ΣΤΡΟΦΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Νίκος Ιωσηφίδης, Μαθηματικός – Φροντιστής, Βέροια

e-mail: iossifid@yahoo.gr

Στο άρθρο που ακολουθεί, όλα τα αναφερόμενα σημεία θα θεωρούμε ότι βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Ορισμοί:

1) Ονομάζουμε εικόνα του σημείου Α κατά τη στροφή με κέντρο Ο και γωνία θ $(\theta \in \mathbb{R})$ το σημείο A', τέτοιο ώστε: $(OA') = (OA)$ και $\widehat{AOA'} = \theta$

Αν $A \equiv O$, ορίζουμε ως εικόνα το ίδιο το σημείο Α.
Για να δηλώσουμε ότι το A' είναι εικόνα του Α κατά τη στροφή με κέντρο Ο κατά γωνία θ, γράφουμε $A' = A \circ (O,\theta)$.
Αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης για το κέντρο στροφής Ο, γράφουμε απλούστερα $A' = A \circ \theta$

2) Έστω το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και το σημείο Ο.
Ονομάζουμε εικόνα του $\overrightarrow{AB}$ κατά τη στροφή με κέντρο Ο και γωνία θ $(\theta \in \mathbb{R})$ το διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ τέτοιο ώστε $A' = A \circ (O,\theta)$ και $B' = B \circ (O,\theta)$.
Γράφουμε συμβολικά: $\overrightarrow{A'B'} = AB \circ (O,\theta)$

Θα αποδείξουμε τώρα ένα πολύ σημαντικό:

Θεώρημα:
Η εικόνα ενός διανύσματος σε μια στροφή είναι ανεξάρτητη του κέντρου στροφής.

Μια γεωμετρική απόδειξη θα ήταν εύκολη, αλλά θα απαιτούσε τη μελέτη πολλών περιπτώσεων (π.χ $\theta \in (0,\pi)$, $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\theta \in (\pi, 2\pi)$, $\theta > 2\pi$, $\theta < 0$, $O \equiv A$ και ένα σωρό άλλες. Για τον λόγο αυτό θα δώσουμε μια αναλυτική απόδειξη.
Θα βρούμε πρώτα τις σχέσεις που συνδέουν τις συντεταγμένες (x', y') της εικόνας A' ενός σημείου Α με τις συντεταγμένες (x, y) του σημείου Α σε μια στροφή με κέντρο την αρχή Ο των συντεταγμένων και γωνία στροφής θ.

Έστω $|\overrightarrow{OA}| = \rho$ και ω η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ με τον άξονα των x ($\omega \in [0, 2\pi)$), δηλ. $(\widehat{\overrightarrow{OA}, x'x}) = \omega$. Τότε:

$x = \rho\sigma\upsilon\nu\omega$ και $y = \rho\eta\mu\omega$ (1)

$x' = \rho\sigma\upsilon\nu(\omega+\theta) = \rho\sigma\upsilon\nu\omega\sigma\upsilon\nu\theta - \rho\eta\mu\omega\eta\mu\theta$ και

$y' = \rho\eta\mu(\omega+\theta) = \rho\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\theta + \rho\sigma\upsilon\nu\omega\eta\mu\theta$

και λόγω των (1):

$x' = x\sigma\upsilon\nu\theta - y\eta\mu\theta$

$y' = x\eta\mu\theta + y\sigma\upsilon\nu\theta$

Αν η στροφή γίνει γύρω από το σημείο $K(x_0, y_0)$ οι παραπάνω τύποι γίνονται:

$x' - x_0 = (x - x_0)\sigma\upsilon\nu\theta - (y - y_0)\eta\mu\theta$

$y' - y_0 = (x - x_0)\eta\mu\theta + (y - y_0)\sigma\upsilon\nu\theta$

Έστω τώρα το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.

Ονομάζουμε $\overrightarrow{A'B'}$ την εικόνα του $\overrightarrow{AB}$ με κέντρο την αρχή Ο των συντεταγμένων και $\overrightarrow{A''B''}$ την εικόνα του $\overrightarrow{AB}$ κατά τη στροφή με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και την ίδια γωνία στροφής θ.

Για τις συντεταγμένες των σημείων $A'(x_1', y_1')$, $B'(x_2', y_2')$, $A''(x_1'', y_1'')$, $B''(x_2'', y_2'')$ σύμφωνα με τα παραπάνω θα ισχύουν:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1\sigma\upsilon\nu\theta - y_1\eta\mu\theta \\ y_1' &= x_1\eta\mu\theta + y_1\sigma\upsilon\nu\theta \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} x_2' &= x_2\sigma\upsilon\nu\theta - y_2\eta\mu\theta \\ y_2' &= x_2\eta\mu\theta + y_2\sigma\upsilon\nu\theta \end{aligned} \quad \text{και}$$

$$\begin{aligned} x_1'' - x_0 &= (x_1 - x_0)\sigma\upsilon\nu\theta - (y_1 - y_0)\eta\mu\theta \\ y_1'' - y_0 &= (x_1 - x_0)\eta\mu\theta + (y_1 - y_0)\sigma\upsilon\nu\theta \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} x_2'' - x_0 &= (x_2 - x_0)\sigma\upsilon\nu\theta - (y_2 - y_0)\eta\mu\theta \\ y_2'' - y_0 &= (x_2 - x_0)\eta\mu\theta + (y_2 - y_0)\sigma\upsilon\nu\theta \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις αυτές με αφαιρέσεις κατά μέλη βρίσκουμε:

