ΣΗΜΕΙΑ ΔΙΑΦΩΝΙΩΝ

Νίκος Ιωσηφίδης, Μαθηματικός – Φροντιστής, Βέροια

e-mail: iossifid@yahoo.gr

Το άρθρο αυτό παρουσιάστηκε για 1η φορά κατά τη διάρκεια της Μαθηματικής εβδομάδας της Θεσ/νίκης στις 5-3-2011. Δημοσιεύθηκε επίσης (ένα τμήμα του) στο περιοδικό ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ του Παραρτήματος της ΕΜΕ Ημαθίας (Οκτ 2012, τεύχος 6, σελ. 43-55).

Εισαγωγή

Στο άρθρο αυτό περιλαμβάνονται έννοιες που δεν έχουν καθοριστεί επακριβώς με αποτέλεσμα τις διαφωνίες μεταξύ των μελών της Μαθηματικής Κοινότητας και τη σύγχυση, πράγμα που μετά την αξιωματική θεμελίωση όλων των κλάδων των Μαθηματικών θεωρείται ανεπίτρεπτο.
Η επίλυση των διαφωνιών αυτών είναι επιτακτική επειδή οι διαφωνίες αυτές επηρεάζουν άμεσα τις βαθμολογίες των γραπτών στις Πανελλαδικές εξετάσεις.
Θα προσπαθήσουμε εδώ να διευκρινίσουμε μερικά από τα σημεία των διαφωνιών και να κάνουμε τις προσωπικές μας τοποθετήσεις.

Τα σημεία που επιλέξαμε είναι

- Το λάθος πρόβλημα
- Ερωτήματα τύπου Σωστό - Λάθος
- Επαλήθευση
- Μη ορισμένες έννοιες

1) Λάθος πρόβλημα

Με τον όρο **“λάθος πρόβλημα”** εννοούμε ένα πρόβλημα του οποίου τα δεδομένα δεν είναι συμβιβαστά.

Π. χ το πρόβλημα:

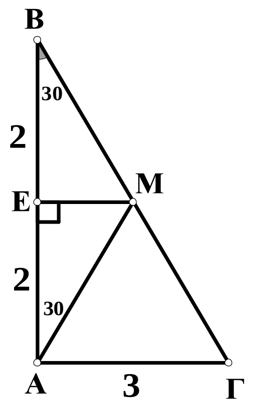
Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^o$, δίνονται $\alpha = 6$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$. Να βρεθεί το μήκος της διάμεσου ΑΜ.

είναι λάθος επειδή σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^o$, $\beta = 3$ και $\gamma = 4$ είναι υποχρεωτικά $\alpha = 5$, δηλαδή τα δεδομένα του προβλήματος είναι ασυμβίβαστα.

Σε ένα τέτοιο πρόβλημα δεν έχει νόημα να ζητηθεί η διάμεσος ΑΜ, αφού τέτοιο τρίγωνο δεν υπάρχει. Αν η διάμεσος υπολογιστεί από τη σχέση

$\mu_\alpha = \dfrac{\alpha}{2}$ προκύπτει $\alpha = 3$, ενώ αν υπολογιστεί από το 1^o θεώρημα των διαμέσων:

$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \dfrac{\alpha^2}{2}$, προκύπτει $\mu_\alpha = \sqrt{\dfrac{7}{2}}$



Μια άλλη λύση που οδηγεί σε διαφορετικό αποτέλεσμα είναι η εξής:

Επειδή $A\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2}$, θα είναι $\widehat{B} = 30^o$, άρα $\widehat{\Gamma} = 60^0$ και επειδή η διάμεσος $AM = \dfrac{B\Gamma}{2}$, το τρίγωνο ΑΓΜ είναι ισόπλευρο, άρα $\widehat{MA\Gamma} = 60^o \Rightarrow \widehat{MAB} = 30^o$, άρα το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές.

Φέρνουμε το ύψος ΜΕ του τριγώνου αυτού που είναι και διάμεσος, άρα $AE = 2$

Από το ορθογώνιο ΑΜΕ έχουμε $AM = \dfrac{AE}{\sigma\upsilon\nu 30^o} = \dfrac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

Μπορούμε να κάνουμε και άλλες λύσεις και να βρίσκουμε διαφορετικά αποτελέσματα κάθε φορά.

Σε ένα λάθος πρόβλημα μπορούμε γενικότερα από τα ίδια ασυμβίβαστα δεδομένα, με σωστή εφαρμογή θεωρημάτων, να καταλήξουμε σε αντιφατικά συμπεράσματα. Και μετά, από μια λάθος ισότητα να καταλήξουμε σε μια οποιαδήποτε άλλη λάθος ισότητα.

Δείχνουμε πως από μια λάθος ισότητα $\alpha = \beta$ καταλήγουμε στην οποιαδήποτε ισότητα $\gamma = \delta$

$\alpha=\beta \Rightarrow \alpha-\beta=0$ και απλοποιώντας δια $\alpha-\beta\neq 0 \Rightarrow 1=0$ και πολλαπλασιάζοντας επί $\gamma-\delta$ προκύπτει $\gamma-\delta=0 \Rightarrow \gamma=\delta$

Για να γίνει κατανοητό ότι σε ένα λάθος πρόβλημα δεν έχει νόημα καμία απόδειξη, ρωτούμε:

Αν στο παραπάνω πρόβλημα, αντί να μας ζητηθεί η διάμεσος ΑΜ ζητούνταν να αποδειχθεί ότι η διάμεσος είναι ίση με 3 και κάποιος μαθητής με εφαρμογή του $1^{ου}$ θεωρήματος των διαμέσων αποδείκνυε ότι η διάμεσος είναι ίση με $\sqrt{\frac{7}{2}}$, ποια θα ήταν η άποψη του εξεταστή για την απόδειξη;

<u>**Συμπερασματικά**</u>:
Σε ένα λάθος πρόβλημα δεν έχει νόημα να ζητείται να υπολογίσουμε κάποιο στοιχείο ή να αποδείξουμε κάτι. Αυτό είναι χωρίς νόημα.

