ΑΝΑΛΥΣΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ανισότητες στα ολοκληρώματα.

Η συνάρτηση $\int_a^x f(t)dt$

Εισήγηση Νικ. Ιωσηφίδη

3ο Σεμινάριο Ο.Ε.Φ.Ε
Σάββατο 19 Δεκεμβρίου 2015
Θεσσαλονίκη, Ξενοδοχείο The Met

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ.
Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

Νικ. Ιωσηφίδης, Μαθηματικός – Φροντιστής, ΒΕΡΟΙΑ

e-mail: iossifid@yahoo.gr

Μια μεγάλη κατηγορία ασκήσεων είναι η απόδειξη ανισοτήτων με ολοκληρώματα.
Οι ανισότητες στα ολοκληρώματα είναι από τα αγαπημένα θέματα των Πανελλαδικών, αλλά γενικότερα οι ανισότητες είναι συχνά θέματα όλων των εξετάσεων υψηλού επιπέδου (Εθνικοί διαγωνισμοί, Βαλκανιάδες, Ολυμπιάδες).
Δίνουμε παρακάτω τα σημαντικότερα θεωρήματα στα οποία βασίζεται η απόδειξη τέτοιων ασκήσεων.

Θεώρημα 1ο

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [\alpha,\beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0 \qquad (1)$$

Η απόδειξη της πρότασης προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, αφού δηλαδή ένα άθροισμα Riemman R_ν είναι ≥ 0, θα είναι και

$$\lim R_\nu \geq 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$$

Από τον ίδιο ορισμό προκύπτει ότι αν $f(x) > 0 \quad \forall x \in [\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$

Αποδεικνύεται ότι:

Το = στην (1) ισχύει μόνον όταν $f(x) = 0 \quad \forall x \in [\alpha,\beta]$

Δηλαδή αν υπάρχει έστω και ένα $x_0 \in [\alpha,\beta]$ με $f(x_0) > 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$

Απόδειξη

Αν το σημείο x_0 είναι εσωτερικό του διαστήματος $[\alpha,\beta]$, τότε λόγω της συνέχειας της f υπάρχει διάστημα $\Delta = [\gamma,\delta] \subseteq [\alpha,\beta]$ που περιέχει το x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) > 0 \quad \forall x \in [\gamma,\delta]$

Είναι τώρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\delta} f(x)dx + \int_{\delta}^{\beta} f(x)dx \qquad (2)$

Επειδή $f(x) \geq 0$ στα διαστήματα $[\alpha,\gamma]$ και $[\delta,\beta]$ θα είναι $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx \geq 0$ και $\int_{\delta}^{\beta} f(x)dx \geq 0$,ενώ $\int_{\gamma}^{\delta} f(x)dx > 0$ αφού στο $[\gamma,\delta]$ είναι $f(x) > 0$,

Επομένως από την (2) προκύπτει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$

Αν $x_0 = \alpha$ τότε υπάρχει πάλι διάστημα $\Delta = [\alpha,\delta] \subseteq [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x) > 0$ $\forall x \in \Delta$.

Είναι πάλι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx + \int_{\delta}^{\beta} f(x)dx > 0$

Όμοια η απόδειξη αν $x_0 = \beta$

ΕΠΙΣΗΜΑΝΕΙΣ

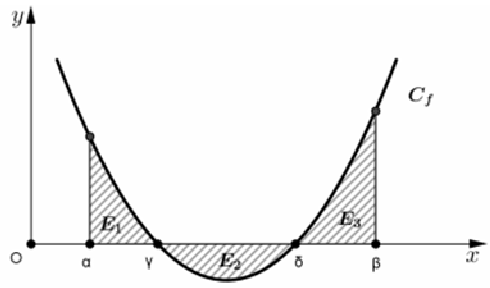
1) Αν $\alpha > \beta$ (οπότε το διάστημα ολοκλήρωσης είναι το $[\beta,\alpha]$, η ανισότητα ισχύει με την αντίθετη φορά, δηλαδή αν $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [\beta,\alpha]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq 0$

2) Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει.

Αν δηλαδή $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$ δεν ισχύει υποχρεωτικά ότι $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$

Η απόδειξη μπορεί να γίνει με ένα αντιπαράδειγμα, είναι εύκολο όμως να το ερμηνεύσουμε και γεωμετρικά.

Στο διπλανό σχήμα είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = E_1 - E_2 + E_3 > 0$ όπου E_1, E_2, E_3 τα εμβαδά του σχήματος, όμως είναι $f(x) < 0$ $\forall x \in (\gamma,\delta)$.



Το θεώρημα αυτό υπάρχει στο σχολικό βιβλίο και μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς απόδειξη.

Τα πορίσματα και τα θεωρήματα που ακολουθούν δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο (κάποια υπάρχουν ως ασκήσεις) και πρέπει να αποδεικνύονται από τους μαθητές που θα κάνουν χρήση τους. Η απόδειξη θα γίνεται μέσα στην απόδειξη της άσκησης ως μέρος αυτής. Διατυπώνουμε τα πορίσματα και τα θεωρήματα αυτά και δίνουμε τις αποδείξεις τους.

Πορίσματα

1) Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)dx \geq 0$ και $\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx \geq 0$.

Το ίσον και στις δύο περιπτώσεις ισχύει όταν $f(x) = 0$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$

2) Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ, $\alpha,\beta \in \Delta$, $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \Delta$, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \Delta$ με $f(x_0) > 0$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε $\alpha = \beta$

3) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x) \leq 0 \ \forall x \in [\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq 0$

Το = ισχύει μόνον όταν $f(x) = 0 \ \forall x \in [\alpha,\beta]$

<u>Απόδειξη</u>

Αφού $f(x) \leq 0 \ \forall x \in [\alpha,\beta] \Rightarrow -f(x) \geq 0 \ \forall x \in [\alpha,\beta]$, άρα σύμφωνα με το θεώρημα θα είναι και $\int_\alpha^\beta -f(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq 0$

Το ίσον ισχύει όταν $-f(x) = 0 \ \forall x \in [\alpha,\beta]$ ή ισοδύναμα $f(x) = 0 \ \forall x \in [\alpha,\beta]$

4) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(x) \geq g(x) \ \forall x \in [\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)dx$.

Το ίσον ισχύει όταν $f(x) = g(x) \ \forall x \in [\alpha,\beta]$

<u>Απόδειξη</u>

$f(x) \geq g(x) \ \forall x \in [\alpha,\beta] \Rightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \ \forall x \in [\alpha,\beta]$

Σύμφωνα επομένως με το 1° θεώρημα θα είναι:

$$\int_\alpha^\beta [f(x) - g(x)]dx \geq 0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx - \int_\alpha^\beta g(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

Το = ισχύει όταν $f(x) - g(x) = 0 \ \forall x \in [\alpha,\beta] \Leftrightarrow f(x) = g(x) \ \forall x \in [\alpha,\beta]$

Δηλαδή με τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μπορούμε να ολοκληρώσουμε μια ανισότητα.
Με την ιδιότητα αυτή αποδεικνύεται η πλειονότητα των ανισοτικών σχέσεων μεταξύ ολοκληρωμάτων.

Ειδική περίπτωση αυτής της ιδιότητας είναι η επόμενη

5) Αν f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [\alpha,\beta]$, τότε $m(\beta - \alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq M(\beta - \alpha)$

<u>Απόδειξη</u>

Ολοκληρώνοντας την σχέση

$$m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [\alpha,\beta] \Rightarrow \int_\alpha^\beta m dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta M dx \Rightarrow$$

$m(\beta - \alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq M(\beta - \alpha)$ Το ίσον ισχύει όταν $f(x) = m = M \ \forall x \in [\alpha,\beta]$

ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΗ

Τα αντίστροφα των παραπάνω πορισμάτων 3, 4, 5 δεν ισχύουν.

Π.χ (Πόρισμα 4):

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ δεν προκύπτει ότι $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [\alpha,\beta]$.

Τα παραδείγματα που ακολουθούν είναι απλά επειδή θέλουμε να δείξουμε μόνο την εφαρμογή των θεωρημάτων.

Παραδείγματα

1) Να αποδειχθεί ότι $\frac{4}{3} < \int_{0}^{1} e^{x^2} dx < e$

Απόδειξη

Η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}$ ως συνεχής στο $\mathbb{R}$ έχει αρχική F στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[0,1]$. Όμως αυτή δεν μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των στοιχειωδών συναρτήσεων και το ολοκλήρωμα $\int_{0}^{1} e^{x^2} dx$ δεν μπορεί να υπολογιστεί ως $F(1) - F(0)$ [1].

Για την απόδειξη της άσκησης αυτής θα ολοκληρώσουμε κατάλληλη ανισότητα.

Η πρώτη σκέψη είναι να ολοκληρώσουμε την ανισότητα $m \leq f(x) \leq M$ όπου m και M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο $[0,1]$.

Για κάθε $x \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^{x^2} \leq e \Rightarrow \int_{0}^{1} 1dx < \int_{0}^{1} e^{x^2} dx < \int_{0}^{1} edx$

Το = δεν ισχύει μετά την ολοκλήρωση διότι δεν ισχύει καμιά από τις ισότητες $e^{x^2} = 1$ ή $e^{x^2} = e$ για κάθε $x \in [0,1]$

Άρα $1 < \int_{0}^{1} e^{x^2} dx < e$

Το ένα σκέλος της ζητούμενης ανισότητας έχει αποδειχθεί , όχι όμως και το άλλο.

Η ανισότητα $\int_{0}^{1} e^{x^2} dx > 1$ είναι μεν σωστή, αλλά δεν αποδεικνύει το ζητούμενο.

Χρειάζεται να ολοκληρώσουμε μια ανισότητα της μορφής $e^{x^2} \geq g(x)$ όπου η συνάρτηση $g(x)$ δεν είναι η σταθερή συνάρτηση 1, αλλά παίρνει και τιμές μεγαλύτερες του 1 στο διάστημα $[0,1]$. Μια τέτοια συνάρτηση είναι η $1 + x^2$, δηλαδή ισχύει $e^{x^2} \geq 1 + x^2$ (προκύπτει από την γνωστή ανισότητα $e^x \geq 1 + x$ αν θέσουμε όπου x το x^2).

[1] Άλλωστε, αν μπορούσαμε να υπολογίσουμε εύκολα το ολοκλήρωμα αυτό, δεν θα ζητούνταν μια ανισοτική σχέση, αλλά μια ισότητα. Το ότι ζητείται ανισότητα και όχι ισότητα, σημαίνει ότι ή το ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται ή υπολογίζεται πολύ δύσκολα.
Αντίστοιχα με την έκφραση "αποδείξτε ότι υπάρχει ξ τέτοιο ώστε…", το σχεδόν βέβαιο είναι ότι ο ξ δεν μπορεί να υπολογιστεί. Αν μπορούσε να υπολογιστεί εύκολα θα μας ζητούσαν να βρούμε ποιο είναι το ξ με την δοσμένη ιδιότητα

Η ολοκλήρωση της σχέσης $e^{x^2} \geq 1 + x^2$ από 0 ως 1 δεν είναι σίγουρο ότι θα δώσει την ζητούμενη σχέση, αλλά σίγουρα θα δώσει μια πιο ενισχυμένη ανισότητα από την $\int_0^1 e^{x^2} dx > 1$. Δοκιμάζουμε λοιπόν αυτήν την ολοκλήρωση, δηλ. $e^{x^2} \geq 1 + x^2 \Rightarrow$

$\int_0^1 e^{x^2} dx \geq \int_0^1 (1 + x^2) dx = \left[x + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}$ και αποδείχθηκε και το άλλο σκέλος της ανισότητας.

Τονίζουμε ότι δεν υπάρχει τρόπος για να καταλάβουμε ποια ανισότητα πρέπει να ολοκληρώσουμε για να φτάσουμε στη ζητούμενη σχέση. Υπάρχουν και πιο ενισχυμένες ανισότητες που αν τις ολοκληρώσουμε θα βρούμε πιο στενά όρια για το ολοκλήρωμα.

Μπορούμε π.χ να αποδείξουμε ότι (βλέπε επόμενο παράδειγμα) $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$,

$\forall x \geq 0$, άρα και $e^{x^2} \geq 1 + x^2 + \frac{x^4}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Επομένως

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \geq \int_0^1 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \right]_0^1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{43}{30} > \frac{40}{30} = \frac{4}{3}$$

Στο παράδειγμα αυτό αποδείξαμε μια αριθμητική ανισότητα. Αν η ολοκλήρωση γίνει σε διάστημα που περιέχει την μεταβλητή στα όριά του, μπορεί να αποδειχθεί μια ανισότητα μεταξύ συναρτήσεων όπως δείχνουμε με το επόμενο παράδειγμα.

2) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$

Αν $x = 0$ η αποδεικτέα ισχύει προφανώς ως ισότητα

Αν $x > 0$, τότε από την ανισότητα $e^t \geq 1 + t$ με ολοκλήρωση από 0 ως x βρίσκουμε:

$$\int_0^x e^t dt > \int_0^x (1 + t) dt = \left[t + \frac{t^2}{2} \right]_0^x = x + \frac{x^2}{2} \Rightarrow e^x - 1 > x + \frac{x^2}{2} \Rightarrow e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

και η πρόταση αποδείχθηκε.

