ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ ΣΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

Νικ. Ιωσηφίδης, Μαθηματικός Φροντιστής, Βέροια

e-mail: iossifid@yahoo.gr

Θεωρούμε ν υλικά σημεία μαζών $m_1, m_2, ..., m_\nu$ που βρίσκονται στα σημεία $A_1, A_2, ..., A_\nu$ (όχι αναγκαστικά διαφορετικά) αντίστοιχα ενός επιπέδου (p).
Για να δηλώσουμε ότι στο σημείο Α υπάρχει η σημειακή μάζα α γράφουμε Α(α) ή $m(A) = \alpha$

Αποδεικνύεται ότι υπάρχει **μοναδικό** σημείο G του (p) τέτοιο, ώστε:

$$\mathbf{m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2} + ... + m_\nu\overrightarrow{GA_\nu} = \vec{0}} \qquad (1)$$

Πράγματι, αν Κ είναι ένα ακόμη σημείο του επιπέδου με την ιδιότητα

$$m_1\overrightarrow{KA_1} + m_2\overrightarrow{KA_2} + ... + m_\nu\overrightarrow{KA_\nu} = \vec{0} \qquad (2)$$

Τότε με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) βρίσκουμε

$$m_1(\overrightarrow{KA_1} - \overrightarrow{GA_1}) + m_2(\overrightarrow{KA_2} - \overrightarrow{GA_2}) + ... + m_\nu(\overrightarrow{KA_\nu} - \overrightarrow{GA_\nu}) = \vec{0} \text{ ή}$$

$$(m_1 + m_2 + ... + m_\nu)\overrightarrow{KG} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{KG} = \vec{0} \Rightarrow K \equiv G$$

Έτσι το σημείο G είναι μοναδικό.

Αν Ο είναι τυχαία διαν. αρχή, η (1) γράφεται:

$$m_1(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OG}) + m_2(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OG}) + ... + m_\nu(\overrightarrow{OA_\nu} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + ... + m_\nu\overrightarrow{OA_\nu}}{m_1 + m_2 + ... + m_\nu}} \qquad (3)$$

Λέμε ότι το G είναι το κέντρο μάζας (συντομογραφικά ΚΜ) των σημείων $A_1, A_2, ..., A_\nu$ με μάζες $m_1, m_2, ..., m_\nu$ αντίστοιχα.

Γράφουμε συμβολικά: $G = \{A_1(m_1), A_2(m_2), ..., A_\nu(m_\nu)\}$
Αν δεν υπάρχει κίνδυνος για το ποιες είναι οι μάζες $m_1, m_2, ..., m_\nu$, γράφουμε απλούστερα $G = \{A_1, A_2, ..., A_\nu\}$

Για δύο ταυτιζόμενα σημεία $A(m_1)$ και $A(m_2)$ είναι $\{A(m_1), A(m_2)\} = A$

Ο συμβολισμός $A(m_1, m_2, ..., m_\nu)$ θα σημαίνει ότι στο σημείο Α έχουν τεθεί μάζες $m_1, m_2, ..., m_\nu$ και είναι ταυτόσημος με τον συμβολισμό $A(m_1 + m_2 + ... + m_\nu)$.
Μπορούμε ισοδύναμα να πούμε ότι υπάρχουν ν σημεία ταυτιζόμενα με το Α με μάζες $m_1, m_2, ..., m_\nu$.
Για λόγους που θα φανούν στη συνέχεια θα χρησιμοποιείται ο καταλληλότερος.

Τέλος ο συμβολισμός $(A_1, A_2, ..., A_\nu)(m)$ θα σημαίνει ότι σε όλα τα σημεία $A_1, A_2, ..., A_\nu$ υπάρχει η ίδια μάζα m.

Αναφέρουμε τις βασικές ιδιότητες του ΚΜ χωρίς αποδείξεις λόγω του περιορισμένου χώρου και χρόνου.

Ιδιότητες του ΚΜ

1) Από την (3) προκύπτει ότι:
Το ΚΜ δεν αλλάζει αν οι μάζες $m_1, m_2, ..., m_\nu$ αντικατασταθούν από τα ισοπολαπλάσιά τους $\lambda m_1, \lambda m_2, ..., \lambda m_\nu$.
Αυτό μας δίνει την δυνατότητα να θεωρούμε αυθαίρετα ότι $m_1 = 1$ παίρνοντας ως $\lambda = \dfrac{1}{m_1}$ ή να γράφουμε $G = \{A_1(m_1), A_2(m_2), ..., A_\nu(m_\nu)\}$ και να εννοούμε ότι οι μάζες είναι ανάλογες των $m_1, m_2, ..., m_\nu$, δηλαδή είναι $\lambda m_1, \lambda m_2, ..., \lambda m_\nu$ και όχι υποχρεωτικά $m_1, m_2, ..., m_\nu$.

2) Η σχέση $m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2} + ... + m_\nu\overrightarrow{GA_\nu} = \vec{0}$ για $\nu = 2$ γίνεται
$$m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2} = \vec{0}$$
Η τελευταία δείχνει ότι το ΚΜ δύο σημειακών μαζών m_1 και m_2 που βρίσκονται στα σημεία A_1 και A_2 βρίσκεται στο ευθ. τμήμα A_1A_2 και έχει την ιδιότητα $\dfrac{GA_1}{GA_2} = \dfrac{m_2}{m_1}$ ή το ίδιο $m_1 \cdot GA_1 = m_2 \cdot GA_2$
Στην ειδική περίπτωση που είναι $m_1 = m_2$ το G είναι το μέσο του A_1A_2

3) Θεώρημα ομαδοποίησης:
Το ΚΜ δεν αλλάζει αν οποιοδήποτε υποσύνολο των σημείων $A_1, A_2, ..., A_\nu$ αντικατασταθεί με το ΚΜ τους με μάζα ίση με το άθροισμα των μαζών τους.
Αν π.χ $G = \{A_1(m_1), A_2(m_2), A_3(m_3), A_4(m_4), A_5(m_5)\}$ και ονομάσουμε $G_1 = \{A_1(m_1), A_2(m_2), A_3(m_3)\}$ και $G_2 = \{A_4(m_4), A_5(m_5)\}$, τότε $G = \{G_1(m_1 + m_2 + m_3), G_2(m_4 + m_5)\}$
Η πρόταση ισχύει για οποιαδήποτε διαμέριση του συνόλου $\{A_1(m_1), A_2(m_2), ..., A_\nu(m_\nu)\}$.

Αυτή η ιδιότητα θα χρησιμοποιηθεί κυρίως στην 1η ομάδα παραδειγμάτων που ακολουθεί.

Από την πρόταση αυτή επίσης προκύπτει ότι η ευθεία που συνδέει τα $\mathbf{G_1 = \{A_1(m_1), A_2(m_2), A_3(m_3)\}}$ και $\mathbf{G_2 = \{A_4(m_4), A_5(m_5)\}}$ διέρχεται από το G.
Το συμπέρασμα αυτό της παραπάνω πρότασης είναι επίσης ιδιαίτερα χρήσιμο.

Με χρήση των ελαχίστων παραπάνω θεωρημάτων μπορούμε να αποδείξουμε πολλές και δύσκολες προτάσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Κάποιες κατηγορίες προβλημάτων που μπορούν να λυθούν εύκολα με την βοήθεια των παραπάνω θεωρημάτων είναι εκείνα στα οποία ζητείται:

- Να αποδειχθεί ότι τρεις ή περισσότερες ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο.
- Να αποδειχθεί ότι 3 ή περισσότερα σημεία είναι συνευθειακά.
- Να αποδειχθεί ότι μια ευθεία διέρχεται από ένα σημείο.
- Να βρεθεί ο λόγος στον οποίο διαιρείται ευθ. τμήμα από ένα σημείο

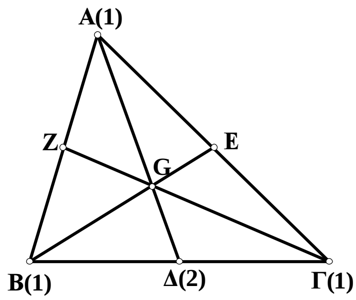
και άλλα είδη προτάσεων όπως δείχνουμε στη συνέχεια.

Δείχνουμε τώρα πως μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα παραπάνω με συγκεκριμένα παραδείγματα. Επιλέξαμε εδώ απλές εφαρμογές για να γίνει κατανοητή η θεωρία των ΚΜ. Τις κατατάξαμε σε 4 ομάδες Α, Β, Γ, Δ.
Παραλείψαμε τη θεωρία του ΚΜ του μήκους γραμμής και της περιμέτρου, καθώς και το ΚΜ του εμβαδού που μπορούν να λύσουν με την ίδια ευκολία άλλες κατηγορίες προβλημάτων.

