ΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Νικ. Ιωσηφίδης, Μαθηματικός – Φροντιστής, ΒΕΡΟΙΑ

e-mail: iossifid@yahoo.gr

Η εργασία αυτή γράφτηκε για τους μαθητές της Β΄ Λυκείου όταν (δεκαετία 1981-1990) η Τριγωνομετρία δεν ήταν τόσο υποβαθμισμένη όπως είναι στα τωρινά σχολικά βιβλία.
Η εργασία δημοσιεύθηκε στο περιοδικό ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β΄ ΤΗΣ Ε.Μ.Ε, τόμος ΙΣΤ΄, τεύχος 2, Νοε – Δεκ 1982.

Όταν λέμε ότι κάνουμε περιορισμούς στην Τριγωνομετρία, εννοούμε ότι βρίσκουμε τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν ώστε μια τριγωνομετρική σχέση να έχει νόημα.

Το πρώτο ερώτημα που δημιουργείται είναι:

Είναι απαραίτητο να γίνονται περιορισμοί;

Το ερώτημα αυτό θα το απαντήσουμε με τα παρακάτω δύο παραδείγματα:

1) Να αποδειχθεί ότι $\dfrac{\varepsilon\varphi^2 2\alpha-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2 2\alpha\cdot\varepsilon\varphi^2\alpha}=\varepsilon\varphi 3\alpha\cdot\varepsilon\varphi\alpha$

2) Να αποδειχθεί ότι $\dfrac{\varepsilon\varphi^2 2\alpha-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2 2\alpha\cdot\varepsilon\varphi^2\alpha}=\varepsilon\varphi 3\alpha\cdot\varepsilon\varphi\alpha$ **.**
Για ποιες τιμές του α έχει νόημα η παραπάνω ισότητα;

Στο $1^{\text{ο}}$ παράδειγμα δεν χρειάζονται περιορισμοί. Εννοείται ότι η απόδειξη της άσκησης θα γίνει για τις τιμές του α για τις οποίες έχει νόημα.

Δεν μπορούμε να πούμε “πρέπει $2\alpha\neq\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$”

Αφού στην άσκηση περιέχεται η εφ2α, υποτίθεται ότι ***πρώτα*** ισχύει

$2\alpha\neq\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$ και ***κατόπιν*** γράφεται η εφ2α.

Για τον ίδιο λόγο δεν χρειάζεται κανένας περιορισμός.

Στο $2^{\text{ο}}$ παράδειγμα εννοείται πάλι ότι πρέπει να κάνουμε απόδειξη για τις τιμές του α για τις οποίες η ισότητα έχει νόημα. Εδώ όμως μας ζητούνται αυτές οι τιμές του α και πρέπει να τις βρούμε.

Με αυτά τα δύο παραδείγματα θέλουμε να δείξουμε ότι:

Οι περιορισμοί για να έχει νόημα μια σχέση πρέπει να γίνονται μόνο όταν αυτό μας ζητηθεί ρητά.

Γνωρίζουμε ότι οι λύσεις μιας τριγωνομετρικής εξίσωσης δίνονται από έναν ή περισσότερους τύπους οι οποίοι περιέχουν μια μεταβλητή κ που μπορεί να πάρει μερικές ή όλες τις ακέραιες τιμές. Γνωρίζουμε π.χ ότι οι λύσεις της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$ δίνονται από τους τύπους $x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}$ όπου κ οποιοσδήποτε ακέραιος αριθμός. Το σύνολο των λύσεων του τύπου $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3},\ \kappa \in \mathbb{Z}$ είναι το $A_1 = \{2\kappa\pi + \frac{\pi}{3},\ \kappa \in \mathbb{Z}\}$ και το σύνολο των λύσεων του τύπου $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3},\ \kappa \in \mathbb{Z}$ είναι το σύνολο $A_2 = \{2\kappa\pi - \frac{\pi}{3},\ \kappa \in \mathbb{Z}\}$

Εδώ και παντού στα επόμενα,
Ο συμβολισμός $\kappa \in \mathbb{Z}$ θα σημαίνει ότι η μεταβλητή κ διατρέχει όλο το $\mathbb{Z}$ και δεν θα γράφουμε "για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z}$".

