ΕΡΩΤΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΑΣΑΦΕΙΕΣ ΣΤΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ – ΛΑΘΟΣ (Σ – Λ)

Νίκος Ιωσηφίδης. Μαθηματικός – Φροντιστής, ΒΕΡΟΙΑ

e-mail: iossifid@yahoo.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ
Στην παρούσα εισήγηση εξηγούμε με διάφορα παραδείγματα γιατί είναι ακατάλληλα για τις διάφορες εξετάσεις τα ερωτήματα τύπου Σωστό – Λάθος.
Η ακαταλληλότητα οφείλεται στο γεγονός ότι πολλές προτάσεις ή δεν υφίστανται (δεν έχουν νόημα) ή δεν έχουν συγκεκριμένη απάντηση και μπορούν να χαρακτηριστούν και ως Σωστές και ως Λάθος ανάλογα με την οπτική που τις βλέπει καθένας, ή τέλος να είναι ασαφείς.

SUMMARY
In the current presentation we will use various examples to explain why questions with a right/wrong answer are unsuitable for exams.
The unsuitability is due to the fact that many proposals do either not exist (do not make sense), or do not have a specific answer and could be characterised as both right and wrong depending on an individual's view, or could be ambiguous.

Στην εισήγηση αυτή θα παρουσιάσουμε τα προβλήματα που δημιουργούνται από τα ερωτήματα τύπου Σωστό – Λάθος (Σ – Λ).
Πριν προχωρήσουμε σε λεπτομέρειες και μαθηματικές ερμηνείες πρέπει να πούμε ότι τα ερωτήματα αυτά κρίνονται **«αυστηρώς ακατάλληλα»** ως θέματα Πανελλαδικών εξετάσεων για τους λόγους:

Σε ένα ερώτημα τύπου Σ – Λ η πιθανότητα να απαντήσει κάποιος σωστά δίνοντας τυχαία απάντηση είναι $\frac{1}{2}$. Για τα 5 ερωτήματα λοιπόν που συνήθως δίνονται στις Πανελλαδικές εξετάσεις για απάντηση, η πιθανότητα να απαντηθούν όλα σωστά από κάποιον υποψήφιο που απαντά τυχαία, είναι ίση με $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{32}$
Αυτό σημαίνει ότι σε 3200 μαθητές που απαντούν τυχαία, οι 100 περίπου απαντούν σε όλα τα ερωτήματα σωστά, δηλ. βαθμολογούνται με άριστα στο θέμα αυτό.

Ο λόγος της κατάργησης όμως δεν είναι μόνο αυτός.

Δίνουμε σχετικά παραδείγματα που κάνουν καταφανή την ακαταλληλότητα των ερωτημάτων τύπου Σ – Λ για διάφορους λόγους.

Χωρίσαμε τα ερωτήματα σε τρεις ομάδες όπως αναφέρονται παρακάτω.

1η Ομάδα: Ερωτήματα χωρίς νόημα

Όσα θα περιγράψουμε παρακάτω στηρίζονται στους ορισμούς και τα θεωρήματα των αντίστοιχων σχολικών βιβλίων (2016-2017). Τα συμπεράσματα μπορεί να είναι διαφορετικά αν υιοθετήσουμε διαφορετικούς ορισμούς.

Για να γίνουν πιο κατανοητά τα όσα θα υποστηρίξουμε στα παραδείγματα αυτά, δίνουμε αρχικά δύο παραδείγματα όχι του τύπου Σ – Λ.

<u>Παράδειγμα 1ο</u>

Να λυθεί η εξίσωση: $\mathbf{\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{x(x-1)}}$ **(1)**

<u>Λύση</u>

Πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq 1$

Το ερώτημα είναι: Γιατί θέσαμε τους παραπάνω περιορισμούς που δεν δόθηκαν στην εκφώνηση της άσκησης;

Η απάντηση είναι ότι η τιμή $x=1$ μηδενίζει τους παρονομαστές, επομένως τα κλάσματα δεν ορίζονται.

Γίνεται δηλαδή αυτόματα δεκτό, ότι για να γράψουμε το κλάσμα $\mathbf{\dfrac{x}{x-1}}$ πρέπει $\mathbf{x \neq 1}$ και αυτό δεν είναι απαραίτητο να δοθεί στην εκφώνηση της άσκησης.

Με τους περιορισμούς αυτούς η (1) $\Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow (x=1 \text{ ή } x=-1)$

Από τις ρίζες αυτές λοιπόν δεκτή είναι μόνο η ρίζα $x=-1$

<u>Παράδειγμα 2ο</u>

Να λυθεί η εξίσωση: $\mathbf{\log(1-x^2)=\log(1-x)}$ **(1)**

<u>Λύση</u>

Πρέπει $1-x^2>0 \Leftrightarrow -1<x<1$ (2)

Και $1-x>0 \Leftrightarrow x<1$ (3)

Οι (2) και (3) συναληθεύουν όταν $-1<x<1$ (4)

Με τον περιορισμό (4) η (1) $\Leftrightarrow 1-x^2=1-x \Leftrightarrow x^2=x \Leftrightarrow (x=0 \text{ ή } x=1)$

Από τις ρίζες αυτές δεκτή είναι μόνο η ρίζα $x=0$.

Η ρίζα $x=1$ απορρίπτεται λόγω του περιορισμού (4)

Το ερώτημα είναι το ίδιο: Γιατί θέσαμε τους περιορισμούς (2) και (3) αφού κάτι τέτοιο δεν δόθηκε στην εκφώνηση;

Η απάντηση είναι ότι θέσαμε τους περιορισμούς για να για να ορίζονται τα δύο μέλη της (1).

Γίνεται δηλαδή αυτόματα δεκτό, ότι για να γράψουμε το σύμβολο $\log\alpha$ πρέπει $\alpha>0$ και αυτό δεν είναι απαραίτητο να δοθεί στην εκφώνηση της άσκησης.

Αντίστοιχες παρατηρήσεις έχουμε για τα ριζικά όπου πρέπει τα υπόρριζα να είναι μη αρνητικά, για τη συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$ όπου πρέπει $x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{Z}$ και για πολλές άλλες περιπτώσεις.

Γενικά
Κάθε μαθηματικό σύμβολο που χρησιμοποιείται, εννοείται αυτόματα ότι έχει νόημα και κάτι τέτοιο δεν είναι απαραίτητο να δοθεί.

Η παραπάνω παραδοχή απαντά στα προβλήματα που δημιουργούνται από τα ερωτήματα Σ – Λ της $1^{\eta\varsigma}$ ομάδας. Θα χρησιμοποιήσουμε την παραδοχή αυτή για τα παραδείγματα τύπου Σ – Λ που ακολουθούν.

Παραδείγματα τύπου Σ – Λ

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως (Σ) ή (Λ)

1) Το εμβαδόν του πολυωνύμου $3x^2+5x$ είναι ίσο με 10.

Η αναμενόμενη απάντηση είναι: Τι εννοούμε όταν λέμε εμβαδόν πολυωνύμου;
Είναι πασιφανές ότι το ερώτημα αυτό δεν έχει νόημα. Με άλλα λόγια δεν υπάρχει τέτοιο ερώτημα.

Όμοιο ως προς την δομή είναι το εξής ερώτημα:

2) Η παράγωγος ορθογωνίου τριγώνου στην κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με 0.

Τα ερωτήματα 1 και 2 δεν τέθηκαν ποτέ, αλλά υπάρχουν άπειρα ερωτήματα του ιδίου τύπου δηλ. χωρίς νόημα. Όλα τα ερωτήματα των 3 ομάδων που ακολουθούν έχουν τεθεί σε διάφορες εξετάσεις ή έχουν δημοσιευθεί σε κάποια μέσα.

3) $\mathbf{\frac{3}{0}=3}$

Η αναμενόμενη απάντηση είναι (Λ).

