ΣΗΜΕΙΑΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ. ΜΕΡΟΣ 1^{o}

ΜΙΑ ΝΕΑ ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

Νίκος Ιωσηφίδης, Μαθηματικός – Φροντιστής, Βέροια

e-mail: iossifid@yahoo.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ – ΣΚΟΠΟΣ

Στην παρούσα εργασία εισάγεται μια νέα έννοια “ΣΗΜΕΙΑΚΗ ΠΡΑΞΗ”.
Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να “αλγεβρικοποιήσει” ορισμένες αποδεικτικές διαδικασίες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.
Λόγω της περιορισμένης έκτασης που πρέπει να έχει η εργασία και του χρόνου παρουσίασης, θα περιοριστούμε μόνο στο 1^{o} μέρος της εργασίας με τίτλο “ΣΗΜΕΙΑΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ” (συντομογραφικά Σ.Π).
Θα στηριχτούμε μόνο σε δύο βασικές προτάσεις για να δείξουμε πως μπορούμε να κατασκευάσουμε και ταυτόχρονα να αποδείξουμε με πολύ σύντομο τρόπο διάφορες γεωμετρικές προτάσεις.

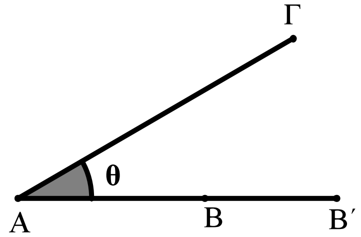
SUMMARY – AIM

In this work, a new term, ““Point operation”, is introduced.
The aim of this work is the “algebration’ of certain evidential proceedings of Euclidian Geometry.
Owing to the limited extent which this work must have and its presentation time, we will confine ourselves to only one part of the work, with the title “Point operation” P.O. for short)
We will rely on only two basic theorems in order to show how we can construct and simultaneously prove various geometric theorems very quickly.

Στα επόμενα, όπου αναφέρονται σημεία, θα θεωρούμε ότι ανήκουν στο ίδιο επίπεδο Π και αυτό δεν θα αναφέρεται.

Έστω $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$.

Ονομάζουμε **Σημειακή Πράξη (λ , θ)** στο Π την απεικόνιση f: Π Χ Π → Π κατά την οποία η εικόνα του ζεύγους (Α , Β) ∈ Π Χ Π είναι το σημείο Γ του Π το οποίο ορίζεται ως εξής:



Έστω Β′ το ομοιόθετο του Β με κέντρο το Α και λόγο λ (λ > 0 ή λ < 0 ή λ = 0), δηλ. $\overrightarrow{AB'} = \lambda.\overrightarrow{AB}$. Τότε το σημείο Γ είναι η στροφή του B′ με κέντρο το Α και γωνία στροφής θ (θ > 0 ή θ < 0 ή θ = 0).

Μια τέτοια πράξη θα συμβολίζεται με ∘ ή ∗.
Γράφουμε δηλαδή Α ∘ Β = Γ όπου ∘ = (λ , θ).
Είναι φανερό ότι η εικόνα του ζεύγους (Α , Β) είναι η ίδια και αν αντιστραφεί η σειρά των μετασχηματισμών (δηλ. εφαρμοστεί πρώτα η στροφή και κατόπιν η ομοιοθεσία).

Μια ειδική, αλλά χρήσιμη Σ.Π είναι η $\circ = (\frac{1}{2}, 0)$ κατά την οποία η εικόνα του ζεύγους (Α , Β) είναι το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ.

Ισχύει προφανώς **Α ∘ Α = Α** για κάθε σημείο Α του Π.

