ΠΛΕΓΜΑΤΑ

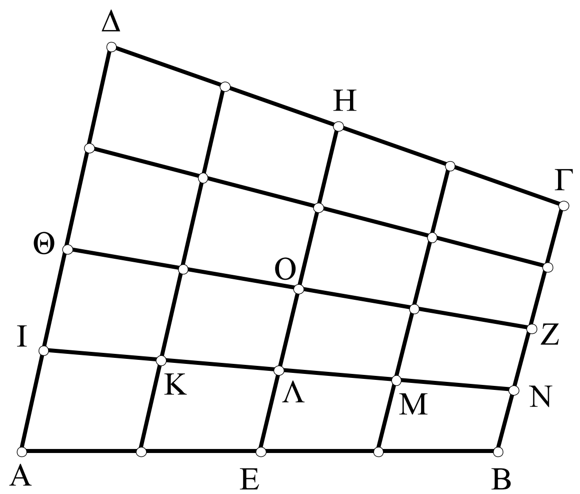
Νικ. Ιωσηφίδης, Μαθηματικός – Φροντιστής, ΒΕΡΟΙΑ

e-mail: iossifid@yahoo.gr

Ιστορικό

Παρουσιάζουμε παρακάτω ένα σημαντικό θεώρημα με πολλές εφαρμογές. Στην «ανακάλυψη» του θεωρήματος μας οδήγησε τυχαία μια οπτική παρατήρηση.

Συνδέουμε τα μέσα των απέναντι πλευρών ενός κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (σχ. 1). Το τετράπλευρο χωρίζεται έτσι σε 4 τετράπλευρα. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στα 4 νέα τετράπλευρα. Δημιουργείται έτσι το παρακάτω σχήμα.



Σχ. 1

Παρατηρούμε (οπτικά) ότι τα σημεία Ι, Κ, Λ, Μ, Ν είναι συνευθειακά. Γνωρίζουμε ότι τα ευθ. τμήματα που συνδέουν τα μέσα των απέναντι πλευρών τετραπλεύρου διχοτομούνται. Έτσι ισχύει: ΙΚ = ΚΛ = ΛΜ = ΜΝ. Δηλαδή αν διαιρέσουμε τις πλευρές ενός τετραπλεύρου σε 4 ίσα μέρη και συνδέσουμε τα αντίστοιχα σημεία, τα ευθ. τμήματα που συνδέουν τα σημεία των διαιρέσεων διαιρούνται σε 4 ίσα μέρη.

Η πρόταση αυτή που αποτελεί τη βάση για την παρακάτω εργασία ισχύει γενικότερα.

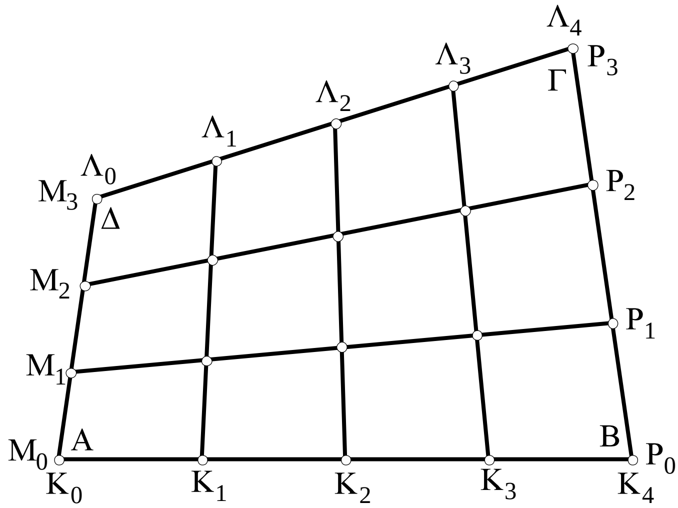
Η εργασία αυτή ασχολείται με την παραπάνω πρόταση στην γενική της μορφή και τις πάμπολλες εφαρμογές της. Εδώ περιοριστήκαμε στις πιο βασικές από αυτές.
Πριν την ανάπτυξη της θεωρίας, παραθέτουμε έναν πίνακα με τις συντομογραφίες που θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα.

