ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΙΣΟΤΗΤΩΝ ΣΤΗΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
Μια σημαντική πρόταση

Ν. Ιωσηφίδης, Μαθηματικός – Φροντιστής, Βέροια
e-mail: iossifid@yahoo.gr

Είναι συνηθισμένο το φαινόμενο κατά το οποίο δίνεται ένα τρίγωνο και ζητείται η απόδειξη μιας ισότητας που περιέχει μήκη ευθ. τμημάτων μόνο στην περίπτωση οξυγωνίου τριγώνου.
Άλλες φορές ζητείται πάλι η απόδειξη μιας παρόμοιας ισότητας για κάθε τρίγωνο, αλλά τότε γίνεται μια απόδειξη για οξυγώνιο τρίγωνο και μια ξεχωριστή απόδειξη για αμβλυγώνιο τρίγωνο επειδή η ίδια απόδειξη δεν ισχύει και για τις δύο περιπτώσεις.
Πολλές φορές χρειάζονται συμπληρωματικές αποδείξεις για ορθογώνιο ή ισοσκελές τρίγωνο, επειδή στις περιπτώσεις αυτές κάποια σημεία μπορεί να ταυτίζονται ή κάποια σημεία να είναι συνευθειακά και να μη σχηματίζουν τρίγωνο ή για οποιονδήποτε άλλο λόγο μια απόδειξη δεν καλύπτει όλες τις δυνατές περιπτώσεις.
Είναι εκπληκτικό το ότι στη συντριπτική πλειονότητα των περιπτώσεων αυτών, τα συμπεράσματα ισχύουν για όλες τις περιπτώσεις και επομένως μια απόδειξη για οξυγώνιο τρίγωνο αρκεί για να τις καλύψει όλες. Αλλά κάτι τέτοιο δεν μπορεί να αιτιολογηθεί με τις συνηθισμένες αποδείξεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Αυτό καταδεικνύεται καθαρά στην εργασία μου με τίτλο ΣΗΜΕΙΑΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ όπου γνωστές ή άγνωστες γεωμετρικές προτάσεις αποδεικνύονται γενικότερα, δηλ. με μια απόδειξη καλύπτονται πολλές περιπτώσεις. Χαρακτηριστικό παράδειγμα η άσκηση 10 της οποίας η πλήρης απόδειξη με την κλασική Ευκλείδεια Γεωμετρία θα απαιτούσε 25 ξεχωριστές αποδείξεις και σχήματα, ενώ το ίδιο συμπέρασμα ισχύει για όλες τις περιπτώσεις. Η εργασία αυτή βρίσκεται στη διεύθυνση

https://drive.google.com/file/d/106E4QW3p6ck4m8AJ3mndI6TW1dRowzWi/view?usp=sharing

Στην παρούσα εργασία εξηγώ πότε μια απόδειξη για οξυγώνιο τρίγωνο καλύπτει όλες τις περιπτώσεις που μόλις ανέφερα.
Η απόδειξη της πρότασης που εξασφαλίζει το συμπέρασμα αυτό στηρίζεται στην εργασία μου με τίτλο ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ (συντομ. [Ε]) που μπορείτε να βρείτε στις διευθύνσεις

https://drive.google.com/file/d/0B9uh0VymSVrpU0ZWLTVsNVFGazg/view?resourcekey=0-70KjUsbNZaAxbpP9G5tVhg

ή και

http://users.sch.gr/mipapagr/images/iosifidis_21_efarmoges_tou_dianysmatikou_logismou.pdf