Η άποψη ότι δεν ενδιαφέρει το αν τα δεδομένα του προβλήματος είναι συμβιβαστά ή όχι, αλλά μόνο αν από τα δεδομένα του προβλήματος μπορούμε με συνεπαγωγές να καταλήξουμε στο ζητούμενο δεν ευσταθεί. Είναι σαν να ζητούμε να βρούμε τι χρώμα έχει το στυλό που βρίσκεται πάνω σ' ένα γραφείο, ενώ δεν υπάρχει κανένα στυλό. Ή σαν να θέλουμε να δικαιολογήσουμε γιατί το ανύπαρκτο στυλό είναι κόκκινο.
Όσοι υποστηρίζουν την παραπάνω άποψη θεωρούν ότι αν τα δεδομένα είναι λάθος, τότε όλες οι συνεπαγωγές είναι σωστές, δηλαδή όταν η p είναι ψευδής, η συνεπαγωγή $p\Rightarrow q$ είναι πάντοτε αληθής, ανεξαρτήτως αν η πρόταση q είναι αληθής ή ψευδής. Όπως και αν το εννοούν, μπερδεύουν τις έννοιες: **"λάθος πρόβλημα"** και **"λάθος απόδειξη".**

Αν δεχθούμε την παραπάνω λογική (δηλαδή την ορθότητα των $\Rightarrow$ όταν η υπόθεση είναι λάθος), δείτε πως θα φαίνονταν μια άλλη λύση του παραπάνω προβλήματος:
$\alpha=6 \Rightarrow \gamma=\beta-\alpha \Rightarrow \gamma=2-10 \Rightarrow \gamma=7 \Rightarrow \mu_\alpha=11$

Πολλές συζητήσεις αυτού του είδους έγιναν με αφορμή θέματα εξετάσεων όπως αυτό των Πανελλαδικών του 1997[1] στο οποίο καταλήγουμε στα αντιφατικά συμπεράσματα $e=2$ και $e=1$[2]

<u>**Πανελλαδικές, $1^η$ ΔΕΣΜΗ, 1997**</u>

Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια,

ώστε, υπάρχει πραγματικός αριθμός α, ώστε να ισχύει:

$\mathbf{g(x+y)=e^y g(x)+e^x g(y)+xy+\alpha}$ **για κάθε** $\mathbf{x,y\in\mathbb{R}}$

Να αποδείξετε ότι:

---
[1] Νικ. Ιωσηφίδης: Εφημερίδα ΛΑΟΣ της Ημαθίας της Παρ 4 Ιουλίου 1997 και [2]
[2] Νικ. Ιωηφίδης: Πρακτικά Μαθηματικής Εβδομάδας 2007, σελ. 126 και 127

i) $\mathbf{g(0) = -\alpha}$

ii) $\mathbf{g'(x) = g(x) + g'(0)e^x + x}$ ***για κάθε*** $\mathbf{x \in \mathbb{R}}$

Για την απόδειξη του (ii) οι υποστηρικτές της άποψης ότι δεν μας ενδιαφέρει αν τα δεδομένα του προβλήματος είναι σωστά, παραγωγίζουν την αρχική σχέση με τους γνωστούς κανόνες παραγώγισης του αθροίσματος, γινομένου κ.λ.π. Πως μπορεί όμως κανείς να παραγωγίσει ανύπαρκτη συνάρτηση με τους κανόνες παραγώγισης των υπαρκτών συναρτήσεων;
Και αν κάποιος υποψήφιος αποδείκνυε ότι e = 2 και σταματούσε την απόδειξη θεωρώντας πως έχει κάνει λάθος, πως θα αξιολογούνταν το γραπτό του;
Ή, αν σε κάποιο ανάλογο πρόβλημα ζητούνταν η τιμή μιας παραμέτρου α και κατόπιν ζητούνταν να αποδειχθεί ότι για την τιμή αυτή του α μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, αν ένας μαθητής εύρισκε διαφορετική τιμή του α από την αναμενόμενη για την οποία η συνάρτηση δεν ήταν παραγωγίσιμη, πως θα κρίνονταν το γραπτό του;

Παρόμοιο ήταν και το λάθος σε θέμα του Μαθηματικού Τμήματος Αθηνών του 1947[3] για το οποίο έγιναν αντίστοιχες συζητήσεις.

Άλλο σχετικό παράδειγμα είναι το παρακάτω:

<u>Πανελλαδικές ΤΕΕ Β΄ κύκλου 2006</u>

Δίνονται 5 παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X: 16, 14, 22, 18, 20+α, όπου $\alpha \in$ R. Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας (CV) είναι 20% και η τυπική απόκλισή τους (s) είναι 4, τότε:

α) Να δείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 20$

β) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α

Το λάθος στο θέμα αυτό έγκειται στο ότι δόθηκαν περισσότερα δεδομένα από όσα απαιτούνταν, με αποτέλεσμα τα δεδομένα αυτά να μην είναι συμβιβαστά, δηλαδή ενώ αρκούσαν 5 δεδομένα, δόθηκαν 6.
Συγκεκριμένα, δόθηκαν οι 4 τιμές 16, 14, 22, 18 της μεταβλητής X, καθώς και τα $CV = 20\%$ και $s = 4$.

Η λύση που αναμένονταν για τα ερωτήματα (α) και (β) είναι η εξής:

$$CV = 20\% \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} = \frac{20}{100} \Leftrightarrow \frac{4}{\bar{x}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \bar{x} = 20$$

Κατόπιν: $\bar{x} = \dfrac{16+14+22+18+(20+\alpha)}{5} \Leftrightarrow 20 = \dfrac{90+\alpha}{5} \Leftrightarrow 100 = 90+\alpha \Leftrightarrow \alpha = 10$

Όμως για $\alpha = 10$, οι 5 τιμές της X είναι: 16, 14, 22, 18 και $20+\alpha = 30$ και δεν έχουν τυπική απόκλιση $s = 4$ όπως δόθηκε στην εκφώνηση, αλλά $\sqrt{32}$.

[3] Γιάννης Θωμαΐδης: Περιοδικό ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ της ΕΜΕ Ημαθίας τεύχος 4, σελ 29-37

Πράγματι, οι τιμές 16, 14, 22, 18, και 30 έχουν $\bar{x} = 20$.

Άρα: $s^2 = \frac{1}{5}[(16-20)^2 + (14-20)^2 + (22-20)^2 + (18-20)^2 + (30-20)^2] =$

$\frac{1}{5}(16+36+4+4+100) = \frac{1}{5} \cdot 160 = 32$

απ' όπου $s = \sqrt{32} \neq 4$

Επομένως το θέμα ήταν λάθος.

Όπως γράψαμε και παραπάνω, το λάθος στο θέμα έγκειται στο γεγονός ότι δόθηκαν περισσότερα δεδομένα από όσα χρειάζονταν και τα οποία δεν ήταν συμβιβαστά, δηλ. δεν συμφωνούσαν μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει πρακτικά, ότι ανάλογα με ποια δεδομένα θα χρησιμοποιούσε ο υποψήφιος για να λύσει το πρόβλημα θα εύρισκε και διαφορετικά αποτελέσματα.