Όμως δεν υπάρχει κλάσμα $\frac{3}{0}$ και **το ερώτημα είναι χωρίς νόημα.**

Το ερώτημα αυτό είναι πανομοιότυπο ως προς την δομή με το 1ο ερώτημα (το εμβαδόν του πολυωνύμου). Ζητείται να αποφανθούμε αν κάτι που δεν έχει οριστεί, άρα ανύπαρκτο, είναι ίσο με κάτι υπαρκτό.

4) Η συνάρτηση $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\mathbf{f(x)=x^2}$ είναι 1-1 στο διάστημα $\mathbf{[0,+\infty)}$

Η αναμενόμενη απάντηση είναι (Σ), όμως ο ορισμός του σχολικού βιβλίου για συνάρτηση 1-1 δόθηκε μόνο για ολόκληρο το πεδίο ορισμού της και **το ερώτημα είναι χωρίς νόημα.**

5) $\mathbf{1+3i>1+2i}$

Η αναμενόμενη απάντηση είναι (Λ).

Αν όμως η παραπάνω πρόταση είναι (Λ) τότε πρέπει να δεχθούμε ως (Σ) κάποια από τις $1+3i<1+2i$ ή $1+3i=1+2i$

Όμως και οι προτάσεις αυτές θεωρούνται (Λ).

Η σωστή απάντηση είναι ότι **το ερώτημα είναι χωρίς νόημα**, αφού δεν έχει οριστεί διάταξη μεταξύ μιγαδικών.

Το ερώτημα ως προς την δομή είναι όμοιο με τα προηγούμενα ερωτήματα.

6) Η συνάρτηση $\mathbf{f:(-1,1)\to\mathbb{R}}$ με $\mathbf{f(x)=x^2}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x_0=2}$

Η αναμενόμενη απάντηση είναι η (Λ) επειδή η συνέχεια μιας συνάρτησης ορίστηκε (στο σχολικό βιβλίο) μόνο σε σημεία του πεδίου ορισμού της.

Η σωστή απάντηση όμως είναι ότι και **το ερώτημα αυτό είναι χωρίς νόημα**.

7) $\mathbf{\sqrt{-9}=-3}$

Η αναμενόμενη απάντηση είναι (Λ) επειδή δεν υπάρχει τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού. Η σωστή απάντηση όμως είναι **ότι το ερώτημα είναι χωρίς νόημα.**

8) $\mathbf{(x^x)'=x^x(1+\ln x)}$ για κάθε $\mathbf{x>0}$

Το ερώτημα αυτό είναι χωρίς νόημα για τον ίδιο λόγο, επειδή η δύναμη x^x δεν έχει οριστεί πουθενά μέσα στα σχολικά βιβλία.

Δυστυχώς το σύμβολο x^x έχει χρησιμοποιηθεί και σε θέματα Πανελλαδικών εξετάσεων και ποτέ δεν βρέθηκε κάποιος να διαμαρτυρηθεί.

9) $\mathbf{\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^4-x^2}=0}$

Η συνηθισμένη απάντηση είναι (Σ).

Όμως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x^4-x^2}$ είναι το

$A=(-\infty,-1]\cup\{0\}\cup[1,+\infty)$, άρα το σημείο 0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης (δεν

υπάρχει δηλ. διάστημα της μορφής $(\alpha,0)$ ή $(0,\beta)$ στο οποίο η f είναι ορισμένη) και η **θεωρούμενη** σωστή απάντηση είναι (Λ).
Το πρόβλημα όμως εδώ δεν είναι αυτό, αν δηλ. το παραπάνω όριο είναι ίσο με 0 ή όχι. Το πραγματικό πρόβλημα είναι αν μπορούμε να ομιλούμε για όριο. Επειδή, όπως προαναφέραμε, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης δεν είναι κατάλληλο, **δεν μπορούμε να ομιλούμε για όριο.**
Με άλλα λόγια για να γράψουμε το σύμβολο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ πρέπει πρώτα να υπάρχουν οι κατάλληλες προϋποθέσεις για το πεδίο ορισμού της f. Αν δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις αυτές, τότε δεν ορίζεται το όριο και δεν μπορούμε να γράψουμε το σύμβολο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
Δηλ. **το ερώτημα είναι χωρίς νόημα**, με άλλα λόγια **δεν υπάρχει τέτοιο ερώτημα.**

10) Υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon\varphi\frac{1}{x}$
Για το ερώτημα αυτό έγινε πολύ συζήτηση mathematica.gr.
Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\varepsilon\varphi\frac{1}{x}$ είναι το σύνολο
$A=\{x\in\mathbb{R}$ με $x\neq\dfrac{1}{\kappa\pi+\frac{\pi}{2}},\ \kappa\in\mathbb{Z}\}$ που δεν περιέχει κανένα διάστημα της μορφής $(\alpha,0)$ ή $(0,\beta)$, δηλαδή σε κάθε διάστημα της μορφής αυτής, υπάρχουν σημεία στα οποία η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi\frac{1}{x}$ δεν ορίζεται.
Και εδώ δηλ. **δεν μπορούμε να ομιλούμε για όριο της f στο 0** και **το ερώτημα είναι χωρίς νόημα.**

2^{η} Ομάδα

Ερωτήματα που δέχονται δύο χαρακτηρισμούς (Σ) και (Λ)

<u>Παραδείγματα</u>
Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως (Σ) ή (Λ)

1) $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$
Η συνηθισμένη απάντηση είναι (Λ), αφού το 1^{o} μέλος ορίζεται και όταν $\alpha,\beta<0$, ενώ το 2^{o} μέλος στην περίπτωση αυτή δεν ορίζεται.

Για να μπορέσουμε να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό πρέπει να δοθούν τα σύνολα αναφοράς των α και β. Εδώ όμως τέτοια σύνολα δεν δόθηκαν και **το ερώτημα είναι ελλιπές, άρα δεν μπορεί να απαντηθεί.**

Βλέποντάς το με άλλη οπτική, μπορούμε να πούμε ότι, αφού τέθηκε το σύμβολο $\sqrt{α}$, αυτό έχει νόημα, δηλαδή αυτόματα πρέπει να δεχτούμε ότι $α \geq 0$ και δεν πρέπει να μας απασχολεί η περίπτωση $α < 0$. Όπως, όταν δίνεται π.χ ότι $f'(x_0) > 0$ δεν τίθεται το ερώτημα αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αλλά δεχόμαστε αυτόματα ότι είναι.
Από την οπτική αυτή η παραπάνω πρόταση είναι (Σ).

Το ερώτημα θα ήταν σωστό επίσης αν είχε τη μορφή:

Μπορούμε για κάθε α, β $\in \mathbb{R}$ να γράψουμε: $\sqrt{α \cdot β} = \sqrt{α} \cdot \sqrt{β}$;

και τότε φυσικά η απάντηση θα ήταν όχι.
Με αυτόν τον τρόπο τίθενται τα ερωτήματα τύπου Σ – Λ στα τελευταία σχολικά βιβλία της Α΄ Λυκείου.

Παρόμοιο είναι και το παρακάτω ερώτημα που έχουμε δει πολλές φορές σε εξετάσεις της Β΄ Λυκείου:

2) Ισχύει $\log(α.β) = \log α + \log β$

Η αναμενόμενη απάντηση είναι (Λ), αφού το $1^ο$ μέλος ορίζεται και όταν $α < 0$ και $β < 0$, ενώ το $2^ο$ μέλος δεν ορίζεται.
Σύμφωνα με όσα είπαμε μόλις πριν, **το ερώτημα είναι χωρίς νόημα** αν δεν δοθούν τα σύνολα αναφοράς των α και β.
Θεωρώντας όμως ότι το σύμβολο logα χρησιμοποιείται μόνο στην περίπτωση $α > 0$, η παραπάνω πρόταση πρέπει να θεωρείται (Σ).