<u>Γενικότεροι – Μερικότεροι τύποι</u>
Λέμε ότι ένας τύπος T_1 είναι γενικότερος του τύπου T_2 και τότε ο T_2 λέγεται μερικότερος του T_1, αν και μόνον αν το σύνολο A_1 των λύσεων του T_1 είναι γνήσιο υπερσύνολο του συνόλου A_2 των λύσεων του T_2.

<u>Παράδειγμα</u>

Να αποδειχθεί ότι ο τύπος $T_1 : x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}$ είναι γενικότερος του $T_2 : x = 3\kappa\pi - \frac{3\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}$

<u>Απόδειξη</u>
Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο A_1 των λύσεων του T_1 είναι γνήσιο υπερσύνολο του συνόλου A_2 των λύσεων του T_2.

Είναι: $A_1 = \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}\}$ και

$A_2 = \{3\kappa\pi - \frac{3\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}\}$

Έστω $x \in A_2 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{Z}$ με $x = 3\lambda\pi - \frac{3\pi}{2}$

Θα αποδείξουμε ότι $x \in A_1$, δηλαδή $\exists \mu \in \mathbb{Z}$ με $x = \mu\pi + \frac{\pi}{2}$

Εξισώνοντας $\mu\pi + \frac{\pi}{2} = 3\lambda\pi - \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \mu + \frac{1}{2} = 3\lambda - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \mu = 3\lambda - 2 \in \mathbb{Z}$

Δηλαδή η λύση $x = 3\lambda\pi - \frac{3\pi}{2}$ ανήκει και στο σύνολο A_1 αφού προκύπτει από τον τύπο $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ για $\kappa = 3\lambda - 2$. Έτσι $A_1 \supseteq A_2$

Για να αποδείξουμε ότι $A_1 \supset A_2$ αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει λύση του T_1 που δεν την δίνει ο T_2.

Πράγματι, για $\kappa = 0$ ο τύπος T_1 δίνει τη λύση $x = \frac{\pi}{2}$. Ο τύπος T_2 δεν μπορεί να δώσει την ίδια λύση διότι εξισώνοντας $3\kappa\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \kappa = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Έτσι $A_1 \supset A_2$ και ο τύπος T_1 είναι γενικότερος του T_2.

Όταν σε μια άσκηση έχουμε δύο τύπους από τους οποίους ο ένας είναι γενικότερος του άλλου, μπορούμε να κρατήσουμε μόνο τον γενικότερο παραλείποντας τον άλλο.

Ισοδύναμοι τύποι

Λέμε ότι το τύπος T_1 με σύνολο λύσεων A_1 είναι ισοδύναμος με τον τύπο T_2 με σύνολο λύσεων A_2, αν και μόνον $A_1 = A_2$.

Γενικότερα, λέμε ότι η ν-άδα των τύπων $T_1, T_2, ..., T_\nu$ με σύνολα λύσεων αντίστοιχα τα $A_1, A_2, ..., A_\nu$ είναι ισοδύναμη με την κ-άδα των τύπων $\Sigma_1, \Sigma_2, ..., \Sigma_\kappa$ με σύνολα λύσεων αντίστοιχα τα $B_1, B_2, ..., B_\kappa$ αν και μόνον αν

$$\mathbf{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_\nu = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_\kappa}$$

Παραδείγματα

1) Να αποδειχθεί ότι ο τύπος $T_1 : x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \ \kappa \in \mathbb{Z}$ είναι ισοδύναμος με τον τύπο $T_2 : x = \kappa\pi - \frac{3\pi}{2}, \ \kappa \in \mathbb{Z}$

Απόδειξη

Τα σύνολα των λύσεων A_1 και A_2 των τύπων T_1 και T_2 είναι αντίστοιχα

$$A_1 = \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \ \kappa \in \mathbb{Z}\}$$

$$A_2 = \{\kappa\pi - \frac{3\pi}{2}, \ \kappa \in \mathbb{Z}\}$$

Θα αποδείξουμε ότι $A_1 = A_2$

Αρκεί γι αυτό να δείξουμε ότι $A_1 \subseteq A_2$ και $A_2 \subseteq A_1$.

