ΑΝΑΛΥΣΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ολοκληρώματα
Επισημάνσεις - Διευκρινίσεις

Εισήγηση Νικ. Ιωσηφίδη

3η Επιμορφωτική ημερίδα Ε.Μ.Ε ΘΕΣΣΑΛΟΝΚΗΣ
Δευτέρα 7 Δεκ 2015
Θεσσαλονίκη, Κινηματοθέατρο ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ: ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ – ΔΙΕΥΚΡΙΝΙΣΕΙΣ

Νίκος Ιωσηφίδης, Μαθηματικός – Φροντιστής, ΒΕΡΟΙΑ

e-mail: iossifid@yahoo.gr

Αρχική ή παράγουσα συνάρτηση

Ως αρχική ή παράγουσα συνάρτηση μιας συνάρτησης f στο διάστημα Δ ορίζεται κάθε συνάρτηση F παραγωγίσιμη στο Δ με $F'(x) = f(x) \ \ \forall x \in \Delta$

ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΗ:
Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, η αρχική συνάρτηση ορίζεται μόνο σε διάστημα και δεν μπορούμε να πούμε ότι μια αρχική της $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ στο σύνολο $(0,\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2},\pi)$ είναι η $F(x) = \varepsilon\varphi\, x$

Μπορούμε όμως να πούμε ότι η $F(x) = \varepsilon\varphi\, x$ είναι αρχική της $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ σε καθένα από τα διαστήματα $(0,\frac{\pi}{2})$ και $(\frac{\pi}{2},\pi)$.

Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει αρχική στο διάστημα αυτό.

ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΗ:
Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλ. αν δηλαδή μια συνάρτηση f έχει αρχική σε ένα διάστημα τότε η f δεν είναι αναγκαστικά συνεχής.

Υπάρχουν δηλαδή ασυνεχείς συναρτήσεις που έχουν αρχικές.

Ισοδύναμα, η παράγωγος μιας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε συνεχής.
Το ερώτημα αυτό τέθηκε στην Θετική Κατεύθυνση των Πανελλαδικών το 2000
(το έτος 2000, η Τεχνολογική Κατεύθυνση διαγωνίστηκε σε διαφορετικά θέματα)

Β1) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστό ή Λάθος
α)Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.

Η πρόταση αυτή είναι παραπλήσια του θεωρήματος του σχολικού βιβλίου που λέει:

Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε η f είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Η διαφορά των δύο προτάσεων είναι μόνο τόνος στην f.

Η λογική με την οποία δόθηκε το ερώτημα αυτό είναι:

Αφού η πρόταση που δόθηκε σαν ερώτημα δεν είναι ακριβώς ίδια με αυτήν του βιβλίου, η απάντηση είναι πως η πρόταση είναι λάθος.

Από σύμπτωση, η σωστή απάντηση είναι ότι η πρόταση είναι λάθος, όμως αυτό δε θα μπορούσε να το συμπεράνει με κανέναν τρόπο ένας μαθητής, ούτε θα ήταν εύκολο για ένα μαθηματικό. Αντίθετα μάλιστα, ένας καλός ή άριστος μαθητής, μη μπορώντας να αντικρούσει τον ισχυρισμό με κάποιο αντιπαράδειγμα (γιατί θα ήταν αδύνατο να βρει τέτοιο), θα έδινε την απάντηση πως η πρόταση είναι σωστή.

Επισημαίνουμε ότι δεν υπάρχει συγκεκριμένος τρόπος εύρεσης παραδείγματος που να αποδεικνύει ότι η πρόταση είναι λάθος, τα δε παραδείγματα αυτά είναι ελάχιστα. Η παράγωγος μιας συνάρτησης είναι κατά κανόνα συνεχής.

Δίνουμε εδώ ένα αντιπαράδειγμα που αποδεικνύει ότι η πρόταση είναι λάθος.

Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f με

$$\mathbf{f(x)=\begin{cases} x^2 ημ\dfrac{1}{x} & αν\ x\neq 0 \\ 0 & αν\ x=0 \end{cases}}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, όμως η f' δεν είναι συνεχής στο 0.

Πράγματι, για $x\neq 0$ έχουμε:

$λ(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = xημ\dfrac{1}{x}$

Όμως $\left|xημ\dfrac{1}{x}\right| = |x|\left|ημ\dfrac{1}{x}\right| \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq xημ\dfrac{1}{x} \leq |x|$ (1)

Και επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$, από την (1) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0}(xημ\dfrac{1}{x}) = 0$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 0$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η δεν είναι συνεχής στο 0.

Πράγματι, για $x\neq 0$ είναι:

$$f'(x) = (x^2)'ημ\frac{1}{x} + x^2\left(ημ\frac{1}{x}\right)' = 2xημ\frac{1}{x} + x^2συν\frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2}) = 2xημ\frac{1}{x} - συν\frac{1}{x}$$

Άρα η f' ορίζεται στο R με

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\eta\mu\dfrac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x} & \alpha\nu\ x\neq 0 \\ 0 & \alpha\nu\ x=0 \end{cases}$$

Αποδεικνύουμε ότι η f' δεν είναι συνεχής στο 0.

Δίνουμε δύο διαφορετικές αποδείξεις.

1η απόδειξη:
Η απόδειξη αυτή είναι πιο σύντομη, αλλά η αντίστοιχη θεωρία δεν περιλαμβάνεται στο σχολικό βιβλίο.