Ισχύουν τώρα οι παρακάτω δύο βασικές προτάσεις:
Αν $\circ = (\lambda, \theta)$ και $\ast = (\mu, \omega)$ είναι δύο Σ.Π, τότε

1) Α ∘ (Β ∗ Γ) = (Α ∘ Β) ∗ (Α ∘ Γ) και
(Β ∗ Γ) ∘ Α = (Β ∘ Α) ∗ (Γ ∘ Α) για τυχαία σημεία Α, Β, Γ

δηλαδή οποιαδήποτε Σ.Π είναι επιμεριστική ως προς οποιαδήποτε άλλη Σ.Π

2) (Α ∘ Β) ∗ (Γ ∘ Δ) = (Α ∗ Γ) ∘ (Β ∗ Δ) για τυχαία σημεία Α, Β, Γ, Δ

Μια γεωμετρική απόδειξη των παραπάνω προτάσεων θα απαιτούσε τη μελέτη πολλών περιπτώσεων (διάφοροι συνδυασμοί των λ και θ). Για τον λόγο αυτό θα δώσουμε μια αναλυτική απόδειξη (δηλ. με χρήση συντεταγμένων) η οποία καλύπτει όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

Είναι γνωστό ότι:

- Αν (x, y) είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου Α και (x′, y′) οι συντεταγμένες της εικόνας του κατά την ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή Ο του συστήματος των συντεταγμένων και λόγο λ, τότε:

  $x' = \lambda x$

  $y' = \lambda y$

  Αν το κέντρο ομοιοθεσίας είναι το $K(x_0, y_0)$, τότε οι παραπάνω τύποι ισχύουν ως εξής:

  $x' - x_0 = \lambda(x - x_0)$

  $y' - y_0 = \lambda(y - y_0)$

- Αν (x, y) είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου A και (x′, y′) οι συντεταγμένες της εικόνας του κατά την στροφή με κέντρο O και γωνία θ, τότε:

  $x' = x\,\text{συν}\theta - y\,\text{ημ}\theta$

  $y' = x\,\text{ημ}\theta + y\,\text{συν}\theta$

  Αν το κέντρο στροφής είναι το $K(x_0, y_0)$, τότε οι παραπάνω τύποι ισχύουν ως εξής:

  $x' - x_0 = (x - x_0)\text{συν}\theta - (y - y_0)\text{ημ}\theta$

  $y' - y_0 = (x - x_0)\text{ημ}\theta + (y - y_0)\text{συν}\theta$

- Αν τώρα A(x, y) ένα σημείο, A′ (x′, y′) η εικόνα του κατά την ομοιοθεσία με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και λόγο λ και A′′ (x′′, y′′) η εικόνα του A′ κατά τη στροφή με κέντρο το K και γωνία θ, θα έχουμε διαδοχικά:

  $x' - x_0 = \lambda(x - x_0)$

  $y' - y_0 = \lambda(y - y_0)$

  $x'' - x_0 = (x' - x_0)\text{συν}\theta - (y' - y_0)\text{ημ}\theta$

  $y'' - y_0 = (x' - x_0)\text{ημ}\theta + (y' - y_0)\text{συν}\theta$ ή

  $x'' - x_0 = \lambda(x - x_0)\text{συν}\theta - \lambda(y - y_0)\text{ημ}\theta$

  $y'' - y_0 = \lambda(x - x_0)\text{ημ}\theta + \lambda(y - y_0)\text{συν}\theta$

Θα εφαρμόσουμε τους τελευταίους τύπους για μια συνοπτική απόδειξη της πρώτης βασικής πρότασης: $A \circ (B * \Gamma) = (A \circ B) * (A \circ \Gamma)$

Ονομάζουμε $\Delta = B * \Gamma$, $E = A \circ \Delta$, $Z = A \circ B$, $H = A \circ \Gamma$, $\Theta = Z * H$

Σύμφωνα με τους παραπάνω τύπους θα είναι:

Δ: $x_\Delta - x_B = \mu(x_\Gamma - x_B)\,\text{συν}\omega - \mu(y_\Gamma - y_B)\,\text{ημ}\omega$
$y_\Delta - y_B = \mu(x_\Gamma - x_B)\,\text{ημ}\omega + \mu(y_\Gamma - y_B)\,\text{συν}\omega$