Η πρόταση θα χαρακτηρίζονταν ως (Λ) αν διατυπώνονταν ως εξής:

Μπορούμε για κάθε α, β $\in \mathbb{R}$ να γράψουμε: $\log(α.β) = \log α + \log β$

Παρόμοιο είναι και το παρακάτω ερώτημα:

3) Αν δύο ευθείες είναι κάθετες, το γινόμενο των συντελεστών διευθύνσεών τους είναι ίσο με -1

Η αναμενόμενη απάντηση είναι πως η πρόταση είναι (Λ) με το αιτιολογικό ότι μπορεί να μην ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της μιας ευθείας. Όταν όμως στο ερώτημα αναφέρονται και οι δύο συντελεστές διεύθυνσης, αυτό που καταλαβαίνει κάποιος είναι ότι οι συντελεστές διεύθυνσης υπάρχουν, άρα η πρόταση πρέπει να θεωρείται ως (Σ).
Πρέπει δηλαδή να ερμηνεύσουμε το ερώτημα ως εξής:

Με δεδομένο ότι υπάρχουν οι συντελεστές διευθύνσεως των δύο ευθειών και οι ευθείες είναι κάθετες, το γινόμενο των συντελεστών διευθύνσεών τους είναι ίσο με -1.

4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\ell$

Θετική και Τεχνολ. Κατεύθυνση 2004

Στο σχολικό βιβλίο αναφέρεται η πρόταση αυτή όπως διατυπώνεται παραπάνω μέσα σε ένα πλαίσιο, όμως εκεί δίνονται **πιο πριν** οι κατάλληλες προϋποθέσεις, ότι δηλαδή η f ορίζεται και από τις δύο πλευρές του x_0, οπότε όλοι οι παραπάνω συμβολισμοί έχουν νόημα. Η αναμενόμενη απάντηση λοιπόν ήταν η (Σ).
Στις Πανελλαδικές εξετάσεις όμως κάτι τέτοιο δεν διευκρινίστηκε.

Με μια άλλη οπτική θα λέγαμε ότι η πρόταση είναι (Λ) αφού η σχέση $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ δεν εξασφαλίζει ότι η f ορίζεται και από τις δύο πλευρές του x_0, επομένως η συνεπαγωγή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$ δεν ισχύει.
Μια άλλη λογική απάντηση λοιπόν ήταν η (Λ).
Έτσι, οι καλά διαβασμένοι υποψήφιοι, αντιλαμβανόμενοι το λάθος της ισοδυναμίας έδωσαν την απάντηση (Λ), ενώ οι πιο αδύνατοι έδωσαν την απάντηση (Σ). Δυστυχώς, στα περισσότερα εξεταστικά κέντρα η λάθος απάντηση (Σ) θεωρήθηκε σωστή, ενώ η σωστή απάντηση (Λ) θεωρήθηκε λάθος. Αποτέλεσμα αυτής της ανωμαλίας ήταν η αδικία σε βάρος των καλά διαβασμένων υποψηφίων.

Εμβαθύνοντας ακόμη περισσότερο θα λέγαμε ότι η πρόταση είναι (Σ) για τον εξής λόγο:
Το σύμβολο $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ μπορεί να γραφεί μόνον όταν η συνάρτηση ορίζεται δεξιά του x_0. Αντίστοιχα για να γράψουμε το σύμβολο $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ πρέπει η συνάρτηση να ορίζεται αριστερά του x_0.
Έτσι, από το γεγονός ότι χρησιμοποιήθηκαν τα σύμβολα αυτά, **αυτόματα γίνεται δεκτό** ότι η f ορίζεται και από τις δύο πλευρές του x_0 και επομένως ισχύουν οι απαιτούμενοι περιορισμοί για το πεδίο ορισμού της f, άρα η πρόταση είναι (Σ).

5) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell_1$ **και** $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell_2$, **τότε** $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\ell_1\cdot\ell_2$

Επαναλ. εξετάσεις Γεν. Παιδείας 2004

Η αναμενόμενη απάντηση ήταν (Σ), αφού έτσι αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο της Γενικής Παιδείας, αλλά και στο σχολικό βιβλίο της Κατεύθυνσης. Είναι όμως τα πράγματα έτσι;

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:
$f(x)=\sqrt{x-2}$
$g(x)=\sqrt{4-2x}$

Τα πεδία ορισμού τους είναι $A_f=[2,+\infty)$, $A_g=(-\infty,2]$

Και είναι εξ ορισμού

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x-2} = 0$ και

$\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{4-2x} = 0$

δηλαδή υπάρχουν τα όρια των f και g στο 2

Θυμίζουμε ότι αν μια συνάρτηση ορίζεται μόνο από τη μία πλευρά του x_0, το όριό της στο x_0 είναι εξ ορισμού το πλευρικό της όριο στο x_0.

Η συνάρτηση $f\cdot g$ ορίζεται στο $A_f \cap A_g = \{2\}$ και έχει τύπο $(f\cdot g)(x) = f(2)\cdot g(2) = 0$

Όμως το όριό της στο $x_0 = 2$ δεν ορίζεται αφού, για να ορίζεται το όριο, πρέπει η συνάρτηση f να ορίζεται απαραίτητα σε διάστημα της μορφής (α, x_0) ή (x_0, β) και δεν αρκεί (ούτε μας ενδιαφέρει) να ορίζεται στο x_0.

Έτσι η πρόταση $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to 2} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to 2} g(x)$ **χωρίς τις κατάλληλες προϋποθέσεις είναι ψευδής ή χωρίς νόημα** (ανάλογα πως το βλέπει κανείς, αν δηλ. θεωρεί την πρόταση λάθος όταν δεν ορίζεται κάποιος όρος της).

Για να ισχύει δηλαδή η παραπάνω πρόταση πρέπει οι συναρτήσεις f και g να ορίζονται στην ίδια περιοχή του x_0.

Αν η f ορίζεται μόνο αριστερά του x_0 και η g ορίζεται μόνο δεξιά του x_0, η παραπάνω ισότητα δεν έχει νόημα (ούτε (Σ) ούτε (Λ)).

Για τον ίδιο λόγο ψευδείς (ή χωρίς νόημα) είναι και οι παρακάτω προτάσεις που συχνά βλέπουμε να τίθενται ως ερωτήματα τύπου (Σ) – (Λ) με αναμενόμενη απάντηση την (Σ):

Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια των f και g στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχουν και τα όρια των $f+g$, $f-g$, και $\frac{f}{g}$ (με την πρόσθετη προϋπόθεση $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$)

Τα ίδια λάθη επαναλαμβάνονται και στη συνέχεια των συναρτήσεων.

Αν δηλ. οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, αυτό δεν εξασφαλίζει ότι και οι $f+g$, $f\cdot g$, $g\circ f$ κ.λ.π είναι συνεχείς στο x_0.

Τα ίδια λάθη επαναλαμβάνονται και στην παραγώγιση των συναρτήσεων.

Αν δηλ. οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, αυτό δεν εξασφαλίζει ότι και οι $f+g$, $f\cdot g$ κ.λ.π είναι παραγωγίσιμες στο x_0.

6) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

Η αναμενόμενη απάντηση είναι (Λ) επειδή το ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, δεν εξασφαλίζει ότι η f είναι παραγωγίσιμη δεξιά του x_0. Μπορεί να ορίζεται μόνο αριστερά του x_0 και να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 από αριστερά, οπότε σύμφωνα με τον ορισμό της παραγώγου, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.
Βλέποντάς το με άλλο τρόπο, θα λέγαμε ότι αφού χρησιμοποιήθηκε το σύμβολο $\lim\limits_{x\to x_0^+}$, **η f ορίζεται σίγουρα δεξιά του x_0** και η σωστή απάντηση είναι (Σ).

Η σωστή απάντηση θα ήταν (Λ) αν το ερώτημα είχε την μορφή:
Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε μπορούμε να γράψουμε $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$
επειδή με την μορφή αυτή μπαίνει επιπρόσθετα το ερώτημα αν η f είναι παραγωγίσιμη από δεξιά του x_0.