Στηριζόμαστε στην εξής

Πρόταση
Έστω συνάρτηση f: $A \to R$
Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha$ τότε για κάθε ακολουθία (x_ν) με $x_\nu \in A$ και $\lim x_\nu=x_0$ θα είναι $\lim f(x_\nu)=\alpha$

Επομένως αν για δύο ακολουθίες (x_ν) και (x'_ν) με x_ν και $x'_\nu \in A$ και $\lim x_\nu = \lim x'_\nu = x_0$ ισχύει $\lim f(x_\nu) \neq \lim f(x'_\nu)$, τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Για την ακολουθία $x_\nu = \dfrac{1}{2\nu\pi} \to 0$ η αντίστοιχη ακολουθία τιμών της συνάρτησης f' είναι: $f'(x_\nu)=\dfrac{1}{\nu\pi}\eta\mu(2\nu\pi) - \sigma\upsilon\nu(2\nu\pi) = -1 \to -1$ (2)

ενώ για την ακολουθία $x'_\nu = \dfrac{1}{2\nu\pi+\frac{\pi}{2}} \to 0$, η αντίστοιχη ακολουθία τιμών της f' είναι

$$f'(x'_\nu)=\frac{2}{2\nu\pi+\frac{\pi}{2}}\eta\mu\left(2\nu\pi+\frac{\pi}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(2\nu\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{2\nu\pi+\frac{\pi}{2}} \to 0 \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$, άρα η f' δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

2η απόδειξη
Αποδεικνύουμε πρώτα το εξής

Λήμμα:
Αν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ενώ δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, τότε δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$.

Πράγματι, αν υπήρχε στο $\mathbb{R}$ το $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$, επειδή υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, θα υπήρχε στο $\mathbb{R}$ και το $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-(f(x)-g(x))] = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, πράγμα άτοπο.

Αποδείξαμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}(x\eta\mu\frac{1}{x})=0$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$, οπότε σύμφωνα με το παραπάνω λήμμα δεν υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

Πράγματι, έστω ότι

$$\lim_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}=\ell\in\mathbb{R}\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}=\ell\in\mathbb{R}\overset{x=\frac{1}{y}}{\Rightarrow}\lim_{y\to+\infty}\sigma\upsilon\nu y=\ell \qquad (1)$$

Θέτουμε $y=\omega+\pi$, άρα

$$\lim_{\omega\to+\infty}\sigma\upsilon\nu(\omega+\pi)=\ell\Rightarrow\lim_{\omega\to+\infty}(-\sigma\upsilon\nu\omega)=\ell\Rightarrow\lim_{y\to+\infty}\sigma\upsilon\nu y=-\ell \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει $\ell=0$, δηλ. $\lim\limits_{y\to+\infty}\sigma\upsilon\nu y=0$ (3)

Θέτουμε τώρα $y=t+\frac{\pi}{2}\overset{(3)}{\Rightarrow}\lim\limits_{t\to+\infty}\sigma\upsilon\nu(t+\frac{\pi}{2})=0\Rightarrow-\lim\limits_{t\to+\infty}\eta\mu t=0\Rightarrow\lim\limits_{y\to+\infty}\eta\mu y=0$ (4)

Όμως $\eta\mu^2y+\sigma\upsilon\nu^2y=1\ \ \forall y\in\mathbb{R}\Rightarrow\lim\limits_{y\to+\infty}(\eta\mu^2y+\sigma\upsilon\nu^2y)=1\overset{(3),(4)}{\Rightarrow}0=1$, άτοπο.

Άρα δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$ και σύμφωνα με το λήμμα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$, άρα η f' είναι ασυνεχής στο 0.

Είναι γνωστό ότι αν υπάρχει μια παράγουσα F μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ, τότε υπάρχουν άπειρες παράγουσες της f στο Δ και όλες οι παράγουσες είναι της μορφής F+c όπου c αυθαίρετη σταθερά.
Επομένως για την εύρεση όλων των παραγουσών της f, αρκεί να βρεθεί μια από αυτές.

Πρέπει να τονίσουμε ότι οι αρχικές ορισμένων συναρτήσεων, αν και υπάρχουν, δεν μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των στοιχειωδών συναρτήσεων.

Μερικές τέτοιες συναρτήσεις είναι οι $\frac{e^x}{x}$, e^{x^2}, $\frac{1}{\ln x}$, $\sqrt{\eta\mu x}$ και άλλες.

Στοιχειώδεις συναρτήσεις είναι οι πολυωνυμικές, ρητές, $\sqrt[\nu]{x}$, οι τριγωνομετρικές ημx, συνx, οι αντίστροφες κυκλικές τοξημx, τοξσυνx, τοξεφx, τοξσφx, οι e^x, lnx καθώς και οι συναρτήσεις που προέρχονται από αυτές με τις 4 γνωστές πράξεις της αριθμητικής και τη σύνθεση των συναρτήσεων.

Δίνουμε δύο παραδείγματα αναζήτησης αρχικών μιας συνάρτησης που ορίζεται με δύο τύπους για να κάνουμε μια επισήμανση.

Εύρεση αρχικών της $\mathbf{f(x)=\begin{cases}2x+1 & \alpha\nu\ \ x\le 0\\ 3x^2+1 & \alpha\nu\ \ x>0\end{cases}}$

Όπως έχουμε πει η αρχική μιας συνάρτησης ορίζεται μόνο σε διάστημα. Η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$ που είναι διάστημα και μπορούμε να ομιλούμε για αρχικές της f στο $\mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι συνεχής (εύκολη απόδειξη), η f έχει άπειρες αρχικές τις οποίες και θα βρούμε.

