάσετε από την διεύθυνση:

http://parmenides51.blogspot.gr/p/article.html

Στην εισήγηση αυτή έγινε ομαδοποίηση λαθών διαφόρων ενοτήτων.
Θα παρουσιάσουμε εδώ τα πιο συνηθισμένα λάθη που προέρχονται από την κακή ή λάθος χρήση των ορισμών και θεωρημάτων της Ανάλυσης καθώς και από την ελλιπή κατανόησή τους.

SUMMARY:
This paper consists of a combination of selected sections of other papers and also of new additions within the same title.
These papers are referred to in the bibliography at the end of this paper. In them, there are additional examples, counterexamples, evidence and analyses which, due to the limited time and scope of the paper, we cannot refer to in detail.
In the current paper there was a grouping of the errors of various sections.
We will present the most common errors that are due to bad or mistaken use of the definitions and theorems of the Analysis and also due to a limited understanding of these.

Σήμερα όλες οι μαθηματικές θεωρίες είναι θεμελιωμένες με την βοήθεια ορισμών, αρχικών εννοιών και αξιωμάτων και δεν μπορεί να υπάρξει διαφωνία σε κανένα θέμα. Κάθε διαφωνία μπορεί να αναχθεί στα αξιώματα και τους ορισμούς της εκάστοτε θεωρίας. Με τον τρόπο αυτό σίγουρα η διαφωνία θα εκλείψει.
Εδώ θα υιοθετήσουμε πλήρως τους ορισμούς του σχολικού βιβλίου της Ανάλυσης και με βάση αυτούς θα επισημάνουμε τα σημαντικότερα λάθη και παραλείψεις.
Τα περισσότερα λάθη στην Ανάλυση οφείλονται

- Στην παράβλεψη ή την λάθος χρήση των ορισμών και των θεωρημάτων, στην παρανόησή τους ή στην αυθαίρετη επέκτασή τους που δεν είναι πάντοτε αληθής.

- Στην λάθος χρήση των συμβόλων $\Rightarrow$ και $\Leftrightarrow$

- Στην χρήση του αντιστρόφου θεωρήματος που δεν ισχύει πάντοτε ή στην λάθος χρήση της άρνησης του θεωρήματος.

Θα αναλύσουμε μερικά αντιπροσωπευτικά λάθη από την $1^{η}$ και $3^{η}$ κατηγορία.

Για να αποφύγουμε τις πολλές επαναλήψεις και επεξηγήσεις, στο εξής, όταν αναφερόμαστε σε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με την ονομασία Δ θα εννοούμε ότι το Δ είναι διάστημα και στην περίπτωση αυτή με Δ_0 θα εννοούμε το εσωτερικό του διαστήματος.

Α) Λάθη οφειλόμενα στους ορισμούς

Στην κατηγορία αυτή οφείλονται τα περισσότερα λάθη και είναι διαφόρων ειδών.

1) Σύγχυση ορισμού και θεωρήματος:

Μια κατηγορία λαθών οφείλεται στο ότι όλοι οι συγγραφείς δεν δίνουν ακριβώς τους ίδιους ορισμούς για κάθε έννοια.
Π.χ. στο σχολικό βιβλίο λοιπόν της Ανάλυσης, ο ορισμός της συνάρτησης 1-1 είναι ο εξής:

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$, ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

Με την βοήθεια του ορισμού αυτού αποδεικνύεται το εξής θεώρημα:

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$

Επειδή για την λύση των ασκήσεων χρησιμοποιείται συνήθως το θεώρημα, αλλά και σε πολλά βιβλία (μη σχολικά βοηθήματα) ως ορισμός δίνεται το θεώρημα του σχολικού βιβλίου, συχνό λάθος γίνεται στο ερώτημα:

Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1-1;

Κάποιοι μαθητές δεν θα δώσουν ως απάντηση τον ορισμό, αλλά το θεώρημα.
Η διάκριση μεταξύ ορισμού και θεωρήματος είναι απαραίτητη για την αποφυγή τέτοιων λαθών.

Σχετικό είναι και το επόμενο λάθος:

Η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται 1-1 αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Η ισοδυναμία δεν είναι λάθος με την έννοια ότι δεν ισχύει, όμως ο ορισμός έχει συνεπαγωγή και όχι ισοδυναμία.

Το ίδιο λάθος γίνεται και με τον ορισμό της γνησίως αύξουσας συνάρτησης.
Ο ορισμός του σχολικού βιβλίου είναι:

Μια συνάρτηση f λέγεται γν. αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Είναι λάθος να δώσουμε ως ορισμό τον παρακάτω:

Μια συνάρτηση f λέγεται γν. αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Η αντίστροφη συνεπαγωγή είναι συμπέρασμα που μπορεί να αποδειχθεί, επομένως η παραπάνω πρόταση (με την σημασία της γραμματικής) είναι θεώρημα και όχι ορισμός.

2) Μη ισοδύναμοι ορισμοί

Συνήθως, οι διαφορετικοί ορισμοί για την ίδια έννοια είναι ισοδύναμοι, δηλαδή από τον κάθε ορισμό προκύπτει ο άλλος ως συμπέρασμα (θεώρημα).
Αυτό όμως δεν συμβαίνει πάντοτε. Η μη ισοδυναμία των ορισμών για την ίδια έννοια δημιουργεί λάθη όπως το παρακάτω:

Ο ορισμός της μονοτονίας στο τωρινό σχολικό βιβλίο είναι ο εξής:

Μια συνάρτηση f λέγεται

- **Γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$**

- **Γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$**

Ο ορισμός της μονότονης συνάρτησης λοιπόν στο ισχύον σχολικό βιβλίο δίνεται μόνο σε διάστημα. Έτσι δεν έχει νόημα η έκφραση "η συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα στο $A=(1,2)\cup(2,3)$" αφού το A δεν είναι διάστημα.

Στο προηγούμενο σχολικό βιβλίο (επί Δεσμών) ο ορισμός της μονοτονίας δίνονταν σε οποιοδήποτε σύνολο. Έτσι σε λυμένο παράδειγμα του σχολικού βιβλίου για να μελετηθεί η μονοτονία της $f(x)=\frac{\alpha}{x}$, με $\alpha>0$, αποδεικνύεται ότι η f είναι γν. φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ και κατόπιν αποδεικνύεται ότι η f δεν είναι γν. φθίνουσα στην ένωση $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ παρατηρώντας ότι $f(-1)<f(1)$.

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό (βιβλίο Δεσμών) αποδεικνύεται ότι αν η f είναι γν. μονότονη (οπότε υπάρχει η αντίστροφή της f^{-1}), η f^{-1} είναι γν. μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας. Η πεποίθηση αυτή παρέμεινε ως σήμερα και πολύ συχνά βλέπουμε την χρήση του θεωρήματος αυτού. Τι ακριβώς ισχύει όμως με το τωρινό σχολικό βιβλίο;

Ισχύει τώρα το εξής:

Αν η συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα στο διάστημα Δ (οπότε υπάρχει η αντίστροφή της f^{-1}), η f^{-1} έχει την ιδιότητα:

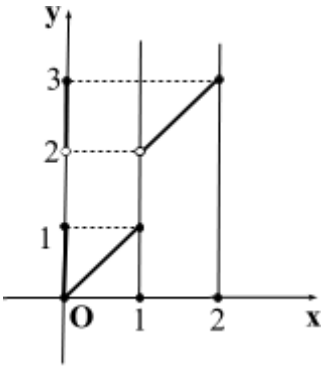
Για κάθε $y_1,y_2\in f(\Delta)$ με $y_1<y_2\Rightarrow f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$

Αυτό όμως δεν αρκεί για να πούμε ότι η f^{-1} είναι γν. αύξουσα. Για να πούμε ότι η f^{-1} είναι γν. αύξουσα στο $f(\Delta)$ πρέπει το $f(\Delta)$ να είναι διάστημα. Το $f(\Delta)$ είναι σίγουρα διάστημα αν η f είναι συνεχής. Αν όμως η f δεν είναι συνεχής τότε το $f(\Delta)$ μπορεί να μην είναι διάστημα όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Η συνάρτηση f ορίζεται ως εξής: $f(x)=\begin{cases}x & \text{αν } x\in[0,1]\\ x+1 & \text{αν } x\in(1,2]\end{cases}$

Ονομάζουμε $\Delta_1=[0,1]$, $\Delta_2=(1,2]$

Το πεδίο ορισμού της f είναι το κλειστό διάστημα $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2=[0,2]$ και εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι γν. αύξουσα στο Δ. Το σύνολο τιμών της είναι το σύνολο $f(\Delta)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[0,1]\cup(2,3]$ το οποίο δεν είναι διάστημα. Έτσι δεν μπορούμε να ομιλούμε για μονοτονία της f^{-1}. Μπορούμε όμως να πούμε ότι για κάθε $y_1,y_2\in f(\Delta)$ με $y_1<y_2\Rightarrow f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$.



Μετά από το παράδειγμα αυτό δημιουργείται η υποψία για το τι γίνεται με την μονοτονία της σύνθεσης δύο συναρτήσεων. Η υποψία δημιουργείται για το πεδίο ορισμού της σύνθεσης, αν δηλαδή είναι υποχρεωτικά διάστημα ή όχι.

Ισχύει το εξής:

Αν οι συναρτήσεις $f:A\to\mathbb{R}$ και $g:B\to\mathbb{R}$ είναι γν. μονότονες και ορίζεται η σύνθεση $g\circ f:\Gamma\to\mathbb{R}$ και το Γ δεν είναι μονοσύνολο, τότε η $g\circ f$ είναι γν. αύξουσα αν οι συναρτήσεις f και g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας, ενώ η $g\circ f$ είναι γν. φθίνουσα αν οι συναρτήσεις f και g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας.