Α΄ ΟΜΑΔΑ

Οι διάμεσοι κάθε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο διαιρεί κάθε διάμεσο σε λόγο 2:1

Απόδειξη
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με Α(1), Β(1), Γ(1) και ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ οι διάμεσοί του. Τότε $\{\mathrm{B}(1), \Gamma(1)\} = \Delta(2)$. Άρα $\{\mathrm{A}(1), \mathrm{B}(1), \Gamma(1)\} = \{\mathrm{A}(1), \Delta(2)\} = \mathrm{G}(3)$ όπου G σημείο της διαμέσου ΑΔ με $\dfrac{\mathrm{AG}}{\mathrm{G}\Delta} = \dfrac{\mathrm{m}(\Delta)}{\mathrm{m}(\mathrm{A})} = \dfrac{2}{1}$

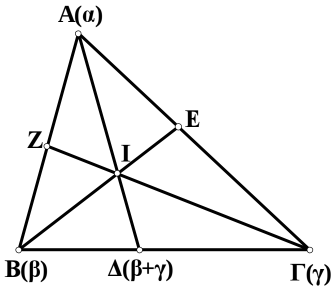


Για τον ίδιο λόγο το G βρίσκεται και στις άλλες διαμέσους ΒΕ και ΓΖ τις οποίες διαιρεί στον ίδιο λόγο.
Έτσι και οι 3 διάμεσοι του ΑΒΓ διέρχονται από το ίδιο σημείο G.

Οι διχοτόμοι κάθε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Απόδειξη
Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ με μέτρα πλευρών $(\mathrm{B}\Gamma) = \alpha$, $(\Gamma\mathrm{A}) = \beta$, $(\mathrm{AB}) = \gamma$.

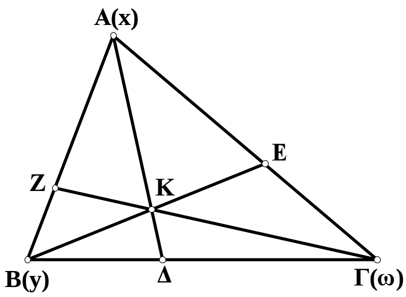
Έστω $A(\alpha), B(\beta), \Gamma(\gamma)$.
Τότε $\{B(\beta),\Gamma(\gamma)\} = \Delta(\beta+\gamma)$ όπου Δ το σημείο της πλευράς ΒΓ με $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$. Άρα το σημείο Δ είναι το ίχνος της διχοτόμου ΑΔ.
Επομένως $\{A(\alpha),B(\beta),\Gamma(\gamma)\} = \{A(\alpha),\{B(\beta),\Gamma(\gamma)\}\} = \{A(\alpha), \Delta(\beta+\gamma)\} = I(\alpha+\beta+\gamma)$ όπου Ι το σημείο της διχοτόμου ΑΔ με την ιδιότητα $\frac{AI}{I\Delta} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha}$



Για τον ίδιο λόγο το Ι βρίσκεται και στις άλλες διχοτόμους. Έτσι και οι 3 διχοτόμοι διέρχονται από το ίδιο σημείο Ι που έχει την ιδιότητα $\frac{AI}{I\Delta} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha}$

Θεώρημα Ceva και Van Aubel
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε και Ζ των πλευρών ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα. Αν $\mathbf{\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}.\frac{\Gamma E}{EA}.\frac{AZ}{ZB} = 1}$
οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ διέρχονται από το ίδιο σημείο G με την ιδιότητα $\mathbf{\frac{AG}{G\Delta} = \frac{AZ}{ZB} + \frac{AE}{E\Gamma}}$

Απόδειξη:
Τοποθετούμε στις κορυφές Α, Β και Γ κατάλληλες μάζες x, y, ω αντίστοιχα ώστε:
$\Delta = \{B,\Gamma\}$, $E = \{\Gamma, A\}$, $Z = \{A, B\}$



Άρα: $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\omega}{y}$

$\frac{\Gamma E}{EA} = \frac{x}{\omega}$

$\frac{AZ}{ZB} = \frac{y}{x}$

Με τις παραπάνω μάζες είναι: $\Delta = \{B,\Gamma\}$, $E = \{\Gamma, A\}$, $Z = \{A, B\}$

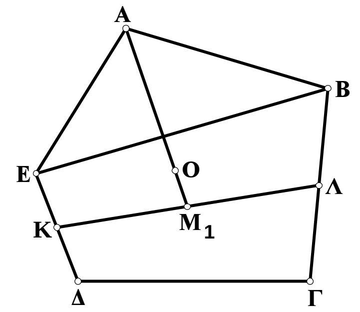
Άρα: $\{A,B,\Gamma\} = \{A,\{B,\Gamma\}\} = \{A, \Delta\} = K_1 \in A\Delta$

$\{A,B,\Gamma\} = \{B,\{\Gamma,A\}\} = \{B,E\} = K_2 \in BE$

$\{A,B,\Gamma\} = \{\Gamma,\{A,B\}\} = \{\Gamma,Z\} = K_3 \in \Gamma Z$

Όμως το $K = \{A,B,\Gamma\}$ είναι μοναδικό. Άρα $K_1 \equiv K_2 \equiv K_3$ δηλαδή οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ διέρχονται από το ίδιο σημείο.
Για το σημείο Κ ισχύει: $\frac{AK}{K\Delta} = \frac{m(\Delta)}{m(A)} = \frac{y+\omega}{x} = \frac{y}{x} + \frac{\omega}{x} = \frac{AZ}{ZB} + \frac{AE}{E\Gamma}$
Η τελευταία σχέση είναι γνωστή ως **θεώρημα του Van Aubel.**

Δίνεται πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ (κυρτό ή μη). Έστω M_1 το μέσο του τμήματος ΚΛ που συνδέει τα μέσα των απέναντι πλευρών του τετραπλεύρου ΒΓΔΕ και ε_1 η ευθεία AM_1. Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε και τις ευθείες $BM_2, \Gamma M_3, \Delta M_4, EM_5$. Να αποδειχθεί ότι οι 5 αυτές ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο.



Απόδειξη

Έστω $(A, B, \Gamma, \Delta, E)(1)$.

Τότε: $\{A(1),\ B(1), \Gamma(1), \Delta(1), E(1)\}=$

$\{\{A(1),\ \{B(1), \Gamma(1)\}, \{\Delta(1), E(1)\}\}=$

$\{A(1),\ \Lambda(2), K(2)\}= \{A(1), M_1(4)\} = O(5) \in AM_1$

Για τον ίδιο λόγο $O \in BM_2$, $O \in \Gamma M_3$, $O \in \Delta M_4$, $O \in EM_5$.

Επομένως και οι 5 ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο Ο.

Για το Ο ισχύει η σχέση $\dfrac{AO}{OM_1} = \dfrac{m(M_1)}{m(A)} = 4$

Κατασκευή άσκησης και ταυτόχρονη απόδειξή της

Δείχνουμε τώρα την κατασκευή και ταυτόχρονα την απόδειξη άσκησης που μπορούμε να δημιουργήσουμε εύκολα με τη βοήθεια του ΚΜ.

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ (κυρτό ή μη) και τα σημεία $E \in AB$, $Z \in B\Gamma$, $H \in \Gamma\Delta$, $\Theta \in \Delta A$ τέτοια ώστε: $\dfrac{AE}{EB} = 2$, $\dfrac{BZ}{Z\Gamma} = \dfrac{3}{2}$, $\dfrac{\Gamma H}{H\Delta} = \dfrac{4}{3}$, $\dfrac{\Delta\Theta}{\Theta A} = \dfrac{1}{4}$.

Έστω $O = \Theta Z \cap EH$. Να αποδειχθεί ότι $\Theta O = OZ$ και $\dfrac{EO}{OH} = \dfrac{7}{3}$.

Απόδειξη:

Τοποθετούμε στις κορυφές Α, Β, Γ, Δ τις μάζες 1, 2, 3, 4 αντίστοιχα.

Επειδή $\dfrac{AE}{EB} = 2 = \dfrac{m(B)}{m(A)}$,

θα είναι $E(3) = \{A(1), B(2)\}$

Όμοια, $Z(5) = \{B(2), \Gamma(3)\}$, $H(7) = \{\Gamma(3),\ \Delta(4)\}$,

$\Theta(5) = \{\Delta(4), A(1)\}$

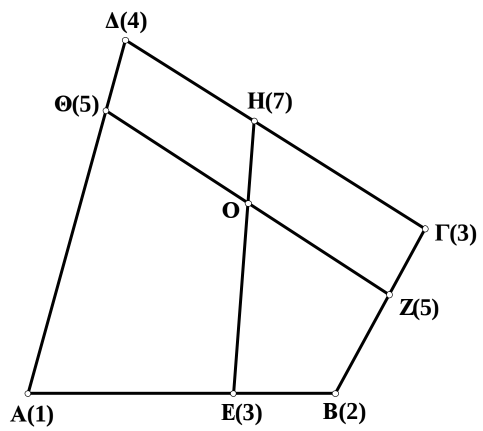
Άρα $\{A, B, \Gamma, \Delta\}= \{\{A, \Delta\}, \{B, \Gamma\}\}=$

$\{\Theta(5), Z(5)\}=O_1 \in \Theta Z$

Όμοια: $\{A, B, \Gamma, \Delta\}=$

$\{\{A, B\}, \{\Gamma,\Delta\}\}= \{E(3), H(7)\}=O_2 \in EH$

και επειδή το $\{A, B, \Gamma, \Delta\}$ είναι μοναδικό θα είναι $O_1 \equiv O_2 \equiv O = \Theta Z \cap EH$

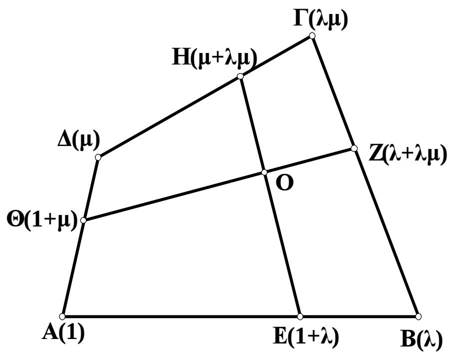


Επειδή $m(\Theta) = m(Z)$, το Ο είναι το μέσο του ΘΖ και επιπλέον $\dfrac{EO}{OH} = \dfrac{m(H)}{m(E)} = \dfrac{7}{3}$

Η παρακάτω εφαρμογή αυτή είναι η βασική πρόταση ή Λήμμα 1 που δημοσιεύσαμε στο περιοδικό ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ, τεύχος 3, σελ. 88-91. Εκεί δώσαμε μια γεωμετρική και μια διανυσματική απόδειξη. Μια ακόμη γεωμετρική απόδειξη έδωσε ο Νίκος Κυριαζής στο τ. 4 του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ σελ. 154-157.
Η απόδειξη με τη βοήθεια του κ.β που ακολουθεί είναι συντομότατη και δεν έχει την ανάγκη διάκρισης περιπτώσεων όπως οι γεωμετρικές που αναφέραμε.

Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα τέτοια, ώστε: $\frac{ΑΕ}{ΕΒ}=\frac{ΔΗ}{ΗΓ}=\lambda$ και $\frac{ΑΘ}{ΘΔ}=\frac{ΒΖ}{ΖΓ}=\mu$. Έστω $Ο=ΕΗ\cap ΘΖ$. Να αποδειχθεί ότι: $\frac{ΘΟ}{ΟΖ}=\lambda$ και $\frac{ΕΟ}{ΟΗ}=\mu$.

Απόδειξη:
Έστω $Α(\alpha),\ Β(\beta),\ Γ(\gamma),\ Δ(\delta)$. Θα προσδιορίσουμε κατάλληλα τα $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ ώστε $Ε=\{Α,\ Β\}$, $Ζ=\{Β,Γ\}$, $Η=\{Γ,Δ\}$, $Θ=\{Δ,\ Α\}$. Αρκεί:



$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\gamma}{\delta}=\lambda$ (1) και

$\frac{\delta}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta}=\mu$ (2)

Θέτουμε αυθαίρετα $\alpha=1$ και βρίσκουμε $\beta=\lambda$, $\gamma=\lambda\mu$, $\delta=\mu$

Είναι τώρα: {Α, Β, Γ, Δ}= {{Α, Β}, {Γ, Δ}}= {Ε, Η}=$Ο_1\in ΕΗ$ και

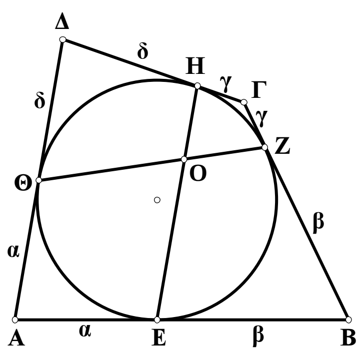
{Α, Β, Γ, Δ}= {{Α, Δ}}, {Β, Γ}}= {Θ, Ζ}=$Ο_2\in ΘΖ$

Επομένως {Α, Β, Γ, Δ}= $ΕΗ\cap ΘΖ=Ο$, δηλαδή $Ο_1\equiv Ο_2\equiv Ο$

Άρα: $\frac{ΘΟ}{ΟΖ}=\frac{m(Ζ)}{m(Θ)}=\frac{\lambda+\lambda\mu}{1+\mu}=\lambda$ και

$\frac{ΕΟ}{ΟΗ}=\frac{m(Η)}{m(Ε)}=\frac{\mu+\lambda\mu}{1+\lambda}=\mu$

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ περιγεγραμμένο σε κύκλο. Έστω Ε, Ζ, Η, Θ τα σημεία επαφής του κύκλου με τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα και $ΑΕ=ΑΘ=\alpha$, $ΒΕ=ΒΖ=\beta$, $ΓΗ=ΓΖ=\gamma$, $ΔΗ=ΔΘ=\delta$. Έστω επίσης $Ο=ΕΗ\cap ΘΖ$. Να αποδειχθεί ότι: $\frac{ΕΟ}{ΟΗ}=\frac{\alpha.\beta.ΓΔ}{\gamma.\delta.ΑΒ}$ και $\frac{ΘΟ}{ΟΖ}=\frac{\alpha.\delta.ΒΓ}{\beta.\gamma.ΑΔ}$

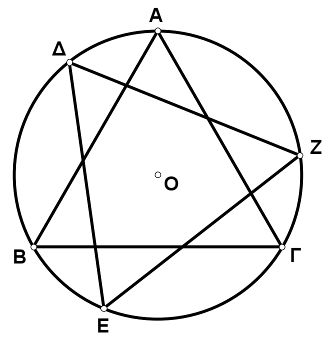


Απόδειξη:
Η απόδειξη μπορεί να γίνει αν στις κορυφές

Α, Β, Γ, Δ τοποθετήσουμε τις μάζες $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma},\frac{1}{\delta}$.

Δύο ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο Ο. Διαμελίζουμε το σύνολο {Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ} σε δύο υποσύνολα τριών στοιχείων. Έστω $\mathbf{X=\{A_1,B_1,\Gamma_1\}}$ και $\mathbf{\Psi=\{A_2,B_2,\Gamma_2\}}$ τα δύο υποσύνολα. Αν Κ και Λ είναι τα κ.β των τριγώνων $\mathbf{A_1B_1\Gamma_1}$ και $\mathbf{A_2B_2\Gamma_2}$, να αποδειχθεί ότι η ΚΛ διέρχεται από το Ο.

Απόδειξη:



Έστω $(\mathrm{A,B,\Gamma,\Delta,E,Z})(1)$. Τότε:

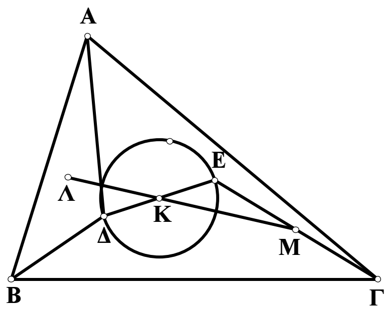
$\{\mathrm{A,B,\Gamma,\Delta,E,Z}\}=\{\{\mathrm{A,B,\Gamma}\},\{\mathrm{\Delta,E,Z}\}\}=\{\mathrm{O,O}\}=\mathrm{O}$

Επίσης $\{\mathrm{A,B,\Gamma,\Delta,E,Z}\}=\{\{\mathrm{A_1,B_1,\Gamma_1}\},\{\mathrm{A_2,B_2,\Gamma_2}\}\}=$

$\{\mathrm{K,\Lambda}\}\in\mathrm{K\Lambda}$

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κ.β (σημείο τομής διαμέσων) το σημείο Κ και κύκλος κέντρου Κ. Αν ΔΕ τυχαία διάμετρος του κύκλου, Λ το κ.β του τριγώνου ΑΒΔ και Μ το μέσο του τμήματος ΓΕ, να αποδειχθεί ότι η ΛΜ διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.

Απόδειξη:



Έστω $(\mathrm{A,B,\Gamma,\Delta,E})(1)$. Είναι

{Α, Β, Γ, Δ, Ε}= {{Α, Β, Γ}, {Δ, Ε}}= $\{\mathrm{K,K}\}=\mathrm{K}$

Επίσης: {Α, Β, Γ, Δ, Ε}= {{Α, Β, Δ}, {Γ, Ε}}=

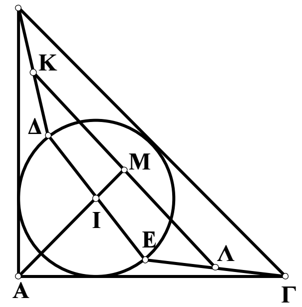
$\{\Lambda,\mathrm{M}\}\in\Lambda\mathrm{M}$.

Άρα $\mathrm{K}\in\Lambda\mathrm{M}$.

Επιπλέον είναι: $\frac{\Lambda\mathrm{K}}{\mathrm{KM}}=\frac{\mathrm{m(M)}}{\mathrm{m}(\Lambda)}=\frac{2}{3}$

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ο εγγεγραμμένος κύκλος του Ι. Αν ΔΕ τυχαία διάμετρος του κύκλου, Κ το μέσο του τμήματος ΒΔ, Λ το μέσο του τμήματος ΓΕ και Μ το μέσο του ΚΛ να αποδειχθεί ότι η ΑΙ διέρχεται από το Μ.

Απόδειξη:



Έστω $\mathrm{A}(\sqrt{2})$, Β(1), Γ(1), Δ(1), Ε(1)

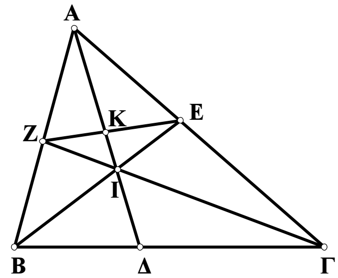
Επειδή οι μάζες των Α, Β, Γ είναι ανάλογες των πλευρών του ΑΒΓ θα είναι {Α, Β, Γ}=Ι. Επίσης {Δ, Ε}=Ι.

