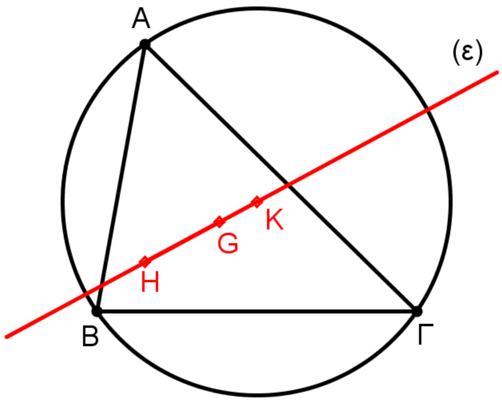
Κοινά σημεία των πλευρών τριγώνου και της ευθείας Euler

Νίκος Ιωσηφίδης, Μαθηματικός

e-mail: iossifid@yahoo.gr

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, Η το ορθόκεντρό του, G το βαρύκεντρό του και Κ το περίκεντρό του.
Αν δύο από τα 3 αυτά σημεία ταυτίζονται, τότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και το τρίτο σημείο ταυτίζεται με τα άλλα δύο.
Στην περίπτωση που τα 3 σημεία είναι διαφορετικά, αποδεικνύεται είναι συνευθειακά, το G βρίσκεται μεταξύ των Η και Κ και ισχύει HG = 2 GK.
Η ευθεία στην οποία βρίσκονται τα σημεία Η, G και Κ λέγεται ευθεία Euler του τριγώνου. Θα τη συμβολίζουμε στη συνέχεια με (ε).



Ευθεία Euler
σκαληνού τριγώνου

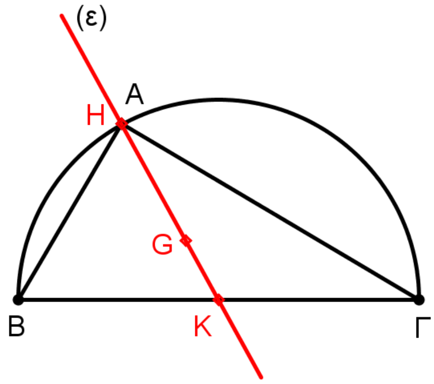
Θα μελετήσουμε με ποιες προϋποθέσεις η (ε) τέμνει κάποια πλευρά ενός τριγώνου.

Σύμφωνα με το αξίωμα του Pash, μια ευθεία (ε) που δεν διέρχεται από μια κορυφή τριγώνου και δεν είναι παράλληλη προς κάποια πλευρά του ή τέμνει δύο πλευρές του τριγώνου και την προέκταση της τρίτης πλευράς ή τέμνει τις προεκτάσεις και των 3 πλευρών του.

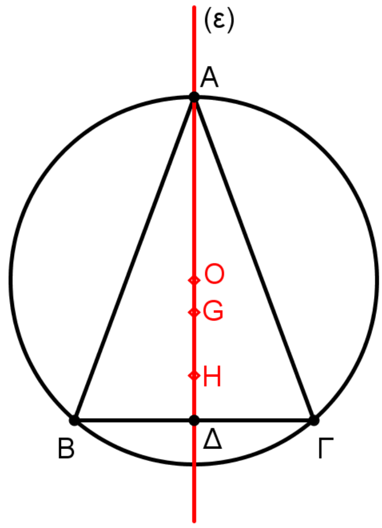
Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στην κορυφή Α, τότε το ορθόκεντρό του είναι το Α. Αν G είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου, η ευθεία (ε) είναι η ευθεία της διαμέσου AGK όπου το μέσο Κ της ΒΓ είναι και το περίκεντρο του τριγώνου.

Στην περίπτωση αυτή η (ε) τέμνει την υποτείνουσα ΒΓ στο μέσο της και περνά από το κοινό σημείο Α των δύο άλλων πλευρών.

Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, τα σημεία Η, G και Κ βρίσκονται στη διάμεσο ΑΜ και η (ε) είναι η ευθεία της διαμέσου ΑΜ. Δηλ. και στην περίπτωση αυτή η (ε) τέμνει μια πλευρά ΒΓ του τριγώνου στο μέσο της και διέρχεται από το κοινό σημείο Α των δύο άλλων πλευρών.