Έστω $x \in A_1 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{Z}$ με $x = \lambda\pi + \frac{\pi}{2}$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\mu \in \mathbb{Z}$ με $x = \mu\pi - \frac{3\pi}{2}$

Εξισώνουμε $\mu\pi - \frac{3\pi}{2} = \lambda\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mu - \frac{3}{2} = \lambda + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mu = \lambda + 2 \in \mathbb{Z}$, δηλ. $x \in A_2$, άρα

$A_1 \subseteq A_2$ (1)

Έστω $x \in A_2 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{Z}$ με $x = \lambda\pi - \frac{3\pi}{2}$

Θα αποδείξουμε ότι $x \in A_1$, δηλ. $\exists \mu \in \mathbb{Z}$ με $x = \mu\pi + \frac{\pi}{2}$

Εξισώνουμε $\mu\pi + \frac{\pi}{2} = \lambda\pi - \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \mu + \frac{1}{2} = \lambda - \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \mu = \lambda - 2 \in \mathbb{Z}$, άρα $x = \mu\pi + \frac{\pi}{2}$

όπου $\mu = \lambda - 2$, δηλ. $x \in A_1$, άρα $A_2 \subseteq A_1$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει $A_1 = A_2$ και οι τύποι T_1 και T_2 είναι ισοδύναμοι.

2) Να αποδειχθεί ότι το ζεύγος των τύπων

$$\mathbf{T_1 : x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z} \quad , \quad T_2 : x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}}$$

είναι ισοδύναμο με τον τύπο $\mathbf{T_3 : x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}}$

Απόδειξη

Έστω A_1, A_2, A_3 τα σύνολα λύσεων των τύπων T_1, T_2 και T_3 αντίστοιχα.

Θα αποδείξουμε ότι $A_1 \cup A_2 = A_3$

Έστω $x \in A_1 \cup A_2 \Rightarrow (x \in A_1$ ή $x \in A_2)$

α) Αν $x \in A_1 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{Z}$ με $x = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{2}$

Ο τύπος T_3 για $\kappa = 2\lambda$ δίνει επίσης $x = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{2}$, άρα $x \in A_3$

β) Αν $x \in A_2 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{Z}$ με $x = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{2}$

Θέλουμε να βρούμε $\kappa \in \mathbb{Z}$ ώστε $\kappa\pi + \frac{\pi}{2} = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \kappa + \frac{1}{2} = 2\lambda - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\kappa = 2\lambda - 1 \in \mathbb{Z}$. Άρα πάλι $x \in A_3$

Δηλ. και στις δύο περιπτώσεις αποδείξαμε ότι $x \in A_1 \cup A_2 \Rightarrow x \in A_3$, επομένως

$A_1 \cup A_2 \subseteq A_3$ (1)

Έστω τώρα $x \in A_3 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{Z}$ με $x = \lambda\pi + \frac{\pi}{2}$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

α) $\lambda = 2\mu,\ \mu \in \mathbb{Z}$. Τότε $x = 2\mu\pi + \frac{\pi}{2}$.

Η λύση αυτή προκύπτει από τον τύπο T_1 για $\kappa = \mu$

β) $\lambda = 2\mu - 1,\ \mu \in \mathbb{Z}$. Τότε $x = (2\mu - 1)\pi + \frac{\pi}{2} = 2\mu\pi - \frac{\pi}{2}$

Η λύση αυτή προκύπτει και από τον τύπο T_2 για $\kappa = \mu$
Έτσι και στις δύο περιπτώσεις είναι $x \in A_1 \cup A_2$, άρα $A_3 \subseteq A_1 \cup A_2$ (2)
Από τις (1) και (2) προκύπτει $A_1 \cup A_2 = A_3$.

Επομένως το ζεύγος των τύπων T_1 και T_2 είναι ισοδύναμο με τον τύπο T_3.

Όταν σε μια άσκηση έχουμε ένα ζεύγος τύπων ισοδύναμο με έναν τύπο μπορούμε να αντικαταστήσουμε το ζεύγος με τον ισοδύναμο τύπο.