Άρα: {Α, Β, Γ, Δ, Ε}= $\{\{\mathrm{A,B,\Gamma}\},\{\Delta,\mathrm{E}\}\}=\{\mathrm{I,I}\}=\mathrm{I}$

Επίσης {Α, Β, Γ, Δ, Ε}= {Α, {Β, Δ}, {Γ, Ε}}=

{Α, Κ(2), Λ(2)}= $\{\mathrm{A,M}\}\in\mathrm{AM}$, δηλ. $\mathrm{I}\in\mathrm{AM}$ ή το ίδιο η ΑΙ διέρχεται από το Μ.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι διχοτόμοι του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ που τέμνονται στο Ι. Η ΑΔ τέμνει τη ΖΕ στο Κ. Να αποδειχθεί ότι:



α) $\dfrac{\mathbf{AK}}{\mathbf{KI}} = \dfrac{\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma}}{\boldsymbol{\alpha}}$

β) $\dfrac{\mathbf{ZK}}{\mathbf{KE}} = \dfrac{\boldsymbol{\alpha+\gamma}}{\boldsymbol{\alpha+\beta}}$

Απόδειξη:

Έστω $A(\alpha,\alpha), B(\beta), \Gamma(\gamma)$. Τότε:

G={Α(α, α), Β(β), Γ(γ)}= {Α(α), {Α(α), Β(β), Γ(γ)}}= $\{A(\alpha), I\} \in AI$ και

G={Α(α, α), Β(β), Γ(γ)}= {{Α(α), Β(β)}, {Α(α), Γ(γ)}}= $\{Z, E\} \in ZE$.

Επομένως το G είναι το σημείο τομής των ΖΕ και ΑΙ, δηλαδή το Κ και ισχύει:

$\dfrac{AK}{KI} = \dfrac{m(I)}{m(A)} = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha}$ και $\dfrac{ZK}{KE} = \dfrac{m(E)}{m(Z)} = \dfrac{\alpha+\gamma}{\alpha+\beta}$

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ τέτοια ώστε: $\dfrac{\mathbf{A\Delta}}{\mathbf{\Delta B}} = \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$ και $\dfrac{\mathbf{BE}}{\mathbf{E\Gamma}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$. Έστω Ζ και Η τα μέσα των ΓΔ και ΑΕ. Να αποδειχθεί ότι η ευθεία ΖΗ διέρχεται από το κ.β του τριγώνου ΑΒΓ.

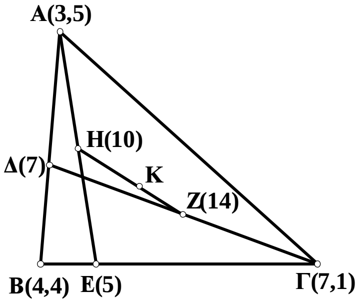
Απόδειξη:

Έστω $A(3, 5), B(4,4), \Gamma(7,1)$.

Τότε $\Delta(7) = \{A(3),\ B(4)\}$ και $E(5) = \{B(4), \Gamma(1)\}$,

$Z = \{\Gamma(7),\ \Delta(7)\}$

και $H = \{A(5),\ E(5)\}$. Άρα



{Α(3, 5), Β(4, 4), Γ(7,1)}= ,

{{Α(3), Β(4)}, {Β(4), Γ(1)}, Α(5), Γ(7)}=

{Δ(7), Ε(5), Α(5), Γ(7)}= {{Δ(7), Γ(7)}, {Α(5), Ε(5)}}=

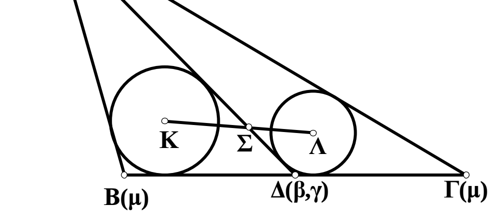
$\{Z(14), H(10)\} \in ZH$ Επίσης

{Α(3, 5), Β(4, 4), Γ(7, 1)}= {Α(8), Β(8), Γ(8)}

το οποίο είναι το κ.β Κ του τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα $K \in ZH$ και μάλιστα $\dfrac{HK}{KE} = \dfrac{m(Z)}{m(H)} = \dfrac{14}{10} = \dfrac{7}{5}$

Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΔ. Έστω Κ και Λ τα έγγεντρα των τριγώνων ΑΒΔ , ΑΓΔ και Σ το σημείο τομής των ΑΔ και ΚΛ. Να αποδειχθεί ότι $\dfrac{\mathbf{A\Sigma}}{\mathbf{\Sigma\Delta}} = \dfrac{\boldsymbol{\beta+\gamma+2\mu}}{\boldsymbol{\alpha}}$ όπου α, β, γ οι πλευρές του ΑΒΓ και μ το μήκος της διαμέσου ΑΔ.



Απόδειξη:

Έστω $\mathrm{A}(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2})$, $\mathrm{B}(\mu)$, $\Gamma(\mu)$, $\Delta(\beta,\gamma)$.

Επειδή στις κορυφές του τριγώνου ΑΒΔ
έχουμε μάζες ανάλογες των πλευρών του, θα

είναι $\mathrm{K}=\{\mathrm{A}(\frac{\alpha}{2}),\ \mathrm{B}(\mu),\ \Delta(\gamma)\}$ και όμοια

$\Lambda=\{\mathrm{A}(\frac{\alpha}{2}),\ \Gamma(\mu),\ \Delta(\beta)\}$.

Έστω $\mathrm{P}=\{\mathrm{A}(\frac{\alpha}{2},\ \frac{\alpha}{2}),\ \mathrm{B}(\mu),\ \Gamma(\mu),\ \Delta(\beta,\ \gamma)\}$

Τότε $\mathrm{P}=\{\{\mathrm{A}(\frac{\alpha}{2}),\ \mathrm{B}(\mu),\ \Delta(\gamma)\},\ \{\mathrm{A}(\frac{\alpha}{2}),\ \Gamma(\mu),\ \Delta(\beta)\}\}=\{\mathrm{K},\ \Lambda\}\in \mathrm{K}\Lambda$.

Επίσης: $\mathrm{P}=\{\mathrm{A}(\frac{\alpha}{2},\ \frac{\alpha}{2}),\ \mathrm{B}(\mu),\ \Gamma(\mu),\ \Delta(\beta,\ \gamma)\}=\{\mathrm{A}(\alpha),\ \Delta(\beta,\ \gamma),\ \{\mathrm{B}(\mu),\ \Gamma(\mu)\}\}=$

$\{\mathrm{A}(\alpha),\ \Delta(\beta,\ \gamma),\ \Delta(2\mu)\}=\{\mathrm{A}(\alpha),\ \Delta(\beta,\ \gamma,\ 2\mu)\}\in \mathrm{A}\Delta$

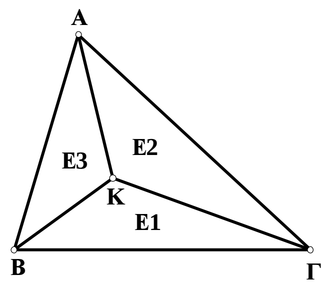
Άρα $\mathrm{P}=\mathrm{A}\Delta\cap \mathrm{K}\Lambda$ δηλαδή $\mathrm{P}\equiv\Sigma$ και

$$\frac{\mathrm{A}\Sigma}{\Sigma\Delta}=\frac{m(\Delta)}{m(\mathrm{A})}=\frac{\beta+\gamma+2\mu}{\alpha}$$

Β΄ ΟΜΑΔΑ

Μια πολύ χρήσιμη πρόταση είναι η παρακάτω που αναφέρουμε χωρίς απόδειξη

Θεώρημα:
Αν Κ είναι εσωτερικό σημείο τριγώνου ΑΒΓ
και ονομάσουμε $\mathbf{E_1=(K B\Gamma),\ E_2=(K\Gamma A),\ E_3=(KAB)}$
τότε ισχύει:
$\mathbf{E_1\overrightarrow{KA}+E_2\overrightarrow{KB}+E_3\overrightarrow{K\Gamma}=\vec{0}}$ **δηλαδή το Κ είναι το ΚΜ**
των $\mathbf{A(E_1),\ B(E_2),\ \Gamma(E_3)}$.



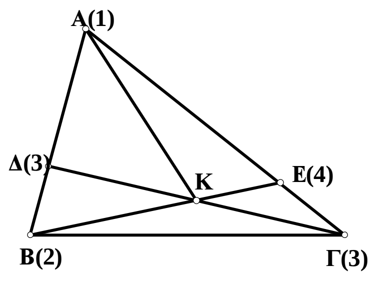
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ τέτοια ώστε: $\mathbf{\frac{A\Delta}{\Delta B}=2}$ **και** $\mathbf{\frac{AE}{E\Gamma}=3}$**. Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΓΔ και ΒΕ να αποδειχθεί ότι** $\mathbf{(KB\Gamma)=\frac{1}{6}(AB\Gamma)}$

Απόδειξη:
Έστω Α(1), Β(2), Γ(3).