$\overrightarrow{A'B'} = (x_2' - x_1',\ y_2' - y_1') =$

$((x_2 - x_1)\sigma\upsilon\nu\theta - (y_2 - y_1)\eta\mu\theta,\ (x_2 - x_1)\eta\mu\theta + (y_2 - y_1)\sigma\upsilon\nu\theta)$

$\overrightarrow{A''B''} = (x_2'' - x_1'',\ y_2'' - y_1'') =$

$((x_2 - x_1)\sigma\upsilon\nu\theta - (y_2 - y_1)\eta\mu\theta,\ (x_2 - x_1)\eta\mu\theta + (y_2 - y_1)\sigma\upsilon\nu\theta)$

Επομένως $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A''B''}$, δηλαδή η εικόνα του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι ανεξάρτητη του κέντρου στροφής.

Μπορούμε επομένως αντί του συμβολισμού $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} \circ (O, \theta)$ για την εικόνα του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ να χρησιμοποιούμε τον απλούστερο συμβολισμό $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} \circ \theta$.

Για την αποφυγή πολλών παρενθέσεων επίσης θα συμφωνήσουμε να προηγούνται οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης διανυσμάτων από την πράξη της στροφής. Έτσι, αντί να γράφουμε $(\vec{\alpha} \circ \theta) + (\vec{\beta} \circ \theta)$ θα γράφουμε απλούστερα $\vec{\alpha} \circ \theta + \vec{\beta} \circ \theta$.

Παραθέτουμε ορισμένες ιδιότητες της στροφής διανύσματος στις οποίες θα στηριχθεί η λύση των ασκήσεων που θα παρουσιάσουμε εδώ.
Οι ιδιότητες αυτές είναι είτε άμεσες συνέπειες του ορισμού της στροφής διανύσματος, είτε αποδεικνύονται εύκολα (γεωμετρικά είτε αναλυτικά) και για οικονομία χώρου δεν θα τις παρουσιάσουμε.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΗΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα και θ μια γωνία.

1) $\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \vec{\boldsymbol{\beta}} \Leftrightarrow \vec{\boldsymbol{\alpha}} \circ \boldsymbol{\theta} = \vec{\boldsymbol{\beta}} \circ \boldsymbol{\theta}$

2) $|\vec{\boldsymbol{\alpha}} \circ \boldsymbol{\theta}| = |\vec{\boldsymbol{\alpha}}|$

3) Αν $\vec{\boldsymbol{\alpha}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, **τότε:** $\vec{\boldsymbol{\alpha}} \circ \boldsymbol{\theta} = \vec{\boldsymbol{\alpha}} \Leftrightarrow \boldsymbol{\theta} = \mathbf{2}\boldsymbol{\kappa\pi},\ \boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{Z}$

4) Αν $\vec{\boldsymbol{\alpha}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, **τότε:** $\vec{\boldsymbol{\alpha}} \circ \boldsymbol{\theta} = \overrightarrow{-\boldsymbol{\alpha}} \Leftrightarrow \boldsymbol{\theta} = \mathbf{2}\boldsymbol{\kappa\pi} + \boldsymbol{\pi},\ \boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{Z}$

5) $\vec{\boldsymbol{\alpha}} \circ \boldsymbol{\theta} = \vec{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \vec{\mathbf{0}}$

6) Αν $\boldsymbol{\theta} \neq \mathbf{2}\boldsymbol{\kappa\pi}\ (\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{Z})$ **τότε :** $\vec{\boldsymbol{\alpha}} \circ \boldsymbol{\theta} = \vec{\boldsymbol{\alpha}} \Leftrightarrow \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \vec{\mathbf{0}}$

7) $(\vec{\boldsymbol{\alpha}} + \vec{\boldsymbol{\beta}}) \circ \boldsymbol{\theta} = \vec{\boldsymbol{\alpha}} \circ \boldsymbol{\theta} + \vec{\boldsymbol{\beta}} \circ \boldsymbol{\theta}$

8) $(\vec{\boldsymbol{\alpha}} - \vec{\boldsymbol{\beta}}) \circ \boldsymbol{\theta} = \vec{\boldsymbol{\alpha}} \circ \boldsymbol{\theta} - \vec{\boldsymbol{\beta}} \circ \boldsymbol{\theta}$

Οι ιδιότητες 7 και 8 επεκτείνονται και για περισσότερους προσθετέους, δηλ. ισχύει:

9) $(\pm\overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}_1} \pm \overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}_2} \pm \cdots \pm \overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}_\nu}) \circ \boldsymbol{\theta} = \overrightarrow{\pm\boldsymbol{\alpha}_1} \circ \boldsymbol{\theta} \pm \overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}_2} \circ \boldsymbol{\theta} \pm \cdots \pm \overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}_\nu} \circ \boldsymbol{\theta}$

10) $(-\vec{\boldsymbol{\alpha}}) \circ \boldsymbol{\theta} = -(\vec{\boldsymbol{\alpha}} \circ \boldsymbol{\theta})$

Η ιδιότητα αυτή μας επιτρέπει να γράφουμε καθένα από τα παραπάνω σύμβολα με την απλούστερη γραφή $-\vec{\boldsymbol{\alpha}} \circ \boldsymbol{\theta}$

11) $(\boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{\alpha}}) \circ \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\lambda}(\vec{\boldsymbol{\alpha}} \circ \boldsymbol{\theta})$