3) Να αποδειχθεί ότι το ζεύγος των τύπων

$\mathbf{T_1 : x = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}}$, $\mathbf{T_2 : x = (2\kappa+1)\pi, \kappa \in \mathbb{Z}}$

είναι ισοδύναμο με τον τύπο $\mathbf{T_3 : x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}}$

<u>Απόδειξη</u>
Η απόδειξη μπορεί να γίνει όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, εδώ όμως θα μπορούσαμε να πούμε πιο απλά ότι ο τύπος T_1 δίνει τα άρτια πολλαπλάσια του π, ο τύπος T_2 δίνει τα περιττά πολ/σια του π, ενώ ο τύπος T_3 δίνει όλα τα πολ/σια του π (άρτια και περιττά). Άρα το ζεύγος των τύπων T_1 και T_2 είναι ισοδύναμο με τον τύπο T_3.

<u>Ορισμός</u>
Σύμπτυξη δύο ή περισσοτέρων τύπων λέγεται η αντικατάστασή τους από άλλους με μικρότερο πλήθος.

Όταν π.χ αντικαθιστούμε ένα ζεύγος τύπων με έναν, τότε λέμε ότι κάνουμε σύμπτυξη των τύπων.

Θα δείξουμε τώρα πως γίνονται οι περιορισμοί στην Τριγωνομετρία.
Όπως αναφέραμε στην αρχή της εργασίας, οι περιορισμοί γίνονται για να έχει νόημα μια τριγωνομετρική σχέση. Γίνεται αμέσως φανερό ότι μας χρειάζεται πρώτα να γνωρίζουμε πότε ορίζονται οι ίδιοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί.

α) Το ημx ορίζεται για κάθε $\mathbf{x \in \mathbb{R}}$

β) Το συνx ορίζεται για κάθε $\mathbf{x \in \mathbb{R}}$

γ) Η $\mathbf{εφx = \frac{ημx}{συνx}}$ **ορίζεται όταν** $\mathbf{συνx \neq 0}$

Η εξίσωση $συνx = 0 \Leftrightarrow συνx = συν\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

Στο $2^{ο}$ παράδειγμα συμπτύξαμε τους δύο αυτούς τύπους στον $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

Έτσι η εφx δεν ορίζεται όταν $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$ ή το ίδιο, ορίζεται όταν

$x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

δ) Η $\sigma\varphi x = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ ορίζεται όταν $\eta\mu x \neq 0$

Η εξίσωση $\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu 0 \Leftrightarrow (x = 2\kappa\pi$ ή $x = (2\kappa+1)\pi, \kappa \in \mathbb{Z})$

Στο 3^{o} παράδειγμα συμπτύξαμε τους δύο αυτούς τύπους στον $x = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

Δηλ. η σφx δεν ορίζεται όταν $x = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$ ή το ίδιο ορίζεται όταν $x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

ε) Η $\tau\varepsilon\mu x = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$ ορίζεται όταν $\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$, δηλαδή ορίζεται για τις ίδιες τιμές που ορίζεται και η εφx

ζ) Η $\sigma\tau\varepsilon\mu x = \dfrac{1}{\eta\mu x}$ ορίζεται όταν $\eta\mu x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$, δηλαδή ορίζεται για τις ίδιες τιμές που ορίζεται και η σφx

Για να έχει νόημα τώρα μια τριγωνομετρική παράσταση (δηλ. για να ορίζεται), πρέπει

- **Να ορίζονται όλοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί που παρουσιάζονται.**
- **Αν η παράσταση περιέχει κλάσματα, οι παρονομαστές πρέπει να είναι διάφοροι του 0.**
- **Αν η παράσταση περιέχει ριζικά, πρέπει τα υπόρριζα να είναι μη αρνητικά (δηλ. ≥ 0)**
- **Αν υπάρχει λογάριθμος μιας παράστασης, πρέπει η παράσταση αυτή να είναι >0.**

Με τους δύο τελευταίους περιορισμούς δεν θα ασχοληθούμε επειδή η λύση των τριγωνομετρικών ανισώσεων δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο.

<u>Παρατηρήσεις</u>

α) Οι περιορισμοί πρέπει να γίνονται και στα δύο μέλη μιας ισότητας. Δεν είναι σίγουρο ότι τα δύο μέλη ορίζονται για τις ίδιες τιμές των μεταβλητών.