3) Να αποδειχθεί ότι $\int_0^1 \frac{2x\eta\mu 3x}{x^4 + x^2 + 1} dx < \ln 2$

<u>Απόδειξη</u>

Το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν μπορούμε να το υπολογίσουμε. Θα συγκρίνουμε την $f(x) = \frac{2x\eta\mu 3x}{x^4 + x^2 + 1}$ με άλλη συνάρτηση $g(x)$, τέτοια ώστε $f(x) \leq g(x)$ και θα ολοκληρώσουμε την σχέση αυτή από 0 ως 1.

Δεν υπάρχει τρόπος να καταλάβουμε ποια είναι η κατάλληλη συνάρτηση g που θα μας δώσει το όριο που θέλουμε, δηλ. το ln2. Μόνο η εμπειρία μπορεί να πιθανολογήσει την επιλογή της g. Ένα μόνο στοιχείο μπορεί να βοηθήσει λιγάκι, το γεγονός ότι στο 2ο μέλος υπάρχει το ln2 που είναι πιθανό να προέρχεται από την ολοκλήρωση της $h(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Δοκιμάζουμε λοιπόν την σύγκριση της f με την h:

$$\eta\mu 3x \le 1 \ \ \forall x \in [0,1] \Rightarrow \frac{2x\eta\mu 3x}{x^4+x^2+1} \le \frac{2x}{x^4+x^2+1} \le \frac{2x}{x^2+1} \ \ \forall x \in [0,1]$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία από 0 ως 1 έχουμε:

$$\int_0^1 \frac{2x\eta\mu 3x}{x^4+x^2+1}dx < \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \ln 2$$

Το = δεν ισχύει κατά την ολοκλήρωση επειδή στις παραπάνω ανισοϊσότητες δεν ισχύει η ισότητα για κάθε $x \in [0,1]$.

4) Να αποδειχθεί ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\eta\mu x} + \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}\right)dx < \frac{\pi}{2}\sqrt[4]{8}$

<u>Απόδειξη</u>

Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\eta\mu x}dx$ και $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}dx$ (οι αρχικές της δεν $\sqrt{\eta\mu x}$ μπορούν να εκφραστούν με την βοήθεια των στοιχειωδών συναρτήσεων)

Άλλωστε, αν μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα δεν θα μας ζητούνταν η απόδειξη μιας ανισότητας, αλλά μιας ισότητας. Βέβαια αυτό δεν σημαίνει υποχρεωτικά ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\eta\mu x}dx$ δεν μπορεί να υπολογιστεί, αλλά και αν μπορεί να υπολογιστεί, ο υπολογισμός δεν είναι εύκολος.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\eta\mu x} + \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}$

Θα αναζητήσουμε κατάλληλη συνάρτηση $g(x)$ τέτοια ώστε $f(x) \le g(x)$ την οποία θα ολοκληρώσουμε στο $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Δεν υπάρχει καμιά ένδειξη για το ποια μπορεί να είναι η g.

Αν για κάποια συνάρτηση g ισχύει $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx \le \frac{\pi}{2}\sqrt[4]{8}$, τότε και για κάθε άλλη συνάρτηση $h(x) \le g(x) \ \ \forall x \in [0,1]$ θα ισχύει επίσης $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx \le \frac{\pi}{2}\sqrt[4]{8}$, ενώ αν για την συνάρτηση g ισχύει $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx > \frac{\pi}{2}\sqrt[4]{8}$, τότε κάθε συνάρτηση κ με $\kappa(x) \ge g(x) \ \ \forall x \in [0,1]$ δεν είναι κατάλληλη για την απόδειξη, διότι θα δώσει μια πιο "χαλαρή" ανισότητα.

Μια κατάλληλη ίσως συνάρτηση είναι η σταθερή συνάρτηση $g(x) = M \ \ \forall x \in [0,1]$ όπου M είναι η μέγιστη τιμή της f στο $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Τέτοια τιμή υπάρχει διότι η f είναι συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Δοκιμάζουμε λοιπόν μήπως η τιμή M έχει την ιδιότητα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} M dx = \frac{\pi}{2}\sqrt[4]{8}$.

Μπορούμε πράγματι να αποδείξουμε[2] ότι $M = \sqrt[4]{8}$ κάτι που φαίνεται πολύ πιθανό να συμβαίνει όταν $x = \frac{\pi}{4}$, οπότε $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{\eta\mu\frac{\pi}{4}} + \sqrt{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{8}$

Πράγματι είναι:

$$f'(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{\eta\mu x}} - \frac{\eta\mu x}{2\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}} = \frac{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^3 x} - \sqrt{\eta\mu^3 x}}{2\sqrt{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}} \quad \forall x \in (0,\frac{\pi}{2})$$

Το πρόσημο της f' είναι το ίδιο με το πρόσημο του $\sqrt{\sigma\upsilon\nu^3 x} - \sqrt{\eta\mu^3 x}$ που είναι πάλι το ίδιο με το πρόσημο του $\sigma\upsilon\nu^3 x - \eta\mu^3 x$ που είναι πάλι το ίδιο με το πρόσημο του $\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x(1 - \varepsilon\varphi x)$ που είναι πάλι το ίδιο με το πρόσημο του $1 - \varepsilon\varphi x$.

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f δίνονται από τον παρακάτω πίνακα.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	↗		↘

Η f λοιπόν παρουσιάζει πράγματι μέγιστο στο $\frac{\pi}{4}$ ίσο με $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt[4]{8}$

Άρα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[4]{8}dx = \frac{\pi}{2}\sqrt[4]{8}$

Μπορούμε να κάνουμε την άσκηση δυσκολότερη αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $\int_\alpha^\beta \mathbf{f(x)dx} = \int_\alpha^\beta \mathbf{f(\alpha+\beta-x)dx}$ (θα τον αποδείξουμε στην επόμενη ενότητα)

Η άσκηση μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή:

Να αποδειχθεί ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\eta\mu x}\, dx < \frac{\pi}{4}\sqrt[4]{8}$

[2] Μια πολύ γρήγορη απόδειξη μπορεί να γίνει αν στην ανισότητα των δυνάμεων $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^4 \le \frac{\alpha^4+\beta^4}{2}$ $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ θέσουμε όπου $\alpha = \sqrt{\eta\mu x}$ και $\beta = \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}$

Για την απόδειξη αυτής της σχέσης παρατηρούμε ότι σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο είναι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\eta\mu x}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\eta\mu(\frac{\pi}{2} - x)}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}\ dx$

Επομένως η σχέση που αποδείξαμε $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\eta\mu x} + \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}\right) dx < \frac{\pi}{2}\sqrt[4]{8}$ γράφεται

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{\eta\mu x}\ dx < \frac{\pi}{2}\sqrt[4]{8} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\eta\mu x}\ dx < \frac{\pi}{4}\sqrt[4]{8}$$

Θεώρημα 2ο

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $m \le f(x) \le M\ \ \forall x \in [\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f^2(x)dx - (m+M)\int_\alpha^\beta f(x)dx + mM(\beta-\alpha) \le 0$

Απόδειξη

Ισχύει $f(x) - m \ge 0$ και $f(x) - M \le 0\ \ \forall x \in [\alpha,\beta]$, άρα

$[f(x) - m]\cdot[f(x) - M] \le 0 \Rightarrow f^2(x) - (m+M)f(x) + mM \le 0$

Με ολοκλήρωση από α ως β της τελευταίας σχέσης προκύπτει η ζητούμενη.

Η πρόταση αυτή χρησιμοποιείται συνήθως όταν μας δίνεται η τιμή ενός από τα δύο ολοκληρώματα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, $\int_\alpha^\beta f^2(x)dx$ και ζητείται μια ανισότητα για το άλλο ολοκλήρωμα όπως δείχνουμε στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα

Για την συνεχή συνάρτηση f ισχύει $-1 \le f(x) \le 3\ \ \forall x \in [1,2]$ και $\int_1^2 f(x)dx = 1$

Να αποδειχθεί ότι $\int_1^2 f^2(x)dx \le 5$

Απόδειξη

$\forall x \in [1,2]$ είναι:

$f(x) \ge -1 \Rightarrow f(x) + 1 \ge 0$ και

$f(x) \le 3 \Rightarrow f(x) - 3 \le 0$

Με πολ/μό κατά μέλη βρίσκουμε

$$(f(x)+1)(f(x)-3) \le 0 \Rightarrow f^2(x) - 2f(x) - 3 \le 0 \Rightarrow \int_1^2 (f^2(x) - 2f(x) - 3)dx \le 0 \Rightarrow$$

$$\int_1^2 f^2(x)dx - 2\int_1^2 f(x)dx - 3\int_1^2 1dx \le 0 \Rightarrow \int_1^2 f^2(x)dx - 2 - 3 \le 0 \Rightarrow \int_1^2 f^2(x)dx \le 5$$

Θεώρημα 3ο: Ανισότητα Schwarz

Η ανισότητα αυτή είναι αντίστοιχη της ανισότητας B.C.S (Bunyakovsky – Cauchy – Schwarz) της άλγεβρας σύμφωνα με την οποία:

$\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_\nu \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + ... + \alpha_\nu\beta_\nu)^2 \le (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_\nu^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + ... + \beta_\nu^2)$

Το ίσον ισχύει όταν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε: $\alpha_1 = \lambda\beta_1, \alpha_2 = \lambda\beta_2, ..., \alpha_\nu = \lambda\beta_\nu$ ή υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\beta_1 = \lambda\alpha_1, \beta_2 = \lambda\alpha_2, ..., \beta_\nu = \lambda\alpha_\nu$

Η ανισότητα Schwarz στα ολοκληρώματα έχει ως εξής:

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ τότε

$$\left(\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_\alpha^\beta f^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_\alpha^\beta g^2(x)dx\right) \qquad (1)$$

Το ίσον ισχύει όταν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε $f(x) = \lambda g(x)$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$ ή $g(x) = 0$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$

Απόδειξη

Για την συνάρτηση $h(x) = f(x) - \lambda g(x)$ ισχύει $h^2(x) \ge 0$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$, άρα και

$$\int_\alpha^\beta h^2(x)dx \ge 0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta \left(f^2(x) - 2\lambda f(x)g(x) + \lambda^2 g^2(x)\right)dx \ge 0 \Rightarrow$$

$$\left(\int_\alpha^\beta g^2(x)dx\right)\lambda^2 - 2\left(\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx\right)\lambda + \left(\int_\alpha^\beta f^2(x)dx\right) \ge 0 \qquad (2)$$

- Αν $\int_\alpha^\beta g^2(x)dx = 0$ οπότε $g(x) = 0$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$ τότε η (1) ισχύει ως ισότητα.
- Αν $\int_\alpha^\beta g^2(x)dx > 0$, το 1ο μέλος της (2) είναι τριώνυμο 2ου βαθμού ως προς λ και για να ισχύει η (2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ πρέπει και αρκεί η διακρίνουσα του τριωνύμου να είναι ≤ 0, δηλαδή

$$4\left(\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx\right)^2 - 4\left(\int_\alpha^\beta g^2(x)dx\right)\left(\int_\alpha^\beta f^2(x)dx\right) \le 0 \Rightarrow$$

$$\left(\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_\alpha^\beta g^2(x)dx\right)\left(\int_\alpha^\beta f^2(x)dx\right)$$

Το ίσον ισχύει όταν $g(x) = 0$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$ ή $h(x) = f(x) - \lambda g(x) = 0$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$, δηλαδή $f(x) = \lambda g(x)$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$

Η παραπάνω ανισότητα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε περιπτώσεις όπου τα προηγούμενα ανισοτικά θεωρήματα δίνουν ευρύτερα όρια από αυτά που ζητά η άσκηση για μια ανισότητα όπως δείχνουμε στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα

Να αποδειχθεί ότι: $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx > \frac{3}{4}$

Απόδειξη

Η συνάρτηση $u(x)=\frac{1}{x^2+1}$ είναι συνεχής και γν. φθίνουσα στο διάστημα $[0,1]$, άρα η ελάχιστη τιμή της είναι η $u(1)=\frac{1}{2}$, ισχύει δηλαδή $u(x)\ge\frac{1}{2}\ \ \forall x\in[0,1]$

Επομένως και $\int_0^1 u(x)dx \ge \int_0^1 \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}$

Η ανισότητα αυτή είναι σωστή, αλλά δεν αποδεικνύει το ζητούμενο. Χρειαζόμαστε μια πιο ενισχυμένη ανισότητα.

Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα του Schwarz

$$\left(\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_\alpha^\beta f^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_\alpha^\beta g^2(x)dx\right) \qquad (1)$$

για τις συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ και $g(x)=\sqrt{x^2+1}$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]=[0,1]$

Είναι:

- $\int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 1dx = 1$
- $\int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$
- $\int_0^1 g^2(x)dx = \int_0^1 (x^2+1)dx = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1 = \frac{4}{3}$

Η (1) γίνεται: $1<\left(\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx\right)\cdot\frac{4}{3} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx > \frac{3}{4}$

Το = δεν ισχύει επειδή δεν υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x)=\lambda g(x)\ \ \forall x\in[0,1]$

Πράγματι, για $x=0$ προκύπτει $\lambda=1$, ενώ για $x=1$ προκύπτει $\lambda=\frac{1}{2}$

Παρατήρηση

Η ανισότητα που αποδείξαμε είναι πολύ ισχυρή, δηλαδή η τιμή $\frac{3}{4}=0,75$ είναι πολύ κοντά στην ακριβή τιμή του ολοκληρώματος που είναι ίση με $\frac{\pi}{4}\simeq 0,785$ [3]

[3] Ισχύει $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = [\text{τοξεφ}x]_0^1 = \text{τοξεφ}\frac{\pi}{4} - \text{τοξεφ}0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} > \frac{3}{4}$

Κυρτότητα και ανισότητες

Όπως είπαμε, η πλειονότητα των ανισοτήτων στα ολοκληρώματα στηρίζεται στην ολοκλήρωση αλγεβρικών ανισοτήτων που αποδεικνύονται με διάφορους τρόπους.
Πολλές ανισότητες αποδεικνύονται με το θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού, άλλες με την μονοτονία, άλλες μπορούν να αποδειχθούν με την κυρτότητα (ανισότητα Jensen) κ.λ.π.
Πολλές μπορούν να αποδειχθούν χωρίς τη χρήση θεωρημάτων της Ανάλυσης.
Π.χ αν στην γνωστή ανισότητα $\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta$ θέσουμε όπου α και β δύο τυχαίες συναρτήσεις, έχουμε μια ανισότητα μεταξύ συναρτήσεων.
Υπάρχει απειρία ανισοτήτων που μπορούν να αποδειχθούν με διάφορες μεθόδους. Ολοκληρώνοντάς τες βρίσκουμε απειρία άλλων ανισοτήτων.

Τέτοιο ήταν το παράδειγμα 2 στο οποίο ολοκληρώσαμε την γνωστή ανισότητα $e^t \geq 1+t$ στο διάστημα $[0,x]$ για να καταλήξουμε στην ανισότητα $e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2}$

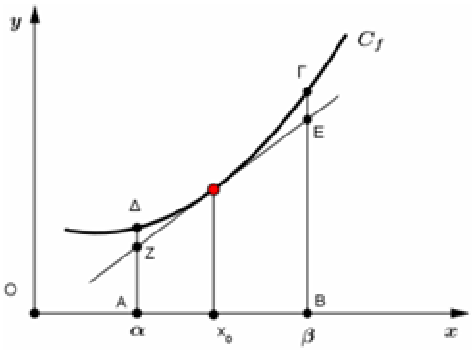
Μια κατηγορία ανισοτήτων στηρίζεται στην κυρτότητα. Το σχετικό θεώρημα είναι το εξής (περιέχεται ως σχόλιο στο σχολικό βιβλίο στην ενότητα ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ- ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ):

Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $\Delta=[\alpha,\beta]$ και $y=\lambda x+\mu$ είναι η εφαπτομένη της c_f στο τυχαίο σημείο $x_0 \in \Delta$, τότε $f(x) \geq \lambda x+\mu \ \forall x \in \Delta$.
Το = ισχύει για $x=x_0$
Η ανισότητα ισχύει με την αντίθετη φορά όταν η f είναι κοίλη στο Δ.

Ολοκληρώνοντας την σχέση αυτή στο διάστημα Δ προκύπτει η ανισότητα

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta (\lambda x+\mu)dx$$

Το = δεν ισχύει, αφού η f είναι κυρτή και δεν ισχύει $f(x)=\lambda x+\mu \ \forall x \in \Delta$



Γεωμετρικά, για συνάρτηση θετική στο $[\alpha,\beta]$, η ανισότητα αυτή δηλώνει ότι το εμβαδόν του μικτογράμμου χωρίου ΑΒΓΔ είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΕΖ (βλ. διπλανό σχήμα).
Στην ιδιότητα αυτή στηρίζονταν η λύση στο 4° θέμα των Πανελλαδικών του 2015, όπου μεταξύ άλλων ζητούνταν να αποδειχθεί ότι μια εξίσωση που περιείχε ολοκληρώματα είχε μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2,3)$. Η λύση γίνονταν με το θεώρημα Bolzano, χρειάζονταν όμως ανισότητα για κάποιο ολοκλήρωμα η οποία αποδεικνύονταν με την βοήθεια του παραπάνω θεωρήματος, ολοκληρώνοντας δηλαδή μια σχέση της μορφής $f(x) \geq \lambda x+\mu$ στο διάστημα $[2,3]$.

Λόγω της πολυπλοκότητας και των πολλών ερωτημάτων του θέματος αυτού δίνουμε ένα απλούστερο

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x}{x}$.

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της c_f στο σημείο $x_0=2$.

β) Να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή στο διάστημα $(0,+\infty)$ και ότι $\int_1^3 \frac{e^x}{x}dx > e^2$

Απόδειξη

α) Είναι $f'(x)=\frac{xe^x-e^x}{x^2} \Rightarrow f'(2)=\frac{e^2}{4}$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $x_0=2$ είναι:

$$y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y=\frac{e^2}{4}x$$

β) Είναι: $f''(x)=\frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}>0 \ \forall x\in(0,+\infty)$, άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$,

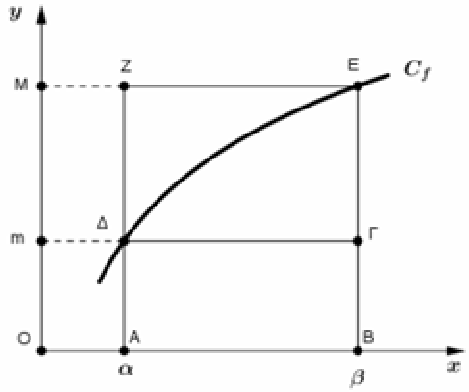
άρα και στο $[1,3]$ και επομένως ισχύει $f(x)\geq \frac{e^2}{4}x \ \forall x\in[1,3]$.

Ολοκληρώνοντας την τελευταία στο $[1,3]$ έχουμε:

$$\int_1^3 \frac{e^x}{x}dx > \int_1^3 \frac{e^2}{4}xdx = \frac{e^2}{4}\int_1^3 xdx = \frac{e^2}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = e^2$$

Μια χρήσιμη μέθοδος προσέγγισης της τιμής του $\int_\alpha^\beta f(x)dx$

Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε μια ανισότητα της μορφής $\kappa \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \lambda$



Έχουμε πει ότι αν για την συνάρτηση f ισχύει $m\leq f(x)\leq M \ \forall x\in[\alpha,\beta]$, τότε ισχύει και

$$m(\beta-\alpha)\leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq M(\beta-\alpha) \qquad (1)$$

Η πιο ενισχυμένη ανισότητα που μπορούμε να πάρουμε εφαρμόζοντας τη σχέση αυτή είναι να επιλέξουμε

$m=\min f$ στο $[\alpha,\beta]$ και

$M=\max f$ στο $[\alpha,\beta]$

Οι τιμές αυτές υπάρχουν διότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

Για συνάρτηση f με $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [\alpha, \beta]$, η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των C_f, $x'x$ και των κατακορύφων $x = \alpha$ και $x = \beta$ περιέχεται μεταξύ των εμβαδών των ορθογωνίων ΑΒΓΔ και ΑΒΕΖ, δηλαδή η σχέση (1) γράφεται

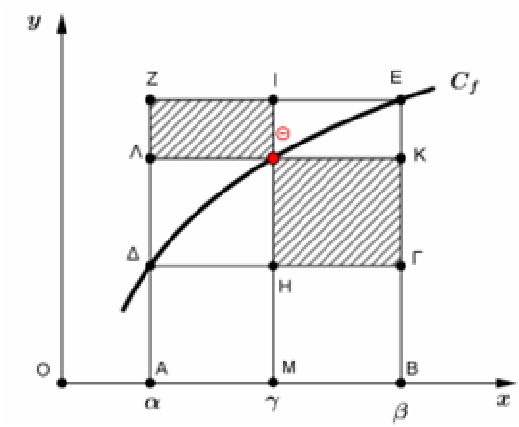
$$\text{εμβ}(\text{ΑΒΓΔ}) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq \text{εμβ}(\text{ΑΒΕΖ}) \qquad (2)$$

(Σχεδιάσαμε μια γν. αύξουσα και θετική συνάρτηση για να γίνει πιο εύκολα κατανοητή η γεωμετρική ερμηνεία που αναπτύσσουμε).

Τα όρια $m(\beta - \alpha)$ και $M(\beta - \alpha)$ πολλές φορές δεν είναι τα καταλληλότερα, δηλαδή θέλουμε να περιορίσουμε το ολοκλήρωμα ανάμεσα σε πιο στενά όρια.

Χωρίζουμε τότε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ με το τυχαίο σημείο γ σε δύο διαστήματα $[\alpha, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$ και γράφουμε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$



Σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$ εφαρμόζουμε την ανισότητα (2)

$$\text{εμβ}(\text{ΑΜΗΔ}) \leq \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx \leq \text{εμβ}(\text{ΑΜΘΛ})$$

$$\text{εμβ}(\text{ΜΒΚΘ}) \leq \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx \leq \text{εμβ}(\text{ΜΒΕΙ})$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των παραπάνω ανισοτήτων βρίσκουμε

$$\text{εμβ}(\text{ΑΜΗΔ}) + \text{εμβ}(\text{ΜΒΚΘ}) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq \text{εμβ}(\text{ΑΜΘΛ}) + \text{εμβ}(\text{ΜΒΕΙ})$$

Η τελευταία ανισότητα είναι πιο ισχυρή (δηλ. δίνει πιο στενά όρια) από την (2), αφού στο αριστερό μέλος της έχει προστεθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου ΗΓΚΘ ενώ από το δεξιό μέλος έχει αφαιρεθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου ΛΘΙΖ.

Τα σημεία της διαίρεσης μπορεί να είναι και περισσότερα και τότε η ανισότητα που προκύπτει με τον παραπάνω τρόπο είναι γενικά πιο ισχυρή.

Δηλαδή, έστω f μια αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα Δ και $D = (x_0 = \alpha < x_1 < x_2 < ... < x_\nu = \beta)$ μια διαμέριση του Δ σε διαστήματα ίσου πλάτους $\Delta x = \dfrac{\beta - \alpha}{\nu}$

Έστω $m_i = f(x_{i-1}),\ i = 1, 2, ..., \nu$ οι ελάχιστες τιμές της f στα αντίστοιχα διαστήματα

$M_i = f(x_i),\ \ i = 1, 2, ..., \nu$ οι μέγιστες τιμές της f στα αντίστοιχα διαστήματα

Εφαρμόζουμε την (1) σε καθένα από τα διαστήματα $[x_{i-1}, x_i]$

$$\frac{\beta-\alpha}{\nu}\cdot m_1 \le \int_{x_0=\alpha}^{x_1} f(x)dx \le \frac{\beta-\alpha}{\nu}\cdot M_1$$

$$\frac{\beta-\alpha}{\nu}\cdot m_2 \le \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \le \frac{\beta-\alpha}{\nu}\cdot M_2$$

……

$$\frac{\beta-\alpha}{\nu}\cdot m_\nu \le \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu=\beta} f(x)dx \le \frac{\beta-\alpha}{\nu}\cdot M_\nu$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των παραπάνω ανισοτήτων βρίσκουμε

$$\frac{\beta-\alpha}{\nu}\left[f(x_0)+f(x_1)+\cdots+f(x_{\nu-1})\right] \le \int_\alpha^\beta f(x)dx \le \frac{\beta-\alpha}{\nu}\left[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_\nu)\right] \quad \textbf{(3)}$$

Αν η f είναι φθίνουσα στο Δ η (3) ισχύει με την αντίθετη φορά, δηλ.

$$\frac{\beta-\alpha}{\nu}\left[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_\nu)\right] \le \int_\alpha^\beta f(x)dx \le \frac{\beta-\alpha}{\nu}\left[f(x_0)+f(x_1)+\cdots+f(x_{\nu-1})\right] \quad \textbf{(4)}$$

Με την μέθοδο αυτή μπορούμε να προσεγγίσουμε οσοδήποτε την τιμή ενός ολοκληρώματος, δηλαδή να περιορίσουμε το ολοκλήρωμα ανάμεσα σε οσοδήποτε στενά όρια.
Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει και από τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος σαν το κοινό όριο των κατώτερων και ανώτερων αθροισμάτων της f στο διάστημα Δ.