Είναι σίγουρο ότι μέσα στους χιλιάδες υποψηφίους, κάποιοι δεν ακολούθησαν την παραπάνω αναμενόμενη σειρά, με αποτέλεσμα να βρουν διαφορετικά αποτελέσματα. Δείχνουμε πως μπορούσε να γίνει αυτό, δηλαδή δείχνουμε κάποιες διαφορετικές λύσεις που είναι σωστές, οδηγούν όμως σε διαφορετικά αποτελέσματα.

Β΄ Λύση: (Χρησιμοποιώντας τη μέση τιμή που βρήκαμε στο (α) ερώτημα με την αναμενόμενη λύση και την τυπική απόκλιση που δόθηκε)

Από τον τύπο της διακύμανσης:

$s^2 = \frac{1}{\nu}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_\nu - \bar{x})^2]$ με αντικατάσταση των δεδομένων έχουμε:

$16 = \frac{1}{5}(16+36+4+4+\alpha^2) \Leftrightarrow \alpha^2 = 20 \Leftrightarrow \alpha = \pm\sqrt{20}$. Και οι δύο τιμές είναι δεκτές.

Αν τώρα για επαλήθευση υπολογίσουμε τη μέση τιμή, βρίσκουμε:

$\bar{x} = \frac{16+14+22+18+(20 \pm \sqrt{20})}{5} = 18 \pm \frac{\sqrt{20}}{5}$ και όχι $\bar{x} = 20$ όπως χρησιμοποιήθηκε στη λύση και όπως ζητούνταν να αποδειχθεί.

Μια άλλη λύση, που επίσης είναι σωστή είναι η επόμενη:

Γ΄ Λύση: (Χρησιμοποιώντας μόνο τη διακύμανση $s = 4$)

Η μέση τιμή των 5 παρατηρήσεων είναι: $\bar{x} = \frac{16+14+22+18+(20+\alpha)}{5} = 18 + \frac{\alpha}{5}$

Στον τύπο της διακύμανσης: $s^2 = \frac{1}{\nu}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_\nu - \bar{x})^2]$ θέτουμε πάλι

όπου $\nu = 5$, $\bar{x} = 18 + \frac{\alpha}{5}$, $x_1 = 16$, $x_2 = 14$, $x_3 = 22$, $x_4 = 18$, $x_5 = 20 + \alpha$ και $s = 4$.

Έχουμε:

$16 = \frac{1}{5}[(-2 - \frac{\alpha}{5})^2 + (-4 - \frac{\alpha}{5})^2 + (4 - \frac{\alpha}{5})^2 + (-\frac{\alpha}{5})^2 + (2 + \frac{4\alpha}{5})^2]$

Μετά τις πράξεις βρίσκουμε: $\alpha^2 + 5\alpha - 50 = 0$

Από τη λύση της δευτεροβάθμιας αυτής εξίσωσης βρίσκουμε $\alpha = 5$ ή $\alpha = -10$. Και οι δύο τιμές είναι δεκτές.

Για $\alpha = 5$ οι τιμές της μεταβλητής είναι: 16, 14, 22, 18, 25 και η μέση τιμή βρίσκεται ίση με $\bar{x} = \dfrac{16+14+22+18+25}{5} = 19$

Για $\alpha = -10$ οι τιμές της μεταβλητής είναι: 16, 14, 22, 18, 10 και η μέση τιμή βρίσκεται ίση με $\bar{x} = \dfrac{16+14+22+18+10}{5} = 16$

Βλέπουμε ότι ανάλογα με τη λύση που θα έκανε κάποιος μαθητής θα εύρισκε και διαφορετικό αποτέλεσμα. Επομένως τίθεται το ερώτημα πως θα βαθμολογηθούν τα γραπτά. Ακύρωση του θέματος αυτού και βαθμολόγηση των υπολοίπων δεν θα έλυνε το πρόβλημα, αφού κάποιοι εξεταζόμενοι ίσως έχασαν το χρόνο τους στο πρόβλημα αυτό και δεν έλυσαν άλλα προβλήματα, ή κάποιοι δεν ασχολήθηκαν με το πρόβλημα αυτό και ασχολήθηκαν μόνο με τα υπόλοιπα. Επομένως δίκαιη αντιμετώπιση δεν θα μπορούσε να υπάρξει.

Στα λάθος προβλήματα πρέπει να συμπεριλάβουμε και εκείνα στα οποία η αδυναμία απόδειξης συνύπαρξης των δεδομένων δημιουργεί υπόνοιες για ασυμβατότητα.
Η πιο συνηθισμένη περίπτωση είναι οι συναρτησιακές σχέσεις στην ύλη της Γ΄ Λυκείου.
Πολλές ασκήσεις του είδους αυτού υπάρχουν σε σχολικά βοηθήματα. Από σχετική έρευνα που κάναμε βεβαιωθήκαμε ότι σε πολλές ασκήσεις αυτού του είδους οι αναφερόμενες συναρτήσεις δεν υπάρχουν. Σε άλλες πάλι περιπτώσεις όπου δίνεται μια συναρτησιακή σχέση από την οποία η συνάρτηση είναι ορισμένη, δίνονται επιπλέον πληροφορίες οι οποίες όμως πολλές φορές είναι ασύμβατες με τη συναρτησιακή σχέση.

Δίνεται π.χ η συναρτησιακή σχέση:
$\mathbf{f^3(x) + 5f(x) = 2x + 3}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
και δίνεται επιπλέον ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

Εδώ, από τη σχέση που δόθηκε, η f είναι απολύτως καθορισμένη και το δεδομένο ότι η f είναι παραγωγίσιμη μπορεί να αποδειχθεί. Το γεγονός αυτό καθιστά το πρόβλημα μη καλώς ορισμένο.

Σε άλλες πάλι περιπτώσεις, ενώ δίνεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη, μπορεί να αποδειχθεί ότι δεν είναι. Δεν θα δώσουμε συγκεκριμένα παραδείγματα που βρήκαμε σε σχολικά βοηθήματα. Θα αρκεστούμε μόνο να πούμε ότι είναι πολλά. Παράδειγμα όπου δόθηκαν περισσότερα δεδομένα είναι και το θέμα

<u>Πανελλαδικές, Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση, 2002</u>

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$\mathbf{f(x) - e^{-f(x)} = x - 1}$, $\mathbf{x \in \mathbb{R}}$ **και** $\mathbf{f(0) = 0}$.

Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f.