Π.χ στην προφανή ισότητα $\dfrac{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$ τα δύο μέλη δεν ορίζονται για τις ίδιες τιμές του α, αφού δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα $\eta\mu\alpha = \sigma\upsilon\nu\alpha = 0$, $(\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1)$

β) Αν κατά τη διάρκεια της απόδειξης μιας σχέσης κάνουμε κάποια πράξη που απαιτεί περιορισμό που δεν απαιτούσε η αρχική σχέση, τότε κάνουμε μεν τον περιορισμό για

να μπορέσουμε να συνεχίσουμε την απόδειξη, στο τέλος όμως αποδεικνύουμε ότι και αν ακόμη δεν ισχύει ο περιορισμός που εμείς θέσαμε, η σχέση είναι πάλι αληθής. Δηλαδή στην περίπτωση αυτή κάνουμε μια συμπληρωματική απόδειξη για τις τιμές που εξαιρέσαμε με τον πρόσθετο περιορισμό.
Αν π.χ κατά την διάρκεια μιας απόδειξης πολ/σουμε τους όρους ενός κλάσματος επί ημα, πρέπει να προσθέσουμε τον περιορισμό $ημα \neq 0 \Leftrightarrow α \neq κπ,\ κ \in \mathbb{Z}$.
Αν όμως ο περιορισμός αυτός δεν υπήρχε αρχικά, τότε για να είναι η λύση πλήρης θα πρέπει να γίνει συμπληρωματική απόδειξη ειδικά για τις τιμές $α = κπ,\ κ \in \mathbb{Z}$

Δίνουμε τώρα ένα παράδειγμα που θα εξηγήσει όλα αυτά που προαναφέραμε.

Να αποδειχθεί ότι $\mathbf{\dfrac{εφ^2 2α - εφ^2 α}{1 - εφ^2 2α \cdot εφ^2 α} = εφ3α \cdot εφα}$
Για ποιες τιμές του α έχει νόημα η παραπάνω ισότητα;

Λύση
Πρέπει να ορίζονται όλοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί που παρουσιάζονται και επιπλέον ο παρονομαστής να είναι διάφορος του 0.

Βρίσκουμε τις τιμές για τις οποίες **δεν ορίζονται** οι τριγωνομετρικοί αριθμοί και το κλάσμα. Θα εξαιρέσουμε κατόπιν αυτές τις τιμές.

α) Η εφ2α, άρα και η $εφ^2 2α$ δεν ορίζεται όταν

$$2α = κπ + \frac{π}{2},\ κ \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \boldsymbol{α = \frac{κπ}{2} + \frac{π}{4},\ κ \in \mathbb{Z}} \qquad (1)$$

β) Η εφα δεν ορίζεται όταν $\boldsymbol{α = κπ + \frac{π}{2},\ κ \in \mathbb{Z}}$ (2)

γ) $1 - εφ^2 2α \cdot εφ^2 α = 0 \Leftrightarrow εφ^2 2α \cdot εφ^2 α = 1 \Leftrightarrow εφ2α \cdot εφα = \pm 1$

Λύνουμε τις δύο εξισώσεις ($γ_1$) και ($γ_2$)

$γ_1$) $εφ2α \cdot εφα = 1$ (3)
Με την προϋπόθεση ότι το α δεν παίρνει τις τιμές των τύπων (1) και (2), είναι $εφα \neq 0$, αλλιώς η (3) είναι αδύνατη.
Έτσι η $(3) \Leftrightarrow εφ2α = \dfrac{1}{εφα} \Leftrightarrow\ εφ2α = σφα \Leftrightarrow\ εφ2α = εφ(\dfrac{π}{2} - α) \Leftrightarrow$

$$2α = κπ + \frac{π}{2} - α,\ κ \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow\ \boldsymbol{α = \frac{κπ}{3} + \frac{π}{6},\ κ \in \mathbb{Z}} \qquad (4)$$

$γ_2$) $εφ2α \cdot εφα = -1$ (5)

Είναι πάλι $\varepsilon\varphi\alpha \neq 0$, άρα η $(5) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 2\alpha = -\frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha} \Leftrightarrow \quad \varepsilon\varphi 2\alpha = -\sigma\varphi\alpha \Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi 2\alpha = -\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2} - \alpha) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 2\alpha = \varepsilon\varphi(\alpha - \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow 2\alpha = \kappa\pi + \alpha - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{\alpha = \kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}}$ (6)