ΣΥΜΒΟΛΟ	ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ
ΑΒΓΔ(ν x κ)	**Πλέγμα ν x κ με οριζόντια την ΑΒ και κατακόρυφη την ΑΔ**
ν - λωρίδα	**Πλέγμα ν x 1 (ή το ίδιο 1 x ν)**
/σχ/	**Σχεδόν παράλληλη, ες**
στ4	**Στοιχειώδη τετράπλευρα**
στ3	**Στοιχειώδη τρίγωνα**
ορ.λ	**Οριζόντια λωρίδα**
κατ.λ	**Κατακόρυφη λωρίδα**
Λ1, Λ2, …	**Λήμμα 1, Λήμμα 2, …**
Π1, Π2, …	**Πρόταση (θεώρημα) 1, Πρόταση 2, …**
δ.στ4	**Διαδοχικά στοιχειώδη τετράπλευρα**
δ.στ3	**Διαδοχικά στοιχειώδη τρίγωνα**
κ.δ	**Κύρια διαγώνιος**
δ.δ	**Δευτερεύουσα διαγώνιος**
ΠΠ	**Περιγεγραμμένο πλαίσιο**

Έστω το κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ (σχ. 2) [1]. Διαιρούμε τις απέναντι πλευρές ΑΒ και ΓΔ σε 4 ίσα μέρη με τα σημεία $Κ_0 \equiv Α$, $Κ_1$, $Κ_2$, $Κ_3$, $Κ_4 \equiv Β$ της ΑΒ και
$Λ_0 \equiv Δ$, $Λ_1$, $Λ_2$, $Λ_3$, $Λ_4 \equiv Γ$ της ΔΓ. Διαιρούμε επίσης τις πλευρές ΑΔ και ΒΓ σε 3 ίσα μέρη με τα σημεία $Μ_0 \equiv Α$, $Μ_1$, $Μ_2$, $Μ_3 \equiv Δ$ της ΑΔ και $Ρ_0 \equiv Β$, $Ρ_1$, $Ρ_2$, $Ρ_3 \equiv Γ$ της ΒΓ. Ενώνουμε τα αντίστοιχα σημεία, δηλαδή φέρνουμε τα ευθ. τμήματα $Κ_1Λ_1$, $Κ_2Λ_2$, $Κ_3Λ_3$, $Μ_1Ρ_1$, $Μ_2Ρ_2$.
Το σύνολο όλων αυτών των ευθ. τμημάτων και των πλευρών του τετραπλεύρου λέγεται πλέγμα 4 x 3 ή πλέγμα 3 x 4.

Εντελώς όμοια ορίζεται το πλέγμα ν x κ ή κ x ν. Δηλαδή:

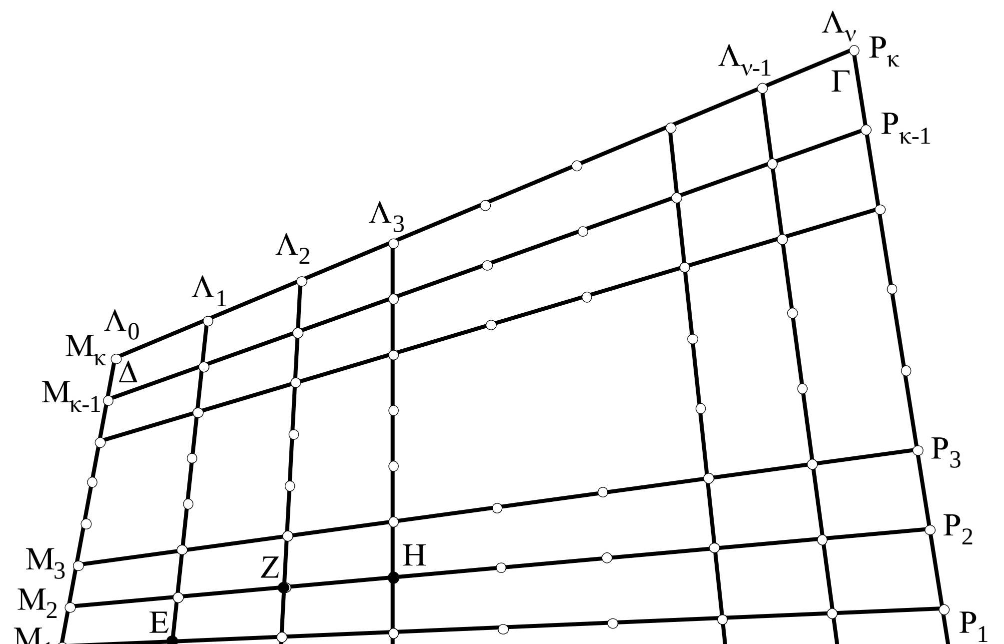
[1] Αν και κάποιες προτάσεις που ακολουθούν ισχύουν και σε μη κυρτά τετράπλευρα, εδώ θα αναφερόμαστε μόνο σε κυρτά και η λέξη «κυρτά» θα παραλείπεται.