Παραδείγματα

1) Να αποδειχθεί ότι $\int_1^3 \sqrt{x^2+3}\,dx < \sqrt{7}+\sqrt{12}$

Απόδειξη

Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+3}$ είναι γν. αύξουσα στο $[1,3]$ με μέγιστη τιμή την $f(3)=\sqrt{12}$, δηλαδή $f(x)\le\sqrt{12}\ \ \forall x\in[1,3] \Rightarrow \int_1^3 \sqrt{x^2+3}\,dx < \int_1^3 \sqrt{12}\,dx = 2\sqrt{12}$

Όμως $\sqrt{7}+\sqrt{12} < 2\sqrt{12}$ **και η ανισότητα δεν αποδείχθηκε.**

Διαιρούμε το διάστημα $[1,3]$ με το σημείο 2 σε δύο διαστήματα και εφαρμόζουμε την προηγούμενη ανισότητα σε καθένα από τα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$.
Στο διάστημα $[1,2]$ η μέγιστη τιμή της f είναι η $f(2)=\sqrt{7}$ και στο διάστημα $[2,3]$ η μέγιστη τιμή της f είναι η $f(3)=\sqrt{12}$.

Είναι: $\int_1^2 \sqrt{x^2+3}\,dx < \sqrt{7}\cdot(2-1)=\sqrt{7}$

και $\int_2^3 \sqrt{x^2+3}\,dx < \sqrt{12}\cdot(3-2)=\sqrt{12}$

Με πρόσθεση κατά μέλη βρίσκουμε $\int_1^3 \sqrt{x^2+3}\,dx < \sqrt{7}+\sqrt{12}$ και η ανισότητα αποδείχθηκε.

2) Να αποδειχθεί ότι $\mathbf{\frac{13}{30}+\frac{3\sqrt{3}}{8} < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \frac{\eta\mu x}{x}dx < \frac{14}{15}+\frac{3\sqrt{3}}{8}}$

Απόδειξη

Βρίσκουμε την μονοτονία της $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$ στο $\Delta=[\frac{\pi}{6},\pi]$

$f'(x)=\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$

Θέτουμε $g(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x,\ x\in[0,\pi]$

$g'(x)=\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=-x\eta\mu x<0\ \ \forall x\in(0,\pi)$ άρα η g είναι γν. φθίνουσα στο $[0,\pi]$, επομένως $g(x)<g(0)=0\ \ \forall x\in(0,\pi)$, επομένως και $\forall x\in(\frac{\pi}{6},\pi)$

Άρα είναι και $f'(x)<0\ \ \forall x\in(\frac{\pi}{6},\pi)$ και η f είναι γν. φθίνουσα στο $[\frac{\pi}{6},\pi]$

Διαιρούμε το διάστημα $\Delta=[\frac{\pi}{6},\pi]$ σε 5 ίσα διαστήματα $[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{6}]$, $[\frac{2\pi}{6},\frac{3\pi}{6}]$, $[\frac{3\pi}{6},\frac{4\pi}{6}]$, $[\frac{4\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$, $[\frac{5\pi}{6},\pi]$ και εφαρμόζουμε την σχέση (4) της μεθόδου που αναπτύξαμε.

Θα έχουμε:

$$\frac{\pi}{6}\left[f(\frac{2\pi}{6})+f(\frac{3\pi}{6})+f(\frac{4\pi}{6})+f(\frac{5\pi}{6})+f(\pi)\right]\le\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}\frac{\eta\mu x}{x}dx\le$$

$$\frac{\pi}{6}\left[f(\frac{\pi}{6})+f(\frac{2\pi}{6})+f(\frac{3\pi}{6})+f(\frac{4\pi}{6})+f(\frac{5\pi}{6})\right]$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές της f βρίσκουμε τελικά

$$\frac{13}{30}+\frac{3\sqrt{3}}{8}<\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}\frac{\eta\mu x}{x}dx<\frac{14}{15}+\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Ή προσεγγιστικά $1,083<\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}\frac{\eta\mu x}{x}dx<1,583$

Σημείωση: Η τιμή του ολοκληρώματος είναι 1,336

Η συνάρτηση $G(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

Το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt$ ορίστηκε στο σχολικό βιβλίο στην περίπτωση που η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα με άκρα τα α και β.

Στην περίπτωση $\alpha=\beta$ ορίστηκε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt=0$

Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt$ είναι ένας πραγματικός αριθμός που εξαρτάται από τη συνάρτηση f και τα άκρα α και β του διαστήματος.
Αν επομένως διατηρήσουμε το άκρο α σταθερό ενώ το άκρο β παίρνει τιμές από ένα σύνολο, τότε ορίζεται μια συνάρτηση της οποίας η τιμή για δεδομένη συνάρτηση και δεδομένο α, εξαρτάται μόνο από το επάνω όριο β.

Ορίζεται δηλαδή μια συνάρτηση με τύπο $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

Ανάλογα ορίζεται και η σύνθετη συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$

Σύμφωνα με τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος του σχολικού βιβλίου, η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ ορίζεται όταν η f ορίζεται και είναι συνεχής στο διάστημα μεταξύ των δύο ορίων του ολοκληρώματος [4].

Δηλαδή για το $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt$ θα θεωρούμε αυτόματα ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα με άκρα τα α και β.

Το πρώτο πρόβλημα που θα μελετήσουμε είναι η εύρεση του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης σαν τις παραπάνω. Θα στηριχτούμε αποκλειστικά στον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος του σχολικού βιβλίου.

Πεδίο ορισμού της $G(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

Για να ορίζεται η συνάρτηση G πρέπει το x να παίρνει τέτοιες τιμές, ώστε η f να ορίζεται και να είναι συνεχής στο διάστημα με άκρα τα α και x.

Παραδείγματα

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

---

[4] Το $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt$ μπορεί να οριστεί και σε ασυνεχείς συναρτήσεις, αλλά εδώ θα μελετήσουμε μόνο ολοκληρώματα όπου η f είναι συνεχής στο διάστημα μεταξύ των ορίων του ολοκληρώματος

1) $\mathbf{G(x)=\int_{2}^{x}\sqrt{t-1}\,dt}$

Λύση

Η συνάρτηση $f(t)=\sqrt{t-1}$ έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $A=[1,+\infty)$ και είναι συνεχής σ' αυτό.
Το κάτω όριο $2\in A$. Επομένως **πρέπει και αρκεί** και το επάνω όριο να βρίσκεται στο ίδιο διάστημα ώστε η συνάρτηση G να ορίζεται και να είναι συνεχής στο διάστημα μεταξύ των δύο ορίων.
Άρα το πεδίο ορισμού της G είναι το $B=A=[1,+\infty)$

2) $\mathbf{G(x)=\int_{-2}^{x}\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt}$

Λύση

Το πεδίο ορισμού της $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ είναι το $A=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής σε καθένα από τα δύο διαστήματα $(-\infty,-1)$ και $(1,+\infty)$.
Το κάτω άκρο $-2\in(-\infty,-1)$. Επομένως πρέπει και αρκεί και το άνω άκρο x να ανήκει στο ίδιο διάστημα, δηλ. πρέπει και αρκεί $x\in(-\infty,-1)$.
Επομένως το πεδίο ορισμού της G είναι το $B=(-\infty,-1)$
(αν $x\notin(-\infty,-1)$, π.χ $x=3$, η συνάρτηση f δεν ορίζεται στο $[-2,3]$ και το ολοκλήρωμα δεν έχει νόημα).

Πεδίο ορισμού της $\mathbf{G(x)=\int_{\alpha}^{\beta(x)}f(t)dt}$

Για να ορίζεται η συνάρτηση $G(x)=\int_{\alpha}^{\beta(x)}f(t)dt$, πρέπει πρώτα να ορίζεται το πάνω όριο, πρέπει δηλαδή να υπάρχει το $\beta(x)$.

Αν λοιπόν B είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης β, πρέπει $x\in B$.
Επιπλέον πρέπει η f να ορίζεται και να είναι συνεχής στο διάστημα μεταξύ των δύο ορίων.
Το πεδίο ορισμού της G είναι το σύνολο των τιμών του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω σχέσεις.

Η συνάρτηση $G(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta}f(t)dt$ γράφεται ως $G(x)=-\int_{\beta}^{\alpha(x)}f(t)dt$ και το πεδίο ορισμού της βρίσκεται με τον ίδιο τρόπο.

Παραδείγματα

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

1) $\mathbf{G(x)=\int_{2x-3}^{1}\sqrt{t+1}\,dt}$

Η G γράφεται $G(x)=-\int_{1}^{2x-3}\sqrt{t+1}\,dt$

Το πάνω όριο ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $f(t)=\sqrt{t+1}\,dt$ έχει πεδίο ορισμού το $A=[-1,+\infty)$ και είναι συνεχής σ' αυτό.

Το κάτω όριο $1\in A$.

Επομένως **πρέπει και αρκεί** $2x-3\in[-1,+\infty)\Leftrightarrow\ 2x-3\geq-1\Leftrightarrow x\geq1$

Άρα πεδίο ορισμού της G είναι το $B=[1,+\infty)$

2) $\mathbf{G(x)=\int_{1}^{\sqrt{x}}\frac{t^2}{t-2}dt}$

Για να ορίζεται η G πρέπει να ορίζεται πρώτα το πάνω όριο, άρα πρέπει $x\geq0$ (1)

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(t)=\frac{t^2}{t-2}$ είναι το $A=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ και η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,2)$ και $(2,+\infty)$.

Επειδή το κάτω όριο ανήκει στο διάστημα $(-\infty,2)$ πρέπει και το πάνω όριο να ανήκει στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της f, δηλαδή πρέπει $\sqrt{x}\in(-\infty,2)\Leftrightarrow$ $0\leq\sqrt{x}<2\Leftrightarrow 0\leq x<4$ (2)

Οι (1) και (2) συναληθεύουν όταν $0\leq x<4$, άρα το πεδίο ορισμού της G είναι το $B=[0,4)$

Πεδίο ορισμού της $\mathbf{G(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(t)dt}$

Για να ορίζεται η G πρέπει να ορίζονται τα δύο όρια α(x) και β(x) και η συνάρτηση f να ορίζεται και να είναι συνεχής μεταξύ των δύο ορίων. Οι τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν όλες αυτές οι σχέσεις αποτελούν το πεδίο ορισμού της G.

Παραδείγματα

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

1) $\mathbf{G(x)=\int_{2x-1}^{3x+2}\frac{\eta\mu t}{t-3}\,dt}$

Λύση

Τα δύο όρια του ολοκληρώματος ορίζονται για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Πρέπει τώρα να ορίζεται η και η $f(t)=\frac{\eta\mu t}{t-3}$ και να είναι συνεχής μεταξύ των δύο ορίων.

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$ και η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.
Πρέπει λοιπόν
$\{2x-1\in(-\infty,3)$ και $3x+2\in(-\infty,3)\}$ ή $\{2x-1\in(3,+\infty)$ και $3x+2\in(3,+\infty)\}$

Το 1ο σύστημα των ανισώσεων αληθεύει όταν $x<\frac{1}{3}$, ενώ το 2ο σύστημα αληθεύει όταν $x>2$

Έτσι, το πεδίο ορισμού της G είναι το $B=(-\infty,\frac{1}{3})\cup(2,+\infty)$

2) $\mathbf{G(x)=\int_{\ln(x+1)}^{\sqrt{x}}\frac{e^t}{t\sqrt{t+2}}dt}$

<u>Λύση</u>
Το κάτω όριο ορίζεται όταν $x>-1$ (1)
Το πάνω όριο ορίζεται όταν $x\ge 0$ (2)

Η συνάρτηση $f(t)=\frac{e^t}{t\sqrt{t+2}}dt$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-2,0)\cup(0,+\infty)$ και είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.
Για να ορίζεται η G πρέπει και τα δύο όρια ολοκλήρωσης να ανήκουν στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της f.
Πρέπει δηλαδή
$\{\ln(x+1)\in(-2,0)$ και $\sqrt{x}\in(-2,0)\}$ ή $\{\ln(x+1)\in(0,+\infty)$ και $\sqrt{x}\in(0,+\infty)\}$

Το πρώτο σύστημα είναι αδύνατο επειδή $\sqrt{x}\ge 0\ \ \forall x\ge 0$
Το δεύτερο σύστημα
$\{\ln(x+1)\in(0,+\infty)$ και $\sqrt{x}\in(0,+\infty)\}\Leftrightarrow\{\ln(x+1)>0$ και $\sqrt{x}>0\}\Leftrightarrow$
$\{x+1>1$ και $x>0\}\Leftrightarrow x>0$ (3)
Το σύστημα των ανισώσεων (1), (2), (3) αληθεύει όταν $x>0$
Επομένως το πεδίο ορισμού της G είναι το $B=(0,+\infty)$

Πεδίο ορισμού της $\mathbf{G(x)=\int_{\kappa}^{\lambda}f(x,t)dt}$

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ και $G(x)=\int_{\kappa}^{\lambda}f(x,t)dt$

Για την συνάρτηση που βρίσκεται μέσα στο ολοκλήρωμα μεταβλητή είναι το t (αυτό δηλώνεται από το dt. Το x θεωρείται σταθερά).
Η εύρεση του πεδίου ορισμού της συνάρτησης G ακολουθεί τους ίδιους κανόνες. Δηλαδή πρέπει πρώτα να ορίζεται η σύνθετη συνάρτηση $f(x,t)$ με μεταβλητή το t. Κατόπιν πρέπει η $f(x,t)$ να συνεχής στο διάστημα μεταξύ των ορίων κ και λ.
Οι περιορισμοί αυτοί δίνουν το πεδίο ορισμού της G.