δ) Η $\varepsilon\varphi 3\alpha$ δεν ορίζεται όταν $3\alpha = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = \frac{\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}}$ (7)

Τελικά λοιπόν η ισότητα που ζητείται να αποδείξουμε δεν έχει νόημα όταν ισχύει κάποια από τις παραπάνω σχέσεις (1), (2), (4), (6), (7), δηλ. όταν

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4} & (1) \\ \alpha = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} & (2) \\ \alpha = \frac{\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6} & (4) \\ \alpha = \kappa\pi - \frac{\pi}{2} & (6) \end{array}\right\} \kappa \in \mathbb{Z}$$

(δεν γράψαμε τον τύπο (7) δύο φορές)

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι τύποι (2) και (6) είναι ισοδύναμοι.

Πράγματι, ο (2) για $\kappa = \lambda$ δίνει $\alpha = \lambda\pi + \frac{\pi}{2}$

Για να δώσει ο τύπος (6) την ίδια λύση πρέπει να υπάρχει $\mu \in \mathbb{Z}$ ώστε

$\mu\pi - \frac{\pi}{2} = \lambda\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mu - \frac{1}{2} = \lambda + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mu = \lambda + 1 \in \mathbb{Z}$, δηλαδή κάθε λύση που δίνει ο (2) την δίνει και ο (6).

Αντίστροφα, για $\kappa = \lambda$, ο τύπος (6) δίνει τη λύση $\alpha = \lambda\pi - \frac{\pi}{2}$

Για να δώσει ο τύπος (2) την ίδια λύση, πρέπει να υπάρχει $\mu \in \mathbb{Z}$ με

$\mu\pi + \frac{\pi}{2} = \lambda\pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mu + \frac{1}{2} = \lambda - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mu = \lambda - 1 \in \mathbb{Z}$

Δηλαδή κάθε λύση που δίνει ο (6) την δίνει και ο (2).

Έτσι οι τύποι (2) και (6) είναι ισοδύναμοι και μπορούμε να παραλείψουμε τον (6).

Έχουμε λοιπόν τους εξής 3 τύπους:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha=\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{4} && (1)\\ &\alpha=\kappa\pi+\frac{\pi}{2} && (2)\\ &\alpha=\frac{\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{6} && (4)\end{aligned}\right\}\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

Μπορούμε ακόμη να αποδείξουμε ότι ο (4) περιέχει όλες τις λύσεις του (2).
(Είναι γενικότερος, αλλά δεν είναι απαραίτητο να αποδείξουμε ότι ο (4) δίνει περισσότερες λύσεις από τον (2). Αρκεί ότι ο (4) δίνει όλες τις λύσεις που δίνει και ο (2)).

Πράγματι, ο (2) για $\kappa=\lambda$ δίνει $\alpha=\lambda\pi+\frac{\pi}{2}$

Για να δώσει ο (4) την ίδια λύση πρέπει να υπάρχει $\mu\in\mathbb{Z}$ ώστε

$\frac{\mu\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\lambda\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{\mu}{3}+\frac{1}{6}=\lambda+\frac{1}{2}\Leftrightarrow\mu=3\lambda+1\in\mathbb{Z}$

Μπορούμε λοιπόν να παραλείψουμε τον τύπο (2) και να κρατήσουμε μόνο τους (1) και (4).

Έτσι έχουμε τους τύπους:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha=\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{4} && (1)\\ &\alpha=\frac{\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{6} && (4)\end{aligned}\right\}\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

που δίνουν τις τιμές του α για τις οποίες δεν έχει νόημα η ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.
Μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα (δεν είναι όμως απαραίτητο) ότι κανένας από τους τύπους (1) και (4) δεν είναι γενικότερος ή ισοδύναμος με τον άλλο.
Για να αποδείξουμε π.χ ότι ο τύπος (4) δεν είναι γενικότερος του (1), θέτουμε στον (1) μια τυχαία τιμή $\kappa=\lambda\in\mathbb{Z}$ και ελέγχουμε αν υπάρχει πάντοτε τιμή $\kappa=\mu\in\mathbb{Z}$ τέτοια ώστε ο τύπος (4) να δίνει την ίδια λύση.