Τότε $\{\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \Gamma\}=\{\{\mathrm{A},\ \mathrm{B}\},\ \Gamma\}=\{\Delta,\ \Gamma\}\in\Gamma\Delta$

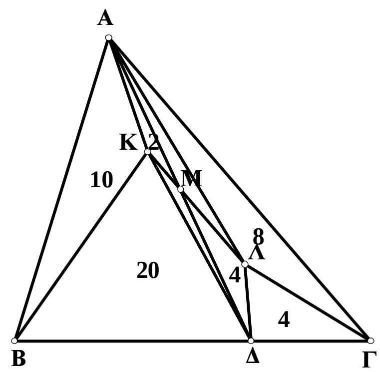
Όμοια: $\{\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \Gamma\}=\{\{\mathrm{A},\ \Gamma\},\ \mathrm{B}\}=\{\mathrm{E},\ \mathrm{B}\}\in \mathrm{BE}$

Άρα $\{\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \Gamma\}=\Gamma\Delta\cap \mathrm{BE}=\mathrm{K}$



Επομένως τα εμβαδά των τριγώνων ΚΒΓ, ΚΓΑ
και ΚΑΒ είναι ανάλογα των 1, 2, 3.
Δηλαδή $(\text{ΚΒΓ}) = \lambda$, $(\text{ΚΓΑ}) = 2\lambda$ και $(\text{ΚΑΒ}) = 3\lambda$,

άρα $(\text{ΑΒΓ}) = 6\lambda$ και επομένως $(\text{ΚΒΓ}) = \frac{1}{6}(\text{ΑΒΓ})$



Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, σημείο Δ της πλευράς του ΒΓ, σημείο Κ εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΔ και σημείο Λ εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΔ τέτοια ώστε:
$(\text{ΚΒΔ}) = 20$, $(\text{ΚΑΒ}) = 10$, $(\text{ΚΑΔ}) = 2$
$(\text{ΛΔΓ}) = 4$, $(\text{ΛΓΑ}) = 8$, $(\text{ΛΑΔ}) = 4$
Αν $\text{Μ} = \text{ΑΔ} \cap \text{ΚΛ}$ να αποδειχθεί ότι $\text{ΑΜ} = \text{ΜΔ}$

Απόδειξη:
Έστω Α(20, 4), Β(2), Γ(4), Δ(10, 8)
Τότε $\text{Κ} = \{\text{Α}(20), \text{Β}(2), \text{Δ}(10)\}$ και
$\Lambda = \{\text{Α}(4), \Gamma(4), \Delta(8)\}$

Επειδή $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΓ}} = \frac{(\text{ΑΒΔ})}{(\text{ΑΔΓ})} = \frac{32}{16} = 2 = \frac{m(\Gamma)}{m(\text{Β})}$, θα είναι $\Delta = \{\text{Β}, \Gamma\}$.

Επομένως $\{\text{Α}(20, 4), \text{Β}(2), \Gamma(4), \Delta(10, 8)\} = \{\text{Α}(20, 4), \Delta(2, 4), \Delta(10, 8)\} =$
$\{\text{Α}(20, 4), \Delta(2, 4, 10, 8)\} = \{\text{Α}(24), \Delta(24)\} \in \text{ΑΔ}$

Επίσης $\{\text{Α}(20, 4), \text{Β}(2), \Gamma(4), \Delta(10, 8)\} =$
$\{\{\text{Α}(20), \text{Β}(2), \Delta(10)\}, \{\text{Α}(4), \Gamma(4), \Delta(8)\}\} = \{\text{Κ}, \Lambda\} \in \text{ΚΛ}$

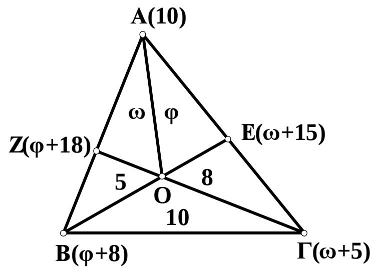
Άρα $\{\text{Α}(20, 4), \text{Β}(2), \Gamma(4), \Delta(10, 8)\} = \text{ΑΔ} \cap \text{ΚΛ} = \text{Μ}$ και ισχύει:

$\frac{\text{ΑΜ}}{\text{ΜΔ}} = \frac{m(\Delta)}{m(\text{Α})} = \frac{24}{24} = 1$, δηλαδή το Μ είναι το μέσο του ΑΔ.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Ε και Ζ των πλευρών του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Οι ΒΕ και ΓΖ τέμνονται στο σημείο Ο και είναι: $(\text{ΒΟΖ}) = 5$, $(\text{ΓΟΕ}) = 8$, $(\text{ΒΟΓ}) = 10$. Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΖΟΕ.

3η Διεθνής Ολυμπιάδα Νέων, 1999

Λύση:
Φέρνουμε την ΑΟ. Ονομάζουμε $(\text{ΑΟΖ}) = \omega$,
$(\text{ΑΟΕ}) = \varphi$.
Έστω τώρα $\text{Α}(10)$, $\text{Β}(\varphi + 8)$, $\Gamma(\omega + 5)$. Τότε
$\text{Ο} = \{\text{Α}, \text{Β}, \Gamma\}$, $\text{Ε}(\omega + 15) = \{\text{Α}, \Gamma\}$ και
$\text{Ζ}(\varphi + 18) = \{\text{Α}, \text{Β}\}$.



Είναι: $\frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΖΒ}} = \frac{(\text{ΑΟΖ})}{(\text{ΒΟΖ})} = \frac{\omega}{5}$ και

$\frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΖΒ}} = \frac{m(\text{Β})}{m(\text{Α})} = \frac{\varphi + 8}{10}$, άρα: $\frac{\varphi + 8}{10} = \frac{\omega}{5}$ (1)

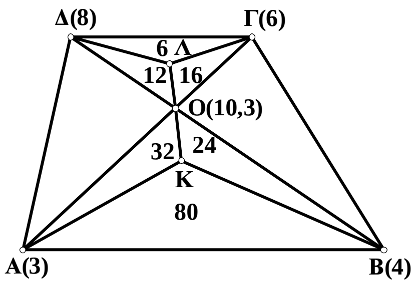
Επίσης: $\frac{ΑΕ}{ΕΓ}=\frac{(ΑΟΕ)}{(ΓΟΕ)}=\frac{φ}{8}$ και $\frac{ΑΕ}{ΕΓ}=\frac{m(Γ)}{m(Α)}=\frac{ω+5}{10}$, άρα: $\frac{ω+5}{10}=\frac{φ}{8}$ (2)

Από τη λύση του συστήματος των (1) και (2) βρίσκουμε: $ω=10$ και $φ=12$, άρα $(ΑΖΟΕ)=ω+φ=22$.

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ. Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του και τα σημεία Κ και Λ εσωτερικά των τριγώνων ΟΑΒ και ΟΓΔ τέτοια ώστε:
$(ΚΑΒ)=80$, $(ΚΑΟ)=32$, $(ΚΒΟ)=24$
$(ΛΓΔ)=6$, $(ΛΔΟ)=12$, $(ΛΓΟ)=16$
Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Κ, Ο και Λ είναι συνευθειακά.

<u>Απόδειξη:</u>
Θέτουμε τις κατάλληλες μάζες στις κορυφές Α, Β, Γ, Δ και δύο μάζες m_1 και m_2 στο Ο, ώστε να είναι $Κ=\{Ο(m_1),Α,Β\}$ και $Λ=\{Ο(m_2),Γ,Δ\}$
Έστω $Α(3)$, $Β(4)$, $Γ(6)$, $Δ(8)$, $Ο(10, 3)$.

Επειδή οι μάζες $Ο(10)$, $Α(3)$, $Β(4)$ είναι ανάλογες των εμβαδών (ΚΑΒ), (ΚΟΒ), (ΚΟΑ), θα είναι $Κ=\{Α, Β, Ο(10)\}$

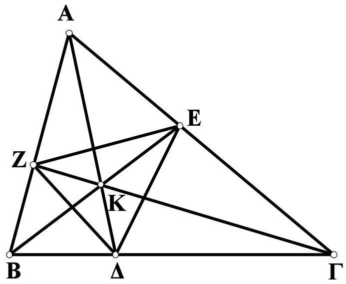


Όμοια: $Λ=\{Γ, Δ, Ο(3)\}$
Άρα $\{Α, Β, Γ, Δ, Ο(10, 3)\}=\{Κ, Λ\}$
Είναι:
$$\left.\begin{array}{l}(ΟΑΒ)=80+32+24=136\\(ΟΓΔ)=6+12+16=34\end{array}\right\}\Rightarrow (ΟΑΒ)=4(ΟΓΔ)\Rightarrow$$
$$\frac{(ΑΒ)^2}{(ΓΔ)^2}=4\Rightarrow ΑΒ=2ΓΔ$$

Επειδή $\frac{ΑΟ}{ΟΓ}=\frac{ΑΒ}{ΓΔ}=2=\frac{m(Γ)}{m(Α)}\Rightarrow Ο=\{Α, Γ\}$
Όμοια: $Ο=\{Β, Δ\}$, άρα $Ο=\{Α, Β, Γ, Δ\}\Rightarrow$ $Ο=\{Α, Β, Γ, Δ, Ο(10, 3)\}$
Επομένως πρέπει $Ο\in ΚΛ$

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι Σεβιανές ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ που τέμνονται σε εσωτερικό σημείο Κ του τριγώνου. Να αποδειχθεί ότι
$$\frac{(ΚΕΖ)}{(ΚΑΒ)+(ΚΑΓ)}=\frac{(ΚΔΖ)}{(ΚΒΓ)+(ΚΑΒ)}=\frac{(ΚΔΕ)}{(ΚΑΓ)+(ΚΒΓ)}$$

Απόδειξη:



Έστω $(ΚΒΓ)=x$, $(ΚΓΑ)=y$, $(ΚΑΒ)=ω$ και
$Α(x),Β(y),Γ(ω)$
Τότε: $\{Α(x),Β(y),Γ(ω)\}=Κ$
Επίσης
$Δ=\{Β(y),Γ(ω)\}$, $Ε=\{Γ(ω),Α(x)\}$, $Ζ=\{Α(x),Β(y)\}$

Επομένως {Δ, Ε, Ζ}={Α(2x), Β(2y), Γ(2ω)}= {Α(x), Β(y), Γ(ω)}=Κ $\Rightarrow$

$$\frac{(\mathrm{KZE})}{m(\Delta)}=\frac{(\mathrm{K\Delta Z})}{m(\mathrm{E})}=\frac{(\mathrm{K\Delta E})}{m(\mathrm{Z})}\Rightarrow\frac{(\mathrm{KZE})}{\omega+y}=\frac{(\mathrm{K\Delta Z})}{x+\omega}=\frac{(\mathrm{K\Delta E})}{y+x}$$

Γ΄ ΟΜΑΔΑ

ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ

Λόγω του περιορισμένου χρόνου και χώρου, θα αναφέρουμε μόνο το συμπέρασμα του θεωρήματος αυτού μεταφρασμένο με γεωμετρικούς όρους και δεν θα υπεισέλθουμε στις αντίστοιχες θεωρίες της Φυσικής.