Η ιδιότητα αυτή μας επιτρέπει να γράφουμε καθένα από τα παραπάνω σύμβολα με την απλούστερη γραφή $\boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{\alpha}} \circ \boldsymbol{\theta}$

12) $\vec{\boldsymbol{\alpha}} \circ \boldsymbol{\theta} + \vec{\boldsymbol{\alpha}} \circ (-\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{2}\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\theta})\vec{\boldsymbol{\alpha}}$

Η ιδιότητα αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όπως θα φανεί στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Ένα συνηθισμένο είδος ασκήσεων που μπορούν να αποδειχθούν με την βοήθεια των παραπάνω ιδιοτήτων είναι η απόδειξη ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι ίσα και σχηματίζουν συγκεκριμένη γωνία θ. Για την απόδειξη των ασκήσεων αυτών αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \circ \theta = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

Για την απόδειξη τέτοιων σχέσεων, εκφράζουμε το $\overrightarrow{AB}$ ως γραμμικό συνδυασμό άλλων διανυσμάτων των οποίων γνωρίζουμε τις εικόνες κατά τη στροφή κατά θ και προσπαθούμε να δημιουργήσουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Γράφουμε π.χ $\overrightarrow{AB}\circ\theta=(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2-\vec{\alpha}_3)\circ\theta=\vec{\alpha}_1\circ\theta+\vec{\alpha}_2\circ\theta-\vec{\alpha}_3\circ\theta$

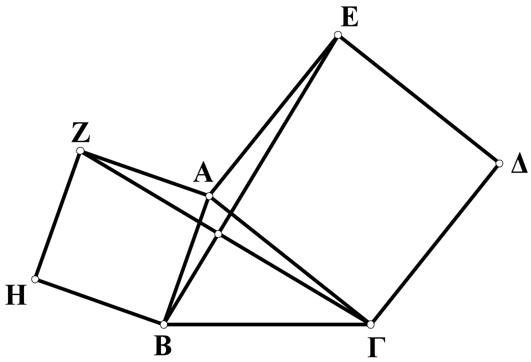
Αν κάποιο από τα διανύσματα του $2^{ου}$ μέλους δεν είναι ένα κατάλληλο διάνυσμα, το αντικαθιστούμε με το ίσο του από τον τύπο $\vec{\alpha}\circ\theta+\vec{\alpha}\circ(-\theta)=(2\sigma\upsilon\nu\theta)\vec{\alpha}$ αν βέβαια το διάνυσμα $\vec{\alpha}\circ(-\theta)$ είναι καταλληλότερο.

Παραδείγματα

1) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα τετράγωνα ΑΒΗΖ και ΑΓΔΕ προς το εξωτερικό του. Να αποδειχθεί ότι ΒΕ = ΓΖ και ΒΕ ⊥ ΓΖ

Απόδειξη

Αρκεί να δειχθεί ότι $\overrightarrow{Z\Gamma}\circ\frac{\pi}{2}=\overrightarrow{BE}$



Πράγματι:

$\overrightarrow{Z\Gamma}\circ\frac{\pi}{2}=(\overrightarrow{ZA}+\overrightarrow{A\Gamma})\circ\frac{\pi}{2}=$

$\overrightarrow{ZA}\circ\frac{\pi}{2}+\overrightarrow{A\Gamma}\circ\frac{\pi}{2}=\overrightarrow{HB}\circ\frac{\pi}{2}+\overrightarrow{AE}=$

$\overrightarrow{HZ}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BE}$

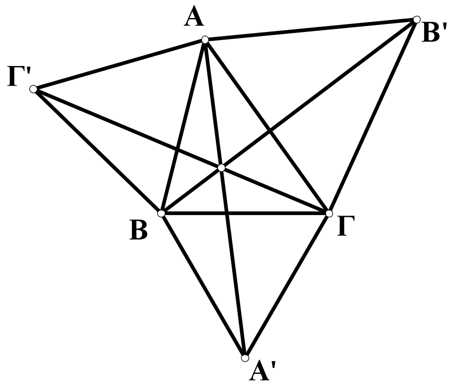
2) Εξωτερικά τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $B\Gamma A'$, $\Gamma AB'$, $AB\Gamma'$.

α) Να αποδειχθεί ότι τα ευθ. τμήματα AA', BB', $\Gamma\Gamma'$ είναι ίσα και σχηματίζουν ανά δύο γωνία 60^0.

β) $\overrightarrow{A\Gamma'}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{\Gamma B'}=\vec{0}$

Απόδειξη:

α) Αρκεί να δειχθεί ότι $\overrightarrow{AA'}\circ\frac{\pi}{3}=\overrightarrow{\Gamma'\Gamma}$



Πράγματι:

$\overrightarrow{AA'}\circ\frac{\pi}{3}=(\overrightarrow{BA'}-\overrightarrow{BA})\circ\frac{\pi}{3}=$

$\overrightarrow{BA'}\circ\frac{\pi}{3}-\overrightarrow{BA}\circ\frac{\pi}{3}=\overrightarrow{B\Gamma}-\overrightarrow{B\Gamma'}=\overrightarrow{\Gamma'\Gamma}$

β) Είναι:

$\overrightarrow{A\Gamma'}=\overrightarrow{AB}\circ(-\frac{\pi}{3})$

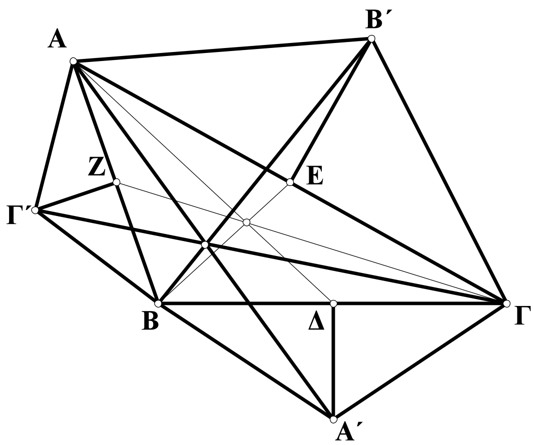
$\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{B\Gamma}\circ(-\frac{\pi}{3})$

$$\overrightarrow{\Gamma B'} = \overrightarrow{\Gamma A} \circ (-\frac{\pi}{3})$$

Άρα $\overrightarrow{A\Gamma'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{\Gamma B'} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma A}) \circ (-\frac{\pi}{3}) = \vec{0} \circ (-\frac{\pi}{3}) = \vec{0}$

3) Εξωτερικά τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα όμοια ισοσκελή τρίγωνα $A'B\Gamma$, $B'\Gamma A$ και $\Gamma'AB$ με βάσεις τις πλευρές του τριγώνου. Να αποδειχθεί ότι τα τμήματα AA', BB', $\Gamma\Gamma'$ είναι πλευρές τριγώνου.

Απόδειξη:



Επειδή τα διανύσματα $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{\Gamma\Gamma'}$ δεν είναι συγγραμμικά αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma'} = \vec{0}$.
Επειδή το τρίγωνο $A'B\Gamma$ είναι ισοσκελές, η κορυφή A' βρίσκεται στη μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ.

Έστω $\frac{\Delta A'}{\Delta B} = \lambda \Rightarrow \Delta A' = \lambda \cdot \Delta B \Rightarrow$

$\overrightarrow{\Delta A'} = \lambda \cdot \overrightarrow{\Delta B} \circ \frac{\pi}{2} = \mu \cdot \overrightarrow{\Gamma B} \circ \frac{\pi}{2}$ όπου $\mu = \frac{\lambda}{2}$

Άρα: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta A'}$ ή

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A\Delta} + \mu \cdot \overrightarrow{\Gamma B} \circ \frac{\pi}{2}$$

Όμοια (βλ. σχήμα) είναι:

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BE} + \mu \cdot \overrightarrow{A\Gamma} \circ \frac{\pi}{2}$$

$$\overrightarrow{\Gamma\Gamma'} = \overrightarrow{\Gamma Z} + \mu \cdot \overrightarrow{BA} \circ \frac{\pi}{2}$$

Ο αριθμός μ είναι και για τις τρεις σχέσεις ο ίδιος λόγω της ομοιότητας των τριγώνων $A'B\Gamma$, $B'\Gamma A$ και $\Gamma'AB$
Με πρόσθεση κατά μέλη βρίσκουμε:

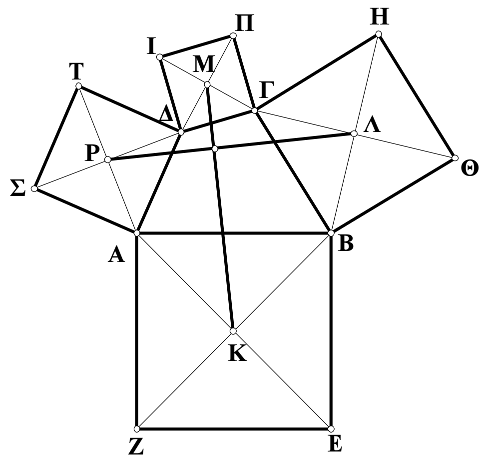
$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma'} = (\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{\Gamma Z}) + \mu \cdot (\overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{BA}) \circ \frac{\pi}{2} \qquad (1)$$

Όμως: $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{\Gamma Z} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Gamma}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{\Gamma B}) = \vec{0}$

Άρα η (1) γίνεται: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma'} = \vec{0}$ που σημαίνει ότι τα τμήματα AA', BB', $\Gamma\Gamma'$ είναι πλευρές τριγώνου.

4) Εξωτερικά τετραπλεύρου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε τα τετράγωνα του σχήματος. Αν Κ, Λ, Μ, Ρ είναι τα κέντρα των τετραγώνων αυτών να αποδειχθεί ότι τα τμήματα ΚΜ και ΛΡ είναι ίσα και κάθετα.