7) Αν το σημείο x_0 είναι σημείο καμπής της c_f τότε $f''(x_0)=0$
Η συνηθισμένη απάντηση είναι (Λ) επειδή δεν δόθηκε ότι στο σημείο x_0 η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.
Σύμφωνα με όσα έχουμε προαναφέρει, αφού χρησιμοποιήθηκε το σύμβολο $f''(x_0)$, **μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο x_0**, άρα η σωστή απάντηση είναι (Σ).
Το ερώτημα όπως τέθηκε είναι ασαφές. Θα μπορούσε να διατυπωθεί με σαφήνεια με έναν από τους δύο παρακάτω τρόπους.

α) Αν το σημείο x_0 είναι σημείο καμπής της c_f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0 τότε $f''(x_0)=0$.
β) Αν το σημείο x_0 είναι σημείο καμπής της c_f τότε η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0 και $f''(x_0)=0$.

Με την 1η διατύπωση η σωστή απάντηση είναι (Σ), ενώ με την 2η διατύπωση η απάντηση είναι (Λ)

3η Ομάδα: Ασαφή ερωτήματα

Όπως έχουμε αναφέρει, στην ομάδα αυτή συγκαταλέγονται τα ασαφή ερωτήματα.
Η ασάφεια προέρχεται κυρίως από το τι εννοείται αυτόματα και δεν δίνεται ή από το τι δεν εννοείται. Και τα ερωτήματα αυτού του τύπου που έχουν τεθεί σε διάφορες εξετάσεις ή προτείνονται για απάντηση δεν είναι λίγα.

Παραδείγματα

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως (Σ) ή (Λ)

1) $\mathbf{\frac{3}{x^2} > 0,\ x \in \mathbb{R}}$

Εδώ προκύπτει το εξής ερώτημα:
Τι σημαίνει ο συμβολισμός $x \in R$ που συναντούμε συνεχώς;

Έχει καθιερωθεί να σημαίνει **για κάθε x που ανήκει στο** $\mathbb{R}$. Αυτό όμως δεν μπορεί να γίνει δεκτό. Η παρουσία ποσοδείκτη είναι απαραίτητη. Χωρίς ποσοδείκτη, η παραπάνω έκφραση δεν μπορεί να χαρακτηριστεί λογική πρόταση, δηλ. δεν επιδέχεται μονότιμα χαρακτηρισμό (Σ) ή (Λ).

Η αναμενόμενη απάντηση στο ερώτημα $\frac{3}{x^2} > 0,\ x \in R$ είναι η (Λ) επειδή για την τιμή $x = 0$ το κλάσμα $\frac{3}{x^2}$ δεν ορίζεται.

Έχουμε συμφωνήσει όμως ότι για να γράψουμε ένα κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ πρέπει πρώτα να είναι $\beta \neq 0$. Άρα πρέπει να δεχθούμε ότι στην προκειμένη περίπτωση **ισχύει** $\mathbf{x \neq 0}$. Τότε όμως τι θα σημαίνει το σύμβολο $x \in R$;

Το ερώτημα όπως τέθηκε είναι ασαφές και δεν μπορεί να απαντηθεί.

Σημειώνουμε ότι κάθε σχέση (ισότητα, ανισότητα, σχέση του περιέχεσθαι) που περιέχει μεταβλητές είναι χωρίς νόημα αν δεν ακολουθείται από μια πρόσθετη διευκρίνιση για το ποια είναι τα πεδία ορισμού των μεταβλητών, δηλ. για ποιες τιμές των μεταβλητών ζητείται να μελετηθεί.
Έτσι οι παρακάτω σχέσεις για τις οποίες ζητείται ο χαρακτηρισμός (Σ) ή (Λ) δεν έχουν νόημα αν δεν συνοδεύονται από κάποιον ποσοδείκτη για ποιες τιμές μελετώνται.

$$\mathbf{2x = 10,\ f(x+y) = f(x) + f(y),\ x^2 + 1 > 4x,\ \frac{2x}{x+3} \in (-2, 3)}$$

2) Αν $\mathbf{\alpha > 0}$ **και** $\mathbf{\beta \geq 0}$ **τότε** $\mathbf{\alpha + \beta \geq 0}$

Η σωστή απάντηση είναι βέβαια (Σ). Όμως αυτό που καταλαβαίνουν οι μαθητές είναι ότι το άθροισμα $\alpha + \beta$ μπορεί να πάρει και την τιμή 0 και η απάντηση που δίνουν είναι (Λ). **Για τους μαθητές το ερώτημα είναι ασαφές**, θα λέγαμε ίσως παραπλανητικό (επειδή, ενώ γνωρίζουν τι ισχύει, μεταφράζουν λάθος το ερώτημα) και χρειάζονται πρόσθετες διευκρινίσεις.

Παρόμοιο ερώτημα είναι και το παρακάτω:

3) Αν ω είναι η γωνία μιας ευθείας με τον άξονα των x τότε $\mathbf{0 \leq \omega \leq 180^0}$

Σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο, για την γωνία ω, σύμφωνα με τον ορισμό ισχύει $0 \leq \omega < 180^0$

Επομένως η σωστή απάντηση είναι (Σ). Αυτό όμως που εννοούν οι μαθητές είναι το ότι η γωνία ω παίρνει όλες τις τιμές του κλειστού διαστήματος $[0,180^0]$ και η απάντηση που δίνουν συνήθως είναι (Λ). Χρειάζονται λοιπόν και εδώ κάποιες διευκρινίσεις. Το **ερώτημα όπως τέθηκε, τουλάχιστον για τους μαθητές, είναι ασαφές.**

Αν κάποιος το ερμηνεύσει ως:
Για την γωνία μιας ευθείας με τον άξονα των x εξ ορισμού είναι $0 \le \omega \le 180^0$ τότε η σωστή απάντηση είναι (Λ).

Αν όμως το ερμηνεύσει ως:
Η γωνία ω έχει την ιδιότητα $0 \le \omega \le 180^0$ (το ερμηνεύσει δηλ. ως συμπέρασμα και όχι ως ορισμό) τότε η σωστή απάντηση είναι (Σ).

4) Η εξίσωση $e^{x-2} = x^2$ έχει δύο ρίζες
Τι σημαίνει 2 ρίζες; Δύο ακριβώς ή δύο τουλάχιστον;
Το ερώτημα είναι ασαφές αν δεν συμπληρωθεί με μία από τις δύο λέξεις **"ακριβώς"** ή **"τουλάχιστον"**.

5) Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα Δ τότε η c_f και η εφαπτομένη της σε τυχαίο σημείο x_0 έχουν μοναδικό κοινό σημείο το x_0.
Εδώ υπάρχουν δύο ασαφή σημεία:
Το σημείο x_0 είναι σημείο του διαστήματος Δ;
Το μοναδικό κοινό σημείο ανήκει στο διάστημα Δ ή μπορεί να είναι και εκτός του διαστήματος Δ;
Μια απάντηση με αυστηρά κριτήρια είναι (Λ) επειδή δεν δόθηκε ότι το x_0 ανήκει στο Δ και δεν διευκρινίστηκε αν ένα δεύτερο κοινό σημείο θα ανήκει επίσης στο Δ. Η απάντηση που είδα ήταν (Σ), δηλ. εννοούνταν ότι και το x_0 ανήκει στο Δ και το ενδεχόμενο άλλο κοινό σημείο θα ανήκε στο Δ. **Το ερώτημα όπως τέθηκε είναι ασαφές** και δεν μπορεί να απαντηθεί αν δεν δοθούν περισσότερες διευκρινίσεις.