Ευθεία Euler
ορθ. τριγώνου



Ευθεία Euler
ισοσκ. τριγώνου

Αν η (ε) είναι παράλληλη προς μια πλευρά τριγώνου, επειδή διέρχεται από το εσωτερικό σημείο G του τριγώνου, τέμνει τις δύο άλλες πλευρές του.

Θα μελετήσουμε όλες τις άλλες περιπτώσεις. Δηλ. στα επόμενα θεωρούμε ότι το τρίγωνο δεν είναι ούτε ορθογώνιο ούτε ισοσκελές και η (ε) δεν είναι παράλληλη προς κάποια πλευρά του τριγώνου.

Για την μελέτη αυτή θα στηριχτούμε στις παρακάτω δύο προτάσεις που περιέχονται στην εργασία μου με τίτλο ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ. Η εργασία αυτή είναι αναρτημένη στο Internet στη διεύθυνση
http://users.sch.gr/mipapagr/index.php/en/2014-01-03-20-27-02/470-2017-01-06-23-55-52

Πρόταση 1 (βλ. σελ. 17, 19, 20)
Αν G και Η είναι αντίστοιχα το βαρύκεντρο και το ορθόκεντρο τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και Ο τυχαία διανυσματική αρχή (στο επίπεδο του τριγώνου ή έξω από αυτό) τότε οι διανυσματικές ακτίνες των G και Η ως προς την αρχή Ο δίνονται από τους τύπους:

$$\overrightarrow{\mathbf{OG}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}(\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \overrightarrow{\mathbf{OB}} + \overrightarrow{\mathbf{O\Gamma}}) \qquad (\text{I})$$

$$\overrightarrow{\mathbf{OH}} = \frac{\mathbf{yz}\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \mathbf{zx}\overrightarrow{\mathbf{OB}} + \mathbf{xy}\overrightarrow{\mathbf{O\Gamma}}}{\mathbf{yz} + \mathbf{zx} + \mathbf{xy}} \qquad (\text{II})$$

όπου $\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta}^2 + \boldsymbol{\gamma}^2 - \boldsymbol{\alpha}^2$, $\mathbf{y} = \boldsymbol{\gamma}^2 + \boldsymbol{\alpha}^2 - \boldsymbol{\beta}^2$, $\mathbf{z} = \boldsymbol{\alpha}^2 + \boldsymbol{\beta}^2 - \boldsymbol{\gamma}^2$

Πρόταση 2 (βλ. σελ. 31)
Αν τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ρ βρίσκονται στο επίπεδο του τριγώνου ΑΒΓ και για τυχαία αρχή Ο (στο επίπεδο του τριγώνου ή έξω από αυτό) είναι

$$\overrightarrow{\mathbf{OK}} = \boldsymbol{\alpha}_1\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \boldsymbol{\alpha}_2\overrightarrow{\mathbf{OB}} + \boldsymbol{\alpha}_3\overrightarrow{\mathbf{O\Gamma}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{O\Lambda}} = \boldsymbol{\beta}_1\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \boldsymbol{\beta}_2\overrightarrow{\mathbf{OB}} + \boldsymbol{\beta}_3\overrightarrow{\mathbf{O\Gamma}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \gamma_1\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \gamma_2\overrightarrow{\mathbf{OB}} + \gamma_3\overrightarrow{\mathbf{O\Gamma}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \boldsymbol{\delta}_1\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \boldsymbol{\delta}_2\overrightarrow{\mathbf{OB}} + \boldsymbol{\delta}_3\overrightarrow{\mathbf{O\Gamma}}$$

τότε:

α) $$\begin{vmatrix} \beta_1-\alpha_1 & \beta_2-\alpha_2 \\ \delta_1-\gamma_1 & \delta_2-\gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_2-\alpha_2 & \beta_3-\alpha_3 \\ \delta_2-\gamma_2 & \delta_3-\gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_3-\alpha_3 & \beta_1-\alpha_1 \\ \delta_3-\gamma_3 & \delta_1-\gamma_1 \end{vmatrix}$$