Στο διάστημα $(-\infty,0]$ είναι $f(x)=2x+1=(x^2+x)'$, άρα οι αρχικές της f στο διάστημα $(-\infty,0]$ είναι όλες οι συναρτήσεις της μορφής $F(x)=x^2+x+c_1$

Στο διάστημα $(0,+\infty)$ είναι $f(x)=3x^2+1=(x^3+x)'$ και οι αρχικές της f στο διάστημα $(0,+\infty)$ είναι όλες οι συναρτήσεις της μορφής $F(x)=x^3+x+c_2$

Έτσι οι αρχικές της f στο $\mathbb{R}$ είναι της μορφής $F(x)=\begin{cases} x^2+x+c_1 & \text{αν } x\le 0 \\ x^3+x+c_2 & \text{αν } x>0 \end{cases}$

Οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες στα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Για να είναι μια τέτοια συνάρτηση F αρχική της f στο $\mathbb{R}$, πρέπει να είναι παραγωγίσιμη και στο 0.

Για να είναι παραγωγίσιμη στο 0 πρέπει να είναι και συνεχής.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=F(0)\Leftrightarrow c_1=c_2(=c)$

Επομένως: $F(x)=\begin{cases} x^2+x+c & \text{αν } x\le 0 \\ x^3+x+c & \text{αν } x>0 \end{cases}$

Οι λύσεις που βλέπουμε συνήθως σταματούν εδώ. Το ερώτημα που θα απαντήσουμε είναι αν οι F είναι πράγματι παραγωγίσιμες στο 0 ώστε να είναι αρχικές της f.

Θα αιτιολογήσουμε ότι όλες οι παραπάνω συναρτήσεις F είναι παράγουσες της f, χωρίς να βρούμε αν είναι παραγωγίσιμες στο 0.

Θα στηριχτούμε στην εξής πρόταση:

Αν η συνάρτηση f

- **είναι συνεχής στο x_0**
- **είναι παραγωγίσιμη στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$**
- **υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=\ell\in\mathbb{R}$**

τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0)=\ell$

Πράγματι, σύμφωνα με τον κανόνα De l' Hospital θα είναι

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)-f(x_0)]'}{(x-x_0)'}=\lim_{x\to x_0}f'(x)=\ell\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x_0)=\ell$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ισχύουν οι προϋποθέσεις που θέσαμε στην παραπάνω πρόταση, άρα οι F είναι παραγωγίσιμες και στο 0, άρα είναι όλες οι αρχικές της f στο $\mathbb{R}$.

Δίνουμε ένα παράδειγμα όπου δεν υπάρχουν αρχικές της f.

Για να συμβαίνει αυτό, πρέπει η f να μην είναι συνεχής (αυτό δεν αρκεί πάντοτε, δηλαδή μπορεί και μια ασυνεχής συνάρτηση να έχει αρχικές όπως έχουμε εξηγήσει).

Αλλάζουμε λίγο τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος, ώστε η f να είναι ασυνεχής.

Παράδειγμα όπου δεν υπάρχουν αρχικές της $\mathbf{f(x)=\begin{cases} 2x+1 & αν\ \ x\le 0 \\ 3x^2 & αν\ \ x>0 \end{cases}}$

Η f δεν είναι συνεχής στο 0, αλλά αυτό δεν αποκλείει να έχει παράγουσες στο $\mathbb{R}$.
Οι παράγουσες της f σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $(0,+\infty)$ δίνονται από τις σχέσεις $F(x)=\begin{cases} x^2+x+c_1 & αν\ \ x\le 0 \\ x^3+c_2 & αν\ \ x>0 \end{cases}$

Για να είναι η F παραγωγίσιμη στο 0 πρέπει να είναι και συνεχής, άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=F(0)\Leftrightarrow c_1=c_2(=c)$ και τελικά

$$F(x)=\begin{cases} x^2+x+c & αν\ \ x\le 0 \\ x^3+c & αν\ \ x>0 \end{cases}$$

Επειδή η f δεν είναι συνεχής στο 0, ενδέχεται να μην έχει αρχικές στο $\mathbb{R}$. Για τον λόγο αυτόν εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα της F στο 0.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$

και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0$

άρα η F δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, επομένως η f δεν έχει αρχικές στο $\mathbb{R}$.

Αόριστο ολοκλήρωμα

Φέτος (2015-16) η διδασκαλία του ορισμένου ολοκληρώματος είναι εκτός διδακτέας, άρα και εξεταστέας ύλης. Θα πούμε όμως πολύ λίγα πράγματα σχετικά.
Το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f στο διάστημα Δ, στο σχολικό βιβλίο ορίζεται ως το σύνολο όλων των αρχικών στο Δ, δηλ. $\int f(x)dx=F(x)+c$ όπου F είναι μια αρχική της f στο Δ.
Με τον ορισμό αυτό όμως δεν έχουν νόημα οι τύποι

$$\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

$$\int \lambda f(x)dx=\lambda\int f(x)dx$$

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

πριν οριστούν πράξεις μεταξύ συνόλων συναρτήσεων ή μεταξύ συνάρτησης και συνόλου συναρτήσεων.
Πως προσθέτουμε π.χ μια συνάρτηση με ένα σύνολο συναρτήσεων στον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες;

Διαφορικές εξισώσεις (Δ.Ε)