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $G(x)=\int_1^2 f(x^2-2t)dt$

Λύση

Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της σύνθετης συνάρτησης $f(x^2-2t)$ με μεταβλητή το t και x σταθερό.

Πρέπει το x^2-2t να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, δηλ. πρέπει

$$x^2-2t\in[0,+\infty)\Leftrightarrow x^2-2t\geq 0\Leftrightarrow t\leq\frac{x^2}{2}$$

Δηλαδή το πεδίο ορισμού της $f(x^2-2t)$ είναι το $A=(-\infty,\frac{x^2}{2}]$

Πρέπει και αρκεί επιπλέον η $f(x^2-2t)$ να είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$, άρα πρέπει οι αριθμοί 1 και 2 να βρίσκονται στο διάστημα $(-\infty,\frac{x^2}{2}]$.

Πρέπει και αρκεί προς τούτο να ισχύει $2\leq\frac{x^2}{2}\Leftrightarrow x^2-4\geq 0\Leftrightarrow(x\leq -2$ ή $x\geq 2)$

Επομένως το πεδίο ορισμού της G είναι το $B=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

Παρατήρηση

Δίνουμε μια άλλη λύση η οποία φαινομενικά είναι όρθή, έχει όμως ένα σφάλμα το οποίο και θα εξηγήσουμε.

Εκτελούμε τον μετασχηματισμό $x^2-2t=u$, άρα $dt=-\frac{1}{2}du$

Όταν $t=1\Rightarrow u=x^2-2$ και όταν $t=2\Rightarrow u=x^2-4$, άρα

$$G(x)=-\frac{1}{2}\int_{x^2-2}^{x^2-4}f(u)du$$

Το πεδίο ορισμού της G τώρα μπορεί να βρεθεί πιο γρήγορα. Πρέπει τα δύο όρια του ολοκληρώματος να βρίσκονται στο διάστημα $[0,+\infty)$.

Προς τούτο πρέπει και αρκεί $x^2-4\geq 0\Leftrightarrow(x\leq -2$ ή $x\geq 2)$

Άρα το πεδίο ορισμού της G είναι το $B=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με την προηγούμενη λύση, όμως η λύση αυτή δεν είναι ορθή για τον εξής λόγο:

Κάθε πράξη που γίνεται στο αρχικό ολοκλήρωμα για να φτάσουμε στο τελικό ολοκλήρωμα $G(x)=-\frac{1}{2}\int_{x^2-2}^{x^2-4}f(u)du$ για να είναι επιτρεπτή πρέπει να γίνεται μέσα στο πεδίο ορισμού της G. Το πεδίο ορισμού πρέπει να προηγείται κάθε πράξης, αλλιώς κάποιες πράξεις ίσως δεν είναι επιτρεπτές.

Δείχνουμε με πιο απλό αντιπαράδειγμα το λάθος στον παραπάνω συλλογισμό.

Αντιπαράδειγμα

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{2}{x^2}$ και $g(x)=\frac{1}{x}$. Να βρεθεί η συνάρτηση $g\circ f$

Ο τύπος της $g\circ f$ είναι $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\frac{1}{\frac{2}{x^2}}=\frac{x^2}{2}$

Το πεδίο ορισμού της $h(x)=\frac{x^2}{2}$ είναι το $\mathbb{R}$, αν δηλαδή δεν λάβουμε υπόψη τα πεδία ορισμού των f και g βρίσκουμε ως πεδίο ορισμού της $g\circ f$ το $\mathbb{R}$.

Όμως: Τα πεδία ορισμού των f και g είναι τα A και B αντίστοιχα με $A=B=\mathbb{R}^*$
Η $g\circ f$ έχει **εξ ορισμού** πεδίο ορισμού το σύνολο
$\Gamma=\{x\in A \text{ και } f(x)\in B\}=\{x\neq 0 \text{ και } f(x)\neq 0\}=\mathbb{R}^*$ και όχι το $\mathbb{R}$

Το σφάλμα στην εύρεση του πεδίου ορισμού της $g\circ f$ από τον τύπο $(g\circ f)(x)=\frac{x^2}{2}$ είναι ότι οι πράξεις που οδήγησαν στον τελικό αυτό τύπο της $g\circ f$ δεν είναι επιτρεπτές όταν $x=0$.

Παραγώγιση της συνάρτησης $G(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

Φέτος (2015-16) η παραγώγιση της συνάρτησης G είναι ένα διφορούμενο θέμα. Ενώ δηλαδή θα θεωρούμε γνωστό το ότι η συνάρτηση αυτή είναι παράγουσα της f, οι οδηγίες προς τους καθηγητές από το Υπουργείο Παιδείας λένε ότι δεν θα διδαχθούν ασκήσεις που αναφέρονται στην παραγώγιση των συναρτήσεων $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ και $G(x)=\int_{\alpha}^{\beta(x)} f(t)dt$.

Για τον λόγο αυτόν δεν θα δώσουμε εδώ παραδείγματα παραγώγισης.

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης μπορεί να γίνει με εύρεση μιας αρχικής της.
Αν δηλ. F είναι μια αρχική της f στο $[\alpha,\beta]$ (οποιαδήποτε αρχική), τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\left[F(x)\right]_{\alpha}^{\beta}=F(\beta)-F(\alpha)$$

Υπάρχουν πολλές μέθοδοι (τρόποι) για την εύρεση ενός ορισμένου ολοκληρώματος. Στο σχολικό βιβλίο δεν αναφέρονται οι μέθοδοι αυτές, υπάρχουν όμως σχετικές ασκήσεις για τις οποίες ο μαθητής πρέπει μόνος του να τις επινοήσει.

Π.χ. άσκηση 2 της Γ΄ ομάδας

i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathbf{I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1}dx}$

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathbf{I_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu x}dx}$

Για τη λύση του (i) ερωτήματος ο μαθητής πρέπει να σκεφτεί ότι υπάρχουν $\alpha,\beta \in \mathbb{R} : \frac{1}{x^2-1} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1} \quad \forall x \neq \pm 1$

και κατόπιν να ολοκληρώσει τη σχέση αυτή από 0 ως $\frac{1}{2}$.

Με ποια λογική όμως θα σκεφτεί κάτι τέτοιο;

Υπάρχει σχετικό παράδειγμα στο σχολικό βιβλίο στα αόριστα ολοκληρώματα που φέτος (τα αόριστα ολοκληρώματα) είναι εκτός ύλης. Πιο συγκεκριμένα ζητείται να υπολογιστεί το $\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx$

Στη λύση που ακολουθεί αναφέρεται κατά λέξη:

"Αναζητούμε πραγματικούς Α, Β έτσι ώστε να ισχύει $\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$*"*

Για τον μαθητή η σκέψη αυτή είναι εντελώς παράλογη. Ο μαθητής ποτέ δεν διδάχτηκε ότι κάτι τέτοιο, στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι δυνατό. Η ανάλυση κλάσματος σε άθροισμα απλούστερων κλασμάτων είναι μια ξεχωριστή θεωρία για την οποία ποτέ δεν άκουσε κάτι σχετικό. Το λυμένο παράδειγμα του βιβλίου δεν του δίνει την βεβαιότητα ότι αυτό μπορεί να γίνει και για το κλάσμα $\frac{1}{x^2-1}$

Ο υπολογισμός κατόπιν του $I_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu x}dx$ μπορεί να γίνει ως εξής:

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu x}dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx \overset{\sigma\upsilon\nu x = y}{=}$$

$$-\int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{1-y^2}dy = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y^2-1}dy = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1}dx = -I_1$$

Ο τρόπος υπολογισμού του I_2 ακόμη και στα Πανεπιστημιακά βιβλία δίνεται ως μέθοδος ολοκλήρωσης. Δεν είναι δυνατόν να ζητούμε από τους μαθητές να τον σκεφτούν μόνοι τους.

Το ότι δεν υπάρχει κάτι εκτός θεωρίας σχολικού βιβλίου δεν αρκεί για να ζητούμε από τους μαθητές να σκεφτούν μια τέτοια λύση.

Είναι γνωστό ότι κάθε θεωρία μπορεί να προκύψει με την βοήθεια των ορισμών και προηγούμενων θεωριών, αλλά είναι παράλογο να ζητούμε από τους μαθητές να λύσουν π.χ μια άσκηση που στηρίζεται στο Πυθαγόρειο θεώρημα που δεν έχουν διδαχθεί

ακόμη, επειδή το Πυθαγόρειο θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί με την βοήθεια των ομοίων τριγώνων που έχουν ήδη διδαχθεί.
Η έλλειψη μεθόδων ολοκλήρωσης κάνει ακόμη και τις εύκολες ασκήσεις πολύ δύσκολες.
Π.χ για κάποιον που διδάχθηκε ως μέθοδο τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} \eta\mu^{\nu} x dx$ όταν ο ν είναι περιττός, ο υπολογισμός του $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu^{5} x dx$ είναι μια υπόθεση ρουτίνας.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu^{5} x dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu^{4} x \cdot \eta\mu x dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (\eta\mu^{2} x)^{2} \eta\mu x dx = -\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (1-\sigma\upsilon\nu^{2} x)^{2} (\sigma\upsilon\nu x)' dx \overset{\sigma\upsilon\nu x = y}{=}$$

$$-\int_{1}^{\frac{1}{2}} (1-y^{2})^{2} dy \text{ κ.λ.π}$$

Για κάποιον που δεν διδάχθηκε την αναφερόμενη μέθοδο, είναι πολύ δύσκολο να σκεφτεί τον τρόπο υπολογισμού.
Στο σχολικό βιβλίο αναφέρονται δύο μέθοδοι ολοκλήρωσης. Η ολοκλήρωση κατά παράγοντες και η ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής (αντικατάσταση με νέα μεταβλητή).
Σε κάθε άλλη περίπτωση, για τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος, πρέπει ο μαθητής να “μαντέψει” μια αρχική F και να χρησιμοποιήσουμε κατόπιν το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$

Παραλείπουμε την ολοκλήρωση κατά παράγοντες και δείχνουμε την ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής που παρουσιάζει και το μεγαλύτερο ενδιαφέρον και δυσκολίες.

Αλλαγή μεταβλητής στο ορισμένο ολοκλήρωμα

Ισχύει το εξής θεώρημα:

Αν η συνάρτηση g έχει συνεχή παράγωγο στο $\Delta = [\alpha, \beta]$, η f είναι συνεχής στο $g(\Delta)$ και $\alpha, \beta \in g(\Delta)$ τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du \quad \text{ή το ίδιο}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx \qquad (1)$$

Ερωτήματα δημιουργούνται για την αντίστροφη διαδικασία. Αν δηλαδή και με ποιες προϋποθέσεις μπορούμε να γράψουμε $\int_{u_1}^{u_2} f(u)du = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx$ θέτοντας

όπου $u = g(x)$. Τα α και β βρίσκονται από τις σχέσεις $g(\alpha) = u_1$, $g(\beta) = u_2$

Μια τέτοια αλλαγή γίνεται στο σχολικό βιβλίο για τον υπολογισμό του εμβαδού κύκλου. Η εφαρμογή αυτή είναι εκτός εξεταστέας ύλης, αξίζει όμως να δούμε πότε η αλλαγή αυτή είναι επιτρεπτή. Το πρόβλημα εντοπίζεται στην περίπτωση που η συνάρτηση g δεν είναι 1-1, οπότε η εξίσωση $g(x)=u_1$ μπορεί να έχει περισσότερες από μια λύσεις.
Η προηγούμενη πρόταση του σχολικού βιβλίου ισχύει και στην περίπτωση αυτή, οποιαδήποτε και αν είναι τα όρια α,β, αρκεί να πληρούν τις σχέσεις $u_1=g(\alpha)$, $u_2=g(\beta)$ [5] και τις προϋποθέσεις που αναφέραμε για την σχέση (1).