Στην αιτιολόγηση που βλέπουμε συχνά (μονίμως θα έλεγα) παραλείπεται η απόδειξη ότι το πεδίο ορισμού της σύνθεσης είναι διάστημα. Η απόδειξη αυτή είναι η εξής:

Είναι: $\Gamma=\{x\in A \text{ και } f(x)\in B\}$

Έστω $x_1,x_2\in\Gamma$ με $x_1<x_2\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(x_1)<f(x_2)\overset{g\uparrow}{\Rightarrow}g(f(x_1))<g(f(x_2))\Rightarrow$

$(g\circ f)(x_1)<(g\circ f)(x_2)$

Άρα η $g\circ f$ είναι γν. αύξουσα.

Όμοια γίνεται η απόδειξη και στις άλλες περιπτώσεις

Είναι όμως πράγματι το Γ διάστημα; Η απάντηση είναι καταφατική.

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι το Γ είναι διάστημα, οπότε η πρόταση ισχύει.
Για να αποδείξουμε ότι το Γ είναι διάστημα, αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $\alpha,\beta\in\Gamma$, τότε για κάθε x με $\alpha<x<\beta$ ισχύει $x\in\Gamma$.
Πράγματι, επειδή οι f και g είναι γν. αύξουσες στα Α και Β, τα Α και Β είναι διαστήματα.
Επειδή $\alpha,\beta\in\Gamma\Rightarrow\alpha,\beta\in A$ και επειδή το Α είναι διάστημα και $\alpha<x<\beta\Rightarrow x\in A$

Επίσης $\alpha<x<\beta\overset{f\uparrow A}{\Rightarrow}f(\alpha)<f(x)<f(\beta)$

Επειδή το Β είναι διάστημα, $f(\alpha),f(\beta)\in B$ και $f(\alpha)<f(x)<f(\beta)\Rightarrow f(x)\in B$

Τέλος, επειδή $x\in A$ και $f(x)\in B\Rightarrow x\in\Gamma$, άρα το Γ είναι διάστημα και μπορούμε πλέον να ομιλούμε για μονοτονία της $g\circ f$.

Παρατήρηση

Στη διατύπωση του παραπάνω θεωρήματος προσθέσαμε τη φράση ότι το Γ δεν είναι μονοσύνολο.
Στο σχολικό βιβλίο σε δύο σημεία της παραγράφου 1.2 (το ένα σημείο στη σύνθεση συναρτήσεων) αναφέρεται κατά λέξη ότι:

"σε όλη την έκταση του βιβλίου θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που οι συνθέσεις τους έχουν πεδίο ορισμού διάστημα ή ένωση διαστημάτων"

Η σημείωση αυτή δεν αρκεί όμως για να αγνοήσουμε την παραπάνω εξαίρεση και πρέπει να προστεθεί στην εκφώνηση του θεωρήματος. Η ίδια παρατήρηση ισχύει και για άλλα θεωρήματα (συνέχεια και παράγωγος).

3) Ελλιπείς ορισμοί

Οι ορισμοί στην Ανάλυση είναι πολύ ακριβείς και λεπτομερείς και οποιαδήποτε παρέκκλιση η διαφοροποίηση οδηγεί σε παραλείψεις ή λάθη.

Συχνά είναι τα λάθη κατά τα οποία παραλείπονται ουσιώδη μέρη του ορισμού.
Π.χ ορισμός άρτιας συνάρτησης:

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται άρτια, αν για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(-x) = f(x)$

Εδώ έχει ξεχαστεί η προϋπόθεση: Για κάθε $x \in A \Rightarrow -x \in A$

4) Αγνόηση των ορισμών

Συνηθισμένο είναι το φαινόμενο κατά το οποίο αγνοούνται οι ορισμοί και υιοθετούνται αυθαίρετοι ορισμοί.
Χαρακτηριστικό παράδειγμα η εύρεση του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης που είναι αποτέλεσμα πράξεων.

Π.χ. Πεδίο ορισμού της σύνθεσης δύο συναρτήσεων

Αν $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις, η σύνθεσή τους $g \circ f$ ορίζεται όταν το σύνολο $\Gamma = \{x \in A \text{ και } f(x) \in B\}$ δεν είναι κενό. Τότε η συνάρτηση $g \circ f$ ορίζεται ως εξής:

$g \circ f : \Gamma \to \mathbb{R}$ με $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ δεν μπορεί να βρεθεί από τον τελικό της τύπο $g(f(x))$, αλλά σύμφωνα με τον ορισμό πρέπει να βρεθεί ως $\Gamma = \{x \in A \text{ και } f(x) \in B\}$.
Το σύνολο αυτό δεν είναι πάντοτε ίσο με αυτό που θα προέκυπτε από τον τύπο της $g \circ f$ όπως φαίνεται και από το παρακάτω

Παράδειγμα
Οι συναρτήσεις f και g ορίζονται ως εξής:
$f(x) = \dfrac{3}{x}$ και $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$
Τα πεδία ορισμού των f και g είναι αντίστοιχα $A = \mathbb{R} - \{0\}$ και $B = \mathbb{R} - \{1\}$
Το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $g \circ f$ είναι το $\Gamma = \{x \in A \text{ και } f(x) \in B\} =$
$\{x \neq 0 \text{ και } \dfrac{3}{x} \neq 1\} = \mathbb{R} - \{0, 3\}$

Ο τύπος της $g \circ f$ είναι $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \dfrac{1}{\dfrac{3}{x} - 1} = \dfrac{x}{3-x}$

Η παράσταση $\dfrac{x}{3-x}$ ορίζεται για κάθε $x \neq 3$, δηλαδή ορίζεται και για $x = 0$

Έτσι τα πεδία ορισμού των $g \circ f$ και $h(x) = \dfrac{x}{3-x}$ δεν είναι ίσα.

Τονίζουμε ότι για το πεδίο ορισμού της $g \circ f$, ο ορισμός απαιτεί να ορίζεται και το $f(x)$ και το $g(f(x))$ και δεν αρκεί να ορίζεται το $g(f(x))$.

5) Μη ορισμένες έννοιες

Όσο και αν φαίνεται παράξενο, υπάρχουν έννοιες στα μαθηματικά που δεν έχουν οριστεί και χρησιμοποιούνται ως αυτονόητες. Τέτοιες έννοιες είναι π.χ οι

- **Λάθος πρόβλημα**
- **Αριθμός ριζών εξίσωσης**
- **Επαλήθευση προβλήματος (πότε και γιατί την κάνουμε)**
- **Εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις τριών ή περισσοτέρων συναρτήσεων.**

Ο μη ορισμός των παραπάνω εννοιών πολλές φορές έχει δημιουργήσει ερωτηματικά στη λύση των ασκήσεων και κάποτε οι έννοιες αυτές πρέπει να διευκρινιστούν.

Αναλύουμε ξεχωριστά κάθε περίπτωση

Λάθος πρόβλημα

Τον ορισμό αυτό (Λάθος πρόβλημα) δεν τον συναντούμε πουθενά.
Ένας ορισμός τον οποίο υιοθετήσαμε στο [5] είναι ο εξής:

Λάθος πρόβλημα ονομάζεται ένα πρόβλημα του οποίου τα δεδομένα είναι ασυμβίβαστα.

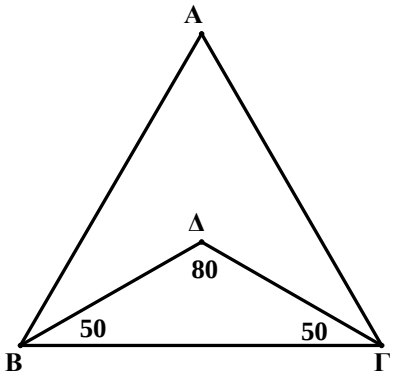
Υπάρχει τελευταία μια τάση εδώ στην Ελλάδα, να απαλειφθεί ο όρος αυτός από τα μαθηματικά και να μην δεχόμαστε την έννοια λάθος πρόβλημα. Οι οπαδοί αυτής της τάσης ισχυρίζονται ότι δεν ενδιαφέρει αν τα δεδομένα ενός προβλήματος είναι σωστά (συμβιβαστά) ή όχι. Μας ενδιαφέρει μόνο αν από τα δεδομένα μπορούμε με συνεπαγωγές να καταλήξουμε στο συμπέρασμα. Αυτό το στηρίζουν στην λογική ότι αν η πρόταση p είναι ψευδής, τότε η συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ είναι αληθής ανεξαρτήτως του αν η q είναι αληθής ή ψευδής. Όμως κανείς από τους οπαδούς της άποψης αυτής δεν προτείνει ασκήσεις με λάθος δεδομένα. Μόνο αν συμβεί να προτείνει μια άσκηση με λάθος δεδομένα (από λάθος του βέβαια), τότε προβάλλει τον ισχυρισμό αυτό.
Στο [5] αναλύουμε διεξοδικά το πρόβλημα και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι **σε ένα λάθος πρόβλημα δεν έχει νόημα καμιά απόδειξη**, επειδή μπορούμε με σωστές

συνεπαγωγές να αποδείξουμε και το ζητούμενο, αλλά και το αντίθετο (άρνηση) του ζητουμένου.
Το λάθος αυτής της λογικής (ότι δηλ. δεν ενδιαφέρει η ορθότητα των δεδομένων) οφείλεται στη σύγχυση δύο διαφορετικών εννοιών: **"Λάθος πρόβλημα"** και **"Λάθος απόδειξη".**

Δίνουμε δύο παραδείγματα για απόδειξη των παραπάνω ισχυρισμών

Παράδειγμα 1ο
Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α = Β = Γ = 100ο. Να βρεθεί η γωνία των διχοτόμων των γωνιών Β και Γ.

Λύση 1η
Έστω Δ το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών Β και Γ. Τότε $\Gamma B\Delta = 50^o$ και $B\Gamma\Delta = 50^o$
Άρα από το τρίγωνο ΒΔΓ έχουμε:
$B\Delta\Gamma = 180^o - 50^o - 50^o = 80^o$



Λύση 2η

Είναι: $B\Delta\Gamma = 90^o + \frac{A}{2} = 90^o + 50^0 = 140^o$

Η διαφορά στα αποτελέσματα των δύο λύσεων αποδεικνύει ότι απόδειξη με λάθος δεδομένα είναι χωρίς νόημα.