E: $x_E - x_A = \lambda(x_\Delta - x_A)\,\text{συν}\theta - \lambda(y_\Delta - y_A)\,\text{ημ}\theta$
$y_E - y_A = \lambda(x_\Delta - x_A)\,\text{ημ}\theta + \lambda(y_\Delta - y_A)\,\text{συν}\theta$

H: $x_H - x_A = \lambda(x_\Gamma - x_A)\,\text{συν}\theta - \lambda(y_\Gamma - y_A)\,\text{ημ}\theta$
$y_H - y_A = \lambda(x_\Gamma - x_A)\,\text{ημ}\theta + \lambda(y_\Gamma - y_A)\,\text{συν}\theta$

Θ: $x_\Theta - x_Z = \mu(x_H - x_Z)\,\text{συν}\omega - \mu(y_H - y_Z)\,\text{ημ}\omega$

$y_\Theta - y_Z = \mu(x_H - x_Z)$ ημω $+ \mu(y_H - y_Z)$ συνω

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει:
$x_E = x_A + \lambda(x_B - x_A)$ συνθ $- \lambda(y_B - y_A)$ ημθ $+\lambda\mu(x_\Gamma - x_B)$ συν(ω+θ)$- \lambda\mu(y_\Gamma - x_B)$ ημ(ω+θ)

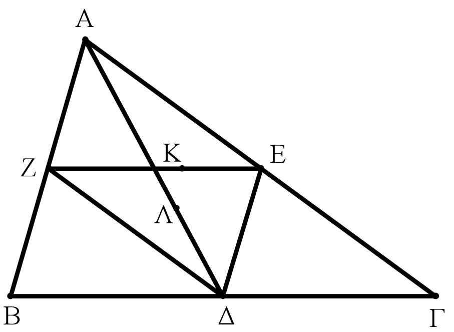
Όμοια βρίσκουμε ότι: $x_\Theta = x_E$ και $y_\Theta = y_E$
Επομένως $E \equiv \Theta$, δηλ. $A \circ (B * \Gamma) = (A \circ B) * (A \circ \Gamma)$

Με το ίδιο τρόπο αποδεικνύονται και οι άλλες προτάσεις.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ:

1) Το ευθ. τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

<u>**Απόδειξη**</u>
Έστω Δ , Ε , Ζ τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ αντίστοιχα.



Θ.δ.ο $ZE // = \frac{B\Gamma}{2}$

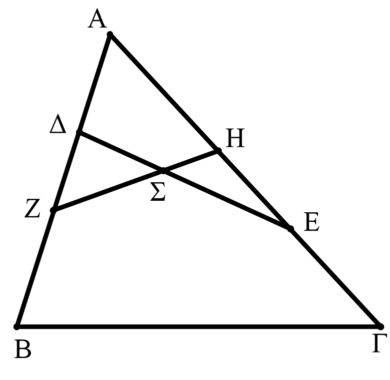
Έστω η Σ.Π $\circ = (\frac{1}{2}, 0)$

Ισχύει: $A \circ (B \circ \Gamma) = (A \circ B) \circ (A \circ \Gamma) \Rightarrow$

$A \circ \Delta = Z \circ E$ ή $\Lambda \equiv K$ όπου Λ το μέσο του ΑΔ και Κ το μέσο του ΖΕ.
Δηλαδή οι διαγώνιες του ΑΖΔΕ διχοτομούνται, άρα το ΑΖΔΕ είναι παραλληλόγραμμο και επομένως $ZE // = B\Delta$ ή $ZE // = \frac{B\Gamma}{2}$

2) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ , τα σημεία Δ και Ζ της πλευράς ΑΒ και τα σημεία Ε και Η της πλευράς ΑΓ τέτοια ώστε: $\frac{B\Delta}{BA} = \frac{AE}{A\Gamma} = \lambda$ και $\frac{BZ}{BA} = \frac{AH}{A\Gamma} = \mu$. Αν Σ είναι το σημείο τομής των ΔΕ και ΖΗ να αποδειχθεί ότι: $\frac{\Delta\Sigma}{\Delta E} = \mu$ και $\frac{Z\Sigma}{ZH} = \lambda$

<u>**Απόδειξη**</u>
Έστω οι Σ.Π $\circ = (\lambda, 0)$ και $* = (\mu, 0)$.
Εφαρμόζουμε τη σχέση
$(B \circ A) * (A \circ \Gamma) = (B * A) \circ (A * \Gamma)$ (1)
Είναι: $B \circ A = \Delta$, $A \circ \Gamma = E$, $B * A = Z$ και $A * \Gamma = H$
Η (1) λοιπόν γίνεται: $\Delta * E = Z \circ H$ (2)



Το $1^{ο}$ μέλος της (2) είναι το σημείο Σ της ΔΕ με $\frac{ΔΣ}{ΔΕ} = μ$ και το $2^{ο}$ μέλος είναι το σημείο Σ της ΖΗ με $\frac{ΖΣ}{ΖΗ} = λ$ και η πρόταση αποδείχθηκε.

3) Δίνεται τετράπλευρο (κυρτό ή μη) ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε , Ζ , Η , Θ των πλευρών του ΑΒ , ΒΓ , ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα, τέτοια ώστε:

$$\frac{ΑΕ}{ΑΒ} = \frac{ΔΗ}{ΔΓ} = λ \text{ και } \frac{ΑΘ}{ΑΔ} = \frac{ΒΖ}{ΒΓ} = μ$$

Αν Σ = ΕΗ ∩ ΘΖ, να αποδειχθεί ότι: $\frac{ΘΣ}{ΘΖ} = λ$ **και** $\frac{ΕΣ}{ΕΗ} = μ$

Απόδειξη

Έστω οι Σ.Π $\circ = (λ , 0)$ και $* = (μ , 0)$.

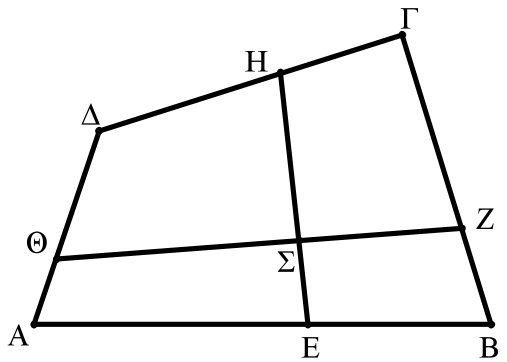
Εφαρμόζουμε τη σχέση

$(Α \circ Β) * (Δ \circ Γ) = (Α * Δ) \circ (Β * Γ)$ (1)

Είναι: $Α \circ Β = Ε$, $Δ \circ Γ = Η$, $Α * Δ = Θ$ και $Β * Γ = Ζ$

Η (1) λοιπόν γίνεται: $Ε * Η = Θ \circ Ζ$ (2)

Το $1^{ο}$ μέλος της (2) είναι το σημείο Σ της ΕΗ με $\frac{ΕΣ}{ΕΗ} = μ$ και το $2^{ο}$ μέλος είναι το σημείο Σ της ΘΖ με $\frac{ΘΣ}{ΘΖ} = λ$ και η πρόταση αποδείχθηκε.



4) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Εξωτερικά του κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ. Αν Κ , Λ και Μ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΔΕ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.