Αποδεικνύεται δηλαδή ότι η τιμή του ολοκληρώματος είναι η ίδια όπως και αν επιλεγούν τα όρια α και β, αρκεί να ισχύουν οι προϋποθέσεις που αναφέραμε.[6]

Στην περίπτωση όπου $g(\Delta)\supset[\alpha,\beta]$ αποδεικνύεται ότι μπορούμε να επεκτείνουμε την f στο διάστημα $g(\Delta)$ ώστε η επέκταση f_1 να είναι συνεχής (αυτό μπορεί να γίνει με άπειρους τρόπους). Αν f_1 είναι οποιαδήποτε συνεχής επέκταση της f, αποδεικνύεται τότε ότι $\int_{u_1}^{u_2} f(u)du=\int_{\alpha}^{\beta} f_1(g(x))g'(x)dx$

Δίνουμε μερικά παραδείγματα εφαρμογής του παραπάνω θεωρήματος

Παράδειγμα 1ο

Να υπολογιστεί το $\mathbf{I=\int_0^4 x\sqrt{9+x^2}\,dx}$

Λύση

Θα υπολογίσουμε το I με το θεώρημα της αντικατάστασης. Θα γράψουμε την συνάρτηση $h(x)=x\sqrt{9+x^2}$ με την μορφή $f(g(x))g'(x)$ για να εφαρμόσουμε τον τύπο

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du \qquad (1)$$

Είναι $x\sqrt{9+x^2}=\frac{1}{2}\sqrt{9+x^2}(9+x^2)'=\frac{1}{2}f(g(x))g'(x)$ όπου $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=9+x^2$

---

[5] Βλέπε σχετικά:
α) ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ Θ. Καζαντζή, εκδόσεις ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ, σελ. 177-184

β) https://drive.google.com/file/d/0B9uh0VymSVrpYTB4NlJJeGp5U3c/edit?pli=1
Αντώνης Κυριακόπουλος- Γιώργος Τασσόπουλος: ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΣΤΑ ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΙΑ ΑΝΑΦΟΡΑ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $g(x)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$

[6] Συζητήσεις πάνω στο θέμα αυτό έχουν γίνει στο mathematica όπου υπάρχει διάσταση απόψεων για το αν θα πρέπει η g να είναι 1-1 ή όχι. Βλέπε σχετικά
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=12539

Για να εφαρμοστεί ο τύπος (1) πρέπει να ισχύουν οι προϋποθέσεις της θεωρίας, πρέπει δηλαδή η παράγωγος της $g(x)=9+x^2$ δηλαδή η $g'(x)=2x$ να είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]=[0,4]$ που πράγματι είναι και η $f(x)=\sqrt{x}$ να είναι συνεχής στο $g([0,4])=[9,25]$ που πράγματι είναι.

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε $I=\frac{1}{2}\int_9^{25}\sqrt{u}\,du=\frac{1}{2}\int_9^{25}u^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_9^{25}=\frac{98}{3}$

<u>Παράδειγμα 2ο</u>

Να υπολογιστεί το $I=\int_{-\rho}^{\rho}\sqrt{\rho^2-x^2}\,dx$ όπου $\rho>0$

<u>Λύση</u>

Όπως αναφέραμε πριν, ο ολοκλήρωμα αυτό υπολογίζει το εμβαδόν του μισού κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$. Θα δείξουμε εδώ πως μπορεί να υπολογιστεί με την μέθοδο της αντικατάστασης εφαρμόζοντας τον τύπο $\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)}f(x)dx$ από το 2ο μέλος προς το 1ο .

Πρέπει να θέσουμε την $f(x)=\sqrt{\rho^2-x^2}$ στη μορφή $f(g(x))g'(x)$ για να εφαρμόσουμε τον παραπάνω τύπο.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\rho\eta\mu x$, $x\in\Delta=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

Είναι $g(-\frac{\pi}{2})=-\rho$, $g(\frac{\pi}{2})=\rho$ και $g(\Delta)=[-\rho,\rho]$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο Δ και η παράγωγός της $g'(x)=\rho\sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής στο Δ

Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{\rho^2-x^2}$ είναι συνεχής στο $g(\Delta)=[-\rho,\rho]$.

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$I=\int_{-\rho}^{\rho}\sqrt{\rho^2-x^2}\,dx=\int_{g(-\frac{\pi}{2})}^{g(\frac{\pi}{2})}f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(g(x))g'(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\rho^2-\rho^2\eta\mu^2x}\,(\rho\eta\mu x)'dx=$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\rho^2|\sigma\upsilon\nu x|\sigma\upsilon\nu x dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\rho^2\sigma\upsilon\nu^2x dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\rho^2\cdot\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}dx=$$

$$\frac{\rho^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx+\frac{\rho^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu 2x dx=\frac{\pi\rho^2}{2}+\frac{\rho^2}{4}\left[\eta\mu 2x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi\rho^2}{2}$$

Στην παραπάνω λύση γράψαμε τα όρια $-\rho$ και ρ με τη μορφή $-\rho=g(-\frac{\pi}{2})$ και $\rho=g(\frac{\pi}{2})$.

Με τον τρόπο αυτόν τα όρια του νέου ολοκληρώματος ήσαν τα $-\frac{\pi}{2}$ και $\frac{\pi}{2}$.

Μπορούμε όμως να γράψουμε και $-\rho = g(\frac{3\pi}{2})$ καθώς και $\rho = g(\frac{5\pi}{2})$ ή ακόμη να επιλέξουμε και άλλες τιμές για τα νέα όρια. Σύμφωνα με όσα είπαμε, η τιμή του ολοκληρώματος θα είναι η ίδια, δηλαδή δεν έχει σημασία αν η συνάρτηση g είναι 1-1 ή όχι. Η πρόταση ισχύει.

Ενδεικτικά θέτουμε στο ολοκλήρωμα του 1ου μέλους τα όρια $\frac{3\pi}{2}$ και $\frac{\pi}{2}$ για να δούμε αν η τιμή του ολοκληρώματος θα είναι πάλι η ίδια. Οι προϋποθέσεις ισχύουν και για νέα όρια και έχουμε:

$$J = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 |\sigma\upsilon\nu x| \sigma\upsilon\nu x dx = -\rho^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\sigma\upsilon\nu x| \sigma\upsilon\nu x dx = \rho^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \rho^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2} dx =$$

$$\frac{\rho^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 1dx + \frac{\rho^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu 2x dx = \frac{\pi\rho^2}{2} + \frac{\rho^2}{4}\left[\eta\mu 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{\pi\rho^2}{2}$$

Παράδειγμα 3ο

Στο παράδειγμα αυτό η συνάρτηση g στην αντικατάσταση $u = g(x)$ δεν είναι 1-1 και υπάρχουν 4 δυνατοί τρόποι επιλογής των νέων ορίων α και β για το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx$. Θα δείξουμε ότι και στις 4 περιπτώσεις η τιμή του ολοκληρώματος $I = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx$ είναι η ίδια.

Χαλαρώνουμε την αυστηρότητα και τον έλεγχο των προϋποθέσεων οι οποίες όμως ισχύουν για να δώσουμε έμφαση στο ότι η τιμή του ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητη της επιλογής των νέων ορίων.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\mathbf{I = \int_{\frac{5}{2}}^{\frac{10}{3}} udu}$

α) Με εύρεση μιας αρχικής της $\mathbf{f(u) = u}$

β) Με την αντικατάσταση $\mathbf{u = x + \frac{1}{x}}$

Λύση

α) $I = \int_{\frac{5}{2}}^{\frac{10}{3}} udu = \left[\frac{u^2}{2}\right]_{\frac{5}{2}}^{\frac{10}{3}} = \frac{1}{2}(\frac{100}{9} - \frac{25}{4}) = \frac{175}{72}$

β) Θέτουμε $u = x + \frac{1}{x} \Rightarrow du = (x + \frac{1}{x})'dx = (1 - \frac{1}{x^2})dx$

Όταν $u=\frac{5}{2}\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0$

Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι οι $\alpha_1=\frac{1}{2}$, $\alpha_2=2$

Όταν $u=\frac{10}{3}\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}\Leftrightarrow 3x^2-10x+3=0$

Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι οι $\beta_1=\frac{1}{3}$, $\beta_2=3$

Η συνάρτηση $g(x)=x+\frac{1}{x}$ δεν είναι λοιπόν $1-1$.

Ονομάζουμε α οποιαδήποτε των ριζών α_1 και α_2 και β οποιαδήποτε των ριζών β_1 και β_2.

Σύμφωνα με τον τύπο της αλλαγής μεταβλητής για το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι:

$$I=\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{10}{3}} u\,du=\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}(x+\frac{1}{x})(1-\frac{1}{x^2})dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{x^2-1}{x^2}dx=$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{x^4-1}{x^3}dx=\int_{\alpha}^{\beta}(x-x^{-3})dx=\frac{1}{2}\left[x^2+\frac{1}{x^2}\right]_{\alpha}^{\beta}=\frac{1}{2}\left[\left(\beta^2+\frac{1}{\beta^2}\right)-\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)\right]$$

Υπάρχουν 4 δυνατοί συνδυασμοί για τις τιμές των α και β. Για όλους αυτούς τους συνδυασμούς των α και β η τιμή του ολοκληρώματος I είναι η ίδια, αφού οι α_1 και α_2 είναι αντίστροφοι, άρα η τιμή του $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}$ και για τις δύο τιμές του α είναι η ίδια και ίση με $\frac{17}{4}$. Το ίδιο ισχύει και για την τιμή του $\beta^2+\frac{1}{\beta^2}=\frac{82}{9}$.

Έτσι για κάθε επιλογή των τιμών α και β η τιμή του ολοκληρώματος είναι πάντοτε η ίδια και ίση με $\frac{1}{2}(\frac{82}{9}-\frac{17}{4})=\frac{175}{72}$

Παράδειγμα 4ο

Στο παράδειγμα αυτό η συνάρτηση g δεν είναι 1-1 και η f δεν ορίζεται σε ολόκληρο διάστημα $g(\Delta)$. Υπάρχουν πάλι 4 τρόποι επιλογής των νέων ορίων α και β, αλλά χρειάζεται και επέκταση της f ώστε η νέα συνάρτηση f_1 να ορίζεται στο διάστημα $g(\Delta)$.

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ με $f(u)=u^2$ $\forall u\in[0,3]$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^3 f(u)du$

α) Με εύρεση μιας αρχικής της f

β) Με την αντικατάσταση $u=g(x)=x^2-2x$

Λύση

α) $I=\int_0^3 u^2du=\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^3=9$

β) Θέτουμε $u=x^2-2x\Rightarrow du=2(x-1)dx$

Όταν $u=0\Leftrightarrow x^2-2x=0$. Οι ρίζες αυτής είναι $\alpha_1=0,\ \alpha_2=2$

Όταν $u=3\Leftrightarrow x^2-2x=3$. Οι ρίζες αυτής είναι $\beta_1=-1,\ \beta_2=3$

Η συνάρτηση g λοιπόν δεν είναι $1-1$

Ονομάζουμε α οποιαδήποτε των τιμών $\alpha_1,\ \alpha_2$ και β οποιαδήποτε των τιμών $\beta_1,\ \beta_2$

Συνδυάζοντας κάθε τιμή του α με κάθε τιμή του β δημιουργούνται 4 κλειστά διαστήματα της μορφής $\Delta=[\alpha,\beta]$ ή $\Delta=[\beta,\alpha]$

Θα εξετάσουμε για ποια από τα διαστήματα αυτά ισχύει ο τύπος της αλλαγής μεταβλητής $\int_{u_1}^{u_2} f(u)du=\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx$

Το πρόβλημα εντοπίζεται στην περίπτωση που το διάστημα $[0,3]$ είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου $g(\Delta)$.

Βρίσκουμε λοιπόν το $g(\Delta)$ για κάθε δυνατό συνδυασμό των τιμών α και β.

Είναι $g'(x)=2(x-1)$

Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών της g.

x	-∞		β_1=-1		α_1=0		1		α_2=2		β_2=3		+∞
g΄(x)		-		-		-	0	+		+		+	
g (x)	+∞	↘	3	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	3	↗	+∞

Τα 4 διαστήματα με άκρα τα α και β και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών της g σε αυτά όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα είναι:

α) $\Delta_1=[\beta_1,\alpha_1]=[-1,0]$ με $g(\Delta_1)=g([-1,0])=[0,3]$

β) $\Delta_2=[\alpha_1,\beta_2]=[0,3]$ με $g(\Delta_2)=g([0,1])\cup g([1,3])=[-1,0]\cup[-1,3]=[-1,3]$

γ) $\Delta_3=[\beta_1,\alpha_2]=[-1,2]$ με $g(\Delta_3)=g([-1,1])\cup g([1,2])=[-1,3]\cup[-1,0]=[-1,3]$

δ) $\Delta_4=[\alpha_2,\beta_2]=[2,3]$ με $g(\Delta_4)=g([2,3])=[0,3]$

Για τις περιπτώσεις (α) και (δ) επειδή η f είναι ορισμένη και συνεχής στο $g(\Delta)=[0,3]$ εφαρμόζεται ο τύπος της αλλαγής και είναι:

Για το Δ_1 :

$$I=\int_0^3 f(u)du=\int_0^{-1} f(g(x))g'(x)dx=\int_0^{-1} h(x)dx$$

όπου $h(x)=f(g(x))g'(x)dx=(x^2-2x)^2 2(x-1)=2x^5-10x^4+16x^3-8x^2$

Μια αρχική της h στο $\mathbb{R}$ είναι η $H(x)=\frac{x^6}{3}-2x^5+4x^4-\frac{8}{3}x^3$

Άρα $I = H(-1) - H(0) = 9 - 0 = 9$

Για το Δ_4

$$I = \int_0^3 f(u)du = \int_2^3 h(x)dx = H(3) - H(2) = 9 - 0 = 9$$

Για τις περιπτώσεις (β) και (γ) επειδή $g(\Delta) = [-1,3] \supset [0,3]$ δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε άμεσα τον τύπο της αλλαγής.
Θα εφαρμόσουμε τον τύπο της αλλαγής για μια επέκταση της f στο $[-1,3]$ ή και σε ευρύτερο σύνολο.