Θεώρημα

Έστω τα συνεπίπεδα σημεία $A_1(m_1), A_2(m_2), ..., A_\nu(m_\nu)$, με ΚΜ το σημείο G, (ε) τυχαία ευθεία του επιπέδου τους και d_1, d_2, ..., d_ν και d οι αποστάσεις των σημείων αυτών και του G από την (ε). Ισχύει τότε:

$\varepsilon_1 m_1 d_1+\varepsilon_2 m_2 d_2+...+\varepsilon_\nu m_\nu d_\nu=(m_1+m_2+...+m_\nu)d$ όπου:

Αν $G\notin(\varepsilon)$ τότε

$\varepsilon_i=+1$ για όλα τα σημεία A_i που βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της (ε) που βρίσκεται και το G,

$\varepsilon_i=-1$ για όλα τα σημεία A_i που βρίσκονται στο άλλο ημιεπίπεδο της (ε) και $\varepsilon_i=0$ για όλα τα σημεία A_i που βρίσκονται στην (ε)

Αν $G\in(\varepsilon)$ τότε

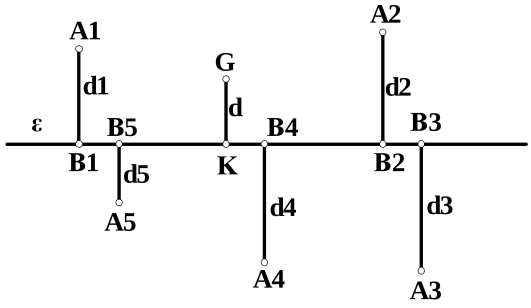
$\varepsilon_i=+1$ για όλα τα σημεία A_i που βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της (ε) (το οποιοδήποτε)

$\varepsilon_i=-1$ για όλα τα σημεία A_i που βρίσκονται στο άλλο ημιεπίπεδο της (ε) και

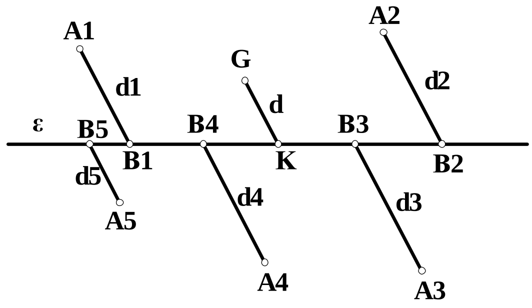
$\varepsilon_i=0$ για όλα τα σημεία A_i που βρίσκονται στην (ε)

Η ίδια πρόταση ισχύει και αν τα d_1, d_2, ..., d_ν δεν είναι τα μήκη των καθέτων τμημάτων προς την ευθεία (ε), αλλά τα μήκη των τμημάτων που φέρονται παράλληλα προς την ίδια διεύθυνση από τα σημεία $A_1, A_2, ..., A_\nu$ και έχουν το άλλο άκρο τους στην ευθεία (ε).

Το παραπάνω θεώρημα θα το ονομάζουμε θεώρημα των ροπών ως προς την ευθεία (ε). Συντομογραφικά ΘΡ(ε).



Σχ. 1



Σχ. 2

Έτσι, για το σχήμα 1 με $G = \{A_1(m_1), A_2(m_2), A_3(m_3), A_4(m_4), A_5(m_5)\}$ ισχύει:

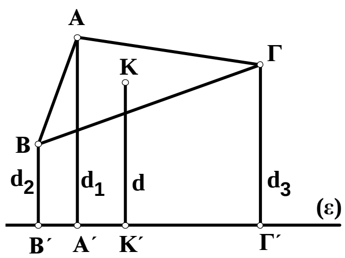
$$\mathbf{m_1d_1 + m_2d_2 - m_3d_3 - m_4d_4 - m_5d_5 = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5)d}$$

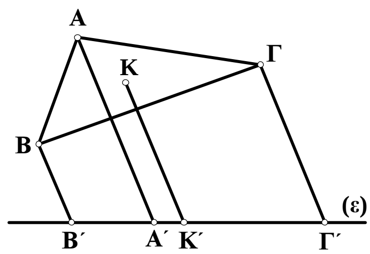
Η ίδια πρόταση ισχύει και για το σχήμα 2 όπου οι
$A_1B_1 // A_2B_2 // A_3B_3 // A_4B_4 // A_5B_5 // GK$

Δείχνουμε τη χρήση του παραπάνω θεωρήματος στις επόμενες εφαρμογές.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΚΜ το σημείο Κ και ευθεία (ε) που αφήνει όλες τις κορυφές του τριγώνου προς το ίδιο μέρος της. Αν $\mathbf{d_1, d_2, d_3}$ και d είναι οι αποστάσεις των Α, Β, Γ και Κ από την (ε) αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι:
$\mathbf{d_1 + d_2 + d_3 = 3d}$

Απόδειξη:





Έστω $(A, B, \Gamma)(1)$ Τότε $K(3) = \{A, B, \Gamma\}$
Εφαρμόζουμε το ΘΡ(ε).
$1.d_1 + 1.d_2 + 1.d_3 = 3.d$, δηλαδή $d_1 + d_2 + d_3 = 3d$

Αν οι $AA', BB', \Gamma\Gamma'$ δεν είναι κάθετες στην (ε) η πρόταση ισχύει πάλι ως εξής:
$AA' + BB' + \Gamma\Gamma' = 3KK'$

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ, τα μέσα Ε και Ζ των ΑΒ και ΓΔ και Μ

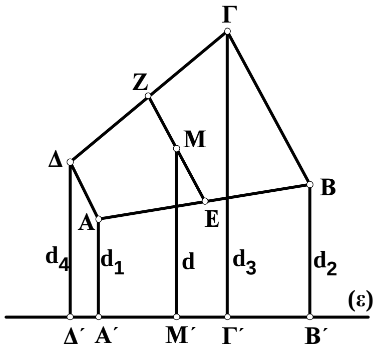
το μέσο του ΕΖ. Έστω επίσης ευθεία (ε) που αφήνει όλες τις κορυφές του τετραπλεύρου προς το ίδιο μέρος της και d_1, d_2, d_3, d_4 και d οι αποστάσεις των Α, Β, Γ, Δ και Μ από την (ε). Να αποδειχθεί ότι: $d_1+d_2+d_3+d_4=4d$

Απόδειξη:

Έστω (Α, Β, Γ, Δ)(1). Τότε $M(4)=\{A,\ B,\ \Gamma, \Delta\}$.

Εφαρμόζουμε το Θ.Ρ(ε) για τα σημεία Α, Β, Γ, Δ.

$1.d_1+1.d_2+1.d_3+1.d_4=4.d$ ή $d_1+d_2+d_3+d_4=4d$



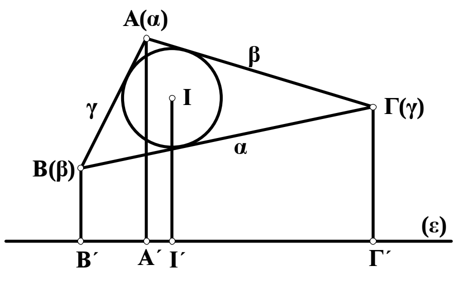
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ πλευρών α, β, γ, το έγγεντρό του Ι και ευθεία (ε) που αφήνει όλες τις κορυφές του τριγώνου προς το ίδιο μέρος της . Φέρνουμε τις ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ' και ΙΙ' κάθετες στην (ε). Να αποδειχθεί ότι

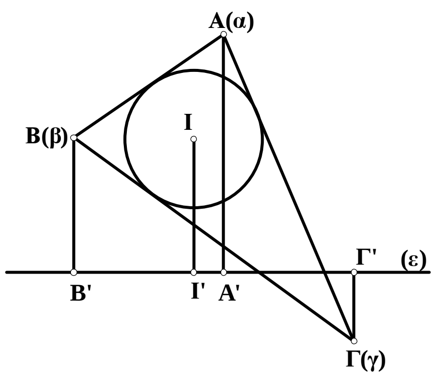
α) $\alpha.AA'+\beta.BB'+\gamma.\Gamma\Gamma' = (\alpha+\beta+\gamma).II'$ αν η ευθεία (ε) αφήνει όλες τις κορυφές του τριγώνου προς το ίδιο μέρος της.