Παράδειγμα 2ο (ΘΕΜΑ 3Β, 1η ΔΕΣΜΗ, 1997)
Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο R τέτοια, ώστε, υπάρχει πραγματικός αριθμός α, ώστε να ισχύει:
$\mathbf{g(x+y) = e^y g(x) + e^x g(y) + xy + \alpha}$
Να αποδείξετε ότι:
i) $\mathbf{g(0) = -\alpha}$
ii) $\mathbf{g'(x) = g(x) + g'(0)e^x + x \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση (βλ. πλήρη απόδ. στο [4]). Η μη ύπαρξη συνάρτησης g με την ιδιότητα που δόθηκε μπορεί να οδηγήσει σε οποιοδήποτε παράλογο συμπέρασμα. Έτσι, με σωστές συνεπαγωγές, αποδεικνύεται με τα παραπάνω δεδομένα ότι $e = 1$.

Παρόμοια διαφωνία προέκυψε και σε θέμα που τέθηκε το 1947 στις εισαγωγικές εξετάσεις της (λεγόμενης τότε) Μαθηματικής Σχολής Αθηνών[1] όπου τα δεδομένα του προβλήματος Τριγωνομετρίας ήταν λάθος.

[1] Γιάννης Θωμαΐδης: ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ, Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΚΑΙ Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, περιοδικό ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ, τεύχος 4, σελ. 28-48

Αριθμός ριζών εξίσωσης
Σε πολλές ασκήσεις ζητείται το πλήθος των ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης.

Π.χ. Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $x^3-3x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)=0$;

Σύμφωνα με το βασικό θεώρημα της Άλγεβρας η εξίσωση αυτή ως πολυωνυμική $3^{ου}$ βαθμού έχει 3 ρίζες. Στις λύσεις όμως των προβλημάτων βλέπουμε συνήθως ότι σε τέτοιες περιπτώσεις ως αριθμός ριζών εννοείται ο 2 (δηλ. το πλήθος των διαφορετικών ριζών).
Αν δεχθούμε ότι στον αριθμό των ριζών προσμετράται και η πολλαπλότητά τους, δηλ η παραπάνω εξίσωση έχει 3 ρίζες, τότε πρέπει να αναθεωρήσουμε ή να διαφοροποιήσουμε κάποια γνωστά θεωρήματα της Ανάλυσης όπως:

Αν η συνάρτηση f είναι γν. μονότονη στο διάστημα Δ, τότε η f δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μια ρίζα στο Δ.

Η συνάρτηση όμως $f(x)=x^3$ είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αλλά έχει τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$, τις $x_1=x_2=x_3=0$ (βλ. πλήρη ανάλυση στο [4])

Επαλήθευση μιας λύσης
Για την επαλήθευση μιας λύσης δεν βλέπουμε πουθενά κάποιον κανόνα. Πότε δηλαδή χρειάζεται επαλήθευση και για ποιον λόγο. Εξαιτίας αυτού δημιουργούνται πολλά ερωτηματικά για την πληρότητα ή μη μιας λύσης. Τα ερωτηματικά αυτά δεν μπορούν να απαντηθούν χωρίς κάποιον κανόνα ή συμφωνία.
Εντελώς αυθαίρετα, χωρίς καμιά μαθηματική αιτιολόγηση, υιοθετήθηκε μια "γραμμή" την οποία ακολουθούν πολλοί συγγραφείς. Εδώ θα κάνουμε επαλήθευση, εκεί όχι. Συμβαίνει πολλές φορές **για το ίδιο πρόβλημα**, άλλοτε να γίνεται επαλήθευση και άλλοτε όχι, **ανάλογα με το αποτέλεσμα της λύσης.**
Στην ανάγκη της επαλήθευσης οδηγεί συνήθως το ότι ενώ ισχύουν κάποιες συνεπαγωγές, δεν ισχύουν οι ίδιες ως ισοδυναμίες με αποτέλεσμα να μην εξασφαλίζεται η αλήθεια των δεδομένων.
Η επαλήθευση συνήθως γίνεται χωρίς κάποια αιτιολόγηση. Π.χ λύνεται μια εξίσωση με συνεπαγωγές και χωρίς καμιά εξήγηση απλά αναφέρεται ότι η λύση αυτή επαληθεύει την αρχική εξίσωση.

Ως παράδειγμα αναφέρουμε μια άσκηση του σχολικού βιβλίου Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου:

Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{2x+7}-x=2$

Η λύση του σχολικού βιβλίου (έκδοση 2012, σελ. 151) είναι ακριβώς η παρακάτω:

Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $x\geq -\frac{7}{2}$. Γι αυτά τα x διαδοχικά έχουμε:

$\sqrt{2x+7}=x+2$ *(απομονώνουμε το ριζικό)*
$(\sqrt{2x+7})^2=(x+2)^2$ *(υψώνουμε στο τετράγωνο)*
$2x+7=x^2+4x+4$
$x^2+2x-3=0$

Η τελευταία εξίσωση έχει ως ρίζες τους αριθμούς -3 και 1. Από τις ρίζες αυτές διαπιστώνουμε με επαλήθευση ότι μόνο η $x=1$ *είναι ρίζα της αρχικής.*

Στην επόμενη σελ. 152 λύνεται ακόμη μια παρόμοια άσκηση (άρρητη εξίσωση) όπου πάλι με επαλήθευση γίνεται δεκτή μια από τις δύο ρίζες που βρέθηκαν κατά την λύση.
Δεν γίνεται καμιά αναφορά γιατί τώρα χρειάζεται η επαλήθευση, ενώ μέχρι τώρα οι μαθητές δεν έβλεπαν επαλήθευση στις λύσεις των εξισώσεων.
Για τους μαθητές η παρατήρηση ότι δεκτή είναι μόνο μια ρίζα δεν έχει καμιά λογική εξήγηση.
Το πρόβλημα προέρχεται από το γεγονός ότι τα σύμβολα $\Rightarrow$ και $\Leftrightarrow$ τώρα τελευταία εισήχθησαν στην ύλη της Α΄ Λυκείου. Το βιβλίο της Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου δεν προσαρμόστηκε στα νέα δεδομένα, αλλά έγινε copy paste από τις προηγούμενες εκδόσεις.
Για την συντριπτική πλειονότητα των μαθητών είναι άγνωστο ότι η λύση μιας εξίσωσης απαιτεί την χρήση ισοδυναμιών και όχι συνεπαγωγών και το ότι αν γίνει χρήση συνεπαγωγών τότε η επαλήθευση είναι αναγκαία.

Άλλο σχετικό παράδειγμα είναι το εξής:
Από μια συναρτησιακή σχέση με κατάλληλες τιμές των μεταβλητών βρίσκεται μια άγνωστη συνάρτηση και απλά αναφέρεται ότι η συνάρτηση αυτή επαληθεύει τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, χωρίς να εξηγείται ποια ήταν η ανάγκη για την αναφορά αυτή.

Στην εισήγησή μας [5] δίνουμε έναν κανόνα που είναι ο εξής:

Η επαλήθευση ενός προβλήματος είναι αναγκαιότητα της διαδικασίας της λύσης και όχι του αποτελέσματος. Αν δηλαδή μια λύση δεν εξασφαλίζει ότι όλα τα δεδομένα του προβλήματος ισχύουν, τότε η επαλήθευση είναι υποχρεωτική, ενώ αν η λύση εξασφαλίζει ότι ισχύουν όλα τα δεδομένα, δεν χρειάζεται επαλήθευση.

Στην ανάγκη αυτή μας οδήγησε ένα θέμα Πανελλαδικών στο οποίο γίνονταν χρήση του θεωρήματος του Fermat. Για την πληρότητα της λύσης αυτής έγινε μια συζήτηση στο mathematica στην οποία υπήρχαν και οι δύο απόψεις, ότι δηλ. η επαλήθευση είναι αναγκαία και ότι η επαλήθευση δεν είναι αναγκαία.

Με βάση τον παραπάνω κανόνα επιλύεται το ερώτημα πότε χρειάζεται επαλήθευση και πότε όχι, αλλά ο κανόνας αυτός δεν είναι αποδεκτός από όλους τους συναδέλφους μας. Κάποτε όμως πρέπει να συμφωνήσουμε ώστε να εξαλειφθούν όλες οι διαφωνίες.

Για να κάνουμε πιο κατανοητό το πρόβλημα δίνουμε ένα απλό παράδειγμα σε τρεις μορφές:

1η μορφή: Να προσδιοριστεί ο $\alpha\in\mathbb{R}$ **ώστε να ισχύει:** $\alpha^x \geq x+1$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

2η μορφή: Αν ισχύει $\alpha^x \geq x+1$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **αποδείξτε ότι** $\alpha = e$

3η μορφή: Αν ισχύει $\alpha^x \geq x+1$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **βρείτε τον** α

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x)=\alpha^x - x - 1$. Είναι: $f(x)\geq 0 = f(0)$

Δηλ. η f παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ ολικό ελάχιστο. Πρέπει επομένως $f'(0) = 0$

Είναι: $f'(x) = \alpha^x \ln\alpha - 1$, άρα $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = e$

Για όλους τους συναδέλφους χρειάζεται επαλήθευση στην $1^η$ μορφή του προβλήματος, ενώ για τους περισσότερους συναδέλφους δεν χρειάζεται επαλήθευση στην $2^η$ και $3^η$ μορφή. (Για λεπτομέρειες βλ. [5])

Δική μας άποψη είναι ότι και στις 3 περιπτώσεις η επαλήθευση είναι απαραίτητη για να εξασφαλιστεί ότι για $\alpha = e$ ισχύουν τα δεδομένα του προβλήματος, δηλ. $\alpha^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δίνουμε και άλλο παράδειγμα από το κεφάλαιο των ορίων όπου η επαλήθευση είναι απαραίτητη. Εδώ δεν υπάρχει καμία διαφωνία. Αναφέρουμε το παράδειγμα αυτό για να δείξουμε ότι μια λύση χωρίς επαλήθευση είναι ελλιπής.