Σχ. 2

Ορισμοί

1) Διαιρούμε τις δύο απέναντι πλευρές τετραπλεύρου σε ν ίσα μέρη και τις άλλες δύο σε κ ίσα μέρη και ενώνουμε τα αντίστοιχα σημεία διαίρεσης. Το σύνολο όλων αυτών των ευθ. τμημάτων και των πλευρών του τετραπλεύρου λέγεται **πλέγμα ν x κ** ή **πλέγμα κ x ν** (σχ. 3).



Σχ. 3

Στον παραπάνω ορισμό εννοείται ότι η διαίρεση των πλευρών θα γίνεται έτσι ώστε τα αντίστοιχα σημεία των απέναντι πλευρών να είναι τα πλησιέστερα προς την ίδια πλευρά. Π.χ τα K_1, Λ_1 είναι τα πλησιέστερα σημεία στην πλευρά ΑΔ και τα M_1, P_1 είναι τα πλησιέστερα σημεία στην πλευρά ΑΒ.

2) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ από το οποίο δημιουργήθηκε το πλέγμα, λέγεται **πλαίσιο** του πλέγματος.

3) Τα ευθ. τμήματα που συνδέουν τα αντίστοιχα σημεία των διαιρέσεων (συμπεριλαμβανομένων και των πλευρών του πλαισίου) λέγονται **γραμμές** του πλέγματος.
Είναι φανερό ότι σ' ένα πλέγμα ν x κ υπάρχουν (ν +1) + (κ + 1) = **ν + κ + 2 γραμμές**.

4) Οι γραμμές του πλέγματος που συνδέουν το ένα ζεύγος απέναντι πλευρών του πλαισίου (συμπεριλαμβανομένων και των πλευρών του πλαισίου) λέγονται **οριζόντιες** και οι άλλες γραμμές λέγονται **κατακόρυφες**.

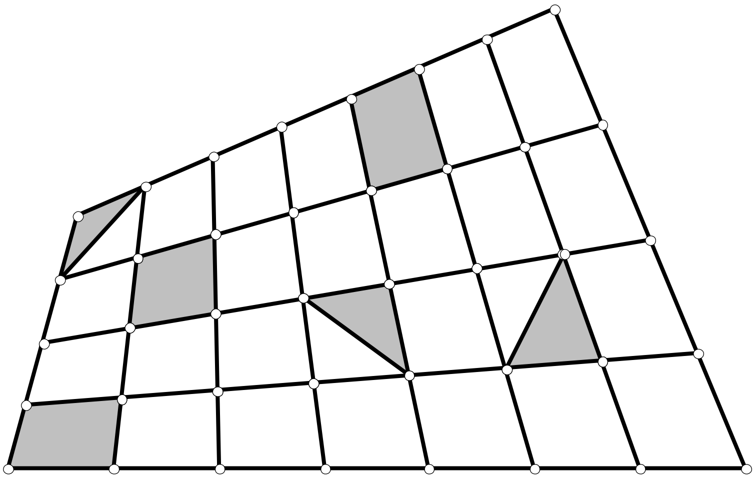
Έτσι στο πλέγμα του σχ. 3 οριζόντιες είναι οι $M_0P_0 \equiv AB$, M_1P_1, M_2P_2, ...,
$M_\kappa P_\kappa \equiv \Delta\Gamma$ και κατακόρυφες οι $K_0\Lambda_0 \equiv A\Delta$, $K_1\Lambda_1$, $K_2\Lambda_2$, ..., $K_\nu\Lambda_\nu \equiv B\Gamma$ ή αντίστροφα, οι πρώτες είναι οι κατακόρυφες γραμμές και οι δεύτερες είναι οι οριζόντιες.
Με το σύμβολο **ΑΒΓΔ(ν x κ)** θα ονομάζουμε οριζόντια την ΑΒ και κατακόρυφη την ΑΔ.