Η παράγραφος αυτή ήταν πάντοτε εκτός διδακτέας ύλης, όμως πολλά θέματα των Πανελλαδικών εξετάσεων ζητούσαν τη λύση μιας Δ.Ε με διατύπωση όμως που να μην παραπέμπει στις Δ.Ε. Στις ασκήσεις αυτές η διατύπωση ήταν της μορφής:
Βρείτε συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ που ικανοποιεί την τάδε σχέση.
Και φέτος η παράγραφος αυτή είναι εκτός διδακτέας ύλης, αλλά είναι πολύ πιθανό κάποιο θέμα να ζητά τη λύση μιας Δ.Ε με την διατύπωση που αναφέραμε.
Η εύρεση τότε της άγνωστης συνάρτησης πρέπει να γίνει με αντιπαραγώγιση, δηλαδή η σχέση (Δ.Ε) που δόθηκε πρέπει να καταλήξει στη μορφή $F'(x) = G'(x)$ που ισοδυναμεί με την $F(x) = G(x) + c$
Για τον προσδιορισμό της σταθερής c, δηλ. για την εύρεση της μοναδικής συνάρτησης F, δίνεται μια αρχική συνθήκη, δηλαδή ένα επιπλέον δεδομένο.
Για να φτάσει ο υποψήφιος στην μορφή $F'(x) = G'(x)$ πρέπει να "μαντέψει" με τις γνώσεις του από τις παραγώγους τις συναρτήσεις F και G. Αυτό δεν είναι πάντοτε εύκολο.
Πολλές φορές η εξίσωση περιέχει ολοκληρώματα που εξαλείφονται μετά την παραγώγιση των δύο μελών και κατόπιν η εξίσωση καταλήγει σε μια Δ.Ε με παραγώγους χωρίς ολοκληρώματα.

Δίνουμε 3 παραδείγματα Δ.Ε που τέθηκαν στις Πανελλαδικές τα τελευταία χρόνια των οποίων η λύση έπρεπε να γίνει με αντιπαραγώγιση.

Θέμα Γ1
Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) = f(0) = 0$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση
$$e^x(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$
Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(e^x - x)$

Πανελλαδικές 2011

Στο θέμα αυτό η δοσμένη σχέση είναι ισοδύναμη με την $\left[e^x f'(x) - e^x\right]' = \left[xf'(x)\right]'$

Άρα $e^x f'(x) - e^x = xf'(x) + c$ κ.λ.π

Θέμα Γ1
Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $(f(x)+x)(f'(x)+1) = x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$
Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

Πανελλαδικές 2013

Στο θέμα αυτό η δοσμένη σχέση είναι ισοδύναμη με την $\left(\left[f(x)+x\right]^2\right)' = (x^2)'$

Άρα $\left[f(x)+x\right]^2 = x^2 + c$ κ.λ.π

Θέμα Δ1
Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $\mathbf{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ ***για την οποία ισχύουν***
$\mathbf{f'(x)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2\ \ \forall x\in\mathbb{R}}$ **και** $\mathbf{f(0)=0}$

Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\ \ \forall x\in\mathbb{R}}$

Πανελλαδικές 2015

Στο θέμα αυτό η δοσμένη σχέση είναι ισοδύναμη με την $\left[e^{f(x)}-e^{-f(x)}\right]'=(2x)'$.
Άρα $e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c$ κ.λ.π

Ορισμένο ολοκλήρωμα.

Εμβαδά μικτογράμμων και καμπυλογράμμων χωρίων

Για τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος είναι απαραίτητη η έννοια του ορίου της ακολουθίας.
Ο ορισμός του ορίου ακολουθίας υπάρχει στο βιβλίο Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου στην §1.7 (όριο συνάρτησης στο άπειρο).
Εκεί σε μισή σελίδα δίνεται και ο ορισμός της ακολουθίας και ο ορισμός του ορίου ακολουθίας.
Ως ακολουθία ορίζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$.
Κάποιες επισημάνσεις που πρέπει να κάνουμε εδώ είναι οι παρακάτω:

1) Αν η ακολουθία είναι συνάρτηση τότε το όριο της ακολουθίας, δηλαδή το όριο συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}^*$ δεν έχει νόημα.
Σύμφωνα πάντοτε με τους ορισμούς του σχολικού βιβλίου, για να έχει νόημα το όριο συνάρτησης όταν $x\to+\infty$ πρέπει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης να περιέχεται διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$.

2) Από τα γραφόμενα για το όριο ακολουθίας, ο μαθητής δεν είναι σε θέση να καταλάβει τι είναι ορισμένο ολοκλήρωμα. Ας παραβλέψουμε όμως αυτήν την δυσκολία και ας προχωρήσουμε παρακάτω στο εμβαδόν επιπέδου χωρίου.

Στο σχολικό βιβλίο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην §10.2 ορίζεται αξιωματικά το εμβαδόν ευθ. σχήματος.
Για τον ορισμό του εμβαδού δεχόμαστε τα παρακάτω αξιώματα:[1]

Αξίωμα 1^{o}
Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά

[1] Μια πρωτότυπη αξιωματική θεμελίωση του εμβαδού έχει κάνει ο εκλεκτός συνάδελφος Νίκος Δεργιαδές στο περιοδικό ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ του Παραρτήματος της ΕΜΕ Ημαθίας, τεύχος 2, σελ. 60-72. Το περιοδικό υπάρχει στο site της ΕΜΕ Ημαθίας www.emeimathias.gr και μπορείτε να το κατεβάσετε ελεύθερα.

Αξίωμα 2ο

Αν ένα πολυγωνικό χωρίο (η μια πολυγωνική επιφάνεια) χωρίζεται σε πεπερασμένου πλήθους πολυγωνικά χωρία, που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε το εμβαδόν του ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους πολυγωνικών χωρίων.