β) Έστω Δ η κοινή τιμή των παραπάνω οριζουσών. Οι ευθείες ΚΛ και ΜΡ τέμνονται ανν $\Delta \neq 0$. Το διάνυσμα θέσεως του σημείου τομής Σ των δύο ευθειών δίνεται από τη σχέση:

$$\overrightarrow{\mathbf{O\Sigma}} = \frac{1}{\Delta}\left[\begin{vmatrix} \beta_1-\alpha_1 & \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1 \\ \delta_1-\gamma_1 & \gamma_1\delta_2-\gamma_2\delta_1 \end{vmatrix}\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \begin{vmatrix} \beta_2-\alpha_2 & \alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2 \\ \delta_2-\gamma_2 & \gamma_2\delta_3-\gamma_3\delta_2 \end{vmatrix}\overrightarrow{\mathbf{OB}} + \begin{vmatrix} \beta_3-\alpha_3 & \alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3 \\ \delta_3-\gamma_3 & \gamma_3\delta_1-\gamma_1\delta_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{\mathbf{O\Gamma}}\right]$$

Με την βοήθεια των παραπάνω τύπων θα βρούμε την διανυσματική ακτίνα του σημείου τομής (εφόσον βέβαια τέμνονται) των ευθειών (ε) και ΒΓ.

Για τα 4 αυτά σημεία Β, Γ, G και Η είναι:

$\overrightarrow{OB} = 0\cdot\overrightarrow{OA} + 1\cdot\overrightarrow{OB} + 0\cdot\overrightarrow{O\Gamma}$ εδώ είναι $\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 1 \quad \alpha_3 = 0$

$\overrightarrow{O\Gamma} = 0\cdot\overrightarrow{OA} + 0\cdot\overrightarrow{OB} + 1\cdot\overrightarrow{O\Gamma}$ εδώ είναι $\beta_1 = 0 \quad \beta_2 = 0 \quad \beta_3 = 1$

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{O\Gamma}$ εδώ είναι $\gamma_1 = \frac{1}{3} \quad \gamma_2 = \frac{1}{3} \quad \gamma_3 = \frac{1}{3}$

$\overrightarrow{OH} = \frac{yz\overrightarrow{OA} + zx\overrightarrow{OB} + xy\overrightarrow{O\Gamma}}{yz+zx+xy}$ εδώ είναι $\delta_1 = \frac{yz}{\kappa} \quad \delta_2 = \frac{zx}{\kappa} \quad \delta_3 = \frac{xy}{\kappa}$
όπου κ=yz+zx+xy

Σύμφωνα με την πρόταση 2, για το σημείο τομής των ΒΓ και GH είναι:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta_1-\alpha_1 & \beta_2-\alpha_2 \\ \delta_1-\gamma_1 & \delta_2-\gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \frac{yz}{\kappa}-\frac{1}{3} & \frac{zx}{\kappa}-\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{yz}{\kappa} - \frac{1}{3} = \frac{2yz-zx-xy}{3\kappa} = \frac{\rho}{3\kappa}$$

Όπου $\rho = 2yz - zx - xy$

Οι ευθείες (ε) και ΒΓ τέμνονται ανν $\rho \neq 0 \Leftrightarrow 2yz - zx - xy \neq 0$ (1)

Αντικαθιστώντας τα x, y, z στην (1) και εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε $2\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4 - \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2 \neq 0$ είναι η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε η (ε) να τέμνει την ευθεία ΒΓ.

Με κυκλική εναλλαγή των α, β, γ βρίσκουμε τις αντίστοιχες συνθήκες ώστε η (ε) να τέμνει τις άλλες ευθείες των πλευρών του τριγώνου.

Αν η (ε) τέμνει την ΒΓ, η διανυσματική ακτίνα του σημείου τομής είναι:

$$\overrightarrow{\mathrm{O\Sigma}} = \frac{1}{\Delta}\left[\Delta_1 \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \Delta_2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \Delta_3 \cdot \overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right] \text{ όπου}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \beta_1 - \alpha_1 & \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \\ \delta_1 - \gamma_1 & \gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \beta_2 - \alpha_2 & \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \\ \delta_2 - \gamma_2 & \gamma_2\delta_3 - \gamma_3\delta_2 \end{vmatrix} = \frac{yz - zx}{3\kappa}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \beta_3 - \alpha_3 & \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 \\ \delta_3 - \gamma_3 & \gamma_3\delta_1 - \gamma_1\delta_3 \end{vmatrix} = \frac{yz - xy}{3\kappa}$$

