ΥΠΑΡΚΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΥΠΑΡΚΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Νίκος Ιωσηφίδης, Μαθηματικός – Φροντιστής, Βέροια

e-mail: iossifid@yahoo.gr

Στην εισήγηση αυτή δείχνουμε πως αποδεικνύουμε ότι υπάρχει ή δεν υπάρχει συνάρτηση με δοσμένες ιδιότητες.
Επιλέξαμε να διερευνήσουμε το θέμα αυτό επειδή πολύ συχνά βλέπουμε ασκήσεις του τύπου:
Μια συνάρτηση έχει τις τάδε ιδιότητες (αναφέρονται οι σχετικές ιδιότητες). Να αποδείξετε ότι … (ζητούνται κάποιες άλλες ιδιότητες της συνάρτησης).
Όμως πολλές από τις συναρτήσεις αυτές δεν υπάρχουν. Σε άλλες πάλι (και αυτές είναι οι περισσότερες) τα δεδομένα είναι περισσότερα από τα απαιτούμενα για να αποδειχθεί η άσκηση. Τέτοια προβλήματα λέμε ότι δεν είναι καλώς ορισμένα. Εδώ γίνονται και τα περισσότερα λάθη, επειδή τα δεδομένα δεν είναι πάντοτε συμβιβαστά.
Τα περισσότερα παραδείγματα που επιλέξαμε είναι από θέματα που δόθηκαν στις Πανελλαδικές εξετάσεις.

Χαρακτηριστικό είναι το θέμα 3Β της 1ης Δέσμης του 1997 στο οποίο δίνονταν μια συναρτησιακή σχέση και ζητούνταν κάποιες ιδιότητες της αναφερόμενης συνάρτησης. Η συνάρτηση όμως αυτή όμως δεν υπήρχε.

Για την ιστορία του θέματος αναφέρουμε σχετικά:

Δημοσιεύσαμε το λάθος του θέματος στην τοπική εφημερίδα ΛΑΟΣ της Ημαθίας την 4-7-1997. Στείλαμε την απόδειξη του λάθους και στα τηλεοπτικά κανάλια και στις εφημερίδες. Ζητήσαμε να μας ενημερώσουν για την πρόθεσή τους (αν θα δημοσιεύσουν την επιστολή μας – απόδειξη του λάθους).
Κανένα κανάλι και καμιά εφημερίδα δεν δημοσιοποίησε το λάθος ούτε μας ενημέρωσε.
Την απόδειξη του λάθους την στείλαμε και στην ΕΜΕ Αθηνών από την οποία ζητήσαμε την τοποθέτησή της, αλλά ούτε από εκεί πήραμε κάποια απάντηση.
Μια εβδομάδα αργότερα από τη δημοσίευση στην εφημερίδα ΛΑΟΣ, την 11-7-1997 η εφημερίδα ΑΔΕΣΜΕΥΤΟΣ ΤΥΠΟΣ δημοσίευσε το λάθος με πρωτοσέλιδο τίτλο ΛΑΘΟΣ ΘΕΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. ΣΤΟΝ ΑΕΡΑ ΟΙ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ. Η ΛΥΣΗ ΣΤΑ … ΔΙΚΑΣΤΗΡΙΑ.
Δεν έγιναν άλλες δημοσιεύσεις (ή ίσως έγιναν, αλλά δεν πήραν έκταση) και έτσι το όλο θέμα “θάφτηκε”.

Αργότερα, σε διάφορες εισηγήσεις μας αναλύσαμε το λάθος του θέματος (Ημερίδα Παραρτήματος Ε.Μ.Ε Ημαθίας, Βέροια 4-3-2007, Μαθηματική εβδομάδα Θεσσαλονίκης 7-3-2007[1], Internet).
Μετά το λάθος αυτό, τα θέματα των Πανελλαδικών εξετάσεων αυτού του τύπου περιορίστηκαν σημαντικά οι συζητήσεις όμως και οι απόψεις πάνω σε τέτοιου είδους θέματα συνεχίζονται μέχρι και σήμερα.