Αξίωμα 3ο

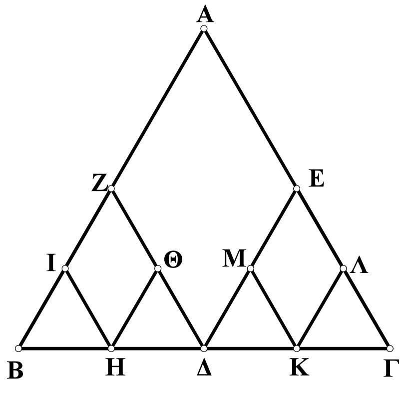
Το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς 1 είναι ίσο με 1

Το εμβαδόν κύκλου που δεν εμπίπτει στην προηγούμενη κατηγορία (ευθ. σχήματα) ορίζεται με την βοήθεια του ορίου ακολουθίας που δεν έχουν διδαχθεί οι μαθητές (το όριο ακολουθίας ανήκει όπως είπαμε στην ύλη της Γ΄ Λυκείου).
Με την βοήθεια του ορίου ακολουθίας ορίζεται επίσης και το εμβαδόν κυκλικού τομέα, ενώ για όλα τα υπόλοιπα καμπυλόγραμμα ή μικτρόγραμμα σχήματα θεωρείται ως εμβαδόν η έκταση που καταλαμβάνει το σχήμα και για τον υπολογισμό του γίνεται χρήση του 2ου αξιώματος χωρίς να αναφέρεται πουθενά ότι αυτό ισχύει και σ' αυτές τις περιπτώσεις. Π.χ το εμβαδόν κυκλικού τμήματος υπολογίζεται ως διαφορά του εμβαδού τριγώνου από το εμβαδόν του αντίστοιχου κυκλικού τομέα χωρίς να οριστεί τι σημαίνει κάτι τέτοιο, δηλ. πως ορίζεται το εμβαδόν κυκλικού τμήματος.

Μια παρανόηση που γίνεται κατά την μελέτη της θεωρίας είναι αυτή που θα αναπτύξουμε με τη βοήθεια δύο παραδόξων.

Παράδοξο 1

Θεωρούμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος πλευράς 1. Παίρνουμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών του ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα.

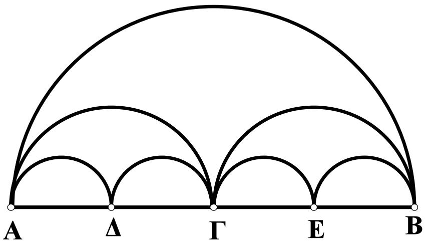


Τότε $AB + A\Gamma = 2$ και

$$BZ + Z\Delta + \Delta E + E\Gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

Δηλαδή το μήκος της τεθλασμένης ΒΖΔΕΓ είναι ίσο με το μήκος της τεθλασμένης ΒΑΓ.
Παίρνουμε τώρα τα μέσα Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ των ΒΔ, ΔΖ, ΖΒ, ΔΓ, ΓΕ, ΕΔ αντίστοιχα. Σύμφωνα με τα παραπάνω, το μήκος της τεθλασμένης ΒΙΗΘΔ είναι ίσο με το μήκος της τεθλασμένης ΒΖΔ και το μήκος της τεθλασμένης ΔΜΚΛΓ είναι ίσο με το μήκος της τεθλασμένης ΔΕΓ. Έτσι το μήκος της τεθλασμένης ΒΙΗΘΔΜΚΛΓ είναι ίσο με το μήκος της τεθλασμένης ΒΖΔΕΓ που είναι ίσο με το μήκος της ΒΑΓ δηλαδή ίσο με 2.
Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι το μήκος οποιασδήποτε τεθλασμένης που δημιουργείται με τον παραπάνω τρόπο, δηλαδή παίρνοντας τα μέσα των πλευρών της προηγούμενης τεθλασμένης είναι πάντοτε ίσο με 2.
Όμως μετά από πάρα πολλές εφαρμογές της ίδιας διαδικασίας η τελευταία τεθλασμένη ταυτίζεται με την πλευρά ΒΓ της οποίας το μήκος είναι ίσο με 1 και όχι με 2.

Παράδοξο 2



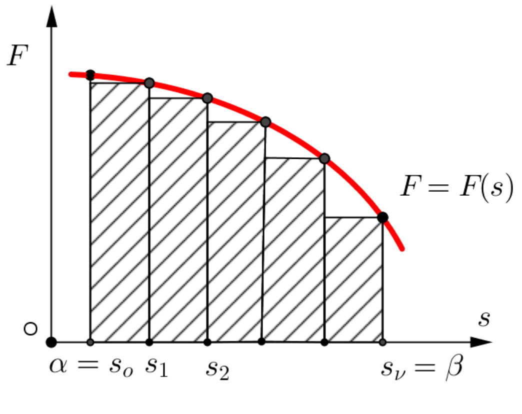
Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου $AB = 2$. Παίρνουμε το μέσο Γ του τμήματος ΑΒ και σχηματίζουμε τα ημικύκλια του σχήματος. Παίρνουμε κατόπιν τα μέσα Δ και Ε των ΑΓ και ΓΒ και σχηματίζουμε τα ημικύκλια του σχήματος. Συνεχίζουμε την διαδικασία αυτή επ' άπειρον.
Παρατηρούμε ότι:
Το μήκος του αρχικού ημικυκλίου είναι ίσο με $L_1 = \pi R = \pi$
Το άθροισμα των μηκών των δύο ημικυκλίων με διαμέτρους τις ΑΓ και ΓΒ είναι ίσο με

$$L_2 = 2\cdot(\pi\cdot\frac{R}{2}) = \pi$$

Το άθροισμα των μηκών των 4 ημικυκλίων με διαμέτρους τις ΑΔ, ΔΓ, ΓΕ, ΕΒ είναι πάλι ίσο με $L_3 = 4\cdot(\pi\cdot\frac{R}{4}) = \pi$
Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι κάθε άθροισμα μηκών ημικυκλίων που κατασκευάζονται με τον παραπάνω τρόπο είναι πάντοτε ίσο με π.
Όμως η περίμετρος των ημικυκλίων αυτών όταν το πλήθος τους αυξάνει απεριόριστα τείνει να ταυτιστεί με την διάμετρο $AB = 2$. Άρα $\pi = 2$