Να προσδιοριστεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\alpha x^2 - 4}{x - 2} = 6$

<u>Λύση</u>

Θέτουμε $\dfrac{\alpha x^2 - 4}{x - 2} = f(x) \Leftrightarrow \alpha x^2 - 4 = (x-2)f(x) \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 2}\left(\alpha x^2 - 4\right) = \lim\limits_{x\to 2}\left((x-2)f(x)\right) \Leftrightarrow 4\alpha - 4 = 0 \cdot 6 \Leftrightarrow \alpha = 1$

Στην άσκηση αυτή λύσαμε εξίσωση για την εύρεση του α χρησιμοποιώντας λάθος το σύμβολο $\Leftrightarrow$ (το $2^ο$) (βλ. λεπτομέρειες και αναλύσεις στο [6]).

Η σωστή λύση πρέπει να γίνει με $\Rightarrow$, αλλά επειδή η λύση εξισώσεων απαιτεί ισοδυναμίες, πρέπει **<u>οπωσδήποτε</u>** να γίνει επαλήθευση.

Για $\alpha = 1$ έχουμε: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\alpha x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 4 \neq 6$

Η λύση λοιπόν $\alpha = 1$ απορρίπτεται.

Η απάντηση είναι ότι δεν υπάρχει τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\alpha x^2 - 4}{x - 2} = 6$.

Η τιμή του α θα ήταν δεκτή μόνο αν δίνονταν ότι $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\alpha x^2 - 4}{x - 2} = 4$

Εμβαδόν μικτόγραμμου ή καμπυλόγραμμου χωρίου

Είναι το εμβαδόν που περικλείεται από 3 ή περισσότερες γραμμές (Βλ. [7] και [8]).
Πρέπει να αποσαφηνιστεί η παραπάνω έκφραση, αν δηλαδή με τον όρο αυτό εννοούμε το εμβαδόν που περικλείεται ταυτόχρονα μεταξύ όλων των γραμμών ή έστω και μεταξύ μερικών από αυτές. Αν δεν αποσαφηνιστεί πλήρως η έκφραση αυτή τα λάθη και οι διαφωνίες είναι αναμενόμενα.

Αυτό που βλέπουμε να εννοείται ως εμβαδόν είναι το άθροισμα όλων των εμβαδών των χωρίων που περιέχονται μεταξύ δύο ή και περισσοτέρων γραμμών. Αυτό όμως δεν τηρείται πάντοτε.
Στις Πανελλαδικές εξετάσεις των ομογενών του 2008 τέθηκε το εξής:

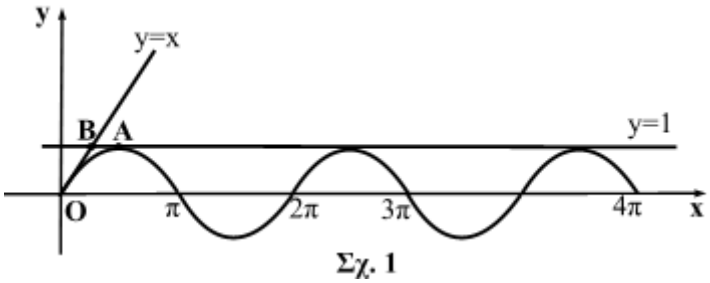
ΘΕΜΑ 4^{ο}
Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=ημx$, όπου $x\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο $(0,f(0))$ της γραφικής παράστασης της f.

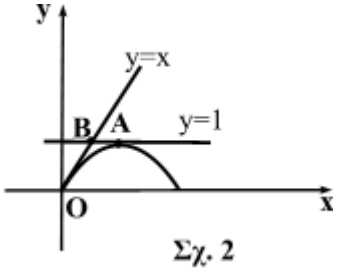
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y=x$ και $y=1$

γ) …

Η εξίσωση της εφαπτομένης της c_f στο σημείο της $(0,f(0))$ είναι η $y=x$
Η ευθεία $y=1$ εφάπτεται με την c_f σε άπειρα σημεία δημιουργώντας άπειρα χωρία με άπειρο συνολικά εμβαδόν (σχ. 1)
Εδώ, αντίθετα με ότι συνηθίζεται, εννοούνταν το εμβαδόν που περικλείονταν ταυτοχρόνως μεταξύ και των τριών γραμμών $y=ημx$, $y=x$ και y=1, δηλαδή μόνο το εμβαδόν ΟΑΒ (σχ. 2).



Σχ. 1



Σχ. 2

Ένας πολύ εύκολος τρόπος για την αποσαφήνιση της έκφρασης αυτής είναι να διατυπώνεται το πρόβλημα με μια από τις εξής δύο μορφές:

1^{η} μορφή: Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ταυτόχρονα και από τις 3 γραφικές παραστάσεις των f, g, h

2^{η} μορφή: Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από 2 ή περισσότερες από τις γραφικές παραστάσεις των f, g, h

Β) Λάθη οφειλόμενα στη λάθος χρήση των συμβόλων $\Rightarrow$ και $\Leftrightarrow$

Η Ανάλυση ως μάθημα ακρίβειας και λεπτομερειών απαιτεί τη σωστή χρήση των συμβόλων $\Rightarrow$ και $\Leftrightarrow$.

Δυστυχώς δεν διδάσκεται στα σχολεία. Ελάχιστες αναφορές γίνονται τα τελευταία χρόνια στο βιβλίο Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου που όμως δεν αρκούν για την κατανόηση και ειδικά για τη χρήση των συμβόλων αυτών.

Στην εισήγησή μας [6] εξηγούμε λεπτομερώς τη σωστή χρήση τους. Εδώ θα θεωρήσουμε γνωστή τη χρήση τους και θα αναφερθούμε μόνο στα λάθη που γίνονται από την κακή ή λάθος χρήση τους.

Η μη σωστή χρήση των συμβόλων αυτών οδηγεί σε λάθη ή παραλείψεις. Τα λάθη συνήθως γίνονται στη λύση εξισώσεων (όπου απαιτούνται ισοδυναμίες) ή στη χρήση των αντιστρόφων κάποιων θεωρημάτων τα οποία δεν ισχύουν πάντοτε.

Με τη σωστή χρήση των συμβόλων αυτών αποσαφηνίζεται και το σε ποιες περιπτώσεις είναι απαραίτητη η επαλήθευση και σε ποιες όχι.

Δεν δίνουμε εδώ παραδείγματα, επειδή πολλά από τα λάθη της Α΄ κατηγορίας που δώσαμε και τα λάθη της Γ΄ κατηγορίας που δίνουμε παρακάτω οφείλονται στη λάθος χρήση των συμβόλων $\Rightarrow$ και $\Leftrightarrow$

Γ) Λάθη οφειλόμενα στη λάθος χρήση των θεωρημάτων ή στην παρανόησή τους

Τα θεωρήματα των μαθηματικών είναι συνήθως της μορφής:

Αν ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις … τότε…

Αυτές οι προϋποθέσεις πολλές φορές αγνοούνται και εφαρμόζονται τα θεωρήματα και σε περιπτώσεις που δεν ισχύουν. Πολλά ερωτήματα τύπου Σωστό – Λάθος στηρίζονται στις εξαιρέσεις όπου δεν ισχύει κάποιο θεώρημα.
Μεταξύ των προϋποθέσεων (και αυτό είναι πολύ συχνό στην Ανάλυση) είναι το ότι κάποια από αυτές **ισχύει σε ένα διάστημα**. Συχνό είναι το λάθος να παραβλέπεται το γεγονός αυτό και να εφαρμόζεται το θεώρημα σε σύνολο που δεν είναι διάστημα.
Πολλά άλλα λάθη οφείλονται επίσης στην αγνόηση του πεδίου ορισμού των συναρτήσεων ή στην αυθαίρετη επέκταση της ισχύος ή στην παρανόηση των θεωρημάτων.

Αναφέρουμε μερικά από αυτά.

1) Ύπαρξη ορίου αθροίσματος, διαφοράς κ.λ.π

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστό ή Λάθος

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ **και** $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$**, τότε** $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \ell_1\cdot\ell_2$

Επαναλ. εξετάσεις Γεν. Παιδείας 2004

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:
$f(x) = \sqrt{x-2}$
$g(x) = \sqrt{4-2x}$

Τα πεδία ορισμού τους είναι $A_f = [2, +\infty)$, $A_g = (-\infty, 2]$

Και είναι εξ ορισμού

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x-2} = 0$ και
$\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{4-2x} = 0$

δηλαδή υπάρχουν τα όρια των f και g στο 2 (θυμίζουμε ότι αν η συνάρτηση f ορίζεται μόνο από τη μία πλευρά του x_0, το όριό της στο x_0 είναι το αντίστοιχο πλευρικό της όριο στο x_0).

Η συνάρτηση $f\cdot g$ ορίζεται στο $A_f \cap A_g = \{2\}$ και έχει τύπο $(f\cdot g)(x) = f(2)\cdot g(2)=0$

Όμως **το όριό της στο $x_0 = 2$ δεν έχει νόημα,** αφού, για να ορίζεται (σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο) πρέπει η συνάρτηση f να ορίζεται απαραίτητα σε διάστημα της μορφής (α, x_0) ή (x_0, β) και δεν αρκεί (ούτε μας ενδιαφέρει) να ορίζεται στο x_0.

Έτσι η πρόταση $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to 2} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to 2} g(x)$ χωρίς τις κατάλληλες προϋποθέσεις είναι ψευδής.