Υπάρχουν δύο απόψεις σχετικές με τα θέματα αυτά.
Η μία άποψη είναι ότι το πρόβλημα είναι λάθος και **δεν έχει νόημα καμιά απόδειξη**.
Αυτή είναι και η άποψη που υποστηρίζουμε εμείς. Ανάλυση αυτής της λογικής παραθέτουμε στην εισήγησή μας με τίτλο ΣΗΜΕΙΑ ΔΙΑΦΩΝΙΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ που παρουσιάσαμε στην 3η Μαθηματική εβδομάδα της Θεσσαλονίκης[2].
Την ίδια εισήγηση παρουσιάσαμε εκτενέστερα στα Σεμινάρια Διδακτικής της Ο.Ε.Φ.Ε στις Σέρρες την Κυρ 24-11-13 [3].

Η άλλη άποψη είναι ότι δεν μας ενδιαφέρει αν τα δεδομένα του προβλήματος είναι σωστά ή όχι. Το μόνο που ενδιαφέρει είναι αν από τα δεδομένα του προβλήματος μπορούμε με συνεπαγωγές να φτάσουμε στο ζητούμενο.
Θα εξηγήσουμε και εδώ γιατί υποστηρίζουμε την 1η άποψη. Αντιγράφουμε ένα μικρό κομμάτι από την εισήγησή μας ΣΗΜΕΙΑ ΔΙΑΦΩΝΙΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.

Δείχνουμε πως από μια λάθος ισότητα $\alpha=\beta$ *καταλήγουμε στην οποιαδήποτε ισότητα* $\gamma=\delta$
$\alpha=\beta \Rightarrow \alpha-\beta=0$ *και απλοποιώντας δια* $\alpha-\beta\neq 0 \Rightarrow 1=0$ *και πολλαπλασιάζοντας επί* $\gamma-\delta$ *προκύπτει* $\gamma-\delta=0 \Rightarrow \gamma=\delta$

Θα εξετάσουμε 4 κατηγορίες συναρτήσεων που ορίζονται ή δεν ορίζονται από τις συναρτησιακές σχέσεις που δίνονται.

- Η 1η κατηγορία αφορά συναρτήσεις υπαρκτές. Θα εξηγήσουμε πως μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξή τους.

- Η 2η κατηγορία αφορά υπαρκτές συναρτήσεις για τις οποίες δίνονται περισσότερα δεδομένα από αυτά που απαιτούνται για τη λύση του αντίστοιχου προβλήματος.

- Η 3η κατηγορία περιλαμβάνει ανύπαρκτες συναρτήσεις, δηλαδή συναρτήσεις που δεν ικανοποιούν όλα τα δεδομένα του προβλήματος.

- Η 4η κατηγορία περιλαμβάνει συναρτήσεις που δεν είναι δυνατό ή είναι πολύ δύσκολο να γνωρίζουμε αν υπάρχουν.

[1] Βλ. Πρακτικά Μαθηματικής εβδομάδας Θεσσαλονίκης σελ. 114-153
[2] Βλ. Πρακτικά Μαθηματικής εβδομάδας Θεσσαλονίκης σελ. 430-439
[3] Μπορείτε να λάβετε το ηλεκτρονικό αρχείο αν μας το ζητήσετε με e-mail

Παράδειγμα 1°
Να αποδειχθεί ότι υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα
$f^3(x)+3f(x)=3x+5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1)

Απόδειξη
Αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ υπάρχουν **ένα ή περισσότερα** $f(x)$ που ικανοποιούν την (1).
Τονίζουμε ιδιαίτερα τη φράση "ένα ή περισσότερα". Δεν πρέπει να συγχέουμε τα εξής:

- Για κάθε συνάρτηση f, η εικόνα του x είναι μοναδική, δηλαδή για κάθε x του πεδίου ορισμού της f υπάρχει μόνο μια εικόνα $f(x)$
- Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ υπάρχει κατάλληλο $f(x)$ που ικανοποιεί την (1). Αυτό το $f(x)$ δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδικό. Δηλαδή η (1) μπορεί να επαληθεύεται από διάφορα $f(x)$, με άλλα λόγια είναι δυνατό να υπάρχουν διάφορες συναρτήσεις που επαληθεύουν την (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(y)=y^3+3y$ η οποία είναι συνεχής.
Η (1) γράφεται $g(f(x))=3x+5$
Ισχύει επίσης $\lim\limits_{y\to-\infty}g(y)=\lim\limits_{y\to-\infty}y^3=-\infty$ και $\lim\limits_{y\to+\infty}g(y)=\lim\limits_{y\to+\infty}y^3=+\infty$. Άρα το σύνολο τιμών της g είναι το $\mathbb{R}$. Επομένως για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ το $3x_0+5$ ανήκει στο σύνολο τιμών της g, δηλαδή υπάρχει κατάλληλο $y_0=f(x_0)$ που επαληθεύει την (1).
Αν λοιπόν σε κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ αντιστοιχίσουμε εκείνο το $f(x_0)$ για το οποίο $g(f(x_0))=3x_0+5$, ορίζεται μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που επαληθεύει την (1).
Έτσι αποδείχθηκε η ύπαρξη **τουλάχιστον** μιας συνάρτησης f που ικανοποιεί την (1).

Δείχνουμε πως μπορούμε να αποδείξουμε την μοναδικότητα της f (αν και αυτό δεν ζητείται στο συγκεκριμένο πρόβλημα).

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(y)=3y^2+3>0$, άρα η g είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$, το αντίστοιχο $y_0=f(x_0)$ με $g(f(x_0))=3x_0+5$ είναι μοναδικό.
Επομένως η συνάρτηση f με την ιδιότητα (1) είναι μοναδική.

Παράδειγμα 2°
Απόδειξη ύπαρξης συνάρτησης. Τα δεδομένα είναι περισσότερα από τα αναγκαία, είναι όμως συμβιβαστά.

ΘΕΜΑ 3° . Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση, 2001

Για μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$\mathbf{f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1}$ **για κάθε** $\mathbf{x\in\mathbb{R}}$**, όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με** $\mathbf{\beta^2<3\gamma}$

α) Να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα κ.λ.π

Δημιουργούνται εδώ τα εξής ερωτήματα:

Υπάρχει άραγε η f; Αν υπάρχει, είναι παραγωγίσιμη; Μήπως υπάρχουν περισσότερες συναρτήσεις που επαληθεύουν τη σχέση που δόθηκε;

Μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της f. Αφού λοιπόν η f είναι μοναδική, **δεν πρέπει να δοθεί ότι είναι παραγωγίσιμη**. Το αν είναι ή δεν είναι, κάτι που προκύπτει και δεν πρέπει να δοθεί. **Αλλιώς το πρόβλημα δεν είναι καλώς ορισμένο.**

Αποδεικνύουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα της f.

Έστω τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $y_0\in\mathbb{R}$ με

$$y_0^3+\beta y_0^2+\gamma y_0=x_0^3-2x_0^2+6x_0-1 \qquad (1)$$

Θέτουμε για ευκολία $x_0^3-2x_0^2+6x_0-1=\alpha$

Η (1) γίνεται: $y_0^3+\beta y_0^2+\gamma y_0=\alpha$ (2)

Θέτουμε $h(x)=x^3+\beta x^2+\gamma x$
Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=3x^2+2\beta x+\gamma$

Η $h'(x)$ είναι τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=4\beta^2-12\gamma=4(\beta^2-3\gamma)<0$, άρα $h'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της h είναι το $\mathbb{R}$.
Επομένως για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικό x με $h(x)=\alpha$, δηλαδή υπάρχει μοναδικό y_0 που ικανοποιεί την (2)
Αν στο τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}$ αντιστοιχίσουμε την τιμή y_0 που ικανοποιεί τη (2) ορίζεται μοναδική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x_0)=y_0$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, δηλαδή το στοιχείο αυτό που δόθηκε δεν είναι απαραίτητο ή όπως αλλιώς λέμε, **το πρόβλημα δεν είναι καλώς ορισμένο.**

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι η f είναι συνεχής.
Θα χρησιμοποιήσουμε κατόπιν τη συνέχεια για να αποδείξουμε ότι η h είναι παραγωγίσιμη.