Ποιο είναι το λάθος στους παραπάνω συλλογισμούς;

Εξηγούμε το λάθος στο παράδοξο με τα ημικύκλια. Το ίδιο λάθος ισχύει και για το $1^{ο}$ παράδοξο.
Το λάθος λοιπόν είναι ότι ταυτίζουμε το μήκος των απείρων ημικυκλίων με το μήκος του ευθ. τμήματος ΑΒ επειδή έτσι το βλέπει το μάτι μας.
Το σκεπτικό είναι ότι επειδή η διαφορά μεταξύ των δύο μηκών διαμέτρου και ημικυκλίου είναι πολύ μικρή όταν το πλήθος των ημικυκλίων είναι πολύ μεγάλο, μπορούμε να ταυτίσουμε το μήκος των ημικυκλίων με το μήκος των διαμέτρων τους.
Πράγματι η διαφορά μεταξύ των δύο μηκών είναι πολύ μικρή όταν τα ημικύκλια είναι πάρα πολλά, αλλά οι διαφορές αυτές είναι πάρα πολλές με αποτέλεσμα το άθροισμά τους να μην είναι αμελητέο και να μην μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τείνει στο 0.
Η παρανόηση αυτή γίνεται συνήθως σε προβλήματα Φυσικής όπου γίνονται υπολογισμοί με τη με την παραδοχή ότι μπορούμε να παραλείψουμε άπειρο πλήθος προσθετέων όταν αυτοί είναι πάρα πολύ μικροί.
Αν και ο συλλογισμός αυτός είναι εσφαλμένος, δεν οδηγεί σε λάθος αποτελέσματα, επειδή όλοι οι νόμοι της Φυσικής εκφράζονται με την βοήθεια συνεχών συναρτήσεων όπως εξηγούμε αμέσως:



Έτσι για τον υπολογισμό έργου μεταβλητής δύναμης ακολουθείται η εξής διαδικασία:
Σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση της μεταβλητής δύναμης $F = F(s)$ σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων.
Διαιρούμε το διάστημα από α έως β σε πάρα πολλά μικρά ίσα τμήματα με τα σημεία $\alpha = s_0 < s_1 < s_2 < ... < s_\nu = \beta$ πλάτους Δs. Σε

καθένα από αυτά η δύναμη μπορεί να θεωρηθεί σταθερή και ίση με την τιμή της στο δεξιό άκρο του διαστήματος.
Το συνολικό έργο της δύναμης είναι λοιπόν ίσο με το άθροισμα των έργων σε καθένα από τα διαστήματα $[s_0, s_1], [s_1, s_2], ..., [s_{\nu-1}, s_\nu]$, δηλαδή το συνολικό έργο είναι ίσο με

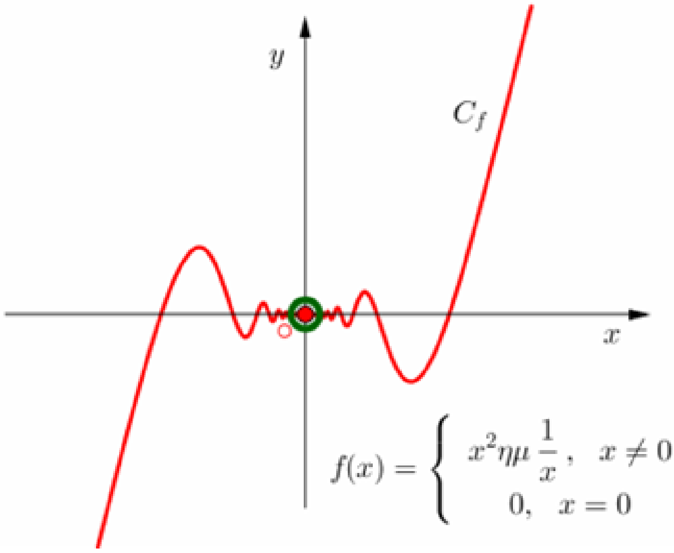
$$W = W_1 + W_2 + ... + W_\nu = F(s_1)\cdot\Delta s + F(s_2)\cdot\Delta s + ... + F(s_\nu)\cdot\Delta s = E_1 + E_2 + ... + E_\nu$$

όπου $E_1, E_2, ..., E_\nu$ τα εμβαδά των ορθογωνίων του σχήματος.
Και ακολουθεί το λάθος στον συλλογισμό:
Όταν τα ορθογώνια είναι πάρα πολλά, το άθροισμα των εμβαδών τους είναι ίσο με το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της F, τον άξονα των s και τις κατακόρυφες στα σημεία α και β.
Το λάθος στον συλλογισμό είναι ότι οι διαφορές των εμβαδών των ορθογωνίων και τον αντίστοιχων μικτόγραμμων χωρίων είναι μεν πολύ μικρές, είναι όμως πάρα πολλές και δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι με άπειρο πλήθος διαιρέσων μπορούμε να ταυτίσουμε το εμβαδόν Ε του μικτόγραμμου χωρίου με το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων.
Την βεβαιότητα για την παραδοχή αυτή εξασφαλίζει η θεωρία των ολοκληρωμάτων η οποία με απλά λόγια λέει ότι αν η συνάρτηση F είναι συνεχής, τότε η παραπάνω παραδοχή είναι σωστή.
Αυτό που συμβαίνει στην Φυσική είναι ότι όλες οι συναρτήσεις που εκφράζουν φυσικά φαινόμενα είναι συνεχείς ακόμη και όταν οι αισθήσεις μας δεν το αντιλαμβάνονται. Έτσι π.χ κατά το κλείσιμο ενός διακόπτη ηλεκτρικού ρεύματος, η λάμπα ανάβει αμέσως, δηλαδή η ένταση του ρεύματος που διαρρέει την λάμπα αυξάνεται ακαριαία από 0 ως 0,5 Α.
Αυτό αντιλαμβάνεται το μάτι μας, όμως τα πράγματα δεν είναι ακριβώς έτσι. Η ένταση του ρεύματος αυξάνεται σταδιακά από 0 ως 0,5 Α παίρνοντας όλες τις ενδιάμεσες τιμές. Δηλαδή η συνάρτηση που δίνει την ένταση του ρεύματος ως συνάρτηση του χρόνου είναι μια συνεχής συνάρτηση. Αυτό εξασφαλίζει την ορθότητας της παραδοχής και όχι αυτό που αντιλαμβανόμαστε με τις αισθήσεις μας.