Θα επιβεβαιώνουμε τον τύπο της αλλαγής στην περίπτωση αυτή επεκτείνοντας την f με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Η επέκταση f_1 της f μπορεί να είναι οποιαδήποτε, αρκεί να είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,3]$.

1η επέκταση της f:
Θεωρούμε την επέκταση f_1 της f στο $\mathbb{R}$ με $\mathbf{f_1(u) = u^2}$ $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}$
Η f είναι συνεχής στο $[-1,3]$ και θα έχουμε:

Για το Δ_2

$$I = \int_0^3 f(u)du = \int_0^3 f_1(u)du = \int_0^3 f_1(g(x))g'(x)dx = \int_0^3 h(x)dx = H(3) - H(0) = 9 - 0 = 9$$

Για το Δ_3

$$I = \int_0^3 f(u)du = \int_2^{-1} f_1(u)du = \int_2^{-1} f_1(g(x))g'(x)dx = \int_2^{-1} h(x)dx =$$
$$H(-1) - H(2) = 9 - 0 = 9$$

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση η τιμή του ολοκληρώματος είναι η ίδια, ίση με 9.

2η επέκταση της f:

Μια άλλη συνεχής επέκταση της f στο $[-1,3]$ είναι η $\mathbf{f_1(x)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \textbf{αν } \mathbf{u} \in [-1,0] \\ \mathbf{u^2} & \textbf{αν } \mathbf{u} \in [0,3] \end{cases}$

Για τη συνάρτηση αυτή, στο διάστημα Δ (οποιοδήποτε από τα Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4) είναι:

$$I = \int_0^3 f(u)du = \int_\alpha^\beta f_1(u)du = \int_\alpha^\beta f_1(g(x))g'(x)dx = \int_\alpha^\beta h_1(x)dx$$

Όπου $h_1(x) = f_1(g(x))g'(x)$

Από τον πίνακα μεταβολών προκύπτουν τα εξής σύνολα τιμών για την $g(x) = x^2 - 2x$
$g([-1,0]) = [g(0), g(-1)] = [0,3]$
$g([0,1]) = [g(1), g(0)] = [-1,0]$

$g([1,2]) = [g(1), g(2)] = [-1, 0]$
$g([2,3]) = [g(2), g(3)] = [0, 3]$

Επομένως $h_1(x) = \begin{cases} h(x) & \text{αν} \quad x \in [-1,0] \\ 0 & \text{αν} \quad x \in [0,2] \\ h(x) & \text{αν} \quad x \in [2,3] \end{cases}$

Για τα διαστήματα Δ_1 και Δ_4 είναι όπως και πριν $I = 9$

Για το Δ_2

$$I = \int_0^3 f(u)du = \int_0^3 f_1(u)du = \int_0^3 h_1(x)dx = \int_0^2 h_1(x)dx + \int_2^3 h_1(x)dx =$$
$$\int_0^2 0dx + \int_2^3 h(x)dx = H(3) - H(2) = 9 - 0 = 9$$

Για το Δ_3

$$I = \int_0^3 f(u)du = \int_0^3 f_1(u)du = \int_2^{-1} h_1(x)dx = -\int_{-1}^2 h_1(x)dx = -\int_{-1}^0 h_1(x)dx - \int_0^2 h_1(x)dx =$$
$$-\int_{-1}^0 h(x)dx - \int_0^2 0dx = -H(0) + H(-1) = 0 + 9 = 9$$

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση είναι και πάλι $I = 9$

3η επέκταση της f:

Μια άλλη συνεχής επέκταση της f είναι η $\mathbf{f_1(u)} = \begin{cases} \mathbf{u} & \boldsymbol{\alpha\nu} \quad \mathbf{u \in [-1,0]} \\ \mathbf{u^2} & \boldsymbol{\alpha\nu} \quad \mathbf{u \in [0,3]} \end{cases}$

Θα είναι και πάλι $I = \int_0^3 f(u)du = \int_0^3 f_1(u)du = \int_\alpha^\beta f_1(g(x))g'(x)dx = \int_\alpha^\beta h_1(x)dx$

όπου $h_1(x) = f_1(g(x))g'(x) = f_1(x^2 - 2x)2(x-1)$

Σύμφωνα με τα παραπάνω θα είναι: $h_1(x) = \begin{cases} h(x) & \text{αν} \quad x \in [-1,0] \\ h_2(x) & \text{αν} \quad x \in [0,2] \\ h(x) & \text{αν} \quad x \in [2,3] \end{cases}$

Όπου $h_2(x) = (x^2 - 2x)2(x-1) = 2x^3 - 6x^2 + 4x$

Μια αρχική της h_2 είναι η $G(x) = \frac{x^4}{2} - 2x^3 + 2x^2$

Έχουμε λοιπόν για καθένα από τα διαστήματα Δ

Για το διάστημα Δ_1

$$I=\int_0^3 f(u)du=\int_0^3 f_1(u)du=\int_0^{-1} h_1(x)dx=\int_0^{-1} h(x)dx=H(-1)-H(0)=9-0=9$$

Για το διάστημα Δ_2

$$I=\int_0^3 f(u)du=\int_0^3 f_1(u)du=\int_0^3 h_1(x)dx=\int_0^2 h_1(x)dx+\int_2^3 h_1(x)dx=$$

$$\int_0^2 h_2(x)dx+\int_2^3 h(x)dx=G(2)-G(0)+H(3)-H(2)=0-0+9-0=9$$

Για το διάστημα Δ_3

$$I=\int_0^3 f(u)du=\int_0^3 f_1(u)du=\int_2^{-1} h_1(x)dx=-\int_{-1}^2 h_1(x)dx=-\int_{-1}^0 h_1(x)dx-\int_0^2 h_1(x)dx=$$

$$-\int_{-1}^0 h(x)dx-\int_0^2 h_2(x)dx=-H(0)+H(-1)-G(2)+G(0)=-0+9-0+0=9$$

Για το διάστημα Δ_4

$$I=\int_0^3 f(u)du=\int_0^3 f_1(u)du=\int_2^3 h_1(x)dx=\int_2^3 h(x)dx=H(3)-H(2)=9-0=9$$

Και πάλι, όπως αναμένονταν, η τιμή του ολοκληρώματος είναι πάντοτε η ίδια για οποιαδήποτε επιλογή των ορίων α και β.

Αποδεικνύουμε τώρα μερικά θεωρήματα που αφορούν την αλλαγή της μεταβλητής και είναι χρήσιμα για τη λύση πολλών ασκήσεων.

Τονίζουμε ότι για το σχολικό βιβλίο το dx είναι μέρος του συμβολισμού του ολοκληρώματος και δεν έχουν νόημα πράξεις που περιέχουν το dx.
Παλαιότερα το σύμβολο dx παρίστανε το διαφορικό του x και το dy το διαφορικό της συνάρτησης και τότε οι πράξεις μεταξύ διαφορικών και συναρτήσεων είχαν νόημα.

Για τις αποδείξεις των θεωρημάτων αποφύγαμε τον αυστηρό τρόπο εφαρμογής του θεωρήματος που περιγράψαμε στο 1^{ο} και 2^{ο} παράδειγμα και παραλληλιστήκαμε με τον τρόπο εφαρμογής του θεωρήματος του σχολικού βιβλίου για να γίνουν πιο εύκολα κατανοητά τα θεωρήματα που ακολουθούν.
Ο παραλληλισμός αυτός βοηθά την εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος και στις απλές περιπτώσεις που περιγράφουμε παρακάτω δεν δημιουργεί λάθη.

Κατά την εφαρμογή του τύπου $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\gamma^\delta f(g(y))\,g'(y)dy$ είναι σαν να αντικαθιστούμε το x με το $g(y)$ και το dx με το $g'(y)dy$ τα οποία όπως είπαμε δεν έχουν νόημα

σύμφωνα με την θεωρία του σχολικού βιβλίου.
Τα νέα όρια γ και δ βρίσκονται από τις σχέσεις $g(\gamma)=\alpha$ και $g(\delta)=\beta$

Οι περιορισμοί για να ισχύει η παραπάνω ισότητα ισχύουν στα θεωρήματα που αναφέρουμε παρακάτω και δεν θα ελέγχονται.

Θεώρημα 1ο (Βασική πρόταση)
Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta=[\alpha,\beta]$, τότε

- $\forall x\in[\alpha,\beta]\Rightarrow \alpha+\beta-x\in\Delta$ **και**
- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)\,dx$

Απόδειξη
$x\in[\alpha,\beta]\Rightarrow \alpha\le x\le\beta\Rightarrow -\alpha\ge -x\ge-\beta\Rightarrow \beta\ge\alpha+\beta-x\ge\alpha\Rightarrow \alpha\le\alpha+\beta-x\le\beta\Rightarrow$
$\alpha+\beta-x\in\Delta$
Θέτουμε τώρα $x=\alpha+\beta-y\Rightarrow dx=-dy$
Όταν $x=\alpha\Rightarrow y=\beta$ και
Όταν $x=\beta\Rightarrow y=\alpha$
Άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\beta}^{\alpha} f(\alpha+\beta-y)(-dy)=\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)dx$

Ειδικές περιπτώσεις

- **Αν f συνεχής στο $[0,\alpha]$, τότε $\int_{0}^{\alpha} f(x)dx=\int_{0}^{\alpha} f(\alpha-x)dx$**
- **Αν f συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$, τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x)dx$**

Για να αποδείξουμε μια σχέση της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\gamma}^{\delta} g(x)dx$ δηλαδή ισότητα ολοκληρωμάτων με διαφορετικά όρια, το σύνηθες είναι η αλλαγή μεταβλητής.
Δεν αποκλείονται και άλλοι τρόποι, π.χ η διάσπαση του ολοκληρώματος σε άθροισμα άλλων ολοκληρωμάτων σύμφωνα με τον τύπο $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx+\int_{\gamma}^{\delta} f(x)dx+\int_{\delta}^{\beta} f(x)dx$,
αλλά η αλλαγή μεταβλητής είναι το πλέον σύνηθες στις περιπτώσεις αυτές.
Η αλλαγή μεταβλητής μπορεί να γίνει με άπειρους τρόπους ώστε να δίνει τα νέα όρια στο ολοκλήρωμα. Πρέπει να επιλέγεται κάθε φορά εκείνη η αλλαγή που συμφωνεί και με τα άλλα δεδομένα του προβλήματος.

Στο θεώρημα που μόλις αποδείξαμε, αν και έγινε αλλαγή της μεταβλητής, τα όρια στο νέο ολοκλήρωμα είναι τα ίδια με τα αρχικά. Ασκήσεις που στηρίζονται στην αλλαγή αυτή (και είναι πάρα πολλές) θεωρούνται κατά κάποιο τρόπο “έξυπνες” επειδή τα νέα όρια που είναι ίδια με τα αρχικά δεν παραπέμπουν στην αλλαγή της μεταβλητής.

Θεώρημα 2ο

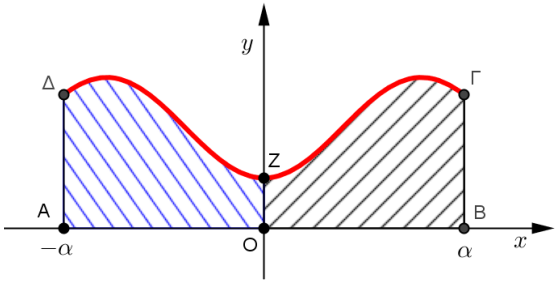
Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι άρτια και συνεχής και $\alpha \in A$, τότε

- $\int_{-\alpha}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{\alpha} f(x)dx$
- $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$

Απόδειξη

Η γεωμετρική ερμηνεία των σχέσεων αυτών δίνεται από το διπλανό σχήμα.
Το γράφημα της f είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα των y και τα εμβαδά των χωρίων ΑΟΖΔ και ΟΒΓΖ είναι ίσα.

Δίνουμε τώρα την αλγεβρική απόδειξη των παραπάνω.