Είναι: $f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1$

και για $x=x_0$: $f^3(x_0)+\beta f^2(x_0)+\gamma f\ x_0\ =x_0^3-2x_0^2+6x_0-1$

Αφαιρώντας τις δύο σχέσεις κατά μέλη βρίσκουμε:

$$f^3(x)-f^3(x_0)+\beta f^2(x)-\beta f^2(x_0)+\gamma f(x)-\gamma f(x_0)=x^3-x_0^3-2(x^2-x_0^2)+6(x-x_0)\Leftrightarrow$$

$$[f(x)-f(x_0)][f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+\beta(f(x)+f(x_0))+\gamma]=$$

$$(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2-2x-2x_0+6) \qquad (3)$$

Η παράσταση $g(x)=f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+\beta(f(x)+f(x_0))+\gamma=$

$f^2(x)+(f(x_0)+\beta)f(x)+f^2(x_0)+\beta f(x_0)+\gamma$

είναι τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού ως προς $f(x)$ με διακρίνουσα

$\Delta=-3f^2(x_0)-2\beta f(x_0)+\beta^2-4\gamma$ και παρουσιάζει ελάχιστη τιμή ίση με

$-\dfrac{\Delta}{4}=\dfrac{1}{4}[3f^2(x_0)+2\beta f(x_0)-\beta^2+4\gamma]$, δηλαδή

$$g(x)\geq\frac{1}{4}[3f^2(x_0)+2\beta f(x_0)-\beta^2+4\gamma] \qquad (4)$$

Η παράσταση $3f^2(x_0)+2\beta f(x_0)-\beta^2+4\gamma$ είναι επίσης τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού ως προς $f(x_0)$ με διακρίνουσα $\Delta'=16(\beta^2-3\gamma)=-16\kappa$ όπου $\kappa=3\gamma-\beta^2>0$ λόγω της υπόθεσης. Άρα παρουσιάζει ελάχιστη τιμή ίση με $-\dfrac{\Delta'}{12}=\dfrac{4\kappa}{3}$

Η (4) τώρα $\Rightarrow$ $g(x)\ \geq\dfrac{\kappa}{3}$

Από την (3) έχουμε:

$$|f(x)-f(x_0)|\cdot\left|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+\beta(f(x)+f(x_0))+\gamma\right|=$$

$$|x-x_0|\cdot\left|x^2+xx_0+x_0^2-2x-2x_0+6\right|\Rightarrow$$

$$|f(x)-f(x_0)|=\frac{|x-x_0|\left|x^2+xx_0+x_0^2-2x-2x_0+6\right|}{\left|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+\beta(f(x)+f(x_0))+\gamma\right|}\leq$$

$$\frac{3|x-x_0|\left|x^2+xx_0+x_0^2-2x-2x_0+6\right|}{\kappa}\Rightarrow$$

$$-\frac{3|x-x_0||x^2+xx_0+x_0^2-2x-2x_0+6|}{\kappa} \le f(x)-f(x_0) \le$$

$$\le \frac{3|x-x_0||x^2+xx_0+x_0^2-2x-2x_0+6|}{\kappa}$$

από την οποία προκύπτει ότι $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ δηλαδή η f είναι συνεχής στο τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$ άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Παραγωγισιμότητα της f

Από τη σχέση (3) $\Rightarrow$

$$[f(x)-f(x_0)][f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+\beta(f(x)+f(x_0))+\gamma]=$$

$$(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2-2x-2x_0+6) \text{ και με } x\neq x_0 \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^2+xx_0+x_0^2-2x-2x_0+6}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+\beta(f(x)+f(x_0))+\gamma}$$ (ο παρονομαστής είναι διάφορος του 0 αφού όπως αποδείξαμε είναι ≥ $\frac{\kappa}{3}$) και επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, παίρνοντας τα όρια στα δύο μέλη βρίσκουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2+xx_0+x_0^2-2x-2x_0+6}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+\beta(f(x)+f(x_0))+\gamma} \quad \text{ή}$$

$$f'(x_0)=\frac{3x_0^2-4x_0+6}{3f^2(x_0)+2\beta f(x_0)+\gamma}$$

(το όριο του παρονομαστή $3f^2(x_0)+2\beta f(x_0)+\gamma\neq 0$ διότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $4(\beta^2-3\gamma)<0$)

Έτσι η f είναι παραγωγίσιμη στο τυχαίο x_0.