β) $\alpha.AA'+\beta.BB'-\gamma.\Gamma\Gamma' = (\alpha+\beta+\gamma).II'$ αν οι κορυφές Α και Β και το Ι βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της (ε) ενώ η κορυφή Γ βρίσκεται προς το άλλο μέρος της (ε)

γ) $\alpha.AA'+\beta.BB'=\gamma.\Gamma\Gamma'$ αν η ευθεία (ε) διέρχεται από το Ι και αφήνει τις κορυφές Α και Β προς το ένα μέρος της και την κορυφή Γ προς το άλλο μέρος της.

Απόδειξη:





α) Έστω Α(α), Β(β), Γ(γ). Τότε $I(\alpha+\beta+\gamma)=\{A,\ B,\ \Gamma\}$.

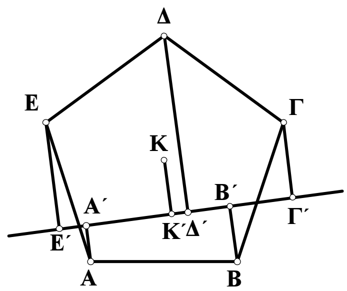
Εφαρμόζουμε το Θ.Ρ(ε): $\alpha.AA'+\beta.BB'+\gamma.\Gamma\Gamma' = (\alpha+\beta+\gamma).II'$

β) Εφαρμόζουμε πάλι το Θ.Ρ(ε) για τα σημεία Α, Β, Γ.

Θα έχουμε λοιπόν: $\alpha.AA'+\beta.BB'-\gamma.\Gamma\Gamma'=(\alpha+\beta+\gamma).II'$

γ) Αν η ευθεία (ε) διέρχεται από το Ι, τότε $ΙΙ' = 0$ και η προηγούμενη σχέση γίνεται:
$α.ΑΑ' + β.ΒΒ' - γ.ΓΓ' = 0$ ή $α.ΑΑ' + β.ΒΒ' = γ.ΓΓ'$

Δίνεται κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και ευθεία (ε). Φέρνουμε από τις κορυφές του πενταγώνου τις κάθετες ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ', ΕΕ' προς την ευθεία (ε) καθώς και την ΚΚ' κάθετη στην (ε).
Να αποδειχθεί ότι:



α) $\mathbf{ΓΓ' + ΔΔ' + ΕΕ' - ΑΑ' - ΒΒ' = 5ΚΚ'}$ **αν η (ε) αφήνει τις κορυφές Α, Β προς το ένα μέρος της και της κορυφές Γ, Δ, Ε και το κέντρο του Κ προς το άλλο μέρος της**

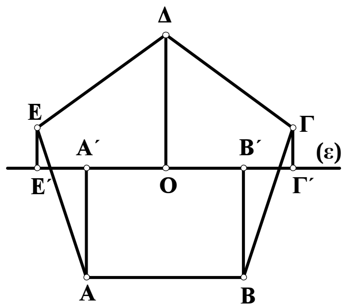
β) $\mathbf{ΓΓ' + ΔΔ' + ΕΕ' = 5.ΚΚ'}$ **αν η (ε) συμπίπτει με την ΑΒ**

γ) $\mathbf{ΑΑ' + ΒΒ' = ΓΓ' + ΔΔ' + ΕΕ'}$ **αν η (ε) διέρχεται από το κέντρο του πενταγώνου και αφήνει τις κορυφές Α και Β προς το ένα μέρος της και τις κορυφές Γ, Δ και Ε προς το άλλο μέρος της.**

Είναι άμεση εφαρμογή του θεωρήματος των ροπών

Δίνεται κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ κέντρου Ο. Από το Ο φέρνουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς την ΑΒ. Έστω x,y οι αποστάσεις των Β και Γ αντίστοιχα από την (ε) και R η ακτίνα του πενταγώνου. Να αποδειχθεί ότι: $\mathbf{x - y = \frac{R}{2}}$

Απόδειξη:

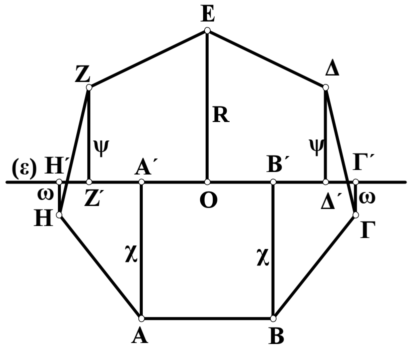


Έστω $(Α, Β, Γ, Δ, Ε)(1)$. Τότε $Ο = \{Α, Β, Γ, Δ, Ε\}$
Φέρνουμε και τις κάθετες από τα Α, Δ, Ε στην ευθεία (ε).
Εφαρμόζουμε το θεώρημα των ροπών ως προς την ευθεία (ε).
$1.ΑΑ' + 1.ΒΒ' - 1.ΓΓ' - 1.ΔΟ - 1.ΕΕ' = 0$ και επειδή
$ΑΑ' = ΒΒ' = x$, $ΓΓ' = ΕΕ' = y$ και $ΔΟ = R$ η παραπάνω σχέση γίνεται: $2x - 2y - R = 0$
και τελικά: $x - y = \frac{R}{2}$

Δίνεται κανονικό επτάγωνο ΑΒΓΔΕΖΗ κέντρου Ο. Από το Ο φέρνουμε ευθεία $\mathbf{ε /\!/ ΑΒ}$ **και τις** $\mathbf{ΒΒ'}$, $\mathbf{ΓΓ'}$ **και** $\mathbf{ΔΔ'}$ **κάθετες στην (ε). Να αποδειχθεί ότι** $\mathbf{R = 2.(ΒΒ' - ΔΔ' + ΓΓ')}$ **όπου R η ακτίνα του επταγώνου.**

Απόδειξη:
Φέρνουμε τις κάθετες και από τις υπόλοιπες κορυφές του επταγώνου όπως δείχνει το σχήμα. Ονομάζουμε $ΑΑ' = ΒΒ' = x$, $ΔΔ' = ΖΖ' = y$, $ΓΓ' = ΗΗ' = ω$.
Η κάθετη από το Ε στην (ε) είναι η ακτίνα R.

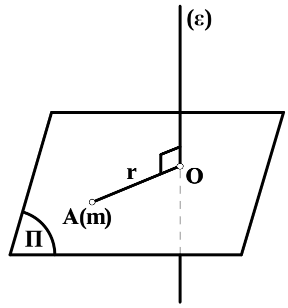
Έστω επίσης $(Α,\ Β,\ Γ,\ Δ,\ Ε,\ Ζ,\ Η)(1)$. Τότε
$O(7)=\{Α,\ Β,\ Γ,\ Δ,\ Ε,\ Ζ,\ Η\}$
Εφαρμόζουμε το ΘΡ (ε):
$1.x+1.x+1.\omega-1.y-1.R-1.y+1.\omega=7.0$
και τελικά: $R=2(x-y+\omega)$



Δ΄ ΟΜΑΔΑ

ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Έστω υλικό σημείο Α ενός επιπέδου (Π) με μάζα m. Έστω επίσης άξονας (ε) κάθετος στο επίπεδο. Ονομάζουμε ροπή αδράνειας του **Α(m)** ως προς τον άξονα (ε) το γινόμενο:
$\mathbf{I=mr^2}$



όπου r η απόσταση του σημείου από τον άξονα.

Έστω τώρα τα υλικά σημεία $A_1(m_1), A_2(m_2), ..., A_\nu(m_\nu)$ ενός επιπέδου και άξονας $\varepsilon\perp\Pi$ στο σημείο του Ο.
Έστω $r_1, r_2, ..., r_\nu$ οι αποστάσεις των $A_1, A_2, ..., A_\nu$ από τον άξονα αντίστοιχα, δηλαδή οι αποστάσεις των σημείων
από το Ο. Ως ροπή του συστήματος των ν υλικών αυτών σημείων ως προς τον άξονα (ε) ορίζεται το άθροισμα των ροπών των σημείων ως προς τον (ε), δηλ. το άθροισμα

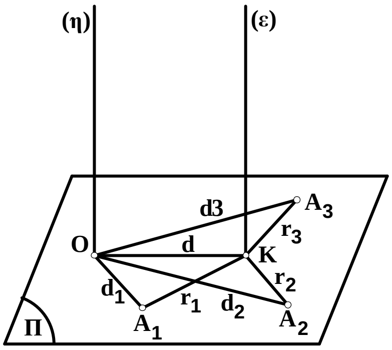
$$\mathbf{I=I_1+I_2+...+I_\nu=m_1r_1^2+m_2^2+...+mr_\nu^2}$$

Η ροπή αδράνειας ορίζεται και για μη συνεπίπεδα υλικά σημεία, αλλά επειδή θα περιοριστούμε σε προτάσεις της Επιπεδομετρίας, προς το παρόν ο παραπάνω ορισμός μας καλύπτει.

Για τη ροπή αδράνειας ν υλικών σημείων ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα Steiner ή θεώρημα των παραλλήλων αξόνων:
Η ροπή αδράνειας του συστήματος ν υλικών συνεπίπεδων σημείων ως προς άξονα (η) κάθετο στο επίπεδό τους είναι ίση με τη ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς άξονα $\varepsilon // \eta$ που διέρχεται από το ΚΜ των σημείων συν τη ροπή αδράνειας της συνολικής μάζας των σημείων ως προς τον άξονα (ε) αν αυτή είναι συγκεντρωμένη στο ΚΜ των σημείων.