Στο ολοκλήρωμα $I = \int_{-\alpha}^{0} f(x)dx$

κάνουμε την αντικατάσταση
$x = -y \Rightarrow dx = -dy$

Άρα $I = \int_{\alpha}^{0} f(-y)(-dy)$ και επειδή

$f(-y) = f(y)$ διότι η f είναι άρτια, βρίσκουμε τελικά $I = \int_{0}^{\alpha} f(y)dy = \int_{0}^{\alpha} f(x)dx$

Επομένως $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx = \int_{0}^{\alpha} f(x)dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$

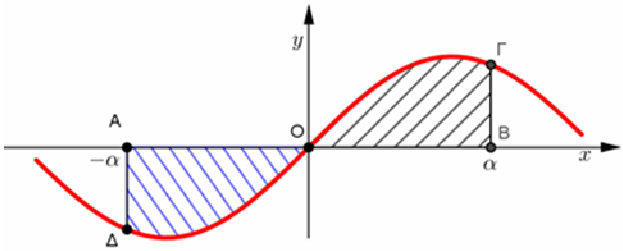
Θεώρημα 3ο

Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι περιττή και συνεχής και $\alpha \in A$, τότε

- $\int_{-\alpha}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$
- $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$

Απόδειξη:

Η γεωμετρική ερμηνεία των σχέσεων αυτών δίνεται στο διπλανό σχήμα.
Το γράφημα της f είναι συμμετρικό ως προς την αρχή Ο των συντεταγμένων και τα εμβαδά των χωρίων ΟΑΔ και ΟΒΓ είναι ίσα.



Το $\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$ είναι το εμβαδόν του

χωρίου ΟΒΓ, ενώ το $-\int_{-\alpha}^{0} f(x)dx$ είναι το εμβαδόν του ΟΑΔ.

Δίνουμε τώρα την αλγεβρική απόδειξη των παραπάνω.

Στο ολοκλήρωμα $I=\int_{-\alpha}^{0} f(x)dx$ κάνουμε την αντικατάσταση $x=-y \Rightarrow dx=-dy$

Άρα $I=\int_{\alpha}^{0} f(-y)(-dy)$ και επειδή $f(-y)=-f(y)$ διότι η f είναι περιττή, βρίσκουμε

τελικά $I=-\int_{0}^{\alpha} f(y)dy=-\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$

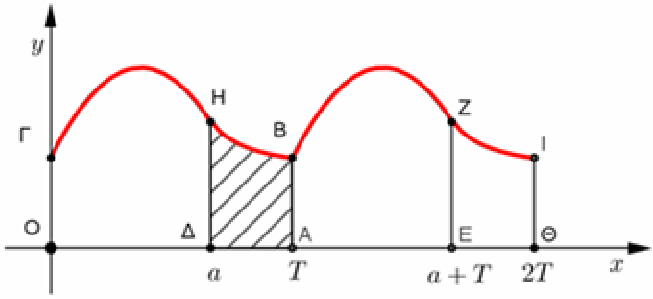
Επομένως $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=\int_{-\alpha}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\alpha} f(x)dx=-\int_{0}^{\alpha} f(x)dx+\int_{0}^{\alpha} f(x)dx=0$

Θεώρημα 4ο

Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και περιοδική με περίοδο Τ, τότε $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx=\int_{0}^{T} f(x)dx$

Απόδειξη

Η γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω πρότασης αποδίδεται μερικώς από το διπλανό σχήμα.



Το $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx$ παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου ΔΕΖΒΗ ενώ το $\int_{0}^{T} f(x)dx$ παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου ΟΑΒΗΓ. Τα εμβαδά αυτά είναι ίσα διότι αποτελούνται από το κοινό μέρος ΔΑΒΗ και τα ίσεμβαδικά χωρία ΑΕΖΒ και ΟΔΗΓ.

Η αλγεβρική απόδειξη της πρότασης ακολουθεί την γεωμετρική ερμηνεία και έχει ως εξής:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx=\int_{\alpha}^{T} f(x)dx+\int_{T}^{\alpha+T} f(x)dx \qquad (1)$$

Στο 2ο ολοκλήρωμα εκτελούμε τον μετασχηματισμό $x=y+T \Rightarrow dx=dy$

Είναι $\int_{T}^{\alpha+T} f(x)dx=\int_{0}^{\alpha} f(y+T)\,dy$ και επειδή η f είναι περιοδική με περίοδο Τ, άρα $f(y+T)=f(y)$ θα έχουμε $\int_{T}^{\alpha+T} f(x)dx=\int_{0}^{\alpha} f(y)dy=\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$

Επομένως η (1) γίνεται: $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{T} f(x)dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$

Δίνουμε τώρα μερικές απλές εφαρμογές των παραπάνω θεωρημάτων.

1) Να δειχθεί ότι $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{\nu} x dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^{\nu} x dx$, $\nu \in \mathbb{R}_{+}^{*}$

<u>Απόδειξη</u>

Σύμφωνα με το 1ο θεώρημα θα έχουμε $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{\nu} x dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{\nu}(\frac{\pi}{2} - x)\, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^{\nu}\, x dx$

2) Να αποδειχθεί ότι $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{\eta\mu x} - \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}) dx = 0$

<u>Απόδειξη</u>

Ονομάζουμε I το ολοκλήρωμα, δηλ. $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{\eta\mu x} - \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}) dx$

Σύμφωνα με το 1ο θεώρημα έχουμε

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{\eta\mu(\frac{\pi}{2} - x)} - \sqrt{\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - x)} \right) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{\sigma\upsilon\nu x} - \sqrt{\eta\mu x}) dx$$

Δηλαδή $I = -I \Rightarrow I = 0$

3) Να υπολογιστεί το $I = \int_{-2}^{2} \frac{x^2 \eta\mu x}{2 + \sigma\upsilon\nu x} dx$

<u>Απόδειξη</u>

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 \eta\mu x}{2 + \sigma\upsilon\nu x}$ είναι περιττή, αφού

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 \eta\mu(-x)}{2 + \sigma\upsilon\nu(-x)} = -\frac{x^2 \eta\mu x}{2 + \sigma\upsilon\nu x} = -f(x)$$

Σύμφωνα επομένως με το 3ο θεώρημα είναι $I = 0$

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$. Να υπολογιστεί το $I = \int_{-1}^{1} x f(x) dx$

Πανελλαδικές 2010, Θέμα Γ, ερώτημα 4

(Υπήρχαν και άλλα ερωτήματα στο θέμα αυτό τα οποία παραλείψαμε)

<u>Λύση</u>

$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx = \int_{-1}^{1}(2x^2 + x\ln(x^2+1)dx = \int_{-1}^{1} 2x^2dx + \int_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx = I_1 + I_2 \qquad (1)$$

Όπου $I_1 = \int_{-1}^{1} 2x^2dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$ και

$$I_2 = \int_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx$$

Το I_2 μπορεί να υπολογιστεί χωρίς τη χρήση των θεωρημάτων που αναφέραμε ως εξής:

Θέτουμε $x^2+1 = y$, άρα $(x^2+1)'dx = dy \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dy$

Όταν $x = -1 \Rightarrow y = 2$

Όταν $x = 1 \Rightarrow y = 2$

Άρα $I_2 = \int_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx = \frac{1}{2}\int_{2}^{2} \ln y dy = 0$

Με τη βοήθεια του 3ου θεωρήματος ο υπολογισμός είναι άμεσος.

Η συνάρτηση $g(x) = x\ln(x^2+1)$ είναι περιττή, άρα $I_2 = \int_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx = 0$

Η (1) τώρα δίνει $\int_{-1}^{1} xf(x)dx = \frac{4}{3}$

Ολοκλήρωμα αντίστροφης συνάρτησης

Το ορισμένο ολοκλήρωμα της αντίστροφης μιας συνάρτησης f μπορεί να υπολογιστεί και αν ακόμη δεν γνωρίζουμε τον τύπο της αντίστροφης.
Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της αντίστροφης μιας συνάρτησης f πρέπει η f^{-1} να είναι συνεχής.
Η συνέχεια της f^{-1} εξασφαλίζεται από το παρακάτω θεώρημα το οποίο όμως δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και αντιστρέψιμη, τότε η f^{-1} είναι συνεχής στο $f(\Delta)$.

Παρά το ότι το θεώρημα αυτό δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο, το 2003 τέθηκε στις Πανελλαδικές εξετάσεις ένα θέμα υπολογισμού εμβαδού στο οποίο απαιτούνταν η συνέχεια της αντίστροφης μιας συνάρτησης η οποία όμως δεν δίνονταν.
Θεωρήθηκε αυθαίρετα από τους υποψήφιους ότι η f^{-1} είναι συνεχής και αυτή η λύση θεωρήθηκε πλήρης.

Το θέμα αυτό είχε ως εξής:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.
Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x = 3$.

Πανελλαδικές 2003

Λύση
Αποδεικνύεται εύκολα ότι η f είναι γν. αύξουσα, άρα 1-1, άρα ορίζεται η αντίστροφή της (αυτό ζητούνταν σε προηγούμενο ερώτημα).
Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $f(\mathbb{R}) = (\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)) = \mathbb{R}$

Βρίσκουμε τα σημεία τομής της $c_{f^{-1}}$ με τον άξονα των x.

Ζητούμε εκείνα τα x για τα οποία $f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = f(0) \Leftrightarrow x = 0$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με $E = \int_0^3 \left|f^{-1}(x)\right| dx$

Είναι $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$
Εκτελούμε τον μετασχηματισμό $x = f(y) \Rightarrow dx = f'(y)dy$
Όταν $x = 0 \Leftrightarrow f(y) = 0 = f(0) \Leftrightarrow y = 0$
Όταν $x = 3 \Leftrightarrow f(y) = 3 = f(1) \Leftrightarrow y = 1$
Επομένως

$$E = \int_0^1 \left|f^{-1}(f(y))\right| f'(y)dy = \int_0^1 |y|(5y^4 + 3y^2 + 1)dy = \int_0^1 (5y^5 + 3y^3 + y)dy =$$

$$\left[\frac{5y^6}{6} + \frac{3y^4}{4} + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{6} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{25}{12} \text{ τ.μ}$$

Ο τρόπος υπολογισμού του ορισμένου ολοκληρώματος της αντίστροφης μιας συνάρτησης είναι αυτός που αναλύσαμε στο παραπάνω πρόβλημα.

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί ευκολότερα αν χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω θεώρημα που ουσιαστικά υπολογίζει το ολοκλήρωμα της αντίστροφης μιας συνάρτησης f από το ολοκλήρωμα της f.

Θεώρημα 5ο
Αν η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και αντιστρέψιμη τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$$

Θεωρούμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο διάστημα ολοκλήρωσης.

Απόδειξη
Η απόδειξη θα γίνει όπως ακριβώς κάναμε στο προηγούμενο παράδειγμα.
Στο 2ο ολοκλήρωμα εκτελούμε τον μετασχηματισμό $x = f(y) \Rightarrow dx = f'(y)dy$
Όταν $x = f(\alpha) \Leftrightarrow f(y) = f(\alpha) \Leftrightarrow y = \alpha$
Όταν $x = f(\beta) \Leftrightarrow f(y) = f(\beta) \Leftrightarrow y = \beta$

Επομένως $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(f(y))f'(y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} yf'(y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} xf'(x)dx$

Άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} xf'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + xf'(x)]dx = \int_{\alpha}^{\beta} [xf(x)]'dx =$$

$$[xf(x)]_{\alpha}^{\beta} = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$$

Με την χρήση του παραπάνω θεωρήματος ο υπολογισμός του εμβαδού του προηγούμενου παραδείγματος μπορεί να γίνει πιο σύντομα.

Πράγματι:

Θέλουμε να υπολογίσουμε το $E = \int_0^3 |f^{-1}(x)|dx$

Σύμφωνα με το θεώρημα είναι:

$$\int_0^1 f(x)dx + \int_{f(0)}^{f(1)} f^{-1}(x)dx = 1 \cdot f(1) - 0 \cdot f(0) = f(1) = 3 \qquad (1)$$

Όμως: $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^5 + x^3 + x)dx = \left[\frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11}{12}$ και η (1) δίνει

$$\int_0^3 f^{-1}(x)dx = 3 - \frac{11}{12} = \frac{25}{12}$$

Είναι $f^{-1}(x) \geq 0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(x)) \geq f(0) \Leftrightarrow x \geq 0$ που ισχύει στο $[0,3]$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \int_0^3 |f^{-1}(x)|dx = \int_0^3 f^{-1}(x)dx = \frac{25}{12}$ τ.μ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

1) Θ.Ν. Καζαντζή: Ολοκληρώματα (Εκδόσεις ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ)

2) Σωτήρη Ντούγια: Απειροστικός Λογισμός Ι (Εκδόσεις Leader Books)

3) Αντώνη Κυριακόπουλου: Συναρτήσεις που ορίζονται από ολοκληρώματα
https://drive.google.com/file/d/0B9uh0VymSVrpV2otVjJOQ0hGMkk/edit

4) Αντώνη Κυριακόπουλου, Γιώργου Τασσόπουλου: Το θεώρημα αντικατάστασης στα ορισμένα ολοκληρώματα και μια αναφορά στις συναρτήσεις της μορφής
$g(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$
https://drive.google.com/file/d/0B9uh0VymSVrpYTB4NlJJeGp5U3c/edit

5) Michael Spivak: Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός (Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης)

6) George B. Thomas – Ross L. Finney: Απειροστικός Λογισμός, τόμος Α΄ (Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης)

7) Tom Apostol: Calculus Vol I

8) http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=7295
Ενδιαφέρουσα συζήτηση – Διαφωνίες για το αν πρέπει στην αντικατάσταση στα ορισμένα ολοκληρώματα η συνάρτηση g να είναι 1-1