Παρατήρηση
Αφού οι οριζόντιες γραμμές μπορούν να θεωρηθούν κατακόρυφες (οπότε οι κατακόρυφες θεωρούνται οριζόντιες), κάθε πρόταση που αφορά τις οριζόντιες γραμμές ενός πλέγματος θα ισχύει και για τις κατακόρυφες.

5) Οι οριζόντιες γραμμές θα ονομάζονται **σχεδόν παράλληλες**. Το ίδιο και οι κατακόρυφες γραμμές. Για να δηλώσουμε π.χ ότι οι γραμμές M_1P_1 και M_2P_2 είναι σχεδόν παράλληλες θα γράφουμε $\mathbf{M_1P_1/\sigma\chi/M_2P_2}$.

6) Τα σημεία τομής των οριζοντίων με τις κατακόρυφες γραμμές ενός πλέγματος ονομάζονται **κόμβοι** του πλέγματος.
Έτσι στο σχ. 3 κόμβοι του πλέγματος είναι τα σημεία Ε, Ζ, Η, αλλά και τα Α, Β, Γ, Δ.

7) Κάθε τετράπλευρο που περιορίζεται μεταξύ δύο διαδοχικών οριζοντίων γραμμών και δύο διαδοχικών κατακόρυφων γραμμών ενός πλέγματος λέγεται **στοιχειώδες τετράπλευρο**.
Έτσι στο σχ. 4 τα σκιασμένα τετράπλευρα είναι στοιχειώδη. Με τη συντομογραφία **στ4** θα εννοούμε στοιχειώδες τετράπλευρο.

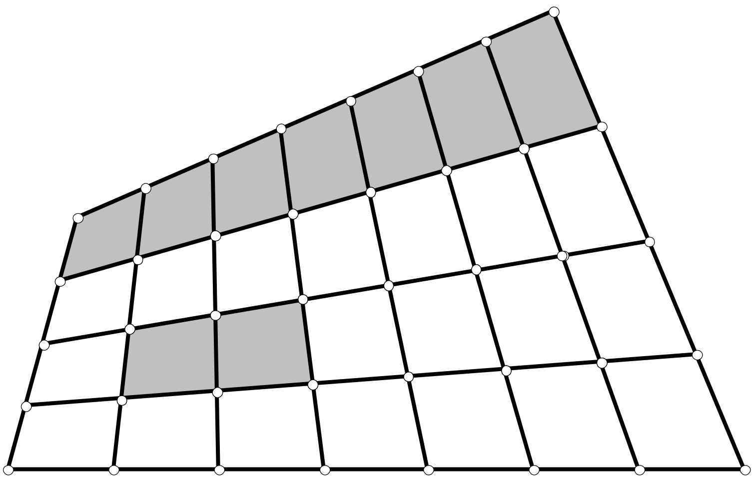


Σχ. 4

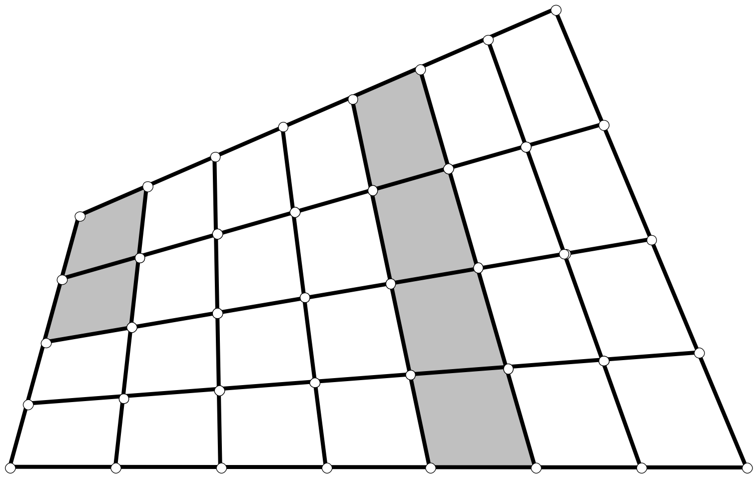
Είναι φανερό ότι σε κάθε πλέγμα ν x κ υπάρχουν ν.κ στοιχειώδη τετράπλευρα.

8) Μία διαγώνιος στ4 διαιρεί το στ4 σε δύο τρίγωνα. Καθένα από τα τρίγωνα αυτά λέγεται **στοιχειώδες τρίγωνο**.
Έτσι στο σχ. 4 τα σκιασμένα τρίγωνα είναι στοιχειώδη τρίγωνα.
Με τη συντομογραφία **στ3** θα εννοούμε στοιχειώδες τρίγωνο.