Θα μεταφέρω εδώ μόνο εκείνα τα τμήματα της [E] που μας χρειάζονται, συν δύο πρόσθετες, αλλά πολύ χρήσιμες προσθήκες που επαυξάνουν και βελτιώνουν την ισχύ του σχετικού θεωρήματος.
Με δυο λόγια:
Στην [E] υπολογίζω 325 αποστάσεις μεταξύ κάποιων σημείων ενός τριγώνου τα οποία ονομάζω κύρια, ως συνάρτηση των πλευρών του, και δείχνω επίσης πως μπορούν να υπολογιστούν οι αποστάσεις μεταξύ δύο οποιωνδήποτε άλλων σημείων ενός τριγώνου. Όλοι οι υπολογισμοί μπορούν να γίνουν χωρίς τη βοήθεια σχήματος και χωρίς χρήση θεωρημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και ισχύουν σε κάθε τρίγωνο. Αυτό που θεωρώ πιο σημαντικό και πιο ενδιαφέρον στην [E] είναι ότι οι υπολογισμοί μπορούν επίσης να γίνουν από μνήμης, δηλ. μπορούμε να γράψουμε την απόσταση που ζητούμε ως συνάρτηση των πλευρών του τριγώνου χωρίς να προηγηθούν κάποιες πράξεις ή κάποιο σκεπτικό (αυτό γίνεται στις σελίδες 42-47). Αυτό που αποδεικνύω (και αυτό μας χρειάζεται στην παρούσα εργασία) είναι ότι απόσταση μεταξύ οποιωνδήποτε δύο χαρακτηριστικών σημείων ενός τριγώνου δίνεται από τον ίδιο τύπο, ανεξαρτήτως του είδους του τριγώνου (οξυγώνιο, αμβλυγώνιο, ορθογώνιο).

Μεταφέρω εδώ τα σχετικά αποσπάσματα της [E].

Κύρια σημεία τριγώνου

Ορισμοί:

- **Κύρια σημεία** ενός τριγώνου $A_1A_2A_3$ ονομάζονται:

1) οι κορυφές του $\mathbf{A_1, A_2, A_3}$,
2) τα μέσα των πλευρών του $\mathbf{M_1, M_2, M_3}$,
3) τα ίχνη των εσωτερικών διχοτόμων του $\mathbf{A_1', A_2', A_3'}$,
4) τα ίχνη των εξωτερικών διχοτόμων του $\mathbf{A_1'', A_2'', A_3''}$,
5) τα ίχνη των υψών του $\mathbf{H_1, H_2, H_3}$,
6) τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου με τις πλευρές του $\mathbf{Z_1, Z_2, Z_3}$,
7) τα κέντρα των παρεγγεγραμμένων κύκλων $\mathbf{O_1, O_2, O_3}$,
8) το κ. βάρους του **G,**
9) το έγκεντρό του **I,**
10) το περίκεντρό του **O,**

11) το ορθόκεντρό του **H** και
12) το κέντρο του κύκλου του Euler $\mathbf{O_9}$

[Για ευκολία παραλείψαμε την αυτονόητη αντιστοιχία, ότι δηλ. το M_1 είναι το μέσο της πλευράς A_2A_3 κ.λ.π]

Τα σημεία αυτά είναι σε πλήθος 26.

Παρακάτω δίνω ένα τυπολόγιο για τις αποστάσεις αυτών των σημείων ανά δύο ως συνάρτηση των πλευρών του τριγώνου $\alpha = (A_2A_3)$, $\beta = (A_3A_1)$, $\gamma = (A_1A_2)$. Το πλήθος των αποστάσεων αυτών είναι όσοι και οι συνδυασμοί των 26 σημείων ανά 2, δηλ. είναι ίσο με $\binom{26}{2} = 325$.

- Μία ευθεία που συνδέει δύο κύρια σημεία ενός τριγώνου λέγεται **κύρια ευθεία.**

- Το σημείο τομής δύο κυρίων ευθειών εφόσον δε συμπίπτει με κάποιο από τα κύρια σημεία του τριγώνου λέγεται **δευτερεύον σημείο.**

- Μια ευθεία που ορίζεται από δύο δευτερεύοντα σημεία ή ένα κύριο σημείο και ένα δευτερεύον και δεν ταυτίζεται με κύρια ευθεία, λέγεται **δευτερεύουσα ευθεία.**

- Τα σημεία τομής δευτερευουσών ευθειών, εφόσον δεν ταυτίζονται με κύρια ή δευτερεύοντα σημεία, λέγονται **τριτεύοντα σημεία.**

- Με τον ίδιο τρόπο ορίζονται σημεία $4^{ης}$, $5^{ης}$ κ.λ.π τάξης.