Άρα $\overrightarrow{\mathrm{O\Sigma}} = \frac{3\kappa}{\rho}\left[0 \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{yz-zx}{3\kappa} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{yz-xy}{3\kappa} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right] = \frac{1}{\rho}\left[(yz-zx)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (yz-xy)\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right]$

Άρα:

$$\overrightarrow{\mathrm{\Sigma B}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{O\Sigma}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{1}{\rho}\left[(yz-zx)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (yz-xy)\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right] = \frac{y(z-x)}{\rho}(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}) = \frac{y(x-z)}{\rho}\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$$

Εντελώς όμοια βρίσκουμε: $\overrightarrow{\Sigma\Gamma} = \frac{z(y-x)}{\rho}\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$

Η θέση του σημείου Σ στην ευθεία ΒΓ σε σχέση με τα σημεία Β και Γ εξαρτιέται από το πρόσημο του εσωτερικού γινομένου $\overrightarrow{\mathrm{\Sigma B}} \cdot \overrightarrow{\Sigma\Gamma}$ ή ισοδύναμα από το πρόσημο του γινομένου

$$\Pi = [y(x-z)] \cdot [z(y-x)] = -4(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \alpha^2)(\gamma^2 - \alpha^2) \qquad (2)$$

Αν $\Pi > 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{\Sigma B}} \cdot \overrightarrow{\Sigma\Gamma} > 0$, τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{\Sigma B}}, \overrightarrow{\Sigma\Gamma}$ είναι ομόρροπα και το Σ βρίσκεται στην προέκταση του τμήματος ΒΓ, ενώ αν $\Pi < 0$ τα $\overrightarrow{\mathrm{\Sigma B}}, \overrightarrow{\Sigma\Gamma}$ είναι αντίρροπα και το Σ βρίσκεται μεταξύ των Β και Γ.

Υπενθυμίζουμε ότι η μελέτη γίνεται για μη ορθογώνιο και μη ισοσκελές τρίγωνο, οπότε δεν μπορεί να είναι $\Pi = 0$

Από την σχέση (2) προκύπτει ότι η θέση του Σ στην ευθεία ΒΓ εξαρτιέται τόσο από το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές, όσο και από το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες.

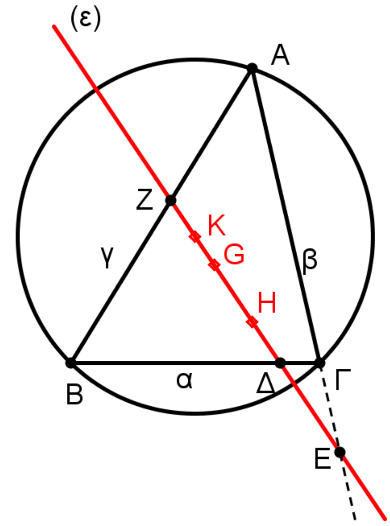
Διακρίνουμε λοιπόν τις εξής περιπτώσεις:

Α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο.

Τότε $\beta^2 < \alpha^2 + \gamma^2$ και $\gamma^2 < \alpha^2 + \beta^2$, άρα $\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 > 0$ και $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 > 0$

Το πρόσημο του Π εξαρτιέται από το πρόσημο του γινομένου $(\beta^2 - \alpha^2) \cdot (\gamma^2 - \alpha^2)$

- Αν $\alpha < \beta < \gamma$ ή $\alpha < \gamma < \beta$ τότε η (2) $\Rightarrow \Pi < 0$ που σημαίνει ότι το σημείο Σ είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΒΓ, δηλ. η (ε) τέμνει την



Α, Β, Γ<90°, α<β<γ
Η (ε) τέμνει τις πλευρές α και γ και την προέκταση της πλευράς β

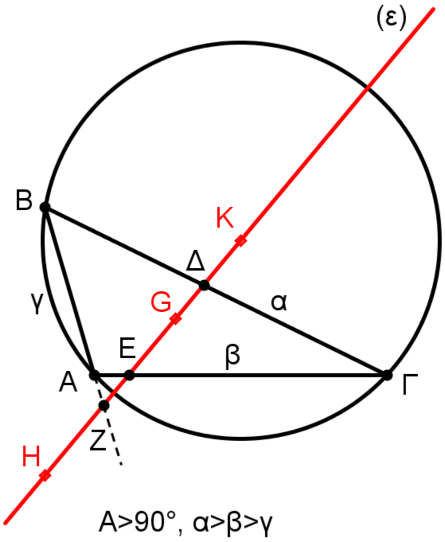
πλευρά α.