Στο θέμα αυτό, η f είναι ορισμένη από τη σχέση $f(x)-e^{-f(x)} = x-1$και τα δεδομένα ότι η f είναι παραγωγίσιμη και $f(0)=0$ μπορούν να αποδειχθούν, άρα δεν έπρεπε να δοθούν. Με άλλα λόγια το πρόβλημα δεν είναι καλώς ορισμένο.
Μπορείτε να δείτε πλήρη ανάλυσυ του θέματος στην εισήγησή μας [2].

Η άποψη ότι δεν μας ενδιαφέρει αν η συνάρτηση είναι υπαρκτή ή όχι, αλλά μας ενδιαφέρει μόνο αν μπορούμε από τα δεδομένα αυτά να καταλήξουμε με συνεπαγωγές στο ζητούμενο, δεν ευσταθεί επειδή όπως αναφέραμε ήδη, κάθε πράξη που θα κάνουμε για να φθάσουμε στο ζητούμενο είναι χωρίς νόημα αφού εφαρμόζεται σε μη υπαρκτή συνάρτηση.

Σχετικό παράδειγμα είναι το παρακάτω θέμα:

Πανελλαδικές, 1η ΔΕΣΜΗ 1998

Β) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\mathbf{f(f(x))+f^3(x)=2x+3\ ,\ x\in\mathbb{R}}$$

α) Να αποδείξετε ότι …

Υπάρχει άραγε η παραπάνω συνάρτηση f;

Η απόδειξη της ύπαρξης ή μη της παραπάνω συνάρτησης δε φαίνεται καθόλου εύκολη. Τι νόημα θα έχει η οποιαδήποτε απόδειξη αν η παραπάνω συνάρτηση δεν υπάρχει; Και πως θα εφαρμόσουμε σε ανύπαρκτες συναρτήσεις τις ιδιότητες που ισχύουν σε υπαρκτές συναρτήσεις;
Αν σε μια ισότητα πάρουμε όρια στα δύο μέλη ενώ δεν γνωρίζουμε ότι υπάρχουν, αυτό θεωρείται σοβαρό λάθος. Γιατί δεν είναι λάθος να εφαρμόζουμε άλλες ιδιότητες όταν δεν γνωρίζουμε αν οι ιδιότητες αυτές πράγματι ισχύουν;

Παρόμοια θέματα, θέματα δηλαδή που αμφισβητούνται τα δεδομένα του προβλήματος έχουν δοθεί και άλλες φορές στις Πανελλαδικές εξετάσεις[4]

Συμπερασματικά:
Δεν πρέπει να δίνονται προβλήματα με αμφισβητούμενα δεδομένα, επειδή σε τέτοια προβλήματα η κάθε συνεπαγωγή και το κάθε συμπέρασμα μπορεί να είναι χωρίς νόημα.
Για οποιαδήποτε πράξη, πρέπει πρώτα να γνωρίζουμε ότι η πράξη έχει νόημα, εφαρμόζεται δηλαδή σε υπαρκτά δεδομένα.

[4] Βλέπε σχετικά παραδείγματα στο [2]

2) Ερωτήματα τύπου Σωστό – Λάθος (Σ – Λ)

Σε μια μεγάλη κατηγορία ερωτημάτων τύπου Σ – Λ γίνεται λάθος διατύπωση του ερωτήματος με αποτέλεσμα τη σύγχυση και την αβεβαιότητα για την απάντησή του. Ζητείται να χαρακτηριστεί ένα ερώτημα ως Σ ή Λ, αλλά το ερώτημα δεν είναι λογική πρόταση με την έννοια της Μαθηματικής Λογικής, δηλαδή δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως Σ ή Λ επειδή περιέχει στοιχεία ή έννοιες που δεν έχουν οριστεί.
Για ευκολία, θα υιοθετήσουμε εδώ τον όρο **«πρόταση»** για όλες τις εκφράσεις είτε αυτές είναι προτάσεις όπως ορίζονται στη Μαθηματική Λογική είτε όχι, όπως άλλωστε κάνουμε στα μαθηματικά που διδάσκουμε στους μαθητές μας.

Αυτό που δημιουργεί το πρόβλημα, είναι ότι μπερδεύονται οι έννοιες **«δεν ορίζεται»** (ή το ίδιο **«δεν έχει νόημα»**) και **«δεν υπάρχει»**.
Θα επιμείνουμε στα ερωτήματα τύπου Σ – Λ με πολλά παραδείγματα, επειδή αυτά συναντώνται σε όλες τις εξετάσεις (ενδοσχολικές ή Πανελλαδικές). Τα ερωτήματα αυτά δημιουργούν και τα περισσότερα προβλήματα στην απάντησή τους.

Παραδείγματα χαρακτηρισμού προτάσεων ως Σ ή Λ.

α) Για τη συνάρτηση $\mathbf{f:[0,1]\to\mathbb{R}}$ με $\mathbf{f(x)=x^2}$ ισχύει $\mathbf{\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4}$

Η πρόταση αυτή δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ούτε ως Σ ούτε ως Λ επειδή το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ δεν έχει νόημα, αφού ο ορισμός του $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ δίνεται με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση ορίζεται τουλάχιστον από την μια πλευρά του 2, δηλαδή σε διάστημα της μορφής $(\alpha,2)$ ή σε διάστημα της μορφής $(2,\beta)$.

β) Ισχύει: $\mathbf{\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^4-x^2}=0}$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\sqrt{x^4-x^2}$ είναι το $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\cup\{0\}$, δηλαδή η f δεν ορίζεται ούτε δεξιά ούτε αριστερά του 0 και το ερώτημα αυτό είναι επίσης χωρίς νόημα.

Αν τα παραπάνω παραδείγματα δεν πείθουν, αναφέρουμε δύο ακόμη παραδείγματα που **είναι ακριβώς της ίδιας μορφής**, όμως στα παραδείγματα αυτά η ανάγκη ορισμού των αναφερόμενων εννοιών είναι εμφανής:

γ) Ο όγκος κύκλου ακτίνας R είναι ίσος με τον όγκο σφαίρας ακτίνας 2R

δ) Το εμβαδόν του πολυωνύμου $\mathbf{x^2+3x+2}$ είναι ίσο με 10

Εδώ ο καθένας θα ρωτούσε: τι σημαίνει **«όγκος κύκλου»** και τι σημαίνει **«εμβαδόν πολυωνύμου»** και θα χαρακτήριζε τις παραπάνω προτάσεις **«χωρίς νόημα»**, όμως σε ερωτήματα σαν τα (α) και (β) το σύνηθες είναι να θεωρούνται οι προτάσεις λάθος.