Απόδειξη:



Αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\overrightarrow{\mathrm{P\Lambda}}\circ\frac{\pi}{2}=\overrightarrow{\mathrm{KM}}$ ή

ισοδύναμα ότι: $2\cdot\overrightarrow{\mathrm{P\Lambda}}\circ\frac{\pi}{2}=2\cdot\overrightarrow{\mathrm{KM}}$

Πράγματι, είναι:

$$2\cdot\overrightarrow{\mathrm{P\Lambda}}=\overrightarrow{\mathrm{P\Lambda}}+\overrightarrow{\mathrm{P\Lambda}}=$$
$$(\overrightarrow{\mathrm{P\Delta}}+\overrightarrow{\mathrm{\Delta M}}+\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}+\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Lambda}})+$$
$$(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{AK}}+\overrightarrow{\mathrm{KB}}+\overrightarrow{\mathrm{B\Lambda}})$$

Άρα: $2\cdot\overrightarrow{\mathrm{P\Lambda}}\circ\frac{\pi}{2}=$

$$(\overrightarrow{\mathrm{P\Delta}}\circ\frac{\pi}{2}+\overrightarrow{\mathrm{\Delta M}}\circ\frac{\pi}{2}+\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}\circ\frac{\pi}{2}+\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Lambda}}\circ\frac{\pi}{2})+$$
$$(\overrightarrow{\mathrm{PA}}\circ\frac{\pi}{2}+\overrightarrow{\mathrm{AK}}\circ\frac{\pi}{2}+\overrightarrow{\mathrm{KB}}\circ\frac{\pi}{2}+\overrightarrow{\mathrm{B\Lambda}}\circ\frac{\pi}{2})\qquad(1)$$

Στη σχέση αυτή, όπου κάποιο διάνυσμα της μορφής $\vec{\alpha}\circ\frac{\pi}{2}$ δεν είναι διάνυσμα του σχήματος, γράφουμε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ως $-\vec{\beta}$, ώστε το διάνυσμα $\vec{\beta}\circ\frac{\pi}{2}$ να είναι διάνυσμα του σχήματος. Αντικαθιστούμε τα διανύσματα που είναι πιο μακριά από το ΑΒΓΔ με άλλα που είναι πιο κοντά στο ΑΒΓΔ προσπαθώντας να δημιουργήσουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{KM}}$.

Είναι λοιπόν:

$$\overrightarrow{\mathrm{P\Delta}}\circ\frac{\pi}{2}=\overrightarrow{\mathrm{PT}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{\Delta M}}\circ\frac{\pi}{2}=-\overrightarrow{\mathrm{M\Delta}}\circ\frac{\pi}{2}=-\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}=\overrightarrow{\mathrm{\Gamma M}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}\circ\frac{\pi}{2}=\overrightarrow{\mathrm{M\Pi}}=\overrightarrow{\mathrm{\Delta M}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Lambda}}\circ\frac{\pi}{2}=-\overrightarrow{\mathrm{\Lambda\Gamma}}\circ\frac{\pi}{2}=-\overrightarrow{\mathrm{\Lambda B}}=\overrightarrow{\mathrm{B\Lambda}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\circ\frac{\pi}{2}=\overrightarrow{\mathrm{P\Delta}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}}\circ\frac{\pi}{2}=-\overrightarrow{\mathrm{KA}}\circ\frac{\pi}{2}=-\overrightarrow{\mathrm{KZ}}=\overrightarrow{\mathrm{KB}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{KB}}\circ\frac{\pi}{2}=\overrightarrow{\mathrm{KA}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{B\Lambda}}\circ\frac{\pi}{2}=-\overrightarrow{\mathrm{\Lambda B}}\circ\frac{\pi}{2}=-\overrightarrow{\mathrm{\Lambda\Theta}}=\overrightarrow{\mathrm{\Lambda\Gamma}}$$

Επομένως η (1) γίνεται:

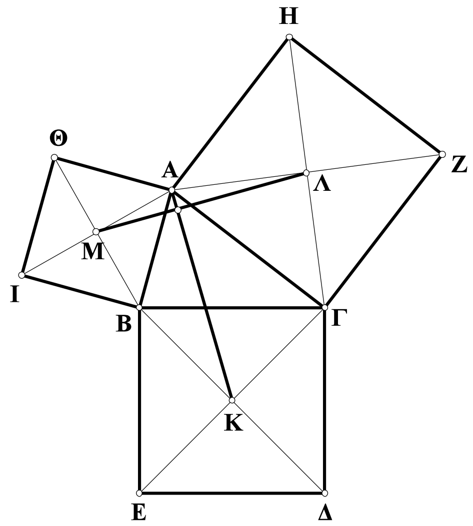
$$2\cdot\overrightarrow{\mathrm{P\Lambda}}\circ\frac{\pi}{2}=(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{\Gamma M}}+\overrightarrow{\mathrm{\Delta M}}+\overrightarrow{\mathrm{B\Lambda}})+(\overrightarrow{\mathrm{P\Delta}}+\overrightarrow{\mathrm{KB}}+\overrightarrow{\mathrm{KA}}+\overrightarrow{\mathrm{\Lambda\Gamma}})=$$

$(\overrightarrow{\mathrm{KB}}+\overrightarrow{\mathrm{B\Lambda}}+\overrightarrow{\mathrm{\Lambda\Gamma}}+\overrightarrow{\mathrm{\Gamma M}})+(\overrightarrow{\mathrm{KA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{P\Delta}}+\overrightarrow{\mathrm{\Delta M}})=\overrightarrow{\mathrm{KM}}+\overrightarrow{\mathrm{KM}}=2\cdot\overrightarrow{\mathrm{KM}}$ και η πρόταση αποδείχθηκε.

Από την παραπάνω απόδειξη προκύπτει ότι δεν είναι απαραίτητο να είναι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ κυρτό. Η ίδια πρόταση ισχύει και σε μη κυρτό τετράπλευρο. Επίσης με όμοια απόδειξη προκύπτει ότι η πρόταση ισχύει και στην περίπτωση που τα τετράγωνα κατασκευάζονται προς το εσωτερικό του τετραπλεύρου.