Παράδειγμα 3ο

Το επόμενο παράδειγμα είναι και αυτό της ίδιας κατηγορίας, δηλαδή δίνονται περισσότερα δεδομένα. Αποδεικνύουμε και εδώ την ύπαρξη της συνάρτησης f, την μοναδικότητά της καθώς και την συνέχεια και την παραγωγισιμότητά της, στοιχεία που δίνονται ενώ δεν είναι απαραίτητα. Το παράδειγμα αυτό είναι το

ΘΕΜΑ 4ο Β1: Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση, 2002

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1,\ x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f.

Ανάλυση

Τα δεδομένα εδώ (ύπαρξη της f, παραγωγισιμότητά της, και $f(0)=0$) φαίνονται πολλά.
Αυτό που σκέφτεται κανείς είναι ότι από τη σχέση $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1,\quad x \in \mathbb{R}$ η f ***μάλλον*** είναι ορισμένη, οπότε τα άλλα δεδομένα (παραγωγισιμότητα και $f(0)=0$) ίσως περιττεύουν.

Πριν την απόδειξη ότι τα δεδομένα αυτά δεν είναι απαραίτητα, θα απαντήσουμε στο ερώτημα:

Υπάρχει συνάρτηση που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση για κάθε $x \in \mathbb{R}$;

Η απάντηση είναι καταφατική. Η απόδειξή της γίνεται ως εξής:

α) Ύπαρξη της f

Θεωρούμε την εξίσωση: $y - e^{-y} + 1 = x$ (1)
με άγνωστο τον y.

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την (1).
Θέτουμε $g(y) = y - e^{-y} + 1$
Η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$g'(y) = 1 + e^{-y} > 0$, για κάθε $y \in \mathbb{R}$, άρα η g είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Ακόμη: $\lim\limits_{y\to-\infty} g(y) = \lim\limits_{y\to-\infty}(y - e^{-y} + 1) = -\infty - \infty + 1 = -\infty$

και: $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = \lim\limits_{y\to+\infty}(y - e^{-y} + 1) = +\infty - 0 + 1 = +\infty$

και επειδή η g είναι συνεχής και γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$, το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από την (1) ορίζεται μοναδικό y με $y - e^{-y} + 1 = x$.

Αν λοιπόν σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ αντιστοιχίσουμε την τιμή $f(x) = y$ που επαληθεύει την (1),

ορίζεται μοναδική συνάρτηση f με την ιδιότητα: $f(x) - e^{-f(x)} + 1 = x$.

β) Απόδειξη της $f(0) = 0$

Αφού η συνάρτηση f που επαληθεύει την (1) είναι μοναδική, η συνθήκη $f(0) = 0$ πρέπει να προκύπτει (ή να μην ισχύει).

Θα αποδείξουμε ότι πράγματι $f(0)=0$, δηλαδή το δεδομένο αυτό περιττεύει.

Η σχέση $f(x)-e^{-f(x)}+1=x$ για $x=0$ δίνει:

$f(0)-e^{-f(0)}=-1$ ή, θέτοντας $f(0)=y_0$, $y_0-e^{-y_0}=-1$.

Η τελευταία ισχύει για $y_0=0$, και επειδή αποδείξαμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικό y που ικανοποιεί την (1) , η ρίζα $y_0=0$ είναι μοναδική.

Άρα $f(0)=y_0=0$.

γ) Παραγωγισιμότητα της f

Αφού η συνάρτηση f που ικανοποιεί την (1) είναι μοναδική, η παραγωγισιμότητά της πρέπει επίσης να προκύπτει (ή να μην ισχύει).