Τα παράδοξα αυτά δεν είναι τα μοναδικά. Οι αισθήσεις πολλές φορές λειτουργούν διαφορετικά από την θεωρία. Δείτε και το παρακάτω παράδειγμα.

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \dfrac{1}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$



Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=0$. Επομένως το γράφημά της δέχεται στο σημείο 0 εφαπτομένη με εξίσωση $y=0$, δηλαδή τον άξονα των x. Το γράφημά της όμως είναι αυτό του παραπάνω σχήματος και διαισθητικά ο άξονας των x δεν εφάπτεται με την c_f.

Με τα παραπάνω παραδείγματα θέλουμε να δείξουμε ότι οι μαθηματικές θεωρίες δεν μπορούν να βασίζονται στις αισθήσεις μας, αλλά στους ορισμούς, στα αξιώματα και στα θεωρήματα που έχουν ήδη αποδειχθεί.

Σε ότι αφορά τώρα το εμβαδόν, στο βιβλίο της Γ΄ Λυκείου.

Η έννοια του εμβαδού μικτόγραμμου χωρίου θεωρείται γνωστή και με αυτή τη βάση υπολογίζεται το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y=x^2$, τον άξονα των x και την ευθεία $x=1$.

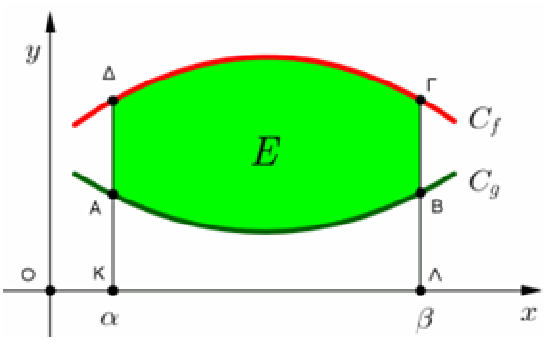
Ενώ λοιπόν η έννοια του εμβαδού ενός τέτοιου (μικτόγραμμου χωρίου) θεωρήθηκε γνωστή και έγινε ο υπολογισμός του, ο ορισμός του εμβαδού χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f με $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τον άξονα των x και τις κατακόρυφες ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ δίνεται 2 σελίδες παρακάτω.

Το εμβαδόν ενός τέτοιου σχήματος ορίζεται ως το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$

Ένα ερώτημα που δημιουργείται άμεσα, είναι το πως γίνεται ο υπολογισμός εμβαδού που δεν έχει οριστεί.

Δηλαδή χρησιμοποιήθηκε εδώ η έννοια του εμβαδού του παραπάνω χωρίου για να δοθεί ο ορισμός του εμβαδού.

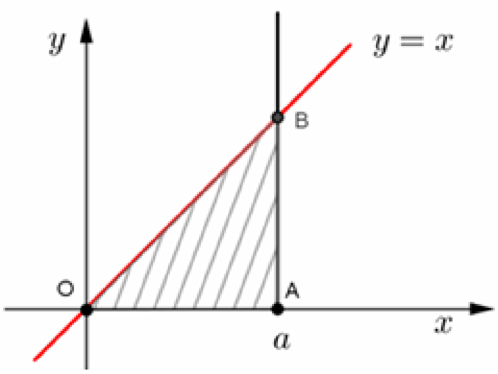
3) Εκτός από τον ορισμό χωρίου που περικλείεται από τις γραμμές που αναφέραμε δεν δίνεται άλλος ορισμός για το εμβαδόν χωρίου. Έτσι ουσιαστικά δεν έχει οριστεί το εμβαδόν χωρίου που περιέχεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων και δύο κατακορύφων. Παρόλο αυτό όμως ένα τέτοιο εμβαδόν υπολογίζεται ως διαφορά δύο εμβαδών του προηγούμενου τύπου. Δηλ.



$\text{εμβ}(ΑΒΓΔ)=\text{εμβ}(ΚΛΓΔ)-\text{εμβ}(ΚΛΒΑ)$

Εδώ δηλαδή θεωρείται ότι το 2ο αξίωμα των εμβαδών ισχύει και στην περίπτωση που ένα σχήμα δεν είναι ευθύγραμμο και οι γραμμές που το χωρίζουν σε διάφορα χωρία δεν είναι απαραιτήτως ευθ. τμήματα.