Παρόμοιες περιπτώσεις ερωτημάτων χωρίς νόημα, που συναντούμε όμως συχνά, είναι οι παρακάτω:

ε) Χαρακτηρίστε ως Σωστή ή Λάθος την πρόταση: $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$

Η συνηθισμένη απάντηση είναι ότι η πρόταση είναι λάθος, αφού το $1^{ο}$ μέλος ορίζεται και όταν $\alpha<0$ και $\beta<0$, ενώ το $2^{ο}$ μέλος στην περίπτωση αυτή δεν ορίζεται.
Εδώ έχουμε το παράδοξο να θεωρούν κάποιοι ότι η παραπάνω ισότητα είναι λάθος, όμως η ισότητα $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$ είναι σωστή. Με άλλα λόγια ισχυρίζονται ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση ισχύει $x=y$, αλλά δεν ισχύει $y=x$.

Για να μπορέσουμε να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, πρέπει να δοθούν τα σύνολα αναφοράς των α και β. Εδώ όμως τέτοια σύνολα δε δόθηκαν και **το ερώτημα είναι χωρίς νόημα.**

Το ερώτημα θα ήταν σωστό αν διατυπώνονταν με τη μορφή:

Χαρακτηρίστε ως Σωστή ή Λάθος την πρόταση:
$\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ για κάθε $\alpha,\beta\geq 0$

Στο παράδειγμα που εξετάζουμε πρέπει να συμφωνήσουμε ότι αφού τέθηκε το σύμβολο $\sqrt{\alpha}$, αυτό έχει νόημα, δηλαδή αυτόματα πρέπει να δεχτούμε ότι $\alpha\geq 0$ και δεν πρέπει να μας απασχολεί η περίπτωση $\alpha<0$. Όπως, όταν δίνεται ότι $f'(x)>0$, δεν τίθεται το ερώτημα αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αλλά δεχόμαστε αυτόματα ότι είναι, ή όταν γράφουμε το κλάσμα $\dfrac{3}{x-1}$, αυτόματα θεωρείται ότι $x\neq 1$.

Ας το δούμε με άλλη ματιά.

Αφού η άρνηση της πρότασης $\alpha=\beta$ είναι η $(\alpha>\beta$ ή $\alpha<\beta)$, αν θεωρήσουμε ότι η πρόταση $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ είναι λάθος, τότε πρέπει να δεχθούμε ότι μία από τις δύο προτάσεις $\sqrt{\alpha\cdot\beta}>\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ ή $\sqrt{\alpha\cdot\beta}<\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ είναι αληθής. Κάτι τέτοιο όμως, με την ίδια λογική (ότι ίσως δεν ορίζεται κάποια ρίζα) είναι και πάλι λάθος.

Η παρανόηση που γίνεται εδώ είναι η εξής:

Αντί να ρωτούμε αν έχει νόημα το $2^{ο}$ μέλος, ρωτούμε αν ισχύει η ισότητα.

Το ερώτημα θα ήταν σωστό αν έμπαινε με τη μορφή:

Μπορούμε για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ να γράψουμε: $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$;

και τότε φυσικά η απάντηση θα ήταν όχι.

Παρόμοιο ερώτημα είναι και το επόμενο που έχουμε δει πολλές φορές σε ενδοσχολικές εξετάσεις της Β΄ Λυκείου:

ζ) Χαρακτηρίστε ως Σωστή ή Λάθος την ισότητα: $\log(\alpha\cdot\beta)=\log\alpha+\log\beta$

Σύμφωνα με όσα είπαμε, η ισότητα αυτή είναι χωρίς νόημα αν δε δοθούν τα σύνολα αναφοράς των α και β.

Σχετικά παραδείγματα τύπου Σ – Λ είναι και τα παρακάτω που τέθηκαν στις Πανελλαδικές εξετάσεις .

η) <u>Πανελλαδικές 2005, Μαθηματικά Γενικής Παιδείας</u>

Ισχύει: $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Αν δε δοθεί το σύνολο αναφοράς της μεταβλητής x, τότε το ερώτημα δεν μπορεί να απαντηθεί. Η πρόταση θα ήταν σωστή αν ως σύνολο αναφοράς της μεταβλητής x λαμβάνονταν το σύνολο των σημείων για τα οποία $f(x)=0$ ή $g'(x)=0$

θ) <u>Πανελλαδικές 2007, Μαθηματικά Γενικής Παιδείας</u>
Αν f και g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης ισχύει $(f(g(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

Αν δε δοθεί το σύνολο αναφοράς της μεταβλητής x το παραπάνω ερώτημα είναι χωρίς νόημα. Είναι σαν να ρωτούμε: Ισχύει $x^2=9$;

Ανάλογο ερώτημα τύπου Σ – Λ είναι και το παρακάτω:

ι) Αν δύο ευθείες είναι κάθετες, το γινόμενο των συντελεστών διευθύνσεών τους είναι ίσο με -1

Η αναμενόμενη απάντηση είναι πως η πρόταση είναι λάθος με το αιτιολογικό ότι μπορεί να μην ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης κάποιας ευθείας. Όταν όμως στο ερώτημα αναφέρονται και οι δύο συντελεστές διεύθυνσης, αυτό που πρέπει να καταλαβαίνει κάποιος είναι ότι οι συντελεστές διεύθυνσης υπάρχουν, άρα η πρόταση είναι σωστή.

Άλλο παράδειγμα τύπου Σ – Λ που κάνει την παραπάνω λογική μας πιο ισχυρή είναι αυτό των Πανελλαδικών του 2004 για το οποίο δημιουργήθηκαν πολλά ερωτηματικά για τη διόρθωσή του.
Την δική μας άποψη ενισχύει και η παρατήρηση του σχολικού βιβλίου κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου το οποίο στη σελ. 161 γράφει κατά λέξη τα εξής:

Στη συνέχεια, όταν γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$, θα εννοούμε ότι υπάρχει το όριο της f στο x_0 και είναι ίσο με ℓ.

Το ερώτημα λοιπόν ήταν το εξής:

κ) Χαρακτηρίστε την παρακάτω πρόταση ως Σωστή ή Λάθος:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$$

Στο σχολικό βιβλίο υπάρχει η πρόταση αυτή μέσα σε πλαίσιο. Πριν από το πλαίσιο υπάρχει η κατάλληλη προϋπόθεση, ότι δηλαδή η f ορίζεται σε σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Η προϋπόθεση αυτή όμως δεν δόθηκε στους διαγωνιζόμενους.

Η αναμενόμενη απάντηση **μάλλον** ήταν ότι η πρόταση είναι σωστή.

