Η ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

Λεων. Ιωσηφίδης, Μαθηματικός, Βέροια

Είναι γνωστό ότι:

Σε κάθε τρίγωνο κάθε πλευρά είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από την διαφορά τους.

Εδώ, όταν λέμε διαφορά, εννοούμε φυσικά την απόλυτη τιμή της διαφοράς, διότι στην Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν υπάρχουν αρνητικά μεγέθη.

Αν λοιπόν ονομάσουμε α, β, γ τις τρεις πλευρές ενός τριγώνου, θα έχουμε τις εξής ανισότητες:

$$|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}|<\boldsymbol{\alpha}<\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}, \quad |\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}|<\boldsymbol{\beta}<\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}, \quad |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|<\boldsymbol{\gamma}<\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$$

Το ερώτημα είναι:

Ποιες σχέσεις αρκούν ώστε τα α, β, γ να είναι μέτρα πλευρών τριγώνου;

Υπάρχουν πολλά προβλήματα των οποίων η λύση στηρίζεται ακριβώς σ' αυτό το ερώτημα. Αναφέρουμε δύο από αυτά:

<u>Πρόβλημα 1</u>
Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες τα: $\mathbf{x^2+x+1}$, $\mathbf{2x+1}$, $\mathbf{x^2+1}$ είναι μέτρα πλευρών τριγώνου.

Αν ονομάσουμε: $\alpha=x^2+x+1$, $\beta=2x+1$, $\gamma=x^2+1$, πόσες και ποιες σχέσεις θα χρησιμοποιήσουμε;

Είναι π.χ αρκετό να πάρουμε: $\alpha<\beta+\gamma$, $\beta<\gamma+\alpha$, $\gamma<\alpha+\beta$;

Μήπως πρέπει να πάρουμε επιπλέον τις σχέσεις: $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$;

Μήπως αν πάρουμε και τις τρεις σχέσεις:
$|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}|<\boldsymbol{\alpha}<\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$, $|\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}|<\boldsymbol{\beta}<\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}$, $|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|<\boldsymbol{\gamma}<\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$
είναι περισσότερες από όσες αρκούν;

Πρόβλημα 2

Αν οι πλευρές τριγώνου αποτελούν γεωμετρική πρόοδο, να αποδειχθεί ότι ο λόγος της προόδου περιέχεται μεταξύ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ και $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Και εδώ το ερώτημα είναι το ίδιο: Αν α, $\beta=\alpha\omega$, $\gamma=\alpha\omega^2$ είναι οι τρεις πλευρές του τριγώνου, πόσες και ποιες ανισότητες πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;

Θα αποδείξουμε εδώ τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες ώστε τα α, β, γ να είναι μέτρα πλευρών τριγώνου και κατόπιν θα λύσουμε τα δύο αυτά προβλήματα.

Γνωρίζουμε ότι για να υπάρχει τρίγωνο με πλευρές α, β, γ, πρέπει φυσικά $\boldsymbol{\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0}$ και επιπλέον $|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}|<\boldsymbol{\alpha}<\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$.

Θα αποδείξουμε αρχικά ότι τα παρακάτω συστήματα ανισοτήτων (Σ_1), (Σ_2), (Σ_3), (Σ_4), (Σ_5) είναι ισοδύναμα.

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}&<\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}\\ \boldsymbol{\beta}&<\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\gamma}&<\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\end{aligned}\right\}\ (\boldsymbol{\Sigma_1})$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}&>\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}\\ \boldsymbol{\beta}&>\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\gamma}&>\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\end{aligned}\right\}\ (\boldsymbol{\Sigma_2})$$ (οι σχέσεις είναι γραμμένες με κυκλική εναλλαγή των α, β, γ)

$$|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}|<\boldsymbol{\alpha}<\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}\quad (\boldsymbol{\Sigma_3})$$

$$|\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}|<\boldsymbol{\beta}<\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}\quad (\boldsymbol{\Sigma_4})$$

$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|<\boldsymbol{\gamma}<\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\quad (\boldsymbol{\Sigma_5})$$

Η ισοδυναμία των (Σ_1) και (Σ_2) είναι προφανής.