5) Εξωτερικά τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΒΓΔΕ, ΑΓΖΗ και ΑΒΙΘ. Αν Κ, Λ, Μ είναι τα κέντρα των τετραγώνων αυτών αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι τα τμήματα ΑΚ και ΛΜ είναι ίσα και κάθετα.[1]

Η πρόταση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ειδική περίπτωση της προηγούμενης πρότασης θεωρώντας ότι οι κορυφές Α και Δ του τετραπλεύρου ταυτίζονται.
Μπορεί όμως να αποδειχθεί με τον ίδιο τρόπο με την προηγούμενη άσκηση.



6) Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ με κέντρα Κ και Λ αντίστοιχα. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Απόδειξη:

Αρκεί να δειχθεί ότι $\overrightarrow{\mathrm{M\Lambda}}\circ\frac{\pi}{2}=\overrightarrow{\mathrm{MK}}$

Πράγματι:

$$\overrightarrow{\mathrm{M\Lambda}}\circ\frac{\pi}{2}=(\overrightarrow{\mathrm{A\Lambda}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}})\circ\frac{\pi}{2}=(\overrightarrow{\mathrm{A\Lambda}}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}))\circ\frac{\pi}{2}=$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Lambda}}\circ\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\circ\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\circ\frac{\pi}{2}\qquad(1)$$

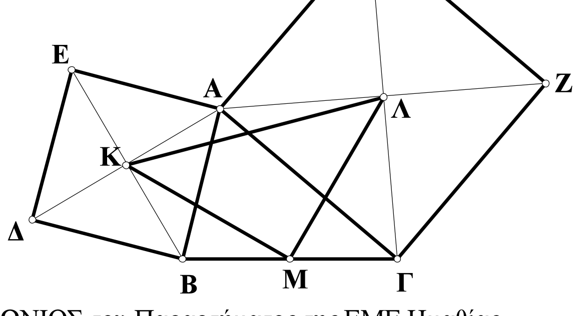
Είναι:

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Lambda}}\circ\frac{\pi}{2}=-\overrightarrow{\mathrm{\Lambda A}}\circ\frac{\pi}{2}=-\overrightarrow{\mathrm{\Lambda\Gamma}}=\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Lambda}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{\Gamma H}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\circ\frac{\pi}{2}=-\overrightarrow{\mathrm{BA}}\circ\frac{\pi}{2}=-\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}=-\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\circ\frac{\pi}{2}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}$$

Η (1) επομένως γίνεται:



[1] Η άσκηση αυτή προτείνεται στο περιοδικό ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ του Παραρτήματος της ΕΜΕ Ημαθίας στο 6ο τεύχος. Είναι η άσκηση Α82 στη σελ. 116.

$$\overrightarrow{\text{ΜΛ}} \circ \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{ΓΗ}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{ΑΕ}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{ΑΗ}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\text{ΓΗ}} + (\overrightarrow{\text{ΑΕ}} - \overrightarrow{\text{ΑΗ}})) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\text{ΓΗ}} + \overrightarrow{\text{ΗΕ}}) =$$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{ΓΕ}} = \overrightarrow{\text{ΜΚ}}$ διότι τα Μ και Κ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΒΕ του τριγώνου ΒΓΕ. Η τελευταία σχέση αποδεικνύει το ζητούμενο.

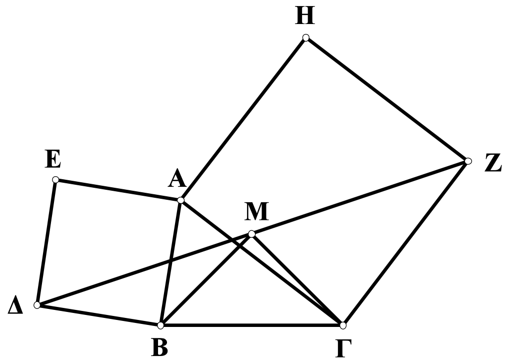
7) Εξωτερικά των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Αν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΔΖ, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Απόδειξη:

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\overrightarrow{\text{ΜΒ}} \circ \frac{\pi}{2} = \overrightarrow{\text{ΜΓ}}$$

Πράγματι:



$$\overrightarrow{\text{ΜΒ}} \circ \frac{\pi}{2} = -\overrightarrow{\text{ΒΜ}} \circ \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{\text{ΒΔ}} + \overrightarrow{\text{ΒΖ}}) \circ \frac{\pi}{2} =$$

$$-\frac{1}{2}(\overrightarrow{\text{ΒΔ}} + \overrightarrow{\text{ΒΑ}} + \overrightarrow{\text{ΑΓ}} + \overrightarrow{\text{ΓΖ}}) \circ \frac{\pi}{2} =$$

$$-\frac{1}{2}(\overrightarrow{\text{ΑΕ}} \circ \frac{\pi}{2} + \overrightarrow{\text{ΒΑ}} \circ \frac{\pi}{2} + \overrightarrow{\text{ΑΓ}} \circ \frac{\pi}{2} + \overrightarrow{\text{ΓΖ}} \circ \frac{\pi}{2}) =$$

$$-\frac{1}{2}(\overrightarrow{\text{ΑΒ}} + \overrightarrow{\text{ΒΔ}} + \overrightarrow{\text{ΑΗ}} + \overrightarrow{\text{ΓΑ}}) = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{\text{ΓΒ}} + \overrightarrow{\text{ΒΔ}} + \overrightarrow{\text{ΓΖ}}) = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{\text{ΓΔ}} + \overrightarrow{\text{ΓΖ}}) =$$

$$= -\frac{1}{2}(2\overrightarrow{\text{ΓΜ}}) = -\overrightarrow{\text{ΓΜ}} = \overrightarrow{\text{ΜΓ}}$$