4) Για τα ευθ. σχήματα έχει δοθεί ορισμός για το εμβαδόν τους, επομένως ο ορισμός του εμβαδού δεν μπορεί να περιλαμβάνει και την περίπτωση που η γραφική παράσταση της f είναι ευθεία. Ή, το λιγότερο, πρέπει να αποδειχθεί ότι ο νέος ορισμός με την βοήθεια ολοκληρώματος είναι ισοδύναμος με τον



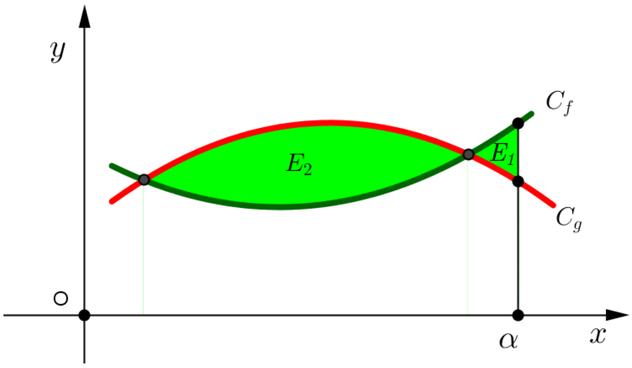
γνωστό ορισμό στην περίπτωση που η c_f είναι ευθεία ή τεθλασμένη.

Η μη ύπαρξη καμιάς σχετικής αναφοράς δημιουργεί το ερώτημα αν μπορεί το εμβαδόν π.χ του τριγώνου που σχηματίζεται από την ευθεία $y = x$, τον άξονα των x και την ευθεία $x = \alpha$, δηλαδή το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ του διπλανού σχήματος μπορεί να υπολογιστεί με τον τύπο $E = \int_0^\alpha x dx$.

Η απάντηση φυσικά είναι ναι, αλλά αυτό δεν προκύπτει από πουθενά.

5) Μια έκφραση που πρέπει να αποσαφηνιστεί είναι η εξής: «εμβαδόν που περικλείεται από 3 ή περισσότερες γραμμές». Με την έκφραση αυτή εννοούμε ότι το εμβαδόν πρέπει να περικλείεται ταυτόχρονα μεταξύ όλων των γραμμών ή αρκεί να περικλείεται και από μερικές μόνο από αυτές;

Δηλαδή όταν λέμε εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τις c_f, c_g και την ευθεία $x = \alpha$, θα εννοούμε το εμβαδόν E_1 ή το άθροισμα $E_1 + E_2$ του διπλανού σχήματος;



Το σύνηθες είναι να εννοούμε όλα τα εμβαδά είτε περιέχονται μεταξύ όλων των γραμμών είτε μόνο από μερικές από αυτές. Αυτό όμως δεν τηρείται πάντοτε.

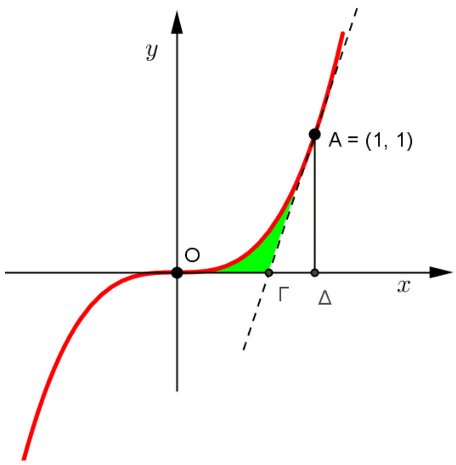
Δείχνουμε την ασάφεια αυτή με το παρακάτω

<u>Παράδειγμα</u>

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x) = x^3$, της εφαπτομένης της στο σημείο $x_0 = 1$ και τον άξονα των x.

Το σχήμα που αποδίδει τα παραπάνω είναι το διπλανό.

Η εφαπτομένη στο $A(1,1)$ της c_f έχει εξίσωση $y = 3x - 2$ και τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $\Gamma(\frac{2}{3}, 0)$. Το εμβαδόν που ζητούμε είναι το γραμμοσκιασμένο μέρος του επιπέδου.



Φέρνουμε από το Α την $A\Delta \perp x'x$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με $E_1 - E_2$ όπου E_1 το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΟΑΔ και E_2 το εμβαδόν του ευθ. τριγώνου ΑΓΔ.

Είναι :

$$E_1 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} \text{ και}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}(\Gamma\Delta)\cdot(\Delta A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{6}$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$ τ.μ

ΔΙΕΥΚΡΙΝΙΣΗ:
Το τ.μ ως μονάδα εμβαδού **ΔΕΝ** σημαίνει τετραγωνικό μέτρο. Το τ.μ σημαίνει τετραγωνικές μονάδες όπου μονάδα είναι η μονάδα μήκους των αξόνων (στα μαθηματικά χρησιμοποιούμε ορθοκανονικά συστήματα συντεταγμένων, δηλαδή ορθογώνια συστήματα με ίσες μονάδες μέτρησης στους δύο άξονες).

Αν η μονάδα μέτρησης των αξόνων είναι το cm τότε το τ.μ σημαίνει cm^2.

Αν μονάδα μέτρησης είναι η in (ίντσα), τότε το τ.μ σημαίνει τετρ. ίντσες.

Όμως μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι μεταξύ των γραμμών αυτών περιέχεται και άλλο τμήμα του επιπέδου.

Βρίσκουμε τα κοινά σημεία της c_f και της εφαπτομένης της στο Α. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους.

$$\begin{cases} y=3x-2 \\ y=x^3 \end{cases}$$

Τα κοινά σημεία είναι δύο. Το $A(1,1)$ και το $B(-2,-8)$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι τώρα αυτό του διπλανού σχήματος και είναι ίσο με

$$E=\int_{-2}^{1}[f(x)-(3x-2)]dx=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx=$$

$$\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{27}{4}\text{τ.μ}$$