9) Κάθε πλέγμα ρ x 1 λέγεται **λωρίδα**.
Έτσι στα σχ. 5 και 6 τα σκιασμένα πλέγματα είναι λωρίδες.
Μία λωρίδα ρ x 1 θα ονομάζεται ρ-λωρίδα.



Σχ. 5



Σχ. 6

10) Στο πλέγμα ΑΒΓΔ(ν x κ) οι κ λωρίδες που περιέχονται μεταξύ οριζοντίων γραμμών λέγονται **οριζόντιες λωρίδες** και οι ν λωρίδες που περιέχονται μεταξύ κατακόρυφων γραμμών λέγονται **κατακόρυφες λωρίδες**.

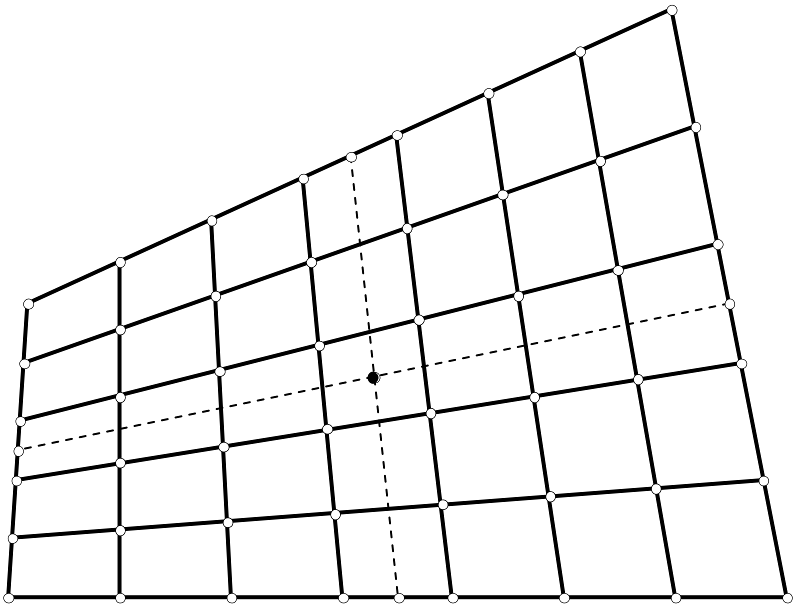
Στα παρακάτω, η συντομογραφία **ορ.λ** θα σημαίνει οριζόντια λωρίδα και η συντομογραφία **κατ.λ** θα σημαίνει κατακόρυφη λωρίδα.

Είναι φανερό ότι αν ο ν είναι περιττός στο πλέγμα ΑΒΓΔ(ν x κ) υπάρχει κεντρική κατ.λ, ενώ αν ο ν είναι άρτιος υπάρχουν δύο κεντρικές κατ.λ. Το ίδιο ισχύει και για τις ορ.λ. Όταν λοιπόν οι ν και κ είναι περιττοί (ισοδύναμα ν.κ = περιττός) υπάρχει κεντρικό στ4 που είναι η τομή των δύο κεντρικών λωρίδων.

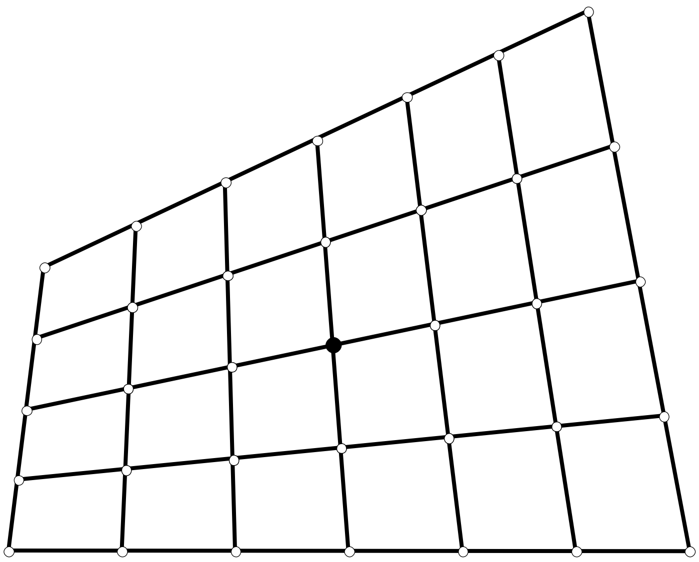
11) Κέντρο ενός πλέγματος λέγεται το σημείο τομής των ευθ. τμημάτων που συνδέουν τα μέσα των απέναντι πλευρών του πλαισίου του.