6) Αν η f είναι γν. αύξουσα στο διάστημα (α,β), τότε $f'(x) \ge 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$
Η αναμενόμενη απάντηση είναι (Λ) επειδή η f μπορεί να μην είναι παραγωγίσιμη. Σύμφωνα με όσα έχουμε υποστηρίξει μέχρι τώρα η σωστή απάντηση είναι (Σ) επειδή για να χρησιμοποιηθεί το σύμβολο $f'(x)$, η f είναι παραγωγίσιμη.
Βλέποντάς το με άλλη οπτική θα λέγαμε ότι **το ερώτημα είναι ασαφές** επειδή δεν γνωρίζουμε αν εννοείται ότι η f είναι παραγωγίσιμη ή όχι.

7) Ισχύει: $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Πανελλαδικές 2005, Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

Η αναμενόμενη απάντηση είναι (Λ).

Αν όμως δεν δοθεί το σύνολο αναφοράς της μεταβλητής x, τότε το ερώτημα δεν έχει νόημα.
Π.χ η πρόταση θα ήταν (Σ) αν ως σύνολο αναφοράς της μεταβλητής x θεωρούνταν το σύνολο των σημείων για τα οποία $f(x)=0$ ή $g'(x)=0$

Όπως έχουμε προαναφέρει μια σχέση που περιέχει διάφορες μεταβλητές δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως (Σ) ή (Λ) αν δεν δοθούν τα σύνολα αναφοράς των μεταβλητών.
Κρίνοντάς την πιο αυστηρά, (Μαθηματική Λογική), θα λέγαμε ότι η παραπάνω σχέση είναι ένας προτασιακός τύπος και δεν είναι λογική πρόταση. Ο προτασιακός τύπος γίνεται πρόταση αν συνοδεύεται από έναν ποσοδείκτη (**για κάθε** ή **υπάρχει**) που μας πληροφορεί για ποιες τιμές της μεταβλητής x εξετάζουμε την αλήθεια της πρότασης.

8) Αν f και g είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης ισχύει $(f(g(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

Πανελλαδικές 2007, Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, αν δεν δοθεί το σύνολο αναφοράς της μεταβλητής x το παραπάνω ερώτημα είναι χωρίς νόημα. Είναι σαν να ρωτούμε: Ισχύει $x^2=9$;

9) Η c_f μπορεί να έχει με μια κατακόρυφη ασύμπτωτή της κοινά σημεία.
Μια κατακόρυφη ευθεία μπορεί να έχει με την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης το πολύ ένα κοινό σημείο. Επομένως και μια κατακόρυφη ασύμπτωτη μπορεί να έχει με την c_f το πολύ ένα κοινό σημείο.

Στο ερώτημα όμως η κρίσιμη λέξη είναι η λέξη **«κοινά».**

Αν κάποιος με την λέξη «κοινά» εννοεί τουλάχιστον δύο σημεία (πληθυντικός), τότε η σωστή απάντηση είναι (Λ).

Αν όμως με τη λέξη «κοινά» δεν εννοείται ο πληθυντικός της λέξης «κοινό», αλλά εννοείται έστω και ένα κοινό σημείο, τότε η σωστή απάντηση είναι (Σ).

Επομένως **το ερώτημα είναι ασαφές**

10) Η ευθεία (ε) με εξίσωση $y=\beta$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\beta$

Πριν απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό δίνουμε τον ορισμό της οριζόντιας ασύμπτωτης του σχολικού βιβλίου. Ο ορισμός αυτός είναι ο εξής:

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$), τότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

Ο ορισμός αυτός δεν μας λέει αν οι περιπτώσεις αυτές είναι οι μοναδικές.

Αν π.χ $\lim_{x\to 3} f^2(x) = 4$, είναι η ευθεία $y = 4$ οριζόντια ασύμπτωτη της c_f;

Για να είναι πλήρης ο ορισμός της οριζόντιας ασύμπτωτης (και οποιοσδήποτε άλλος ορισμός) πρέπει να περιέχει την έκφραση «**αν και μόνον αν**» ώστε να μας πληροφορεί επιπλέον και σε ποιες περιπτώσεις μια ευθεία δεν είναι οριζόντια ασύμπτωτη της c_f. Αλλιώς ο ορισμός δεν είναι σαφής. Επομένως,

Το ερώτημα όπως τέθηκε είναι ασαφές.

Αν εννοηθεί το ερώτημα ως εξής: Αν $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \beta$ τότε η (ε) λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της c_f τότε η σωστή απάντηση είναι (Σ).

Αν όμως εννοηθεί ότι η (ε) λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη μόνο στην περίπτωση $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \beta$, τότε η σωστή απάντηση είναι (Λ).

11) Τις κατακόρυφες ασύμπτωτες μιας συνάρτησης f τις ψάχνουμε μόνο στα σημεία του πεδίου ορισμού της f όπου η f δεν είναι συνεχής.

Το ερώτημα είναι επίσης ασαφές διότι μπορεί να εννοηθεί με δύο τρόπους. Εξαρτάται από το πώς τονίζεται η λέξη **«μόνο».**

<u>1ος τρόπος</u>
Ψάχνουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες <u>μόνο</u> σε σημεία του πεδίου ορισμού…

Τότε η σωστή απάντηση είναι (Λ)

<u>2ος τρόπος</u>
Ψάχνουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες <u>μόνο σε εκείνα τα σημεία</u> του πεδίου ορισμού της f στα οποία δεν είναι συνεχής.

Τότε η σωστή απάντηση είναι (Σ)

Ένα ασαφές ερώτημα που βλέπουμε συχνά και **απαντάται λάθος** είναι το εξής:

12) Αν η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι γν. αύξουσα (οπότε ορίζεται η f^{-1}), τότε και η f^{-1} είναι γν. αύξουσα.

Ο ορισμός της μονοτονίας στο τωρινό σχολικό βιβλίο (2016-2017) είναι ο εξής:

Μια συνάρτηση f λέγεται

- **Γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$**

- **Γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$**

Ο ορισμός της μονότονης συνάρτησης λοιπόν στο ισχύον σχολικό βιβλίο δίνεται μόνο σε διάστημα. Έτσι δεν έχει νόημα η έκφραση "η συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα στο $A = (1,2) \cup (2,3)$" αφού το A δεν είναι διάστημα.

Στο προηγούμενο σχολικό βιβλίο (επί Δεσμών) ο ορισμός της μονοτονίας δίνονταν σε οποιοδήποτε σύνολο. Έτσι σε λυμένο παράδειγμα του σχολικού βιβλίου για να μελετηθεί η μονοτονία της $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, με $\alpha > 0$, αποδεικνύεται ότι η f είναι γν. φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ και κατόπιν αποδεικνύεται ότι η f δεν είναι γν. φθίνουσα στην ένωση $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ παρατηρώντας ότι $f(-1) < f(1)$.

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό (βιβλίο Δεσμών) αποδεικνύεται ότι αν η f είναι γν. μονότονη (οπότε υπάρχει η αντίστροφή της f^{-1}), η f^{-1} είναι γν. μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας. Η πεποίθηση αυτή παρέμεινε ως σήμερα και πολύ συχνά βλέπουμε την επίκληση αυτού του θεωρήματος.
Τι ακριβώς ισχύει όμως (με το τωρινό σχολικό βιβλίο);

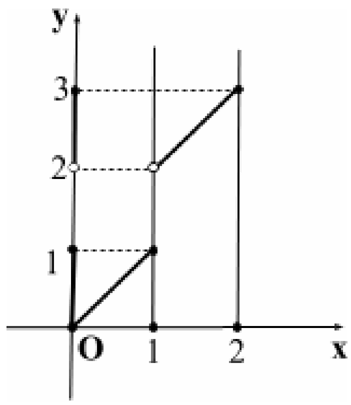
Ισχύει τώρα το εξής:

Αν η συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα στο διάστημα Δ (οπότε υπάρχει η αντίστροφή της f^{-1}), η f^{-1} έχει την ιδιότητα:
Για κάθε $y_1, y_2 \in f(\Delta)$ με $y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