Για να ισχύει δηλαδή η παραπάνω πρόταση πρέπει οι συναρτήσεις f και g να ορίζονται στην ίδια περιοχή του x_0. **Αν η f ορίζεται μόνο αριστερά του x_0 και η g ορίζεται μόνο δεξιά του x_0, η παραπάνω ισότητα δεν έχει νόημα.**

Για τον ίδιο λόγο ψευδείς είναι και οι προτάσεις:

Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια των f και g στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχουν και τα όρια των $f+g$, $f-g$, και $\frac{f}{g}$ (με την πρόσθετη προϋπόθεση $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$)

Τα ίδια λάθη επαναλαμβάνονται και στη συνέχεια των συναρτήσεων.

Αν δηλ. οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, αυτό δεν εξασφαλίζει ότι και οι $f+g$, $f\cdot g$, $g\circ f$ κ.λ.π είναι συνεχείς στο x_0.

Τα ίδια λάθη επαναλαμβάνονται και στην παραγώγιση των συναρτήσεων.

Αν δηλ. οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, αυτό δεν εξασφαλίζει ότι και οι $f+g$, $f\cdot g$, $g\circ f$ κ.λ.π είναι παραγωγίσιμες στο x_0.

2) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^4-x^2}$

Η συνηθισμένη απάντηση είναι ότι το όριο αυτό είναι ίσο με 0.

Όμως η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^4-x^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,-1]\cup\{0\}\cup[1,+\infty)$, και το σημείο 0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης (δεν υπάρχει δηλ. σύνολο της μορφής $(\alpha,0)$ ή $(0,\beta)$ στο οποίο η f είναι ορισμένη) και **δεν μπορούμε να ομιλούμε για όριο της f στο 0**.

ΠΡΟΣΟΧΗ:
Δεν πρέπει να συγχέονται οι έννοιες "<u>δεν έχει νόημα το όριο</u>" και "<u>δεν υπάρχει το όριο</u>" που είναι εντελώς διαφορετικές.

3) Ίδιο λάθος στην προσπάθεια εύρεσης του $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon\varphi\frac{1}{x}$ όπου το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $A=\{x\neq\frac{1}{\kappa\pi+\frac{\pi}{2}}, \kappa\in\mathbb{Z}\}$ και δεν περιέχει κανένα διάστημα της μορφής $(\alpha,0)$ ή $(0,\beta)$, δηλαδή σε κάθε διάστημα της μορφής αυτής, υπάρχουν σημεία στα οποία η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi\frac{1}{x}$ δεν ορίζεται.

Και εδώ δηλ. **δεν μπορούμε να ομιλούμε για όριο της f στο 0**.

4) Γινόμενο συναρτήσεων =0
Δίνουμε εδώ τον ορισμό της μηδενικής συνάρτησης:

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται μηδενική και συμβολίζεται με $f = 0$ αν για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = 0$

Επομένως: Η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται μη μηδενική και συμβολίζεται με $f \neq 0$ αν υπάρχει $x \in A$ με $f(x) \neq 0$

ΠΡΟΣΟΧΗ:
Ο ορισμός **δεν αποκλείει η f να μηδενίζεται** για κάποιες τιμές του x, ακόμη και άπειρες. Π.χ

- Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - 4$ δεν είναι μηδενική, αν και μηδενίζεται για $x = 2$ και $x = -2$ δηλαδή είναι $f \neq 0$.
- Το ίδιο και η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \leq 0 \\ 0 & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ είναι μη μηδενική αν και μηδενίζεται για άπειρες τιμές του x.
- Το ίδιο και η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \neq 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ είναι μη μηδενική, αν και υπάρχει μόνο μια τιμή για την οποία η f δε μηδενίζεται.

Ισχύει το εξής:

Αν για τις συναρτήσεις $f, g: A \to \mathbb{R}$ ισχύει $f \cdot g = 0$, αυτό δε σημαίνει ότι $f = 0$ ή $g = 0$ όπως φαίνεται από το παρακάτω παράδειγμα όπου $f \neq 0$ και $g \neq 0$

<u>Παράδειγμα</u>
Οι συναρτήσεις f και g ορίζονται ως εξής:

$$\mathbf{f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \leq 3 \\ 2x & \text{αν } x > 3 \end{cases}} \quad , \quad \mathbf{g(x) = \begin{cases} 3x & \text{αν } x \leq 3 \\ 0 & \text{αν } x > 3 \end{cases}}$$

Είναι $f \neq 0$ και $g \neq 0$

Όμως: $f(x).g(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \leq 3 \\ 0 & \text{αν } x > 3 \end{cases}$ δηλαδή $f(x).g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $f.g = 0$

Με τη βοήθεια της παραπάνω ιδιότητας μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

Αν $f, g: A \to \mathbb{R}$ και $f^2 = g^2$, δηλαδή $f^2(x) = g^2(x)$ για κάθε $x \in A$ τότε δεν ισχύει σίγουρα ότι $f = g$ ή $f = -g$, δηλαδή $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$ ή $f(x) = -g(x)$ για κάθε $x \in A$.

Αυτό που ισχύει είναι ότι:

Για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι: $f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$

Προσοχή στη χρήση των ποσοδεικτών (η αλλαγή της θέσης του $\forall$)
Μπορεί όμως να είναι $f \neq g$ και $f \neq -g$ όπως φαίνεται στο παρακάτω

Παράδειγμα 1ο
Οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ορίζονται ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } x < 3 \\ -2x, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } x < 1 \\ -2x, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

Ισχύει προφανώς ότι $f^2(x) = 4x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g^2(x) = 4x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Επομένως $f^2 = g^2$. Όμως προφανώς είναι $f \neq g$ και $f \neq -g$.

Η απόδειξη της πρότασης αυτής γίνεται ως εξής:
$f^2 = g^2 \Leftrightarrow f^2 - g^2 = 0 \Leftrightarrow (f + g)(f - g) = 0$
Από την τελευταία σχέση δεν προκύπτει υποχρεωτικά ότι $f + g = 0$ ή $f - g = 0$
Οι συναρτήσεις f και g μπορεί να είναι οι παραπάνω.

Σαν εφαρμογή του παραπάνω δίνουμε το εξής

Παράδειγμα 2ο
Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f^2(x) = x^2$

Λύση
Σύμφωνα με τα όσα γράψαμε παραπάνω, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα είναι: $f(x) = x$ ή $f(x) = -x$
Αυτό δίνει ως λύσεις άπειρες συναρτήσεις που ορίζονται ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in A \\ -x, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$ όπου Α οποιοδήποτε υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Δύο από τις συναρτήσεις αυτές είναι βέβαια και οι $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5) Αν οι συναρτήσεις f και g δεν έχουν όριο στο L ($L = x_0 \in \mathbb{R}$, ή $L = +\infty$ ή $L = -\infty$) είναι δυνατό κάποιες από τις συναρτήσεις $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ και άλλοι συνδυασμοί των f και g να έχουν όριο στο L.

Π.χ αν $f(x)=\begin{cases}2x & \text{αν } x\le 1\\ -2x & \text{αν } x>1\end{cases}$ δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, αφού $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(2x)=2$,
ενώ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(-2x)=-2$, δηλ. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$
Όμως: $f^2(x)=4x^2 \ \ \forall x\in\mathbb{R}$, άρα $\lim\limits_{x\to 1} f^2(x)=\lim\limits_{x\to 1}(4x^2)=4$

Παρόμοια, αν $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x\in\mathbb{R}^*$ και $g(x)=x-\dfrac{1}{x},\ x\in\mathbb{R}^*$ τότε οι f και g δεν έχουν όριο στο 0, αφού $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$, ενώ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ καθώς επίσης και
$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=+\infty$, ενώ $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to 0} x=0$

Ανάλογα παραδείγματα μπορούν να δοθούν και για τις $f-g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$.

Το λάθος εδώ είναι να νομίζει κάποιος ότι επειδή δεν υπάρχει το όριο της f δεν υπάρχει και το όριο μιας παράστασης που περιέχει την f.
(Παρανόηση του σχετικού θεωρήματος)

6) Λάθος χρήση των ιδιοτήτων των ορίων
Συνηθισμένο λάθος είναι να εφαρμόζονται οι ιδιότητες των ορίων αρχικά μόνο σε τμήμα της συνάρτησης και κατόπιν στο υπόλοιπο τμήμα της συνάρτησης.

Κάτι τέτοιο δεν είναι σωστό όπως φαίνεται στο παρακάτω

Παράδειγμα

Είναι: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1} x=1$ (σωστή εφαρμογή των ιδιοτήτων)

Αν εφαρμόσουμε τις ιδιότητες των ορίων μόνο στον όρο x^2 του αριθμητή, δηλ. πάρουμε αρχικά $\lim\limits_{x\to 1} x^2=1$ και μετά εφαρμόσουμε τις ιδιότητες στο υπόλοιπο τμήμα της συνάρτησης θα έχουμε διαδοχικά:
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x-1}=-1$

Αν τώρα πάρουμε το όριο μόνο στον όρο x του αριθμητή, δηλαδή πάρουμε $\lim\limits_{x\to 1} x=1$ θα έχουμε:
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$

Στη $2^{η}$ και $3^{η}$ λύση δεν εφαρμόστηκε καμιά γνωστή ιδιότητα των ορίων.

7) Χρήση ορίου όταν δεν γνωρίζουμε ότι υπάρχει

Άλλο λάθος είναι η χρησιμοποίηση των ιδιοτήτων των ορίων σε συναρτήσεις που δεν γνωρίζουμε αν υπάρχουν τα όριά τους όπως δείχνουμε στο παρακάτω

Παράδειγμα

Αν $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+2x-3)=2$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

Το λάθος που γίνεται εδώ είναι ότι, ενώ δεν γνωρίζουμε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ να γράψουμε:

$$\lim_{x\to 1}(f(x)+2x-3)=2 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}f(x)+\lim_{x\to 1}(2x)-\lim_{x\to 1}3=2 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}f(x)+2-3=2 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}f(x)=3$$

Η σωστή λύση γίνεται ως εξής:

Θέτουμε:

$$g(x)=f(x)+2x-3 \Rightarrow f(x)=g(x)-2x+3 \Rightarrow \lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left(g(x)-2x+3\right)=$$
$$\lim_{x\to 1}g(x)-\lim_{x\to 1}\left(2x\right)+\lim_{x\to 1}3=2-2+3=3$$

Εδώ μπορούν να εφαρμοστούν οι ιδιότητες των ορίων επειδή υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=2$

Σχετικό και πολύ συνηθισμένο είναι και το λάθος να θεωρούμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ χωρίς να γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0.