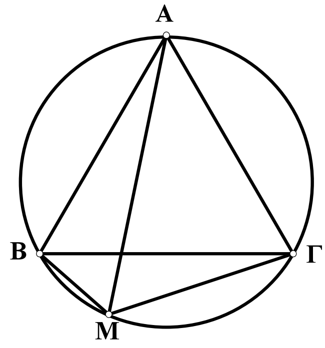
8) Ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Αν Μ είναι σημείο του κυρτογώνιου τόξου $\overset{\frown}{\text{ΒΓ}}$, να αποδειχθεί ότι $\text{ΜΑ} = \text{ΜΒ} + \text{ΜΓ}$

Απόδειξη:

Μια σύντομη γεωμετρική απόδειξη της μπορεί να γίνει εύκολα με το θεώρημα του Πτολεμαίου. Μια άλλη απόδειξη μπορεί να γίνει παίρνοντας πάνω στη ΜΑ τμήμα $\text{ΜΔ} = \text{ΜΒ}$ και αποδεικνύοντας ότι $\text{ΔΒ} = \text{ΜΓ}$.

Δίνουμε εδώ μια απόδειξη με τη βοήθεια της στροφής διανύσματος.

Τα διανύσματα $\overrightarrow{\text{ΜΒ}} \circ (-\frac{\pi}{3})$ και $\overrightarrow{\text{ΜΓ}} \circ \frac{\pi}{3}$ είναι ομόρροπα με το $\overrightarrow{\text{ΜΑ}}$ διότι $\widehat{\text{ΒΜΑ}} = \widehat{\text{ΓΜΑ}} = \frac{\pi}{3}$



Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι:

$$\overrightarrow{\text{ΜΒ}} \circ (-\frac{\pi}{3}) + \overrightarrow{\text{ΜΓ}} \circ \frac{\pi}{3} = \overrightarrow{\text{ΜΑ}}$$

Πράγματι:

$\overrightarrow{\mathrm{MB}}\circ(-\frac{\pi}{3})=(\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}})\circ(-\frac{\pi}{3})=\overrightarrow{\mathrm{MA}}\circ(-\frac{\pi}{3})+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\circ(-\frac{\pi}{3})=$

$\overrightarrow{\mathrm{MA}}\circ(-\frac{\pi}{3})-\overrightarrow{\mathrm{BA}}\circ(-\frac{\pi}{3})=\overrightarrow{\mathrm{MA}}\circ(-\frac{\pi}{3})-\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$ και

$\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}\circ\frac{\pi}{3}=(\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}})\circ\frac{\pi}{3}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}\circ\frac{\pi}{3}+\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\circ\frac{\pi}{3}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}\circ\frac{\pi}{3}-\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}\circ\frac{\pi}{3}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}\circ\frac{\pi}{3}-\overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}$

Άρα:

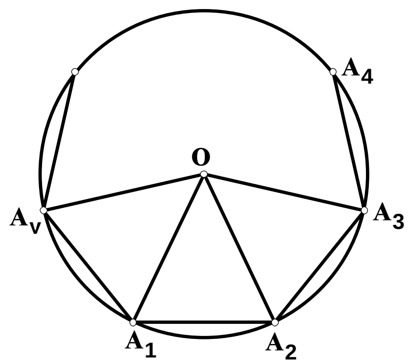
$\overrightarrow{\mathrm{MB}}\circ(-\frac{\pi}{3})+\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}\circ\frac{\pi}{3}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}\circ(-\frac{\pi}{3})-\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}}\circ\frac{\pi}{3}-\overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}\circ(-\frac{\pi}{3})+\overrightarrow{\mathrm{MA}}\circ\frac{\pi}{3}=$

$(2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3})\overrightarrow{\mathrm{MA}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ και η πρόταση αποδείχθηκε.

9) Δίνεται κανονικό πολύγωνο $\mathrm{A_1A_2\cdots A_\nu}$ με κέντρο Ο. Να αποδειχθεί ότι:
$\overrightarrow{\mathbf{OA_1}}+\overrightarrow{\mathbf{OA_2}}+\cdots+\overrightarrow{\mathbf{OA_\nu}}=\vec{\mathbf{0}}$

Απόδειξη:
Στην περίπτωση που ν = άρτιος, η απόδειξη είναι πολύ απλή, επειδή τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{OA_1}},\overrightarrow{\mathrm{OA_2}},\cdots,\overrightarrow{\mathrm{OA_\nu}}$ είναι ανά δύο αντίθετα. Πιο δύσκολη είναι η απόδειξη όταν ν = περιττός.
Δίνουμε εδώ μια απόδειξη με τη βοήθεια της στροφής διανύσματος που δεν χρειάζεται τη διάκριση των περιπτώσεων ν = άρτιος ή ν = περιττός.