- Τα κύρια, δευτερεύοντα, τριτεύοντα κ.λ.π σημεία ενός τριγώνου λέγονται **χαρακτηριστικά σημεία του τριγώνου.**

- Το σύνολο των χαρακτηριστικών σημείων ενός τριγώνου θα το συμβολίζουμε με **L.**

- Αν $A, B \in L$, την απόστασή τους θα τη συμβολίζουμε με $\mathbf{d(A,B)}$.

- Το σύνολο όλων των αποστάσεων μεταξύ δύο σημείων του L θα το συμβολίζουμε με **D.**

<u>1η προσθήκη</u>

Αν A, B είναι δύο χαρακτηριστικά σημεία τριγώνου και το σημείο M διαιρεί το

ευθ. τμήμα ΑΒ σε λόγο λ, δηλ. $\frac{\overrightarrow{\mathbf{MA}}}{\overrightarrow{\mathbf{MB}}} = \lambda$, το σημείο Μ θα λέγεται επίσης χαρακτηριστικό σημείο του τριγώνου.

Το σχετικό θεώρημα εξασφαλίζει το ότι η απόσταση δύο σημείων του L δίνεται από τον ίδιο τύπο σε κάθε τρίγωνο και είναι το παρακάτω. Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού βρίσκεται στη σελίδα 36 της [Ε].

<u>Θεώρημα</u>

Αν Α και Β είναι δύο σημεία του L ενός τριγώνου $\mathbf{A_1A_2A_3}$, το $\mathbf{d^2(A,B)}$ είναι ρητή παράσταση των πλευρών του α, β, γ και δίνεται από την ίδια σχέση σε κάθε είδος τριγώνου.

Ως άμεση συνέπεια του θεωρήματος αυτού προκύπτει η πρόταση που μας ενδιαφέρει, δηλ.

<u>Θεώρημα αποστάσεων</u>

Αν μια ισότητα της οποίας τα δύο μέλη περιέχουν στοιχεία του D ισχύει σε οξυγώνιο (ή σε αμβλυγώνιο) τρίγωνο, τότε ισχύει σε κάθε είδος τριγώνου.

Αν π.χ τα x, y, z είναι στοιχεία του D και μεταξύ αυτών ισχύει η σχέση $x^2 + 2yz = y^2 + 3xz$ σε οξυγώνιο τρίγωνο, η ίδια σχέση θα ισχύει σε κάθε τρίγωνο.

<u>2^{η} προσθήκη</u>

Για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών κάθε τριγώνου ΑΒΓ είναι γνωστοί οι εξής τύποι:

$$\eta\mu\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}$$

$$\eta\mu\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\gamma\alpha}}$$

$$\eta\mu\frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\alpha\beta}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)}{\gamma\alpha}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)}{\alpha\beta}}$$

Δηλ. οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{\Gamma}{2}$ εκφράζονται ως συνάρτηση των πλευρών του τριγώνου με την ίδια σχέση σε κάθε τρίγωνο.