Βλέποντάς το διαφορετικά, ότι δηλαδή η f μπορεί να μην ορίζεται σε σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, αλλά μόνο αριστερά ή δεξιά του x_0 θα έλεγε κανείς ότι η πρόταση είναι λάθος, και αυτή ήταν **ίσως** η επικρατέστερη άποψη των βαθμολογητών.

Δική μας τοποθέτηση είναι ότι η πρόταση είναι σωστή, αφού για να γράψουμε $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ υποχρεωτικά η f ορίζεται και δεξιά και αριστερά του x_0. Δηλαδή δεν έχει νόημα η ισότητα $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ αν η f δεν ορίζεται και δεξιά και αριστερά του x_0.

Η πρόταση θα ήταν λάθος αν έμπαινε με την εξής μορφή:

Μπορούμε πάντοτε να γράψουμε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$

Παρόμοιο παράδειγμα είναι και το παρακάτω:

λ) Να χαρακτηριστεί ως Σωστή ή Λάθος η παρακάτω πρόταση:

Αν $\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = 0$ **τότε** $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$

Εδώ η επικρατούσα άποψη είναι ότι μπορεί να ισχύει η σχέση $\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = 0$, αλλά να μην υπάρχουν τα όρια των f και g στο x_0, άρα η πρόταση είναι Λ.

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε, η παραπάνω πρόταση, αντίθετα με την επικρατούσα άποψη είναι αληθής.

Από τα παραπάνω παραδείγματα καταφαίνεται το αίτιο της παρανόησης. Οι έννοιες που μπερδεύονται είναι: «**Δεν ορίζεται» ή το ίδιο «δεν έχει νόημα»** και «**δεν υπάρχει».**

Το συμπέρασμα είναι ότι όταν μια έννοια δεν ορίζεται δεν έχει νόημα να μιλούμε για Σωστή ή Λάθος πρόταση.

Άλλο παράδειγμα όπου δεν ορίζονται τα εμφανιζόμενα σύμβολα είναι το παρακάτω:

μ) Χαρακτηρίστε ως Σωστή ή Λάθος την πρόταση $\mathbf{4+3i>3+2i}$

Αν η απάντηση (Σ) είναι λάθος (επειδή δεν ορίστηκε ανισότητα μεταξύ μιγαδικών), τότε η σωστή απάντηση πρέπει είναι (Λ), δηλαδή $4+3i \le 3+2i$. Όμως και η απάντηση αυτή δεν είναι σωστή, για τον ίδιο λόγο.

Παρόμοια περίπτωση έχουμε και όταν η υπόθεση είναι λάθος και μας ζητείται να χαρακτηρίσουμε ένα συμπέρασμα υπόθεσης ως Σ ή Λ.

Ένα παράδειγμα αυτού του είδους είναι το εξής:

ν) Χαρακτηρίστε ως Σωστή ή Λάθος την πρόταση:

Αν $\mathbf{x\in\mathbb{R}}$ και $\mathbf{x^2+1<0}$ τότε $\mathbf{x<0}$

Αν υποθέσουμε ότι η πρόταση είναι ψευδής, τότε πρέπει να είναι αληθής η $x \ge 0$.
Όμως για κάθε $x \ge 0$ είναι $x^2+1>0$ που είναι πάλι ψευδής.

Στα νέα βιβλία της Α΄ Λυκείου τα ερωτήματα Σ – Λ διατυπώνονται πλέον με τον τρόπο που αναφέρουμε πιο πάνω, δηλαδή πουθενά δεν χρησιμοποιούνται σύμβολα που δεν ορίζονται και δεν χρησιμοποιούνται ερωτήματα με λάθος υπόθεση.

Π.χ. στο κεφάλαιο των ριζών, σελ. 77 ζητείται να χαρακτηριστούν διάφορες προτάσεις ως (Σ) ή (Λ). Προσέξτε τη διατύπωση:

Άσκηση 22:
Αν $\mathbf{\alpha\cdot\beta\ge 0}$, τότε μπορούμε πάντοτε να γράφουμε: $\mathbf{\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}}$

Άσκηση 26:
Αν $\mathbf{\alpha\ge 0}$, τότε μπορούμε πάντοτε να γράφουμε: $\mathbf{\sqrt[4]{\alpha^2}=\sqrt{\alpha}}$

<u>Συμπερασματικά:</u>
Κάθε σχέση που περιέχει μεταβλητές είναι χωρίς νόημα αν δε δίνεται και το πεδίο ορισμού των μεταβλητών.

Δική μας πρόταση είναι ότι επειδή τα ερωτήματα τύπου Σ – Λ αφενός εμπεριέχουν ερωτηματικά του είδους που αναφέραμε καθιστώντας την απάντησή τους αμφίβολη, αφετέρου με πιθανότητα 50% η απάντηση είναι Σ όταν απαντηθούν τυχαία, τέτοια ερωτήματα πρέπει να εκλείψουν από τις εξετάσεις.

Την άποψή μας αυτή ενισχύουν ερωτήματα Πανελλαδικών εξετάσεων στα οποία οι καλά διαβασμένοι υποψήφιοι απάντησαν λάθος και οι λιγότερο διαβασμένοι απάντησαν σωστά.
Ένα τέτοιο ερώτημα ήταν το επόμενο:

ξ) **<u>Πανελλαδικές 2000, Μαθηματικά Θετικής Κατεύθυνσης</u>**

(Το έτος 2000, η Τεχνολογική Κατεύθυνση διαγωνίστηκε σε διαφορετικά θέματα)

Να χαρακτηριστεί ως Σωστή ή Λάθος η παρακάτω πρόταση:

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.

Η πρόταση αυτή είναι παραπλήσια του θεωρήματος του σχολικού βιβλίου που λέει:

Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε η f είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Η διαφορά των δύο προτάσεων είναι μόνο ένας τόνος στην f.

Η λογική με την οποία δόθηκε το ερώτημα αυτό είναι:

Αφού η πρόταση που δόθηκε σαν ερώτημα δεν είναι ακριβώς ίδια με αυτήν του βιβλίου, η απάντηση είναι πως η πρόταση είναι λάθος.

Από σύμπτωση, η απάντηση είναι πως η πρόταση είναι πράγματι λάθος, όμως αυτό δε θα μπορούσε να το συμπεράνει με κανέναν τρόπο ένας μαθητής, ούτε θα ήταν εύκολο για ένα μαθηματικό. Αντίθετα μάλιστα, ένας καλός ή άριστος μαθητής, μη μπορώντας να αντικρούσει τον ισχυρισμό με κάποιο αντιπαράδειγμα (γιατί θα ήταν αδύνατο να βρει τέτοιο), θα έδινε την απάντηση πως η πρόταση είναι σωστή.