Αυτό όμως δεν αρκεί για να πούμε ότι η f^{-1} είναι γν. αύξουσα. Για να πούμε ότι η f^{-1} είναι γν. αύξουσα στο $f(\Delta)$ πρέπει το $f(\Delta)$ να είναι διάστημα. Το $f(\Delta)$ είναι σίγουρα διάστημα αν η f είναι συνεχής. Αν όμως η f δεν είναι συνεχής τότε το $f(\Delta)$ μπορεί να μην είναι διάστημα όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Η συνάρτηση f ορίζεται ως εξής: $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \in [0,1] \\ x+1 & \text{αν } x \in (1,2] \end{cases}$

Η γραφική παράσταση της f δίνεται φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
Ονομάζουμε $\Delta_1 = [0,1]$, $\Delta_2 = (1,2]$
Το πεδίο ορισμού της f είναι το κλειστό διάστημα $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 = [0,2]$ και εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι γν. αύξουσα στο Δ. Το σύνολο τιμών της είναι το σύνολο $f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [0,1] \cup (2,3]$ το οποίο δεν είναι διάστημα. Έτσι δεν μπορούμε να ομιλούμε για μονοτονία



της f^{-1}. Μπορούμε όμως να πούμε ότι για κάθε $y_1, y_2 \in f(\Delta)$ με $y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.
Ποια είναι λοιπόν η απάντηση για το ερώτημα αν η f^{-1} είναι γν. αύξουσα ή δεν είναι;
Το ερώτημα είναι ασαφές. Πρέπει οπωσδήποτε να δοθεί το σύνολο τιμών της f, δηλ. το πεδίο ορισμού της f^{-1}, ώστε να μπορούμε να ομιλούμε για τη μονοτονία ή όχι της f.

Μετά το παράδειγμα αυτό δημιουργείται το ερώτημα τι γίνεται με την μονοτονία της σύνθεσης δύο συναρτήσεων που πολύ συχνά βλέπουμε ως ερώτημα τύπου Σ - Λ. Η υποψία δημιουργείται για το πεδίο ορισμού της σύνθεσης, αν δηλαδή είναι υποχρεωτικά διάστημα ή όχι. Οι απαντήσεις που βλέπουμε συνήθως δεν είναι τεκμηριωμένες επαρκώς.

Το ερώτημα λοιπόν είναι:

13) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι γν. αύξουσες, τότε και η σύνθεση $g \circ f$ είναι γν. αύξουσα.

Ισχύει το εξής:
Αν οι συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$ είναι γν. μονότονες και ορίζεται η σύνθεση $g \circ f: \Gamma \to \mathbb{R}$ <u>και το Γ δεν είναι μονοσύνολο</u>, τότε η $g \circ f$ είναι γν. αύξουσα αν οι συναρτήσεις f και g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας, ενώ η $g \circ f$ είναι γν. φθίνουσα αν οι συναρτήσεις f και g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας.

Θα αποδείξουμε την πρόταση στην περίπτωση όπου οι f και g είναι γν. αύξουσες. Όμοια γίνεται η απόδειξη και στις άλλες περιπτώσεις

Η συνηθισμένη απόδειξη που βλέπουμε είναι η παρακάτω:

Είναι: $\Gamma = \{x \in A \text{ και } f(x) \in B\}$
Έστω $x_1, x_2 \in \Gamma$ με $x_1 < x_2 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2) \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \Rightarrow$
$(g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2)$
Άρα η $g \circ f$ είναι γν. αύξουσα.

Παραλείπεται (μονίμως θα έλεγα) η απόδειξη ότι το Γ είναι διάστημα.

Είναι όμως πράγματι το Γ διάστημα; Η απάντηση είναι καταφατική εφόσον το Γ δεν είναι μονοσύνολο.

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι το Γ είναι διάστημα, οπότε η πρόταση ισχύει.
Για να αποδείξουμε ότι το Γ είναι διάστημα, αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $\alpha, \beta \in \Gamma$, τότε για κάθε x με $\alpha < x < \beta$ ισχύει $x \in \Gamma$.
Πράγματι, επειδή οι f και g είναι γν. αύξουσες στα Α και Β, τα Α και Β είναι διαστήματα.
Επειδή $\alpha, \beta \in \Gamma \Rightarrow \alpha, \beta \in A$ και επειδή το Α είναι διάστημα και $\alpha < x < \beta \Rightarrow x \in A$

Επίσης $\alpha < x < \beta \overset{f\uparrow A}{\Rightarrow} f(\alpha) < f(x) < f(\beta)$
Επειδή το B είναι διάστημα, $f(\alpha), f(\beta) \in B$ και $f(\alpha) < f(x) < f(\beta) \Rightarrow f(x) \in B$
Τέλος, επειδή $x \in A$ και $f(x) \in B \Rightarrow x \in \Gamma$, άρα το Γ είναι διάστημα και μπορούμε πλέον να ομιλούμε για μονοτονία της $g \circ f$.

<u>Παρατήρηση</u>
Στη διατύπωση του παραπάνω θεωρήματος προσθέσαμε τη φράση ότι το Γ δεν είναι μονοσύνολο.
Στο σχολικό βιβλίο σε δύο σημεία της παραγράφου 1.2 (το ένα σημείο στη σύνθεση συναρτήσεων) αναφέρεται κατά λέξη ότι:

"σε όλη την έκταση του βιβλίου θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που οι συνθέσεις τους έχουν πεδίο ορισμού διάστημα ή ένωση διαστημάτων"

Η σημείωση αυτή δεν αρκεί όμως για να αγνοήσουμε την παραπάνω εξαίρεση. Άλλωστε τα ερωτήματα τύπου (Σ) – (Λ) στην περίπτωση που είναι (Λ), το λάθος οφείλεται σε κάποια λεπτομέρεια ή εξαίρεση.
Η ίδια παρατήρηση ισχύει και σε άλλα θεωρήματα (συνέχεια και παράγωγος).

Για να δοθεί λοιπόν απάντηση λοιπόν στο ερώτημα: Η $g \circ f$ είναι γν. αύξουσα; πρέπει να δοθεί επιπλέον ότι το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ δεν είναι μονοσύνολο.

Παρόμοιο ερώτημα και το παρακάτω:

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η συνάρτηση $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

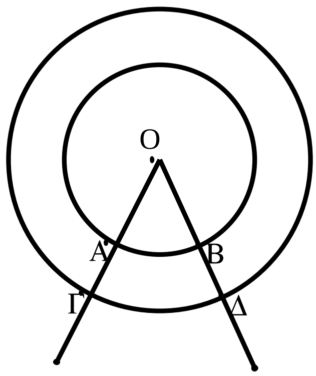
Το ερώτημα είναι ασαφές αν δεν δοθεί το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ που να εξασφαλίζει ότι το x_0 δεν είναι μεμονωμένο σημείο, άρα μπορούμε να ομιλούμε για συνέχεια.

<u>Πρόσθετα παραδείγματα</u>
Παραθέτουμε μερικά ακόμη παραδείγματα από την Γεωμετρία της Α΄ Λυκείου διαφόρων μορφών για να καταδείξουμε την απειρία των προβληματικών ερωτημάτων αλλά και πόσο εύκολα είναι να δοθούν διάφορες απαντήσεις τύπου Σ - Λ.
Για να γίνουν πιο πειστικά τα επιχειρήματά μας, αντλήσαμε τα ερωτήματα μόνο από μερικές σελίδες του σχολικού βιβλίου.

1) Αν το Γ είναι το μέσο ενός κυρτογώνιου τόξου $\overset{\frown}{AB}$, τότε $\overset{\frown}{A\Gamma} - 2\overset{\frown}{AB} = \hat{0}$

Η αναμενόμενη απάντηση είναι (Σ), όμως στο σχολικό βιβλίο δεν ορίστηκε μηδενικό τόξο (αν και χρησιμοποιείται η έννοια αυτή στην § 2.19).
Επομένως **το ερώτημα είναι χωρίς νόημα.**

2) Τα τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ του διπλανού σχήματος είναι ίσα.
Η σωστή απάντηση είναι ότι τα τόξα δεν είναι συγκρίσιμα.
Το ερώτημα είναι χωρίς νόημα.