Η απόδειξη γίνεται ως εξής:
Η συνάρτηση $g(x)=x-e^{-x}+1$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$g'(x)=1+e^{-x}>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

άρα η g είναι γν. αύξουσα, επομένως και $1-1$, άρα ορίζεται η $g^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, που προφανώς είναι η f.
Επειδή τώρα $g'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η αντίστροφή της, δηλαδή η f, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Ώστε και η ύπαρξη της f και η παραγωγισιμότητά της και η συνθήκη $f(0)=0$ είναι περιττές.

δ) Εύρεση της f′

Η εύρεση της f' τώρα είναι εύκολη.

Παραγωγίζοντας την (1) ως προς x παίρνουμε:

$f'(x)+e^{-f(x)}\cdot f'(x)=1$ ή $f'(x)\left(1+e^{-f(x)}\right)=1$

άρα: $f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{-f(x)}}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 4ο

Στο επόμενο παράδειγμα δεν υπάρχει η αναφερόμενη συνάρτηση f. Είναι το

ΘΕΜΑ 3Β : 1η ΔΕΣΜΗ, 1997

Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε, υπάρχει πραγματικός αριθμός α, ώστε να ισχύει:

$$\mathbf{g(x+y)=e^{y}g(x)+e^{x}g(y)+xy+\alpha} \text{ για κάθε } \mathbf{x,y\in\mathbb{R}}$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\mathbf{g(0)=-\alpha}$

ii) $\mathbf{g'(x)=g(x)+g'(0)e^{x}+x}$ **για κάθε** $\mathbf{x\in\mathbb{R}}$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση[4]. Η μη ύπαρξη συνάρτησης g με την ιδιότητα που δόθηκε μπορεί να οδηγήσει σε οποιοδήποτε παράλογο συμπέρασμα όπως δείχνουμε αμέσως.

Έστω ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση g με την ιδιότητα:

$$g(x+y)=e^{y}g(x)+e^{x}g(y)+xy+\alpha \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

Θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Η (1) για $x=y=0\Rightarrow g(0)=-\alpha$, άρα

$$g(x+y)=e^{y}g(x)+e^{x}g(y)+xy-g(0) \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R} \qquad (2)$$

Η (2) για $y=0\Rightarrow g(x)=e^{x}g(0)+g(x)-g(0)\Leftrightarrow (e^{x}-1)g(0)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $g(0)=0$

Έτσι η (2) γίνεται:

$$g(x+y)=e^{y}g(x)+e^{x}g(y)+xy \quad \text{για κάθε } x,y\in\mathbb{R} \qquad (3)$$

Παραγωγίζουμε την (3) ως προς y

$$g'(x+y)=e^{y}g(x)+e^{x}g'(y)+x$$

και για $y=0\Rightarrow: g'(x)=e^{x}g'(0)+g(x)+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$$g'(x)-g(x)=\beta e^{x}+x \text{ όπου } \beta=g'(0) \qquad (4)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (4) επί e^{-x}

[4] Παραθέτουμε την απόδειξη που δώσαμε στην εφημερίδα ΛΑΟΣ την Παρ 4 Ιουλίου 1997. Τότε το αόριστο ολοκλήρωμα ήταν στην εξεταστέα ύλη

$$e^{-x}g'(x)-e^{-x}g(x)=\beta+xe^{-x} \Leftrightarrow \left(e^{-x}g(x)\right)'=\beta+xe^{-x} \Rightarrow$$

$\int (e^{-x}g(x))'dx=\int(\beta+xe^{-x})dx$ και με ολοκλήρωση κατά παράγοντες στο $2^{ο}$ μέλος βρίσκουμε:

$e^{-x}g(x)=\beta x+c-(x+1)e^{-x}$, άρα

$g(x)=(\beta x+c)e^{x}-(x+1)$

και επειδή $g(0)=0 \Rightarrow c=1$, άρα $g(x)=(\beta x+1)e^{x}-x-1$

Η συνάρτηση αυτή είναι η μόνη που μπορεί να ικανοποιεί τη σχέση που δόθηκε:

$g(x+y)=e^{y}g(x)+e^{x}g(y)+xy$

Με αντικατάσταση βρίσκουμε:

$(\beta x+\beta y+1)e^{x+y}-x-y-1=e^{y}[(\beta x+1)e^{x}-x-1]+e^{x}[(\beta y+1)e^{y}-y-1]+xy$

απ' όπου μετά τις πράξεις βρίσκουμε:

$e^{x+y}-e^{y}(x+1)-e^{x}(y+1)+(x+1)(y+1)=0$

Η τελευταία για $x=y=1$ δίνει: $e^{2}-4e+4=0$ ή $(e-2)^{2}=0$ ή $e=2$ που είναι άτοπο.