8) Λάθος παρανόησης στα όρια

Άλλο λάθος γίνεται συχνά στις εγκλωβισμένες συναρτήσεις όπως δείχνουμε στο παρακάτω

Παράδειγμα

Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\eta\mu x-x^2\le f(x)\le \eta\mu x+x^2$ (1)

να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

Σε τέτοιες ασκήσεις συχνά βλέπουμε λάθος λύσεις ως εξής:

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}(\eta\mu x-x^2)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(\eta\mu x+x^2)=0$, σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής από την (1) προκύπτει $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

Για να πούμε όμως ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής, πρέπει να βρούμε τα $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x-x^2)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x+x^2)=0$ και όχι τα πλευρικά όρια των συναρτήσεων αυτών.

Το λάθος αυτό μπορεί να γίνει πιο εύκολα αν η άσκηση είναι της παρακάτω μορφής:

Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x^3 - x^2 \le xf(x) \le x^3 + x^2$ (1)
να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Η σωστή λύση γίνεται ως εξής:

- Για $x > 0$ η (1) $\Leftrightarrow x^2 - x \le f(x) \le x^2 + x$ (2)

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2 - x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2 + x) = 0$ οπότε από την (1) προκύπτει και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ (3)

- Για $x < 0$ η (1) $\Leftrightarrow x^2 - x \ge f(x) \ge x^2 + x$ (4)

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2 - x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2 + x) = 0$ οπότε από την (4) προκύπτει και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ (5)

Από τις (3) και (5) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Όταν δηλαδή θεωρούμε $x > 0$, τα όρια και των τριών μελών της (1) τα παίρνουμε στο 0^+, ενώ όταν θεωρούμε $x < 0$, τα όρια και των τριών μελών της (1) τα παίρνουμε στο 0^-.

9) Λάθος παρανόησης
Στο θεώρημα: Αν $f(x) \ge g(x)$ κοντά στο L ($L = x_0 \in \mathbb{R}$, ή $L = +\infty$ ή $L = -\infty$) και υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια των f και g, τότε: $\lim\limits_{x\to L} f(x) \ge \lim\limits_{x\to L} g(x)$

γίνεται μια παρανόηση: Κάποιοι μαθητές θεωρούν ότι η παραπάνω πρόταση αναλύεται στις εξής δύο προτάσεις:

- **Αν $f(x) > g(x)$ τότε: $\lim\limits_{x\to L} f(x) > \lim\limits_{x\to L} g(x)$ και**
- **Αν $f(x) = g(x)$ τότε: $\lim\limits_{x\to L} f(x) = \lim\limits_{x\to L} g(x)$**

Δεν είναι όμως έτσι.

Είναι φανερό ότι αν $f(x) = g(x)$ τότε: $\lim\limits_{x\to L} f(x) = \lim\limits_{x\to L} g(x)$

Όμως αν $f(x) > g(x)$ τότε: $\lim\limits_{x\to L} f(x) \ge \lim\limits_{x\to L} g(x)$, δηλαδή για τα όρια μπορεί να ισχύει το = και όχι το > .
Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει την αλήθεια των παραπάνω.

Για τις συναρτήσεις $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$f(x) - g(x) = x^2 - x^4 = x^2(1 - x^2) = x^2(1 - x)(1 + x) > 0$ για κάθε $x \in (-1,0) \cup (0,1)$

δηλαδή κοντά στο 0. Όμως $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$

10) Ορισμός συνέχειας μόνο σε διάστημα
Η συνέχεια μιας συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}$ ορίστηκε στο σχολικό βιβλίο ως εξής:

- **Η f λέγεται συνεχής στο σημείο $x_0 \in A$ αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$**
- **Η f λέγεται συνεχής στο ανοιχτό διάστημα (α,β), αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β)**
- **Η f λέγεται συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, αν η f είναι συνεχής στο ανοιχτό διάστημα (α,β) και επιπλέον $\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$**
- **Η f λέγεται συνεχής διάστημα $[\alpha,\beta)$, αν η f είναι συνεχής στο ανοιχτό διάστημα (α,β) και επιπλέον $\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$**
- **Η f λέγεται συνεχής στο διάστημα $(\alpha,\beta]$, αν η f είναι συνεχής στο ανοιχτό διάστημα (α,β) και επιπλέον $\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$**
- **Η f λέγεται συνεχής, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του Α.**

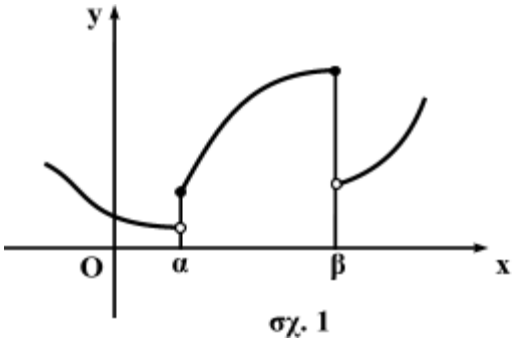
Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, δε νοείται συνέχεια της f σε σύνολο που δεν είναι διάστημα, π.χ στο $(\alpha,\beta) \cup (\beta,\gamma)$ πράγμα που βλέπουμε συχνά εξαιτίας παλαιότερων ορισμών που δεν ταυτίζονται με αυτόν του τωρινού σχολικού βιβλίου.

Συνηθισμένο λάθος είναι να βλέπουμε την έκφραση: Η f είναι συνεχής στο $(\alpha,\beta) \cup (\beta,\gamma)$ ως…
Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο β.

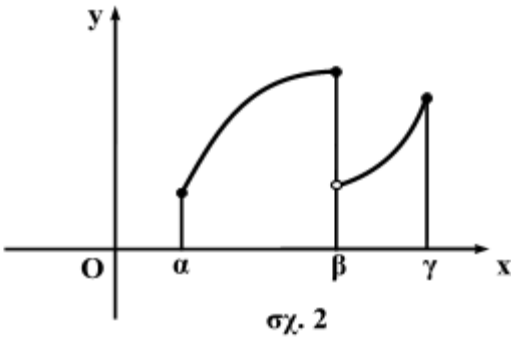
Οι ορισμοί όπως δόθηκαν οδηγούν μερικές φορές σε συμπεράσματα που δεν ακούγονται σωστά, δεν έχουν όμως κανένα λάθος. Τα παρακάτω σχήματα επεξηγούν τις περιπτώσεις αυτές.

Στο παρακάτω σχήμα 1, η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, όμως δεν είναι συνεχής ούτε στο α, ούτε στο β.

Στο σχήμα 2, η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\Delta_1 = [\alpha,\beta]$ και $\Delta_2 = (\beta,\gamma]$, δεν είναι όμως συνεχής στο διάστημα $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 = [\alpha,\gamma]$



σχ. 1



σχ. 2

Π.χ η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{αν } x\in[0,2] \\ 3x & \text{αν } x\in(2,3] \end{cases}$ αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι συνεχής στα $[0,2]$ και $(2,3]$, δεν είναι συνεχής όμως στο σημείο $x_0=2$, αφού $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=4$ ενώ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=6$, δηλαδή είναι $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

11) Λάθος παρανόησης θεωρήματος

Η εικόνα ενός κλειστού διαστήματος μέσω μιας συνεχούς μη σταθερής συνάρτησης είναι κλειστό διάστημα.

Ένα λάθος είναι να θεωρεί κάποιος ότι η εικόνα ενός ανοιχτού διαστήματος μέσω μιας συνεχούς μη σταθερής συνάρτησης είναι ανοιχτό διάστημα. Αυτό δεν είναι πάντοτε αληθές.

Π.χ για τη συνάρτηση: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ αποδεικνύεται ότι το σύνολο τιμών της, δηλαδή η εικόνα του ανοιχτού διαστήματος $(-\infty,+\infty)$ είναι το κλειστό διάστημα $[-1,1]$.

12) Πεδίο ορισμού της (g∘f)′

Είναι γνωστό ότι αν η $f:A\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η $g:B\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεση $g\circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$

(και αυτή η ιδιότητα βέβαια με την εξαίρεση που αναφέραμε νωρίτερα, εφόσον δηλ. το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ είναι κατάλληλο)

Τι γίνεται όμως αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ή η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$;

Στο σχολικό βιβλίο δεν αναφέρεται κάτι σχετικό. Συνηθισμένο λάθος είναι να νομίζεται ότι αν δεν ισχύουν οι παραπάνω προϋποθέσεις, τότε η $g\circ f$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Αυτό που ισχύει είναι ότι:

Η σύνθεση $g\circ f$ μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και αν ακόμη δεν ισχύει καμία από τις παραπάνω προϋποθέσεις. Μπορεί φυσικά και να μην είναι.

Βλέπε 4 παραδείγματα στο [2]

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν η $g\circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, δεν ισχύουν όμως οι παραπάνω προϋποθέσεις, δεν μπορούμε να γράψουμε $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$ αφού δεν ορίζεται κάποιος όρος του 2ο μέλους.

Αντίστοιχα λάθη γίνονται και όταν δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις στα θεωρήματα Bolzano, Rolle και Μέσης Τιμής.

13) Παραγώγιση πράξεων συναρτήσεων

Είναι γνωστές οι προτάσεις:

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και οι συναρτήσεις $f+g,\ f-g,\ f\cdot g$ κ.λ.π είναι παραγωγίσιμες στο x_0 (αν και αυτό δεν ισχύει ακριβώς έτσι όπως αναγράφεται στο σχολικό βιβλίο. Βλ. [2]).