Το ερώτημα είναι ασαφές αν δοθεί με την μορφή:
Ισχύει $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$; επειδή με το σύμβολο $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ άλλοτε εννοούμε το ίδιο το τόξο και άλλοτε το μέτρο του.

Στο ίδιο σχήμα, είναι $\widehat{\mathrm{AOB}} = \overset{\frown}{\mathrm{AB}}$;
Το ερώτημα είναι πάλι ασαφές επειδή μπορεί να εννοηθεί με δύο τρόπους. Το μέτρο της γωνίας είναι ίσο με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου και με την έννοια αυτή η σωστή απάντηση είναι (Σ), μπορεί όμως να εννοηθεί ότι η γωνία είναι ίση με το τόξο, που δεν έχει νόημα (στο σχολικό βιβλίο χρησιμοποιείται το ίδιο σύμβολο και για την γωνία και για το μέτρο της).

3) Το μέτρο μιας γωνίας είναι ίσο με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου όταν την γωνία την καταστήσουμε επίκεντρη (ορισμός του σχολικού βιβλίου)
Ασαφές το ερώτημα επειδή δεν ορίζει την ακτίνα του κύκλου. Το μέτρο του τόξου βέβαια είναι το ίδιο για οποιαδήποτε ακτίνα, αλλά αυτό δεν προκύπτει από πουθενά με την ύλη που έχουν διδαχθεί οι μαθητές. Άρα **το ερώτημα είναι ασαφές.**

4) Ένα τετράπλευρο ονομάζεται παραλληλόγραμμο αν οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
Ο ορισμός της παραλληλίας στο σχολικό βιβλίο δόθηκε μόνο για ευθείες και όχι για ευθ. τμήματα. **Το ερώτημα λοιπόν είναι χωρίς νόημα.**

5) Οι διαγώνιες ρόμβου τέμνονται κάθετα.
Ο ορισμός της καθετότητας στο σχολικό βιβλίο Γεωμετρίας της Α΄ Λυκείου δόθηκε μόνο για ευθείες, όχι για ευθ. τμήματα. Επομένως το ερώτημα είναι χωρίς νόημα.

Ερωτήματα πολλαπλής επιλογής στα θέματα του διαγωνισμού του Α.Σ.Ε.Π του κλάδου ΠΕ03 (καθηγητές μαθηματικών).[1]

Ημερομηνία διαγωνισμού 8-12-2002

Παρόμοια με τα ερωτήματα τύπου Σ - Λ είναι και τα ερωτήματα πολλαπλής επιλογής όπου οι διαγωνιζόμενοι πρέπει να επιλέξουν την σωστή απάντηση μέσα από κάποιες απαντήσεις που τους δίνονται.

[1] **Δημοσιεύθηκαν οι παρούσες παρατηρήσεις στην εφημερίδα ΛΑΟΣ της Ημαθίας την 12-12-2002 στην σελ. 8**

Τον Δεκέμβριο 2002 πραγματοποιήθηκε ο διαγωνισμός Α.Σ.Ε.Π για τον κλάδο των μαθηματικών.
Τέθηκαν 20 ερωτήματα πολλαπλής επιλογής. Οι διαγωνιζόμενοι έπρεπε να επιλέξουν μια μόνο από τις 4 απαντήσεις α, β, γ, δ ή είχαν μια 5η επιλογή: "Δεν γνωρίζω".
Από κάθε σωστή απάντηση έπαιρναν 5 μονάδες, ενώ από κάθε λάθος απάντηση έχαναν 6,25 μονάδες. Επομένως σε περίπτωση αμφιβολίας, ο διαγωνιζόμενος υποχρεώνονταν να επιλέξει την απάντηση "Δεν γνωρίζω".
Οι διαγωνιζόμενοι δεν είχαν την δυνατότητα να γράψουν άλλα σχόλια ή παρατηρήσεις.
Στα 20 ερωτήματα που τέθηκαν για απάντηση τα 3 είχαν σοβαρό πρόβλημα κατανόησης (ασαφή ερωτήματα) αντίστοιχα με τα ερωτήματα τύπου Σ – Λ που αναλύσαμε.

Τα ερωτήματα αυτά ήσαν τα εξής:

<u>ΘΕΜΑ 3</u>

Ο πραγματικός αριθμός x, με $0 < x < 1$ που ικανοποιεί την σχέση

$x^2 + x^4 + ... = \eta\mu^2 \frac{\pi}{4}$ είναι:

α) $x = \frac{\pi}{4}$ **β) $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$**

γ) $x = \frac{\pi}{6}$ **δ) $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$**

<u>Ανάλυση</u>

Αρχικά πρέπει να πούμε ότι το $x^2 + x^4 + ...$ δεν εννοεί υποχρεωτικά ότι πρόκειται για άθροισμα απείρων όρων. Μπορεί να εννοεί ότι τα αποσιωπητικά πρέπει να συμπληρωθούν με έναν μόνο όρο. Σε τέτοια περίπτωση κάθε μία από τις απαντήσεις α, β, γ, δ είναι σωστή. Οι διαγωνιζόμενοι λοιπόν θα έπρεπε να απαντήσουν ότι δεν γνωρίζουν.
Αν παραβλέψουμε αυτό και θεωρήσουμε ότι το άθροισμα $x^2 + x^4 + ...$ εννοεί υποχρεωτικά άθροισμα απείρων όρων, θα πρέπει υποχρεωτικά να δοθεί στην εκφώνηση ότι η ακολουθία $x^2, x^4, ...$ είναι γεωμετρική πρόοδος. Δεν μπορούμε δηλαδή γνωρίζοντας μόνο τους δύο πρώτους όρους μιας ακολουθίας να καταλάβουμε ποιοι είναι οι επόμενοι όροι της.
Υποτίθεται (για την Επιτροπή των θεμάτων) ότι οι εκθέτες των όρων που δόθηκαν, ακολουθούν την διαδοχή 2, 4, 6, 8, 10,… δηλ. ότι πρόκειται για την ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu = 2\nu \ \ \forall \nu \in \mathbb{N}^*$, οπότε η ακολουθία $x^2, x^4, x^6, x^8, x^{10}, ...$ είναι απολύτως φθίνουσα γεωμ. πρόοδος με πρώτο όρο $\alpha_1 = x^2$ και λόγο $\lambda = x^2$ και επομένως το άθροισμα των απείρων όρων της είναι:

$$\Sigma_\infty = \frac{\alpha_1}{1-\lambda} = \frac{x^2}{1-x^2}$$

Επομένως πρέπει: $\frac{x^2}{1-x^2} = \eta\mu^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ απ' όπου προκύπτει $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Όμως δεν είναι υποχρεωτικό να είναι έτσι. Η ακολουθία θα μπορούσε να είναι η $x^2, x^4, x^8, x^{16},...$ όπου οι εκθέτες αποτελούν γεωμετρική πρόοδο, ή ακόμη οι εκθέτες θα μπορούσαν να είναι όροι οποιασδήποτε άλλης ακολουθίας. Π.χ η ακολουθία

$$\alpha_\nu = \begin{cases} 2\nu & \alpha\nu\ \nu \le 5 \\ \nu^2 & \alpha\nu\ \nu > 5 \end{cases}$$

είναι μια τέτοια.

Αλλά και αν ακόμη υποτεθεί ότι ο γενικός όρος της ακολουθίας των εκθετών δίνεται από έναν μόνο τύπο, είναι εύκολο να κατασκευάσουμε άπειρες ακολουθίες με δύο πρώτους τους 2, 4 και επόμενο όρο οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό. Π.χ η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu = \frac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2)(\lambda-6)+2\nu$ όπου λ πραγματικός αριθμός, έχει $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = \lambda$.