Άρα δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση g.

Δίνουμε μια άλλη απόδειξη της μη ύπαρξης της g που δεν χρησιμοποιεί το δεδομένο ότι η g είναι παραγωγίσιμη

<u>Β΄ Απόδειξη</u>

Βρίσκουμε όπως και παραπάνω ότι $g(0)=-\alpha=0$, άρα:

$g(x+y)=e^{y}g(x)+e^{x}g(y)+xy$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$

Για $x=1,\ y=-1$ έχουμε: $e^{-1}g(1)+eg(-1)-1=0 \Leftrightarrow e^{2}g(-1)+g(1)=e$ (1)

Για $x=y=1$: $g(2)=2eg(1)+1$ (2)

Για $x=-1,\ y=2$: $g(1)=e^{2}g(-1)+e^{-1}g(2)-2 \overset{(2)}{\Rightarrow} g(1)=e^{2}g(-1)+e^{-1}\left(2eg(1)+1\right)-2$

$\overset{(2)}{\Rightarrow}$

$e^{2}g(-1)+g(1)+e^{-1}-2=0 \overset{(1)}{\Rightarrow} e+\frac{1}{e}-2=0 \Rightarrow (e-1)^{2}=0 \Rightarrow e=1$ άτοπο.

Επομένως δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση g.

Παράδειγμα 5ο

Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(f(x))=x^2-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(f(x))=x^2-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1)

Θέτουμε στην (1) όπου x το f(x).

$f(f(f(x)))=f^2(x)-2$ και λόγω της (1)

$f(x^2-2)=f^2(x)-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (2)

Αναζητούμε $x,y\in\mathbb{R}$ τέτοιους ώστε:

$x^2-2=y$ (3)

$y^2-2=x$ (4)

Λύνουμε το σύστημα των (3) και (4)

Η (4) λόγω της (3) γίνεται:

$$(x^2-2)^2-2=x\Leftrightarrow x^4-4x^2-x+2=0\Leftrightarrow x^2(x^2-4)-(x-2)=0\Leftrightarrow$$

$$x^2(x+2)(x-2)-(x-2)=0\Leftrightarrow (x-2)(x^3+2x^2-1)=0\Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x^3+x^2+x^2-1)=0\Leftrightarrow (x-2)[x^2(x+1)+(x+1)(x-1)]=0\Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x+1)(x^2+x-1)=0\Leftrightarrow$$

$$x=2 \text{ ή } x=-1 \text{ ή } x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\alpha \text{ ή } x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=\beta$$

Η (3) τότε δίνει αντίστοιχα

$$y=2 \text{ ή } y=-1 \text{ ή } x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=\beta \text{ ή } x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\alpha$$

Το σύστημα λοιπόν των (3) και (4) έχει τις εξής 4 λύσεις

$(x,y)=(2,2)$, $(-1,-1)$, (α,β) , (β,α)

Για τους α και β λοιπόν ισχύουν οι σχέσεις

$\alpha=\beta^2-2$ (5) και

$\beta=\alpha^2-2$ (6)

Θα χρησιμοποιήσουμε αυτές τις σχέσεις για να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει η f.