Ισοδυναμία των (Σ_1) και (Σ_3)

$$\left.\begin{aligned}\alpha&<\beta+\gamma\\ \beta&<\gamma+\alpha\\ \gamma&<\alpha+\beta\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}\alpha&<\beta+\gamma\\ \alpha&>\beta-\gamma\\ \alpha&>\gamma-\beta\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}\alpha&<\beta+\gamma\\ \alpha&>|\beta-\gamma|\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι $(\Sigma_1)\Leftrightarrow(\Sigma_4)$ και $(\Sigma_1)\Leftrightarrow(\Sigma_5)$

Επειδή τα συστήματα (Σ_2), (Σ_3), (Σ_4), (Σ_5) είναι ισοδύναμα με το (Σ_1), θα είναι και μεταξύ τους ισοδύναμα.

Όταν δηλ. ισχύει οποιοδήποτε από τα 5 συστήματα ανισοτήτων, θα ισχύουν και τα υπόλοιπα 4.
Επομένως από κάθε σύστημα προκύπτει ότι υποχρεωτικά θα είναι και
$\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0$, αφού $\alpha > |\beta - \gamma| \geq 0$

Έτσι, για να χρησιμοποιήσουμε πλήρως (δηλ. με ικανό τρόπο) ότι τα α, β, γ είναι μέτρα πλευρών τριγώνου, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε από τα συστήματα (Σ_1), (Σ_2), (Σ_3), (Σ_4), (Σ_5) και μόνο ένα από αυτά.

Οι περιορισμοί $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0$ δεν απαιτούνται

αφού προκύπτουν από οποιοδήποτε από τα 5 συστήματα όπως προαναφέραμε.

Επομένως για τη λύση και των δύο προβλημάτων που αναφέραμε, οι σχέσεις που αρκούν να χρησιμοποιήσουμε είναι οι: $\alpha < \beta + \gamma,\ \beta < \gamma + \alpha,\ \gamma < \alpha + \beta$ οι οποίες στους περισσότερους φαίνονται απλούστερες.

Λύνουμε τώρα τα δύο προβλήματα που αναφέραμε νωρίτερα.

<u>Πρόβλημα 1</u>

Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες τα: $x^2 + x + 1,\ 2x + 1,\ x^2 + 1$ είναι μέτρα πλευρών τριγώνου.

<u>Λύση</u>

Αν ονομάσουμε: $\alpha = x^2 + x + 1,\ \beta = 2x + 1,\ \gamma = x^2 + 1$, πρέπει και αρκεί να ισχύουν:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha < \beta + \gamma\\ \beta < \gamma + \alpha\\ \gamma < \alpha + \beta\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}x^2 + x + 1 < 2x + 1 + x^2 + 1\\ 2x + 1 < x^2 + 1 + x^2 + x + 1\\ x^2 + 1 < x^2 + x + 1 + 2x + 1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{ll}x > -1 & (1)\\ 2x^2 - x + 1 > 0 & (2)\\ x > -\dfrac{1}{3} & (3)\end{array}\right\}$$

Η (2) έχει $\Delta < 0$, άρα αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Έτσι, οι (1), (2) και (3) συναληθεύουν όταν $x > -\dfrac{1}{3}$

Δηλαδή για να αποτελούν τα $x^2 + x + 1,\ 2x + 1,\ x^2 + 1$ μέτρα πλευρών τριγώνου, πρέπει και αρκεί $x > -\dfrac{1}{3}$

<u>Πρόβλημα 2</u>

Αν οι πλευρές τριγώνου αποτελούν γεωμετρική πρόοδο, να αποδειχθεί ότι ο λόγος της προόδου περιέχεται μεταξύ $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$ και $\dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$

<u>Λύση</u>

Ονομάζουμε $\alpha,\ \beta=\alpha\omega,\ \gamma=\alpha\omega^2$ τις τρεις πλευρές του τριγώνου.

Πρέπει και αρκεί: $\left.\begin{array}{l}\alpha<\beta+\gamma\\ \beta<\gamma+\alpha\\ \gamma<\alpha+\beta\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha<\alpha\omega+\alpha\omega^2\\ \alpha\omega<\alpha\omega^2+\alpha\\ \alpha\omega^2<\alpha+\alpha\omega\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{ll}\omega^2+\omega-1>0 & (1)\\ \omega^2-\omega+1>0 & (2)\\ \omega^2-\omega-1<0 & (3)\end{array}\right\}$

Η (1) αληθεύει για $\omega<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ή $\omega>\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Η (2) έχει αρνητική διακρίνουσα και αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Η (3) αληθεύει όταν $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<\omega<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Τελικά, οι (1), (2) και (3) συναληθεύουν όταν $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<\omega<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$