Τα ίδιο ισχύει και για την $\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = \frac{\eta\mu\frac{A}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}$ και για την $\sigma\varphi\frac{A}{2} = \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{\eta\mu\frac{A}{2}}$ καθώς και για τα

$$\eta\mu A = 2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\ ,\ \sigma\upsilon\nu A = \sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2} - \eta\mu^2\frac{A}{2}\ ,\ \varepsilon\varphi A = \frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu A}\ ,\ \sigma\varphi A = \frac{\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu A}$$

$$\eta\mu 2A = 2\eta\mu A\sigma\upsilon\nu A\ ,\ \sigma\upsilon\nu 2A = \sigma\upsilon\nu^2 A - \eta\mu^2 A\ ,\ \varepsilon\varphi 2A = \frac{\eta\mu 2A}{\sigma\upsilon\nu 2A}\ ,\ \sigma\varphi 2A = \frac{\sigma\upsilon\nu 2A}{\eta\mu 2A}$$

Τα ίδια ισχύουν και για κάθε τριγωνομετρικό αριθμό που μπορεί να εκφραστεί με την ίδια σχέση σε κάθε είδος τριγώνου ως συνάρτηση των παραπάνω τριγωνομετρικών αριθμών (π.χ ημ3Α, συν4Α κ.λ.π).

Το σύνολο όλων αυτών των τριγωνομετρικών αριθμών θα το συμβολίζουμε με Τ.

Συμπληρώνουμε λοιπόν το θεώρημα των αποστάσεων σημείων του L ως εξής:

<u>Θεώρημα αποστάσεων και τριγωνομετρικών αριθμών</u>
Αν μια ισότητα της οποίας τα δύο μέλη περιέχουν στοιχεία του D και στοιχεία του Τ ισχύει σε οξυγώνιο τρίγωνο, τότε θα ισχύει σε κάθε είδος τριγώνου.

Έτσι π.χ αν τα x, y, z είναι στοιχεία του D και τ_1, τ_2 είναι στοιχεία του Τ, αν για οξυγώνιο τρίγωνο $A_1A_2A_3$ ισχύει $xy + z^2\tau_1 = 2yz\tau_2 + x^2$, η ίδια σχέση θα ισχύει σε κάθε είδος τριγώνου.

<u>Επέκταση της ισχύος του παραπάνω θεωρήματος</u>
Στην ίδια εργασία [Ε] στη σελ. 88 υπάρχει το εξής

<u>Θεώρημα</u>
Αν E_1 είναι το εμβαδό ενός τριγώνου που έχει κορυφές τρία σημεία του L ενός τριγώνου $A_1A_2A_3$ και Ε το εμβαδό του $A_1A_2A_3$ τότε ο λόγος $\frac{E_1}{E}$ είναι ρητή παράσταση των πλευρών του $A_1A_2A_3$.

Επειδή το εμβαδόν του τριγώνου $A_1A_2A_3$ ως συνάρτηση των πλευρών του α, β, γ δίνεται από τον ίδιο τύπο $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ για κάθε είδος τριγώνου, προκύπτει ότι και το εμβαδόν E_1 εκφράζεται συναρτήσει των α, β, γ με τον ίδιο τύπο για κάθε είδος τριγώνου $A_1A_2A_3$.

Το σύνολο των εμβαδών των τριγώνων που έχουν κορυφές σημεία του L θα το συμβολίζουμε με S.

Το γενικότερο συμπέρασμα που προκύπτει, διατυπώνεται ως τελικό θεώρημα και αφορά ισότητες που περιέχουν αποστάσεις του συνόλου D, εμβαδά του συνόλου S και τριγωνομετρικούς αριθμούς του συνόλου T.

Τελικό θεώρημα

Αν μια ισότητα της οποίας τα δύο μέλη περιέχουν αποστάσεις του D, εμβαδά του S και τριγωνομετρικούς αριθμούς του T ισχύει σε οξυγώνιο τρίγωνο, τότε θα ισχύει σε κάθε είδος τριγώνου.

Έτσι π.χ, αν τα x, y, z, t είναι στοιχεία του D, τ_1, τ_2 είναι στοιχεία του T και E, P είναι στοιχεία του S, αν σε οξυγώνιο τρίγωνο ισχύει η ισότητα $x^2 + yz\tau_1 = E\tau_2 + \frac{z}{t}P$, η ίδια σχέση θα ισχύει σε κάθε τρίγωνο.