Αντίστοιχα με τα όρια (καθόσον και η παράγωγος όριο είναι):

Αν μια ή και οι δύο συναρτήσεις f και g δεν είναι παραγωγίσιμες σε κάποιο σημείο x_0, αυτό δε σημαίνει ότι κάθε συνάρτηση που περιέχει την f ή την g ή και τις δύο δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Δίνουμε δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 1ο

Στο παράδειγμα αυτό ούτε η f και g ούτε η g είναι παραγωγίσιμες στο 0, η $f+g$ όμως είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Επομένως και η συνάρτηση $g(x)=x-\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Διότι αν ήταν η g παραγωγίσιμη στο 0, τότε η συνάρτηση $\sqrt{x}=x-g(x)$ θα ήταν παραγωγίσιμη στο 0, πράγμα άτοπο.

Ενώ λοιπόν οι συναρτήσεις f και g δεν είναι παραγωγίσιμες στο 0, η συνάρτηση $(f+g)(x)=x$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Παράδειγμα 2ο

Στο παράδειγμα αυτό η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 όμως η $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Η συνάρτηση $g(x)=\eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Το γινόμενό τους $h(x)=\sqrt{x}\,\eta\mu x$ είναι συνάρτηση παραγωγίσιμη στο 0.

Πράγματι:

$$\lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x}\,\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\sqrt{x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=0\cdot1=0=h'(0)$$

14) Παραγώγιση εξίσωσης.

Η παράγωγος της f στο x_0 ως όριο της συνάρτησης $\lambda(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ όταν $x\to x_0$ για να ορίζεται πρέπει, η $\lambda(x)$, άρα και η $f(x)$ να ορίζεται και στο x_0 και κοντά στο x_0, δηλαδή σε ένα τουλάχιστον διάστημα της μορφής (α,x_0) ή (x_0,β).

Κατά τη μελέτη εξισώσεων, γίνεται το **σοβαρό λάθος να παραγωγίζονται τα δύο μέλη**.

Δίνονται π.χ κάποιες συναρτήσεις f και g (μπορεί να δοθούν οι τύποι τους ή κάποιες ιδιότητές τους) και ζητείται να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μια ρίζα στο διάστημα (α,β).
Στην περίπτωση αυτή, η σχέση $f(x)=g(x)$ αληθεύει για κάποιες μόνο τιμές του x που δεν αποτελούν διάστημα**. Έτσι η παραγώγιση $f'(x)=g'(x)$ δεν έχει νόημα.**

15) Παραγώγιση συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$

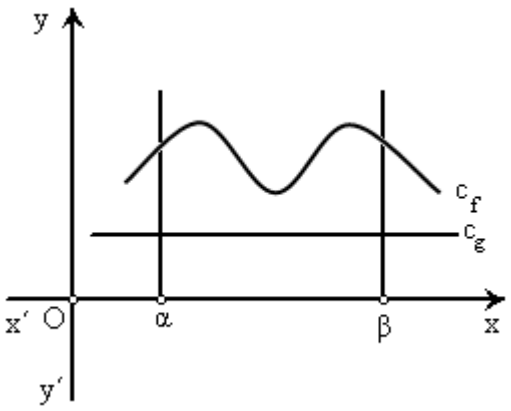
<u>Παράδειγμα</u> (άσκηση σχολικού βιβλίου)
Ένα πρακτορείο ταξιδιών διοργανώνει μια εκδρομή. Αν στην εκδρομή συμμετάσχουν 100 άτομα, καθένα θα πληρώσει 1000 €. Για κάθε επιπλέον άτομο, η τιμή μειώνεται κατά 5 €. Πόσα άτομα επιπλέον πρέπει να συμμετάσχουν ώστε το πρακτορείο να έχει τα περισσότερα έσοδα;

<u>Λύση</u>
Αν x είναι ο αριθμός των επιπλέον ατόμων, θα συμμετάσχουν $100+x$ άτομα και καθένα θα πληρώσει $(1000\text{-}5x)$ €. Επομένως τα συνολικά έσοδα του πρακτορείου θα είναι
$E(x) = (100 + x)(1000 - 5x) = -5x^2 + 500x + 100\,000$
Πρέπει να βρούμε το μέγιστο της συνάρτησης
$E: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $E(x) = -5x^2 + 500x + 100\,000$
Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι η παραγώγιση της E(x) **δεν έχει νόημα**, αφού η συνάρτηση E ορίζεται μόνο στο $\mathbb{N}$.

Αναλυτική λύση και παρατηρήσεις του προβλήματος δίνεται στο [2]

16) Παραγώγιση ανισοτήτων

Οι ανισότητες δεν μπορούν να παραγωγιστούν.
Αν δηλαδή για τις συναρτήσεις f και g ισχύει π.χ η σχέση $f(x) > g(x)$, δεν προκύπτει καμία διάταξη για τις $f'(x)$ και $g'(x)$



Στο διπλανό σχήμα, είναι $f(x) > g(x)$ για

κάθε $x \in \Delta = [\alpha, \beta]$

Επίσης $g'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$ (αφού η g είναι σταθερή), ενώ για την f' αλλού ισχύει $f'(x) > 0$, αλλού $f'(x) < 0$ και αλλού $f'(x) = 0$

17) Ιδιότητες σε διάστημα

Οι περισσότερες ιδιότητες των παραγώγων (όπως και της συνέχειας) ισχύουν σε διάστημα.

Παραθέτουμε δύο προτάσεις (η $2^{η}$ είναι συνέπεια της $1^{ης}$).

Πρόταση 1

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη στο Δ_0 με

$f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta_0$ τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

Πρόταση 2

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο Δ και ισχύει $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \Delta_0$ τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f = g + c$ δηλαδή $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.

Χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στη χρήση των παραπάνω θεωρημάτων.

Αν π.χ $f'(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ δεν προκύπτει ότι $f(x) = c \ \forall x \in \mathbb{R}^*$, αλλά

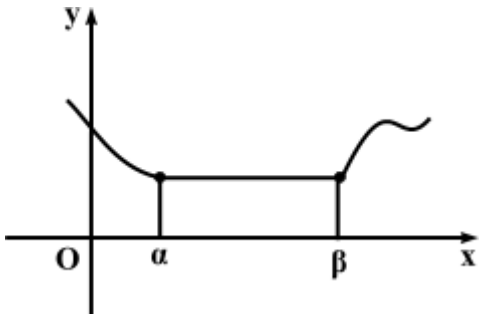
$$f(x) = \begin{cases} c_1 \ \text{αν} \ x \in (-\infty, 0) \\ c_2 \ \text{αν} \ x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Δείτε σχετικό παράδειγμα στο [2]

Στο αντίστροφο του θεωρήματος αυτού μπορεί επίσης να γίνει το εξής σοβαρό λάθος:

Αν η συνάρτηση f είναι σταθερή στο διάστημα Δ, τότε $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$

Η παραπάνω πρόταση είναι αληθής μόνο αν το Δ είναι ανοιχτό. Έτσι στο διπλανό σχήμα, ενώ η συνάρτηση f είναι σταθερή στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, στα σημεία α και β δεν είναι παραγωγίσιμη.



18) Καμπυλότητα – Σημεία καμπής

Οι ορισμοί του σχολικού βιβλίου για την καμπυλότητα είναι οι εξής:

Α) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο Δ_0

Λέμε ότι

- **Η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γν. αύξουσα στο Δ_0.**

- **Η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ, αν η f' είναι γν. φθίνουσα στο Δ_0.**

Β) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως το σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Αν

- **η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0,β) ή αντίστροφα**
- **η c_f έχει εφαπτομένη στο x_0**

τότε το σημείο $(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής της c_f .

Σύμφωνα με τους ορισμούς αυτούς:

α) Η καμπυλότητα μιας συνάρτησης ορίστηκε μόνο σε διάστημα και όχι σε οποιοδήποτε σύνολο. Π.χ δεν μπορούμε να μιλάμε για καμπυλότητα στο σύνολο $(1,2)\cup(2,3)$.

β) Για να είναι το x_0 σημείο καμπής, πρέπει στο x_0 να υπάρχει εφαπτομένη. Εδώ υπάρχει μια σύγχυση.

Επειδή η κατακόρυφη εφαπτομένη είναι εκτός διδακτέας ύλης, για τους μαθητές οι εκφράσεις **"η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0"** και **"η c_f έχει εφαπτομένη στο x_0"** είναι ισοδύναμες. Έτσι, το ότι η f δεν είναι απαραίτητα παραγωγίσιμη στο x_0, η c_f όμως έχει εφαπτομένη στο x_0 φαίνονται αντιφατικά. Όμως ο ορισμός εδώ θέλει να συμπεριλάβει και την περίπτωση της κατακόρυφης εφαπτομένης και για τον λόγο αυτό δεν απαιτεί η f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Δηλαδή αντίφαση δεν υπάρχει.

γ) Για να είναι το x_0 σημείο καμπής, ο ορισμός απαιτεί η c_f να είναι κυρτή σε διάστημα (α, x_0) και κοίλη σε διάστημα (x_0,β) ή αντίστροφα. Προς τούτο αρκεί $f''(x)>0$ στο (α, x_0) και $f''(x)<0$ στο (x_0,β) ή αντίστροφα. Επομένως δεν αρκεί η f'' να είναι θετική σε κάποιο σημείο του (α, x_0) και αρνητική σε κάποιο σημείο του (x_0,β).

Η παρανόηση αυτή οδήγησε στο λάθος θέμα των Πανελλαδικών του 2003[2]

[2] Για όλες τις λεπτομέρειες του θέματος, βλέπε άρθρο μας

δ) Για να είναι το σημείο x_0 σημείο καμπής δεν είναι απαραίτητο η f να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Αρκεί στο x_0 η c_f να δέχεται εφαπτομένη. Αυτό συμβαίνει όταν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ή ακόμη και όταν δεν είναι, επειδή το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ ή $-\infty$ οπότε δέχεται κατακόρυφη εφαπτομένη.