Έστω δηλαδή τα συνεπίπεδα σημεία $A_1(m_1), A_2(m_2), ..., A_\nu(m_\nu)$, $K = \{A_1(m_1), A_2(m_2), ..., A_\nu(m_\nu)\}$, άξονας (ε) που διέρχεται από το Κ και είναι κάθετος στο επίπεδο των σημείων και άξονας $\eta // \varepsilon$ που τέμνει το επίπεδο των σημείων στο Ο. Ονομάζουμε $r_1, r_2, ..., r_\nu$ τις αποστάσεις των $A_1, A_2, ..., A_\nu$ από τον άξονα (ε) αντίστοιχα, $d_1, d_2, ..., d_\nu$ τις αποστάσεις των ίδιων σημείων από τον άξονα (η) και d την απόσταση των δύο αξόνων, δηλ. την ΚΟ. Ισχύει τότε:



$$\mathbf{I_{(\eta)} = I_{(\varepsilon)} + (m_1 + m_2 + ... + m_\nu)d^2} \quad \text{ή το ίδιο:}$$
$$\mathbf{m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + ... + m_\nu d_\nu^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ... + m_\nu r_\nu^2 + (m_1 + m_2 + ... + m_\nu)d^2}$$

όπου $I_{(\varepsilon)}$ η ροπή αδράνειας του συστήματος των ν υλικών σημείων ως προς τον άξονα (ε) και $I_{(\eta)}$ η ροπή αδράνειας των ίδιων σημείων ως προς τον άξονα (η).

Στα παραδείγματα που ακολουθούν, θα σημειώνουμε μόνο το ίχνος του άξονα στο επίπεδο και όχι τον ίδιο τον άξονα και την ροπή αδράνειας ενός υλικού σημείου ως προς τον άξονα θα την ονομάζουμε ροπή αδράνειας ως προς το ίχνος του στο επίπεδο.

Εφαρμογές

Απόδειξη του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

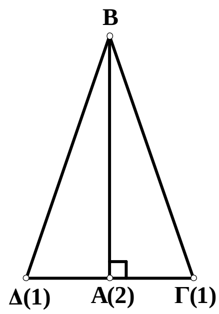
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = \frac{\pi}{2}$ ισχύει: $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$

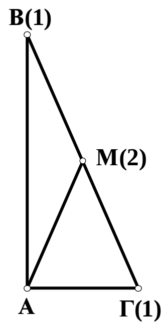
Α΄ Απόδειξη:

Έστω Δ το συμμετρικό του Γ ως προς το Α. Έστω επίσης $\Gamma(1), \Delta(1)$. Τότε $A = \{\Gamma, \Delta\}$. Εφαρμόζουμε το θ. Steiner με άξονες κάθετους στο επίπεδο του τριγώνου στα σημεία Α και Β. Αν I_A και I_B είναι οι ροπές αδράνειας του συστήματος $\{\Gamma, \Delta\}$ ως προς τα σημεία Α και Β, θα έχουμε:

$I_B = I_A + 2AB^2$ ή $B\Gamma^2 + \Delta B^2 = A\Gamma^2 + \Delta A^2 + 2AB^2$ ή

$2B\Gamma^2 = 2A\Gamma^2 + 2AB^2$ και τελικά: $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$





Β΄ Απόδειξη:

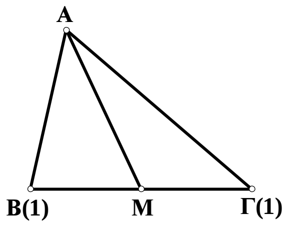
Έστω Β(1) και Γ(1). Έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Τότε $M = \{B, \Gamma\}$ και $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ (1). Εφαρμόζουμε το θ. Steiner για το σύστημα $\{B, \Gamma\}$ ως προς άξονες κάθετους στο επίπεδο του τριγώνου στα σημεία Μ και Α.

Θα έχουμε:
$I_A = I_M + 2AM^2$ ή $AB^2 + A\Gamma^2 = MB^2 + M\Gamma^2 + 2AM^2$
και λόγω της (1): $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$

Θεώρημα διαμέσων.

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο την ΑΜ ισχύει: $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}$

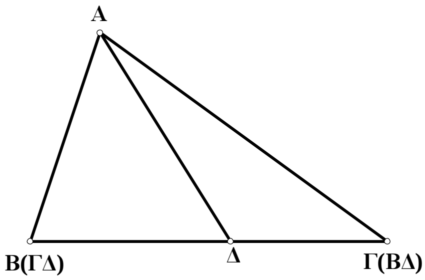
Απόδειξη:
Έστω $B(1), \Gamma(1)$. Τότε $M(2) = \{B, \Gamma\}$.
Εφαρμόζουμε το θ. Steiner για δύο άξονες κάθετους στο επίπεδο του τριγώνου στα σημεία Μ και Α.



$I_A = I_M + 2AM^2$ ή $AB^2 + A\Gamma^2 = MB^2 + M\Gamma^2 + 2AM^2$ και
επειδή $MB = M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$ έχουμε τελικά

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}$$

Θεώρημα Stewart
Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ. Ισχύει
$$\mathbf{AB^2 \cdot \Gamma\Delta + A\Gamma^2 \cdot B\Delta = B\Delta \cdot \Delta\Gamma \cdot B\Gamma + A\Delta^2 \cdot B\Gamma}$$

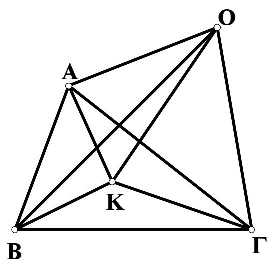


Απόδειξη:
Έστω Β(ΓΔ) και Γ(ΒΔ) ώστε $\Delta = \{B, \Gamma\}$
Εφαρμόζουμε το θεώρημα Steiner για δύο άξονες κάθετους στο επίπεδο του τριγώνου στα σημεία Α και Δ.
$$I_A(B, \Gamma) = I_\Delta(B, \Gamma) + A\Delta^2 \cdot B\Gamma \Rightarrow$$

$$AB^2 \cdot \Gamma\Delta + A\Gamma^2 \cdot B\Delta = B\Delta^2 \cdot \Gamma\Delta + \Gamma\Delta^2 \cdot B\Delta + A\Delta^2 \cdot (B\Delta + \Gamma\Delta) =$$
$$B\Delta \cdot \Gamma\Delta \cdot (B\Delta + \Gamma\Delta) + A\Delta^2 \cdot B\Gamma = B\Delta \cdot \Gamma\Delta \cdot B\Gamma + A\Delta^2 \cdot B\Gamma$$

(Θεώρημα Leibnitz)
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ κέντρου βάρους Κ και σημείο Ο του επιπέδου του. Να αποδειχθεί ότι:
$$\mathbf{OA^2 + OB^2 + O\Gamma^2 = KA^2 + KB^2 + K\Gamma^2 + \frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$$

Απόδειξη:
Έστω $(A, B, \Gamma)(1)$. Τότε $K = \{A, B, \Gamma\}$.
Εφαρμόζουμε το θ. Steiner με άξονες κάθετους στο επίπεδο του τριγώνου στο κέντρο μάζας Κ και στο σημείο Ο. Έχουμε:



$1 \cdot OA^2 + 1 \cdot OB^2 + 1 \cdot O\Gamma^2 = 1 \cdot KA^2 + 1 \cdot KB^2 + 1 \cdot K\Gamma^2 + 3 \cdot OK^2$ ή
$OA^2 + OB^2 + O\Gamma^2 = KA^2 + KB^2 + K\Gamma^2 + 3.OK^2 \qquad (1)$

Όμως: $KA^2 = (\frac{2}{3}\mu_\alpha)^2 = \frac{4}{9}\mu_\alpha^2 =$

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2}{4} = \frac{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2}{9}$$

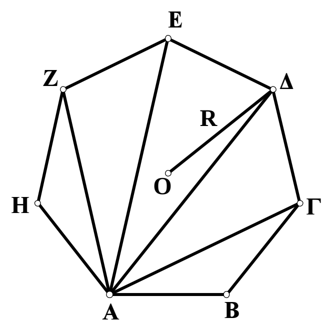
Όμοια: $KB^2 = \frac{2\gamma^2+2\alpha^2-\beta^2}{9}$ και $K\Gamma^2 = \frac{2\alpha^2+2\beta^2-\gamma^2}{9}$

Άρα η (1) γίνεται: $OA^2 + OB^2 + O\Gamma^2 = KA^2 + KB^2 + K\Gamma^2 + \frac{1}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

Δίνεται κανονικό επτάγωνο ΑΒΓΔΕΖΗ ακτίνας R. Να αποδειχθεί ότι:
$\mathbf{AB^2 + A\Gamma^2 + A\Delta^2 = 7R^2}$

Απόδειξη:
Έστω $(A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H)(1)$. Αν Ο είναι το κέντρο του επταγώνου, τότε $\{A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H\} = O(7)$.

Εφαρμόζουμε το θ. Steiner με άξονες κάθετους στο επίπεδο του επταγώνου στα σημεία Ο και Α.



$I_A = I_O + 7R^2$ ή

$AB^2 + A\Gamma^2 + A\Delta^2 + AE^2 + AZ^2 + AH^2 = 7R^2 + 7R^2$ και

επειδή $AH = AB,\ AZ = A\Gamma$ και $AE = A\Delta$ η σχέση γίνεται:

$2AB^2 + 2A\Gamma^2 + 2A\Delta^2 = 14R^2$ ή $AB^2 + A\Gamma^2 + A\Delta^2 = 7R^2$