Απόδειξη

Έστω οι Σ.Π

$\circ = (\frac{1}{2}, 0)$ και $* = (1, \frac{π}{3})$

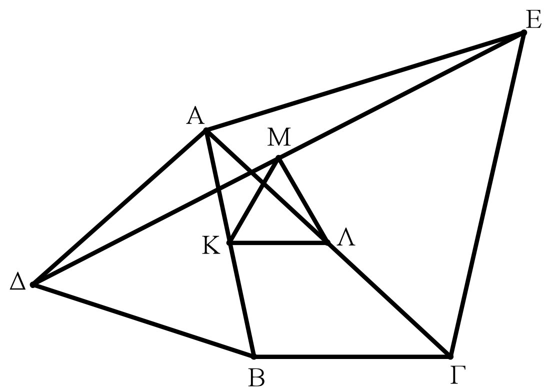
Εφαρμόζουμε τη σχέση:

$(Α \circ Β) * (Γ \circ Α) = (Α * Γ) \circ (Β * Α)$

Το $Α \circ Β$ είναι το μέσο Κ του ΑΒ και το $Γ \circ Α$ είναι το μέσο Λ του ΓΑ.

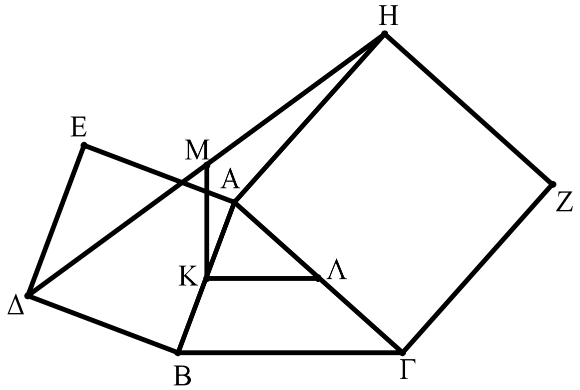
Το $Α * Γ$ είναι το σημείο Ε και το $Β * Α$ είναι το σημείο Δ.

Επομένως η προηγούμενη σχέση γράφεται $Κ * Λ = Ε \circ Δ$



Το $1^{ο}$ μέλος της τελευταίας είναι η τρίτη κορυφή του ισοπλεύρου τριγώνου με πλευρά την ΚΛ και το $2^{ο}$ μέλος είναι το μέσο Μ του τμήματος ΔΕ και η πρόταση αποδείχθηκε.

5) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Αν Κ, Λ και Μ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΔΗ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι η ΜΚ είναι κάθετη στην ΒΓ και ίση με το μισό της.



Απόδειξη

Έστω οι Σ.Π

$\circ = (\frac{1}{2}, 0)$ και $* = (1, \frac{\pi}{2})$

Εφαρμόζουμε τη σχέση:

$(Α \circ Β) * (Γ \circ Α) = (Α * Γ) \circ (Β * Α)$

Το $Α \circ Β$ είναι το μέσο Κ του ΑΒ και το $Γ \circ Α$ είναι το μέσο Λ του ΓΑ.

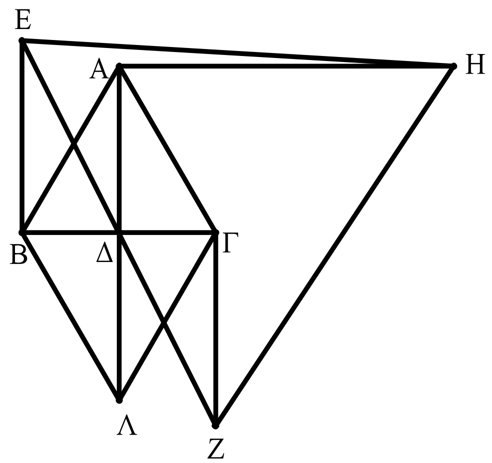
Το $Α * Γ$ είναι το σημείο Η και το $Β * Α$ είναι το σημείο Δ.

Επομένως η προηγούμενη σχέση γράφεται $Κ * Λ = Η \circ Δ$

Το 1ο μέλος της τελευταίας είναι το σημείο Μ τέτοιο ώστε $ΚΜ \perp = ΚΛ$ και το 2ο μέλος είναι το μέσο του τμήματος ΔΗ και η πρόταση αποδείχθηκε.

6) Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ. Φέρνουμε τις κάθετες στην ΒΓ στα σημεία Β και Γ όπως στο σχήμα και πάνω σ' αυτές παίρνουμε τμήματα ΒΕ = ΓΖ = ΒΓ. Φέρνουμε επίσης την κάθετη στην ΑΔ στο σημείο Α και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε τμήμα ΑΗ = 2ΑΔ όπως στο σχήμα. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΕΖΗ είναι ισόπλευρο.

Απόδειξη



Έστω οι Σ.Π $\circ = (1, \frac{\pi}{3})$ και $* = (1, \frac{\pi}{2})$

Έστω Λ το συμμετρικό του Α ως προς την ΒΓ.

Εφαρμόζουμε τη σχέση:

$(Β \circ Γ) * (Γ \circ Β) = (Β * Γ) \circ (Γ * Β)$

Το $Β \circ Γ$ είναι το σημείο Α και το $Γ \circ Β$ είναι το σημείο Λ.

Το $Β * Γ$ είναι το σημείο Ε και το $Γ * Β$ είναι το σημείο Ζ.

Επομένως η προηγούμενη σχέση γράφεται $Α * Λ = Ε \circ Ζ$

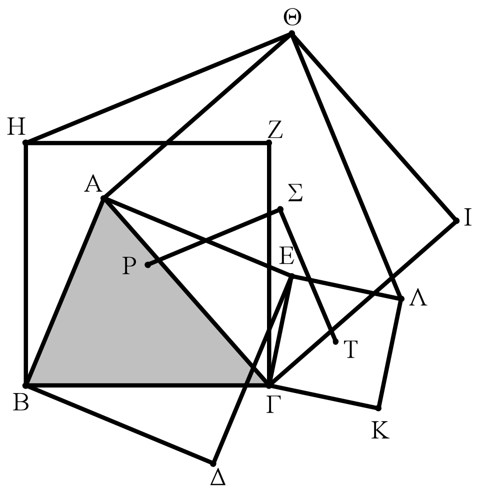
Το 1ο μέλος της τελευταίας είναι το σημείο Η και το 2ο μέλος είναι η κορυφή του ισοπλεύρου τριγώνου με πλευρά την ΕΖ και η πρόταση αποδείχθηκε.

7) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Κατασκευάζουμε τα τετράγωνα του σχήματος ΑΒΔΕ, ΒΓΖΗ, ΓΑΘΙ και ΕΓΚΛ.
Να αποδειχθεί ότι:
α) ΘΗ = ΘΛ και ΗΘΛ = 90^0
β) Αν Ρ, Σ, Τ είναι τα κέντρα των τετραγώνων ΒΓΖΗ, ΓΑΘΙ και ΕΓΚΛ, να αποδειχθεί ότι ΣΡ = ΣΤ και ΡΣΤ = 90^0

<u>Απόδειξη</u>

α) Είναι άμεση εφαρμογή της σχέσης
(Α ∘ Β) ∘ Γ = (Α ∘ Γ) ∘ (Β ∘ Γ)
με πράξη την $\circ = (1, \frac{\pi}{2})$

β) Εφαρμόζουμε τη σχέση
(Α ∘ Β) ∗ Γ = (Α ∗ Γ) ∘ (Β ∗ Γ) με πράξεις τις
$\circ = (1, \frac{\pi}{2})$ και $* = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$
Είναι: Α ∘ Β = Ε, άρα (Α ∘ Β) ∗ Γ = Ε ∗ Γ = Τ
και Α ∗ Γ = Σ, Β ∗ Γ = Ρ, άρα η προηγούμενη σχέση γράφεται:
Τ = Σ ∘ Ρ που αποδεικνύει την πρόταση.



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:
Η εργασία αυτή είναι (πιστεύουμε) νέα και γι αυτό δεν υπάρχουν βιβλιογραφικές αναφορές.