Έστω θ η κεντρική γωνία του πολυγώνου.
Ονομάζουμε $\vec{\alpha}=\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}+\cdots+\overrightarrow{\mathrm{OA_\nu}}$
Επομένως:
$\vec{\alpha}\circ\theta=(\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}+\cdots+\overrightarrow{\mathrm{OA_\nu}})\circ\theta=$
$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\circ\theta+\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}\circ\theta+\cdots+\overrightarrow{\mathrm{OA_\nu}}\circ\theta=$
$\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}\cdots+\overrightarrow{\mathrm{OA_\nu}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}=\vec{\alpha}$
Δηλαδή $\vec{\alpha}\circ\theta=\vec{\alpha}$, άρα $\vec{\alpha}=\vec{0}$



10) Δίνονται κατά σειρά τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ενός κύκλου τέτοια ώστε $\overparen{\mathbf{AB}}=\overparen{\mathbf{\Gamma\Delta}}=\overparen{\mathbf{EZ}}=60^0$. Αν Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των χορδών ΒΓ, ΔΕ και ΖΑ να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.

Απόδειξη:
Τονίζουμε ότι η διάταξη των σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ πάνω στον κύκλο δεν είναι υποχρεωτικά αυτή του σχήματος (της εκφώνησης).
Η απόδειξη που ακολουθεί δεν χρειάζεται την διάταξη αυτή και είναι σωστή με οποιαδήποτε διάταξη των σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ πάνω στον κύκλο.
Μπορείτε να δείτε διάφορες γεωμετρικές λύσεις στα τεύχη του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ

Μια λύση με στροφή διανύσματος μπορείτε επίσης να βρείτε στο τεύχος 1, σελ. 70 από τον Νίκο Δεργιαδέ.
Μπορείτε να δείτε ακόμη 3 γεωμετρικές αποδείξεις:
Στο τεύχος 1, σελ. 72 από τον γράφοντα.
Στο τεύχος 2, σελ. 112 από τον Ν. Κυριαζή
Στο τεύχος 2, σελ. 116 από τον Θ. Χρυσοστομίδη

Εδώ θα δώσουμε μια διαφορετική λύση με στροφή διανύσματος που στηρίζεται στην ιδιότητα $\vec{\alpha}\circ\theta+\vec{\alpha}\circ(-\theta)=(2\sigma\upsilon\nu\theta)\vec{\alpha}$ (1)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\overrightarrow{\Lambda M}\circ\frac{\pi}{3}=\overrightarrow{\Lambda K}$$

Θα εκφράσουμε το $\overrightarrow{\Lambda M}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{O\Delta}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OZ}$.

Κατόπιν θα αντικαταστήσουμε τα διανύσματα της μορφής $\vec{\alpha}\circ\frac{\pi}{3}$ που θα προκύψουν με διανύσματα του σχήματος. Αν κάποιο διάνυσμα από αυτά δεν είναι διάνυσμα του σχήματος, θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (1) ώστε το διάνυσμα της μορφής $\vec{\alpha}\circ(-\frac{\pi}{3})$ που θα προκύψει να είναι διάνυσμα του σχήματος.

Έχουμε λοιπόν:

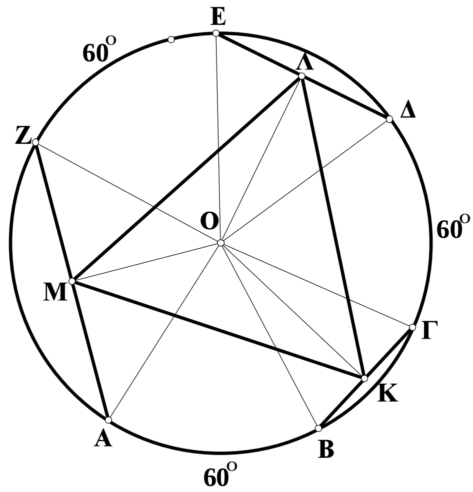
$$\overrightarrow{\Lambda M}\circ\frac{\pi}{3}=(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{O\Lambda})\circ\frac{\pi}{3}=$$

$$\overrightarrow{OM}\circ\frac{\pi}{3}-\overrightarrow{O\Lambda}\circ\frac{\pi}{3}=$$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OZ})\circ\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{O\Delta}+\overrightarrow{OE})\circ\frac{\pi}{3}=$$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}\circ\frac{\pi}{3}+\overrightarrow{OZ}\circ\frac{\pi}{3}-\overrightarrow{O\Delta}\circ\frac{\pi}{3}-\overrightarrow{OE}\circ\frac{\pi}{3})$$

(1)



Όμως:

$$\overrightarrow{OA}\circ\frac{\pi}{3}=\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OZ}\circ\frac{\pi}{3}=(2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3})\overrightarrow{OZ}-\overrightarrow{OZ}\circ(-\frac{\pi}{3})=\overrightarrow{OZ}-\overrightarrow{OE}$$

$$\overrightarrow{O\Delta}\circ\frac{\pi}{3}=(2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3})\overrightarrow{O\Delta}-\overrightarrow{O\Delta}\circ(-\frac{\pi}{3})=\overrightarrow{O\Delta}-\overrightarrow{O\Gamma}$$

$$\overrightarrow{OE}\circ\frac{\pi}{3}=\overrightarrow{OZ}$$

Η (1) λοιπόν γίνεται:

$$\overrightarrow{\Lambda M}\circ\frac{\pi}{3}=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OZ}-\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{O\Delta}+\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OZ})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{O\Delta}+\overrightarrow{OE})=$$

$$\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{O\Lambda}=\overrightarrow{\Lambda K}$$

Η σχέση $\overrightarrow{\Lambda M}\circ\frac{\pi}{3}=\overrightarrow{\Lambda K}$ αποδεικνύει ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.