Θα πρέπει $\frac{\mu\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\lambda\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\frac{\mu}{3}+\frac{1}{6}=\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{4}\Leftrightarrow\mu=\frac{6\lambda+1}{4}$

Όμως $\mu=\frac{6\lambda+1}{4}\notin\mathbb{Z}$ αφού $6\lambda+1=$ περιττός

(θα αρκούσε βέβαια ο μ να μην είναι ακέραιος έστω για μια μόνο τιμή του $\lambda\in\mathbb{Z}$).
Έτσι ο τύπος (4) δεν είναι γενικότερος του (1). Μπορεί να αποδειχθεί ότι ούτε και ο (1) είναι γενικότερος του (4).
Τελικά λοιπόν πρέπει να κρατήσουμε και τους δύο περιορισμούς, δηλαδή η αρχική ισότητα ορίζεται αν $\boldsymbol{\alpha\neq\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}$ και $\boldsymbol{\alpha\neq\frac{\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{6}}$ **,** $\boldsymbol{\kappa\in\mathbb{Z}}$

Με τους παραπάνω περιορισμούς η απόδειξη γίνεται ως εξής:

$$\frac{εφ^2 2α-εφ^2 α}{1-εφ^2 2α\cdot εφ^2 α}=\frac{(εφ2α+εφα)(εφ2α-εφα)}{(1+εφ2α\cdot εφα)(1-εφ2α\cdot εφα)}=\frac{εφ2α+εφα}{1-εφ2α\cdot εφα}\cdot\frac{εφ2α-εφα}{1+εφ2α\cdot εφα}=$$

$$εφ(2α+α)\cdot εφ(2α-α)= εφ3α\cdot εφα$$

Δίνουμε μερικά ακόμη παραδείγματα

Να βρεθούν οι τιμές των μεταβλητών για τις οποίες έχουν νόημα (ορίζονται) οι παρακάτω ισότητες:

1) $\boldsymbol{συν^2ασυν^2β-ημ^2αημ^2β=συν^2α+συν^2β-1}$

Εδώ δεν χρειάζεται κανένας περιορισμός. Και τα δύο μέλη ορίζονται για όλα τα $α,β\in\mathbb{R}$

2) $\boldsymbol{\frac{ημ(α-β)}{ημαημβ}+\frac{ημ(β-γ)}{ημβημγ}+\frac{ημ(γ-α)}{ημγημα}=0}$

Η ισότητα δεν έχει νόημα όταν

α) $ημα=0\Leftrightarrow α=κπ,\ κ\in\mathbb{Z}$ ή

β) $ημβ=0\Leftrightarrow β=κπ,\ κ\in\mathbb{Z}$ ή

γ) $ημγ=0\Leftrightarrow γ=κπ,\ κ\in\mathbb{Z}$

Δηλαδή πρέπει: $α\neq κπ$ και $β\neq κπ$ και $γ\neq κπ$, $κ\in\mathbb{Z}$

3) $\boldsymbol{εφ2α=\frac{2εφα}{1-εφ^2α}}$

α) Η εφ2α δεν ορίζεται όταν $2α=κπ+\frac{π}{2},\ κ\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow \boldsymbol{α=\frac{κπ}{2}+\frac{π}{4},\ κ}\in\mathbb{Z}$

β) Η εφα δεν ορίζεται όταν $\boldsymbol{α=κπ+\frac{π}{2},\ κ}\in\mathbb{Z}$

γ) Το κλάσμα του 2ου μέλους δεν ορίζεται όταν

$1-εφ^2α=0\Leftrightarrow εφα=\pm1\Leftrightarrow εφα=εφ(\pm\frac{π}{4})\Leftrightarrow \boldsymbol{α=κπ\pm\frac{π}{4},\ κ}\in\mathbb{Z}$

Έχουμε λοιπόν τους εξής τύπους:

$$\left.\begin{array}{l} T_1: α=\frac{κπ}{2}+\frac{π}{4} \\ T_2: α=κπ+\frac{π}{2} \\ T_3: α=κπ+\frac{π}{4} \\ T_4: α=κπ-\frac{π}{4} \end{array}\right\} κ\in\mathbb{Z}$$