Στη σχέση (2) θέτουμε διαδοχικά $x=\alpha$, $x=\beta$

$f(\alpha^2-2)=f^2(\alpha)-2$

$f(\beta^2-2)=f^2(\beta)-2$

και λόγω των (5) και (6) έχουμε:

$f(\beta)=f^2(\alpha)-2$
$f(\alpha)=f^2(\beta)-2$

Θέτουμε $f(\alpha)=x$, $f(\beta)=y$ και έχουμε το σύστημα

$y=x^2-2$
$x=y^2-2$

το οποίο όπως βρήκαμε έχει τις λύσεις $(x,y)=(2,2)$, $(-1,-1)$, (α,β) , (β,α)

- Αν $(x,y)=(2,2)$, δηλαδή $f(\alpha)=f(\beta)=2 \Rightarrow f(f(\alpha))=f(f(\beta)) \Rightarrow \alpha^2-2=\beta^2-2 \Rightarrow$ $\alpha^2=\beta^2 \Rightarrow \alpha=\pm\beta$ άτοπο

- Αν $(x,y)=(-1,-1)$, δηλαδή $f(\alpha)=f(\beta)=-1 \Rightarrow f(f(\alpha))=f(f(\beta)) \Rightarrow$ $\alpha^2-2=\beta^2-2 \Rightarrow \alpha^2=\beta^2 \Rightarrow \alpha=\pm\beta$ άτοπο

- Αν $(x,y)=(\alpha,\beta)$, δηλαδή $f(\alpha)=\alpha \Rightarrow f(f(\alpha))=f(\alpha) \Rightarrow \alpha^2-2=\alpha \Rightarrow$ $\alpha^2-\alpha-2=0 \Rightarrow (\alpha=2 \ \text{ ή } \ \alpha=-1)$ άτοπο

- Αν $(x,y)=(\beta,\alpha)$, δηλαδή $f(\alpha)=\beta$ και $f(\beta)=\alpha \Rightarrow f(f(\alpha))=f(\beta) \Rightarrow \alpha^2-2=\alpha \Rightarrow$ $\alpha^2-\alpha-2=0 \Rightarrow (\alpha=2 \ \text{ ή } \ \alpha=-1)$ άτοπο

Άρα δεν υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(f(x))=x^2-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

<u>Παράδειγμα 6ο</u>

<u>ΘΕΜΑ 1ο</u> ***<u>(1η ΔΕΣΜΗ 1998)</u>***

Β) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$\mathbf{f(f(x))+f^3(x)=2x+3,\ x\in\mathbb{R}}$

α) Να αποδείξετε ότι …

Υπάρχει άραγε η παραπάνω συνάρτηση f;

Η απόδειξη της ύπαρξης ή μη της παραπάνω συνάρτησης δε φαίνεται καθόλου εύκολη.

Αν η f δεν υπάρχει τότε κάθε διαδικασία απόδειξης είναι χωρίς νόημα.

Από τα παραπάνω παραδείγματα αναφαίνεται η δυσκολία απόδειξης της ύπαρξης ή μη των σχετικών συναρτήσεων.

Για την κατασκευή τέτοιων προβλημάτων, καλό θα είναι να ξεκινούμε από γνωστή (υπαρκτή) συνάρτηση και μετά να κατασκευάζουμε το πρόβλημα. Αυτήν την τάση βλέπω τελευταία να επικρατεί στα βιβλία, δηλαδή οι περισσότερες από τις αναφερόμενες συναρτήσεις είναι υπαρκτές.

Υπάρχουν στη βιβλιογραφία ασκήσεις (όχι πολλές) που ζητούν να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν συναρτήσεις με δοσμένες ιδιότητες.
Αναφέρουμε τρία παραδείγματα:

1) Υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$, ώστε για κάθε $n>1$ να ισχύει

$f(n)=f(f(n-1))+f(f(n+1))$;

(Βλέπε λύση: Γιάννης Μπαϊλάκης: ΠΑΓΚΟΣΜΙΑ ΘΕΜΑΤΟΓΡΑΦΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ, σελ 87)

2) Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ώστε $f(f(x))=e^{-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$;

(Βλέπε λύση: Γιάννης Μπαϊλάκης, σελ. 168)

3) ***28η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα (Κούβα 1987)***
Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ τέτοια, ώστε $f(f(n))=n+1987$

(Βλέπε λύση: MIHAI ONUCU DRIMBE: 200 de ecuaţii funcţioanale pe N, Z, Q, σελ. 116, ISBN: 973-9417-10-8)