Επισημαίνουμε ότι δεν υπάρχει συγκεκριμένος τρόπος εύρεσης αντιπαραδείγματος που να αποδεικνύει ότι η πρόταση είναι λάθος.
Σχετικό αντιπαράδειγμα και πρόσθετα σχόλια μπορείτε να δείτε στην εισήγησή μας [2].

3) Επαλήθευση

Συχνό θέμα διαφωνιών είναι το αν μετά από τη λύση κάποιου προβλήματος απαιτείται επαλήθευση ή όχι.
Προσωπικά δεν έχω δει πουθενά κάποια σχετική αναφορά, δηλαδή το πότε μια λύση χρειάζεται επαλήθευση και πότε όχι.
Το θέμα έχει γίνει πολύπλοκο επειδή σιωπηρά και **χωρίς καμία μαθηματική αιτιολόγηση** ακολουθείται μια **«πεπατημένη»**.
Για τον λόγο αυτό εκθέτουμε παρακάτω την δική μας άποψη.
Στην εισήγησή μας [4] υπάρχει αρκετό σχετικό υλικό. Θα αρκεστούμε μόνο να πούμε ότι αυτό που κάνει συνήθως αναγκαία την επαλήθευση είναι η χρήση του συμβόλου $\Rightarrow$ αντί του $\Leftrightarrow$

Σαν παράδειγμα αναφέρουμε ένα πρόβλημα σε τρεις διαφορετικές μορφές:

α) Να προσδιοριστεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $\alpha^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Αν ισχύει $\alpha^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αποδείξτε ότι $\alpha = e$

γ) Αν ισχύει $\alpha^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ βρείτε τον α

Λύση του (α)
Η συνήθης λύση είναι να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=\alpha^x - x - 1$ για την οποία ισχύει $f(x) \geq 0 = f(0)$, δηλαδή η f παρουσιάζει στο 0 ολικό, άρα και τοπικό ελάχιστο. Επομένως $f'(0)=0$ από την οποία και προκύπτει $\alpha = e$.
Η επαλήθευση εδώ κρίνεται απαραίτητη επειδή η συνθήκη $f'(0)=0$ **δεν εξασφαλίζει** ότι η f θα έχει στο σημείο 0 ολικό ελάχιστο.
Μετά την παραπάνω λύση δηλαδή πρέπει να αποδείξουμε ότι πράγματι για $\alpha = e$ η f παρουσιάζει στο 0 ολικό ελάχιστό ίσο με 0.

Λύση του (β)
Στην περίπτωση αυτή η λύση είναι η ίδια, όμως για τους περισσότερους συναδέλφους εδώ **δεν χρειάζεται** επαλήθευση.

Η επικρατούσα άποψη είναι ότι:

Αφού **δόθηκε** ότι η παραπάνω σχέση ισχύει, δεν αμφισβητείται η ύπαρξη του α, και αφού βρήκαμε μια μοναδική τιμή για το α, η τιμή αυτή είναι δεκτή. Αν βρίσκαμε δύο ή περισσότερες τιμές, τότε μόνο θα έπρεπε να γίνει επαλήθευση.

Λύση του (γ)
Η λύση του (γ) είναι πάλι η ίδια και η επικρατούσα άποψη είναι ότι δεν χρειάζεται επαλήθευση, αφού δόθηκε ότι η σχέση ισχύει, επομένως η μοναδική τιμή του α που βρήκαμε είναι δεκτή.

Εδώ φτάνουμε σε μια παράλογη λογική. Ότι δηλαδή το αν θα κάνουμε επαλήθευση ή όχι δεν εξαρτιέται από τη διαδικασία της λύσης, αλλά από το αποτέλεσμα που θα βρούμε. Κάτι τέτοιο όμως είναι απαράδεκτο, επειδή (αυτή είναι η δική μας θέση):

Το αποτέλεσμα της λύσης πρέπει να είναι αποδεκτό ή όχι χωρίς καμία αμφιβολία. Η επαλήθευση ενός προβλήματος είναι αναγκαιότητα της διαδικασίας της λύσης και όχι του αποτελέσματος. Αν δηλαδή η λύση που κάνουμε δεν εξασφαλίζει ότι ισχύουν όλες οι υποθέσεις του προβλήματος, τότε η επαλήθευση είναι υποχρεωτική, ενώ αν η λύση εξασφαλίζει ότι θα ισχύουν όλες οι υποθέσεις, δε χρειάζεται επαλήθευση.

Έτσι δεν κάνουμε επαλήθευση όταν λύνουμε εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού, επειδή η διαδικασία της λύσης (απόδειξη του σχετικού τύπου) αποδεικνύει ότι και οι δύο ρίζες που βρίσκουμε επαληθεύουν την εξίσωση. Αντίθετα, σε εξισώσεις με ριζικά, αν υψώσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο θα χρειαστεί **οπωσδήποτε** επαλήθευση, επειδή μετά την ύψωση στο τετράγωνο, η νέα εξίσωση δεν είναι ισοδύναμη με την προηγούμενη (εκτός αν τεθούν οι περιορισμοί για να είναι οι λύσεις δεκτές) (Βλέπε [4]).

Ειδικά για τη (γ) παραλλαγή πρέπει να σημειώσουμε ότι το ενδεχόμενο να μην υπάρχει καμία τιμή του α που να επαληθεύει την $\alpha^x \geq x+1$ είναι πιθανό. Στα μαθηματικά είναι σύνηθες να ζητείται η τιμή μιας μεταβλητής ώστε να ισχύει μια σχέση και τέτοια τιμή να μην υπάρχει. Το πρόβλημα είναι απόλυτα σωστό. Αν π.χ το ερώτημα δίνονταν με τη μορφή:

Αν ισχύει $\alpha^x \le x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ βρείτε τον α,

τότε η διαδικασία θα ήταν η ίδια, αλλά η μοναδική τιμή του α (δηλ. $\alpha = e$) δεν θα ήταν δεκτή.

Για τα προβλήματα του είδους αυτού δεν θα συζητήσουμε εδώ. Με δυο λόγια μόνο θα πούμε ότι είναι παραπλανητικά και δεν πρέπει να τίθενται με τη μορφή αυτή, δηλαδή βρείτε τον α, και η απάντηση να είναι "δεν υπάρχει α".