ε) Αντίθετα με τη μονοτονία κατά την οποία αν η συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα στα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$ τότε η f είναι γν. αύξουσα και στην ένωση $(\alpha, x_0]\cup[x_0, \beta)=(\alpha, \beta)$, για την καμπυλότητα δεν ισχύει η αντίστοιχη πρόταση. Δηλαδή:

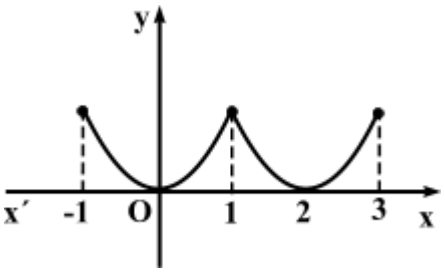
Αν η f στρέφει τα κοίλα πάνω στα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$, δεν προκύπτει συμπέρασμα για την καμπυλότητα στην ένωση $(\alpha, x_0]\cup[x_0, \beta)=(\alpha, \beta)$

Αυτό προκύπτει εύκολα με τη βοήθεια ενός διαγράμματος στο οποίο καταφαίνεται η αλήθεια της πρότασης. Από το ίδιο το διάγραμμα κατασκευάσαμε και την αντίστοιχη συνάρτηση που στρέφει τα κοίλα πάνω σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,1]$ και $[1,3]$, ενώ δε στρέφει τα κοίλα πάνω στην ένωση $[-1,1]\cup[1,3]=[-1,3]$.

Η συνάρτηση f ορίζεται ως εξής: $\mathbf{f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{αν } -1\le x\le 1\\ (x-2)^2, & \text{αν } 1<x\le 3\end{cases}}$

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

Είναι: $f'(x)=\begin{cases}2x, & \text{αν } -1\le x<1\\ 2(x-2), & \text{αν } 1<x\le 3\end{cases}$



Η f' είναι γν. αύξουσα στα $(-1,1)$ και $(1,3)$, άρα η f στρέφει τα κοίλα πάνω σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,1]$ και $[1,3]$, όμως η f δε στρέφει τα κοίλα πάνω στην ένωση $[-1,1]\cup[1,3]=[-1,3]$, αφού η f' δεν είναι γν. αύξουσα στο $(-1,3)$.

Πράγματι, $f'(\frac{1}{2})=1$ και $f'(\frac{3}{2})=-1$, δηλαδή $f'(\frac{1}{2})>f'(\frac{3}{2})$

α) Στο περιοδικό ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ της Ε.Μ.Ε Ημαθίας, τεύχος 2, σελ. 119-123
β) Εφημερίδα ΛΑΟΣ της Ημαθίας της 30-5-2003 στη διεύθυνση www.laosver.gr
γ) Εκπαιδευτική ιστοσελίδα www.teach.gr

19) Κανόνας του De l' Hospital

Σύμφωνα με αυτόν (αντιγράφουμε τον κανόνα από το σχολικό βιβλίο):

Θεώρημα 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0\in R\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Θεώρημα 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0\in R\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Παρατηρήσεις

α) Το θεώρημα ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty},\frac{-\infty}{+\infty},\frac{-\infty}{-\infty}$

β) Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

Κατά την εφαρμογή του κανόνα De l' Hospital γίνονται πολλά λάθη και που οφείλονται κυρίως στη μη ύπαρξη των προϋποθέσεων.

Για τη σωστή εφαρμογή πρέπει να γνωρίζουμε ότι:

α) Για να ορίζεται το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ πρέπει οι f' και g' να ορίζονται σε μια περιοχή του x_0 και δεν αρκεί να ορίζονται στο x_0.

β) Πρέπει να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Αναφέρουμε σχετικά το

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίζεται στο $x_0\in\Delta$. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=f(x_0)-x_0f'(x_0)$

(4η ΔΕΣΜΗ 1991)

Το λάθος που μπορεί να γίνει εδώ, είναι να γίνει εφαρμογή του κανόνα De l' Hospital ενώ για τη συνάρτηση f δόθηκε ότι παραγωγίζεται μόνο στο x_0 και δεν είναι γνωστό αν παραγωγίζεται σε περιοχή του x_0 (για να έχει νόημα το $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$, η f' πρέπει να ορίζεται σε περιοχή του x_0).

Η λύση λοιπόν δεν μπορεί να γίνει με τον κανόνα De l' Hospital και πρέπει να γίνει ως εξής:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x_0)+x_0f(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{(x-x_0)f(x_0)}{x-x_0}-x_0\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]=f(x_0)-x_0f'(x_0)$$

Αν εφαρμοστεί ο κανόνας De l' Hospital θα δώσει το ίδιο αποτέλεσμα, αφού η άγνωστη συνάρτηση f θα μπορούσε να είναι παραγωγίσιμη σε περιοχή του x_0 και όχι μόνο στο x_0. Όμως κάτι τέτοιο δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατά τη λύση.

Κατά την εφαρμογή του κανόνα De l' Hospital γίνονται δύο σημαντικά λάθη όπως φαίνεται στη λύση που ακολουθεί:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(xf(x_0)-x_0f(x)\right)'}{\left(x-x_0\right)'}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)-x_0f'(x)}{1}=x_0-x_0f'(x_0)$$

Το $1^{ο}$ λάθος είναι ότι θεωρούμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη όχι μόνο στο x_0, αλλά και σε περιοχή του x_0 ώστε να μπορούμε να γράψουμε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x_0)-x_0f'(x)}{1}$.

Το $2^{ο}$ λάθος είναι να θεωρούμε ότι η f' είναι συνεχής στο x_0 ώστε να γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x_0)-x_0f'(x)}{1}=x_0-x_0f'(x_0)$

<u>Μια άλλη σημαντική παρατήρηση στην εφαρμογή του κανόνα του De l' Hospital</u>

Για να εφαρμοστεί ο κανόνας του De l' Hospital, πρέπει να υπάρχει το όριο του πηλίκου των παραγώγων. Ο κανόνας λέει ότι:

<u>εφόσον υπάρχει το</u> $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\alpha\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}}$**, τότε υπάρχει και το** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha}$

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, **είναι δυνατό να υπάρχει το** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}}$ όπως δείχνουμε στο παρακάτω παράδειγμα.

Να βρεθεί το $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\eta\mu x}{2x+\sigma\upsilon\nu x}}$

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι και το όριο του αριθμητή και το όριο του παρονομαστή είναι $+\infty$

Πράγματι, για κάθε $x \neq 0$, είναι:

$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = |\eta\mu x| \cdot \left|\frac{1}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right| \Rightarrow -\left|\frac{1}{x}\right| \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \left|\frac{1}{x}\right|$ και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\left|\frac{1}{x}\right|) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{x}\right| = 0$,

προκύπτει ότι είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$

Επομένως: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\eta\mu x) = \lim\limits_{x\to+\infty}[x(1-\frac{\eta\mu x}{x})] = (+\infty)\cdot 1 = +\infty$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+\sigma\upsilon\nu x) = +\infty$, δηλαδή ισχύει η πρώτη προϋπόθεση του κανόνα De l' Hospital. Όμως ο κανόνας De l' Hospital δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Για να εφαρμοστεί ο κανόνας πρέπει να υπάρχει το

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-\eta\mu x)'}{(2x+\sigma\upsilon\nu x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{2-\eta\mu x}$

Όμως το όριο αυτό δεν υπάρχει, όπως αποδεικνύουμε αμέσως:

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x) = \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{2-\eta\mu x}$ και τις ακολουθίες: $x_\nu = 2\nu\pi \to +\infty$ και

$x_\nu' = 2\nu\pi + \frac{\pi}{2} \to +\infty$

Οι αντίστοιχες ακολουθίες τιμών της συνάρτησης είναι:

$f(x_\nu) = \frac{1-\sigma\upsilon\nu(2\nu\pi)}{2-\eta\mu(2\nu\pi)} = 0 \to 0$ και $f(x_\nu') = \frac{1-\sigma\upsilon\nu(2\nu\pi+\frac{\pi}{2})}{2-\eta\mu(2\nu\pi+\frac{\pi}{2})} = 1 \to 1$

Επειδή οι ακολουθίες $f(x_\nu)$ και $f(x_\nu')$ έχουν διαφορετικά όρια, δεν υπάρχει το

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{2-\eta\mu x}$

Έτσι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα De l' Hospital.

Παρόλα αυτά το όριο υπάρχει και μπορεί να βρεθεί χωρίς τον κανόνα De l' Hospital ως εξής:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\eta\mu x}{2x+\sigma\upsilon\nu x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(1-\frac{\eta\mu x}{x})}{x(2+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x})} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{\eta\mu x}{x}}{2+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}} = \frac{1}{2}$ διότι όπως βρήκαμε πριν είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$ και για τον ίδιο λόγο είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΕΙΣΗΓΗΣΕΙΣ ΜΟΥ ΑΠΟ ΤΙΣ ΟΠΟΙΕΣ ΑΝΤΛΗΘΗΚΕ ΤΟ ΥΛΙΚΟ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΕΙΣΗΓΗΣΗΣ:

1. Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου. Σημεία που χρειάζονται ιδιαίτερη προσοχή

2. Παράγωγοι. Σημεία που χρειάζονται ιδιαίτερη προσοχή

3. Ανάλυση Γ΄ Λυκείου. Συνηθισμένα και ασυνήθιστα λάθη

4. Ανάλυση Γ΄ Λυκείου. Επισημάνσεις και διευκρινίσεις με αφορμή θέματα Πανελλαδικών εξετάσεων

5. Σημεία διαφωνιών

6. Η σωστή χρήση των συμβόλων $\Rightarrow$ και $\Leftrightarrow$

7. Ολοκληρώματα. Α΄ μέρος

8. Ολοκληρώματα. Β΄ μέρος