Η Επιτροπή των θεμάτων έπρεπε να γνωρίζει την βασική αυτή αρχή, ότι δηλαδή για να οριστεί μια ακολουθία, δεν αρκεί να δοθεί πεπερασμένο πλήθος όρων της.

ΘΕΜΑ 9

Θεωρούμε τον περιορισμό της παραβολής $f(x)$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $(\gamma, f(\gamma))$, $\gamma \in (\alpha,\beta)$ είναι το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της $f(x)$ γίνεται παράλληλη της ευθείας που ενώνει τα σημεία $(\alpha, f(\alpha))$ και $(\beta, f(\beta))$ τότε

α) $\gamma = \beta - \frac{\beta-\alpha}{4}$ **β)** $\gamma = \beta + \frac{\beta-\alpha}{3}$

γ) $\gamma = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{2}$ **δ)** $\gamma = \beta - \frac{\beta-\alpha}{3}$

Ανάλυση

Για να απαντηθεί το ερώτημα αυτό, θα πρέπει να θεωρήσουμε ότι η παραβολή έχει εξίσωση της μορφής $f(x) = \kappa x^2 + \lambda x + \mu,\ \kappa \neq 0$ δηλαδή έχει άξονα $\| y'y$. Τότε η λύση γίνεται ως εξής:

Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της χορδής AB είναι:

$$\lambda_{AB} = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = \frac{\kappa\beta^2+\lambda\beta+\mu-(\kappa\alpha^2+\lambda\alpha+\mu)}{\beta-\alpha} = \kappa(\alpha+\beta)+\lambda$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$ είναι:

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = f'(\gamma) = 2\kappa\gamma + \lambda$$

Για να είναι η εφαπτομένη παράλληλη προς την χορδή AB πρέπει και αρκεί:

$\lambda_{\varepsilon\varphi} = \lambda_{AB}$ απ' όπου προκύπτει $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$

Επομένως σωστή απάντηση (σύμφωνα με το πως το εννοούσε η Επιτροπή) είναι η γ.

Όμως θα μπορούσαμε να εννοήσουμε κάλλιστα ότι η παραβολή έχει εξίσωση: $f(x) = \sqrt{2px}$, $x \ge 0$ (η ακόμη και άλλη εξίσωση) (και έτσι το εννόησαν κάποιοι διαγωνιζόμενοι). Τότε η σωστή απάντηση θα ήταν: $\gamma = \left(\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{2}\right)^2$ που δεν συμπίπτει με καμία από αυτές που δόθηκαν.

Εδώ ίσως υπάρξει ένας αδύναμος αντίλογος. Ίσως δηλ. ισχυριστεί κάποιος ότι η εξίσωση $f(x)=\sqrt{2px}$, $x\geq 0$ δεν παριστάνει παραβολή, αφού σύμφωνα με τον ορισμό: "**Παραβολή είναι το σύνολο των σημείων…**".
Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι αποδεκτό, διότι ονομάζουμε παραβολή και κάθε τμήμα της.
Για να απαντηθεί λοιπόν το θέμα αυτό έπρεπε να δοθεί υποχρεωτικά η εξίσωση της παραβολής.

ΘΕΜΑ 10

Έστω $y_1(x)$, $y_2(x)$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει $y_1'(x)y_2(x)\neq y_1(x)y_2'(x)$ για κάθε πραγματικό x. Αν x_1,x_2 είναι ρίζες της $y_1(x)$ με $x_1<x_2$ και x_3,x_4 είναι ρίζες της $y_2(x)$ με $x_3<x_4$, τότε ποια από τις παρακάτω ανισότητες είναι σωστή;

α) $x_1<x_3<x_4<x_2$ **β) $x_3<x_4<x_1<x_2$**

γ) $x_1<x_2<x_3<x_4$ **δ) $x_1<x_3<x_2<x_4$**

Ανάλυση

Με την πρώτη ματιά μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι καμία από τις απαντήσεις που δόθηκαν δεν είναι σωστή. Αυτό δικαιολογείται ως εξής:
Η σχέση $y_1'(x)y_2(x)\neq y_1(x)y_2'(x)$ είναι συμμετρική ως προς $y_1(x)$ και $y_2(x)$, δηλ. δεν βλάπτεται αντιμεταθέτοντας τις $y_1(x)$ και $y_2(x)$. Επομένως αν ισχύει μια από τις α, β, γ, δ, θα ισχύει υποχρεωτικά και η συμμετρική της, δηλ. αν ισχύει π.χ η α: $x_1<x_3<x_4<x_2$ τότε θα ισχύει και η $x_3<x_1<x_2<x_4$ που όμως έρχεται σε αντίθεση με την α.
Τι εννοούσε λοιπόν η Επιτροπή με το θέμα αυτό;
Το θέμα τέθηκε με μεγάλη επιπολαιότητα και παραλείφθηκαν βασικές προϋποθέσεις. Αυτές ήσαν:

- $x_1<x_3$
- Τα x_1,x_2 είναι μοναδικές ρίζες της $y_1(x)$
- Τα x_3,x_4 είναι μοναδικές ρίζες της $y_2(x)$

Με τις παραπάνω προϋποθέσεις η λύση γίνεται ως εξής:
Οι $y_1(x)$ και $y_2(x)$ δεν μπορούν να έχουν κοινή ρίζα, διότι τότε δεν θα ίσχυε η σχέση $y_1'(x)y_2(x)\neq y_1(x)y_2'(x)$ για την τιμή της κοινής ρίζας.
Έστω $y_2(x)\neq 0$ $\forall x\in(x_1,x_2)$
Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$ ορισμένη στο $[x_1,x_2]$
Για την συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο $[x_1,x_2]$, άρα $\exists\xi\in(x_1,x_2)$ με $f'(\xi)=0\Leftrightarrow$ $y_1'(\xi)y_2(\xi)-y_1(\xi)y_2'(\xi)=0$, άτοπο λόγω της υπόθεσης.
Επομένως για κάποιο $x_0\in(x_1,x_2)$ ισχύει $y_2(x_0)=0$, δηλαδή μια ρίζα της $y_2(x)$ ανήκει στο (x_1,x_2).

Με τον ίδιο τρόπο (θεωρώντας δηλαδή την συνάρτηση $g(x)=\frac{y_2(x)}{y_1(x)}$ στο $[x_3, x_4]$) αποδεικνύεται ότι μια τουλάχιστον ρίζα της $y_1(x)$ ανήκει στο διάστημα (x_3, x_4).
Με τα παραπάνω και ότι $x_1 < x_3$ η μόνη δυνατή διάταξη των ριζών είναι η $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$ δηλαδή η σωστή απάντηση είναι η δ.
Χωρίς τα πρόσθετα δεδομένα καμία από τις σχέσεις α, β, γ, δ δεν είναι σωστή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:
Εφαρμόζοντας την αρχή ότι ***μια εργασία δεν πρέπει να αντιγράφει ή να παίρνει στοιχεία από άλλες εργασίες***, το περιεχόμενο της παρούσας εισήγησης αντλήθηκε μόνο από δικές μου εργασίες όπου μπορείτε να βρείτε περισσότερες λεπτομέρειες και επεξηγήσεις

1) ΑΝΑΛΥΣΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ: Σημεία που χρειάζονται ιδιαίτερη προσοχή
https://drive.google.com/file/d/0B9uh0VymSVrpdEwzbFpjbGZtdW8/view

2. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ. Σημεία που χρειάζονται ιδιαίτερη προσοχή
https://drive.google.com/file/d/0B9uh0VymSVrpblc5RlZ1Z2FyMkU/view

3. Λάθη και παραλείψεις στην εφαρμογή των θεωρημάτων της Ανάλυσης
https://drive.google.com/file/d/0B9uh0VymSVrpRU92aGVfTlVzY1E/view

4. Σημεία διαφωνιών
https://drive.google.com/file/d/0B9uh0VymSVrpUHQySUJLVlNyUlk/view