- Αν $\beta<\alpha<\gamma$ ή $\gamma<\alpha<\beta$ τότε $\Pi>0$ και το σημείο Σ είναι εξωτερικό του τμήματος ΒΓ δηλ. η (ε) τέμνει την προέκταση της πλευράς α.
- Αν $\beta<\gamma<\alpha$ ή $\gamma<\beta<\alpha$ τότε $\Pi<0$ και η (ε) τέμνει την πλευρά α.

Το συμπέρασμα στις 3 αυτές περιπτώσεις είναι ότι η (ε) τέμνει την μικρότερη και την μεγαλύτερη πλευρά, ενώ τέμνει την προέκταση της τρίτης πλευράς.

Β) Το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

β₁) Αν $\vec{A}>90^{o}$ τότε η πλευρά α είναι η μεγαλύτερη πλευρά.
Είναι:
$\alpha^2+\gamma^2-\beta^2>0$ και $\alpha^2+\beta^2-\gamma^2>0$,
ενώ $\beta^2-\alpha^2<0$ και $\gamma^2-\alpha^2<0$
Η (2) $\Rightarrow$ $\Pi<0$ που σημαίνει ότι το Σ βρίσκεται μεταξύ Β και Γ, δηλ. η (ε) τέμνει την πλευρά α.
Σύμφωνα με το αξίωμα του Pash τέμνει ακόμη την μια μόνο από τις δύο άλλες πλευρές. Το ποια πλευρά τέμνει αποσαφηνίζεται στην επόμενη περίπτωση (β_2).



A>90°, α>β>γ
Η (ε) τέμνει τις πλευρές α και β
και την προέκταση της πλευράς γ

β₂) Αν $B>90^{o}$ τότε η β είναι η μεγαλύτερη πλευρά. Σύμφωνα με το (β_1) η (ε) τέμνει την πλευρά β.
Είναι:
$\alpha^2+\gamma^2-\beta^2<0,\ \alpha^2+\beta^2-\gamma^2>0,\ \beta^2-\alpha^2>0$
Το πρόσημο της Π εξαρτιέται τώρα από το πρόσημο του παράγοντα $\gamma^2-\alpha^2$
Αν $\gamma>\alpha$, δηλ. έχουμε τη διάταξη $\alpha<\gamma<\beta$, τότε $\Pi>0$ και η (ε) τέμνει την προέκταση της μικρότερης πλευράς α, ενώ σύμφωνα με το αξίωμα του Pash τέμνει την πλευρά γ.
Δηλ. στην περίπτωση αυτή η (ε) τέμνει τις δύο μεγαλύτερες πλευρές, ενώ τέμνει την προέκταση της μικρότερης πλευράς.

β₃) Αν $\Gamma>90^{o}$ για τον ίδιο λόγο (όπως δηλ. και στην περίπτωση (β_2)) η (ε) τέμνει τις δύο μεγαλύτερες πλευρές του τριγώνου και την προέκταση της μικρότερης πλευράς.

Έχουμε έτσι το τελικό συμπέρασμα:

Θεώρημα

- **Σε ισόπλευρο τρίγωνο δεν ορίζεται ευθεία Euler του τριγώνου. Σε κάθε άλλη περίπτωση ορίζεται ευθεία Euler.**

Έστω (ε) η ευθεία Euler του τριγώνου ΑΒΓ.

- **Αν η (ε) είναι παράλληλη προς μια πλευρά τριγώνου, τέμνει τις δύο άλλες πλευρές**

- **Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στην κορυφή Α ή ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, η (ε) διέρχεται από το Α και τέμνει την απέναντι πλευρά ΒΓ στο μέσο της.**

Με την προϋπόθεση ότι η (ε) δεν είναι παράλληλη προς μια πλευρά τριγώνου:

- **Σε οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο η (ε) τέμνει την μικρότερη και την μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου και την προέκταση της άλλης πλευράς.**

- **Σε αμβλυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο η (ε) τέμνει τις δύο μεγαλύτερες πλευρές του τριγώνου και την προέκταση της μικρότερης πλευράς.**