Η δική μας τοποθέτηση είναι ότι και στη 2η και στην $3^η$ περίπτωση **η επαλήθευση είναι απαραίτητη.**

Δίνουμε δύο σχετικά θέματα που δόθηκαν στις Πανελλαδικές εξετάσεις.
Η επικρατούσα άποψη είναι ότι στο $1^ο$ θέμα (του 2000) δεν χρειάζεται επαλήθευση, ενώ στο θέμα του 2004 η επαλήθευση είναι απαραίτητη. Για να αντικρούσουμε τον ισχυρισμό ότι στο θέμα του 2000 η επαλήθευση δεν είναι απαραίτητη, κατασκευάσαμε το $3^ο$ παράδειγμα.

Πανελλαδικές, Θετική Κατεύθυνση, 2000

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(t) = \frac{\alpha t}{1+\left(\frac{t}{\beta}\right)^2}, \quad t \ge 0$$

όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετριέται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α) Βρείτε τις σταθερές α και β κ.λ.π

Πανελλαδικές, Επαναληπτικές εξετάσεις Ιούλιος 2004

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$ όπου $m \in \mathbb{R}, m > 0$

α) Να βρείτε το m ώστε $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ [5]

Παράδειγμα όμοιο με αυτό του 2000

Το παράδειγμα αυτό που κατασκευάσαμε είναι όμοιο με αυτό των εξετάσεων αλλά η ανάγκη της επαλήθευσης είναι ολοφάνερη.

---

[5] Στο βιβλίο των Χαρ. Στεργίου, Χρ. Νάκη, Ιωαν. Στεργίου ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ, ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ, Εκδόσεις Σαββάλα 2006 άσκ. 5.85 σελ 246 προστίθεται εύστοχα το πρόσθετο ερώτημα: *Είναι η τιμή αυτή του m δεκτή;*

Δίνεται ότι η συνάρτηση f με $f(x)=\alpha x^2+(\alpha^2+\beta)x-\beta$ για $x=2$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο ίσο με 1. Να βρεθούν τα α και β.

Παίρνοντας τις σχέσεις $f(2)=1$ και $f'(2)=0$ καταλήγουμε στο σύστημα

$$\begin{cases} 4\alpha+2\alpha^2+\beta=1 \\ 4\alpha+\alpha^2+\beta=0 \end{cases}$$

από τη λύση του οποίου βρίσκουμε:
$(\alpha=-1 \text{ και } \beta=3)$ ή $(\alpha=1 \text{ και } \beta=-5)$
Από τα δύο αυτά ζεύγη λύσεων μόνο το πρώτο επαληθεύει τις συνθήκες του προβλήματος και είναι δεκτό. Το άλλο ζεύγος $(\alpha=1 \text{ και } \beta=-5)$ δίνει $f(x)=x^2-4x+5$ η οποία για $x=2$ δίνει ελάχιστη (και όχι μέγιστη τιμή) ίση με 1.

Έτσι σε όλα τα παραπάνω θέματα η **επαλήθευση είναι απαραίτητη.**

4) Μη ορισμένες έννοιες

Θα περιοριστούμε εδώ μόνο σε ένα θέμα το οποίο όμως συναντούμε πολύ συχνά σε όλα τα βιβλία.
Είναι οι συναρτήσεις της μορφής $[f(x)]^{g(x)}$ οι οποίες ενώ δεν έχουν οριστεί γίνεται πολύ συχνή χρήση τους στο κεφάλαιο των παραγώγων και ειδικότερα στον κανόνα De l' Hospital.
Η μόνη εκθετική συνάρτηση (δηλαδή συνάρτηση που περιέχει την μεταβλητή στον εκθέτη) που έχει οριστεί στο σχολικό βιβλίο είναι η $f(x)=\alpha^x$ με α σταθερό. Επομένως, σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο δεν υπάρχει η συνάρτηση $f(x)=x^x$.

Για να μιλήσουμε για τη συνάρτηση αυτή. θα πρέπει πρώτα να οριστεί και κατόπιν να τίθεται οποιοδήποτε σχετικό ερώτημα.
Αν δούμε τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$ είναι εύκολο να καταλάβουμε ότι το σύμβολο x^x δεν μπορεί να οριστεί με παρόμοιο τρόπο.

Αν προσπαθήσουμε να ορίσουμε την συνάρτηση αυτή – την πιο απλή του είδους - το πρώτο ερώτημα που θα αντιμετωπίσουμε είναι το ποιο είναι το πεδίο ορισμού της Α. Θα δεχθούμε π.χ ότι $-2\in A$;
Αν δεχτούμε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το μεγαλύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο το σύμβολο x^x έχει νόημα, όπως ορίζεται το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, θα πρέπει $-2\in A$. Αν όμως δεχθούμε αρνητικές τιμές στο πεδίο ορισμού της f, θα προκύψουν μεγάλα προβλήματα στη μελέτη της συνάρτησης.
Θα έλεγε κάποιος ότι στις ασκήσεις που βλέπουμε στα βιβλία δίνεται το πεδίο ορισμού της που είναι το $(0,+\infty)$ και με αυτήν την παραδοχή γράφουμε την f ως $f(x)=e^{x\ln x}$.
Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι σωστό, επειδή πρώτα πρέπει να οριστεί η f και κατόπιν να γραφεί με την παραπάνω μορφή. Όταν δηλαδή συναντήσουμε για 1^{η} φορά το σύμβολο

x^x, το πρώτο πράγμα που θα ρωτήσουμε είναι: **Τι σημαίνει το σύμβολο αυτό;** Δεν μπορούμε να κάνουμε αποδείξεις για ένα σύμβολο που δεν έχει οριστεί.

Επομένως (σύμφωνα πάντοτε με το σχολικό βιβλίο) ασκήσεις και ερωτήματα που περιέχουν συναρτήσεις της μορφής $[f(x)]^{g(x)}$ είναι χωρίς νόημα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

[1] Περιοδικό ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ του Παραρτήματος της Ε.Μ.Ε Ημαθίας

[2] Εισήγησή μας στη ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΒΔΟΜΑΔΑ 2007 της Θεσσαλονίκης με τίτλο: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ. ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΕΥΚΡΙΝΙΣΕΙΣ ΜΕ ΑΦΟΡΜΗ ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

[3] Εισήγησή μας στην ημερίδα του Παραρτήματος της Ε.Μ.Ε Ημαθίας της 29-4-2012 με τίτλο: ΣΥΝΗΘΙΣΜΕΝΑ ΚΑΙ ΑΣΥΝΗΘΙΣΤΑ ΛΑΘΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΤΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

[4] Εισήγησή μας στην ημερίδα του Παραρτήματος Λασιθίου της 19-10-2012 με τίτλο: Η ΣΩΣΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ $\Rightarrow$ ΚΑΙ $\Leftrightarrow$