Μπορούμε να αποδείξουμε (όπως κάναμε στα προηγούμενα) ότι ο T_1 είναι γενικότερος και του T_3 και του T_4. Έτσι οι T_3 και T_4 μπορούν να παραλειφθούν. Απομένουν λοιπόν οι τύποι:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &: \alpha = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ T_2 &: \alpha = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \kappa \in \mathbb{Z}$$

Δηλαδή για να έχει νόημα ο τύπος πρέπει $\boldsymbol{\alpha \neq \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4}}$ **και** $\boldsymbol{\alpha \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}}$

4) $\boldsymbol{\dfrac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} + \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \dfrac{2}{\eta\mu\alpha}}$

Τα ημα και συνα ορίζονται για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.
Οι τιμές του α για τις οποίες δεν ορίζεται η ισότητα είναι μόνο αυτές που μηδενίζουν τους παρονομαστές.

Λύνουμε τις εξισώσεις:

α) $1 + \sigma\upsilon\nu\alpha = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha = 2\kappa\pi \pm \pi, \kappa \in \mathbb{Z}}$

β) $\eta\mu\alpha = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \eta\mu 0 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}}$ (όπως εξηγήσαμε στο 3^{o} παράδειγμα των ισοδυνάμων τύπων).

Έχουμε λοιπόν τους εξής 3 τύπους:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &: \alpha = 2\kappa\pi + \pi = (2\kappa+1)\pi \\ T_2 &: \alpha = 2\kappa\pi - \pi = (2\kappa-1)\pi \\ T_3 &: \alpha = \kappa\pi \end{aligned}\right\} \kappa \in \mathbb{Z}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ο T_3 είναι γενικότερος και του T_1 και του T_2 (ειδικότερα οι T_1 και T_2 είναι ισοδύναμοι). Παραλείποντας λοιπόν τους T_1 και T_2 απομένει ο τύπος T_3.
Δηλαδή ο μόνος περιορισμός που χρειάζεται είναι ο $\boldsymbol{\alpha \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}}$

5) $\boldsymbol{\dfrac{\tau\epsilon\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\tau\epsilon\mu\alpha - \eta\mu\alpha} = \epsilon\varphi^3\alpha}$

α) Η τεμα δεν ορίζεται όταν $\boldsymbol{\alpha = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}}$

β) Η στεμα δεν ορίζεται όταν $\boldsymbol{\alpha = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}}$

γ) Το κλάσμα του $1^{ου}$ μέλους δεν ορίζεται όταν

$$\sigma\tau\epsilon\mu\alpha - \eta\mu\alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu\alpha} = \eta\mu\alpha \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \pm 1$$

Λύνουμε τις εξισώσεις (γ_1) και (γ_2)

γ₁) $\eta\mu\alpha = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}}$

γ₂) $\eta\mu\alpha = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \eta\mu(-\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}}$ ή $\boldsymbol{\alpha = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}}$

δ) Η εφα δεν ορίζεται όταν $\boldsymbol{\alpha = \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}}$

Έτσι έχουμε τους παρακάτω τύπους:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 : \alpha = \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ T_2 : \alpha = \kappa\pi \\ T_3 : \alpha = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ T_4 : \alpha = 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{2} \\ T_5 : \alpha = 2\kappa\pi + \dfrac{3\pi}{2} \end{array}\right\} \kappa \in \mathbb{Z}$$

Ο τύπος T_1 είναι γενικότερος και του T_3 και του T_4 και του T_5. Παραλείπουμε λοιπόν τους T_3, T_4, T_5 και απομένουν οι τύποι:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 : \alpha = \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2} = (2\kappa + 1)\dfrac{\pi}{2} \\ T_2 : \alpha = \kappa\pi = 2\kappa \cdot \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \kappa \in \mathbb{Z}$$

Ο τύπος T_1 δίνει τα περιττά πολ/σια του $\frac{\pi}{2}$ και ο τύπος T_2 δίνει τα άρτια πολ/σια του $\frac{\pi}{2}$. Οι δύο τύποι λοιπόν μπορούν να συμπτυχθούν στον τύπο $T : \alpha = \kappa \cdot \frac{\pi}{2}$ ο οποίος δίνει όλα τα πολ/σια του $\frac{\pi}{2}$.

Έτσι ο μόνος περιορισμός που χρειάζεται είναι ο $\alpha \neq \frac{\kappa\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}$