Είναι φανερό ότι:

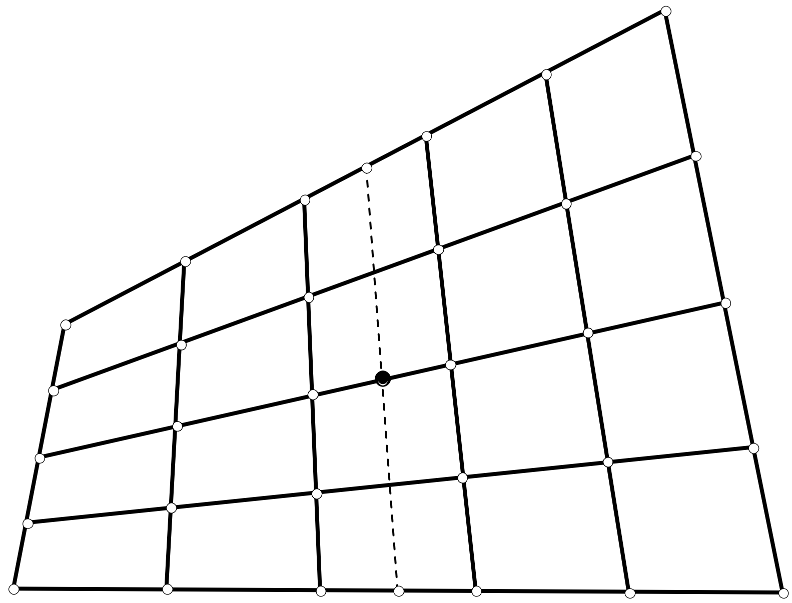
- αν ν, κ περιττοί, το κέντρο του πλέγματος είναι εσωτερικό σημείο του κεντρικού στ4. (σχ. 7)
- Αν ν, κ άρτιοι, το κέντρο ταυτίζεται με έναν κόμβο. (σχ. 8)
- Αν ν = άρτιος και κ = περιττός ή αντίστροφα, το κέντρο του πλέγματος βρίσκεται σε μια γραμμή του πλέγματος, δεν είναι όμως κόμβος. (σχ. 9)



Σχ. 7

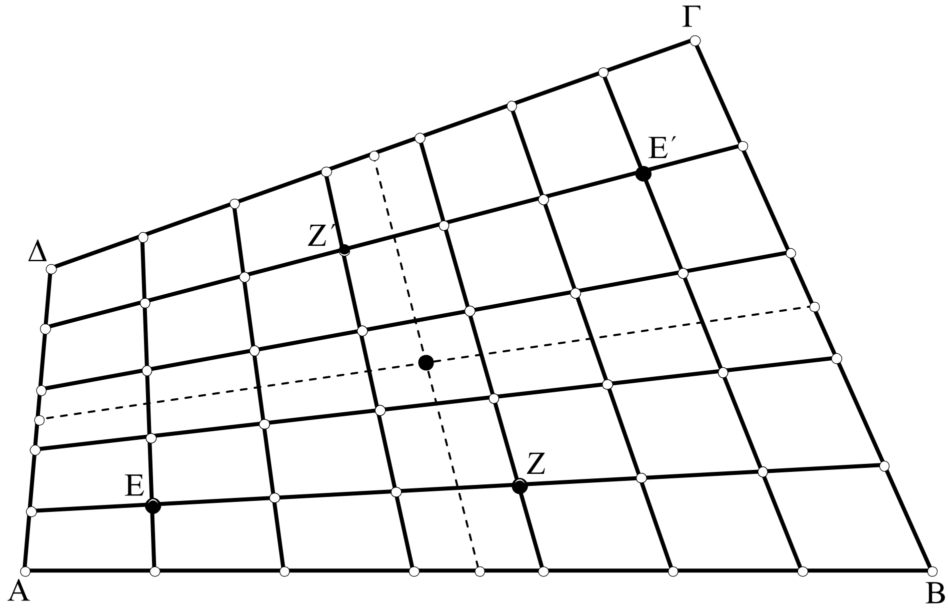


Σχ. 8



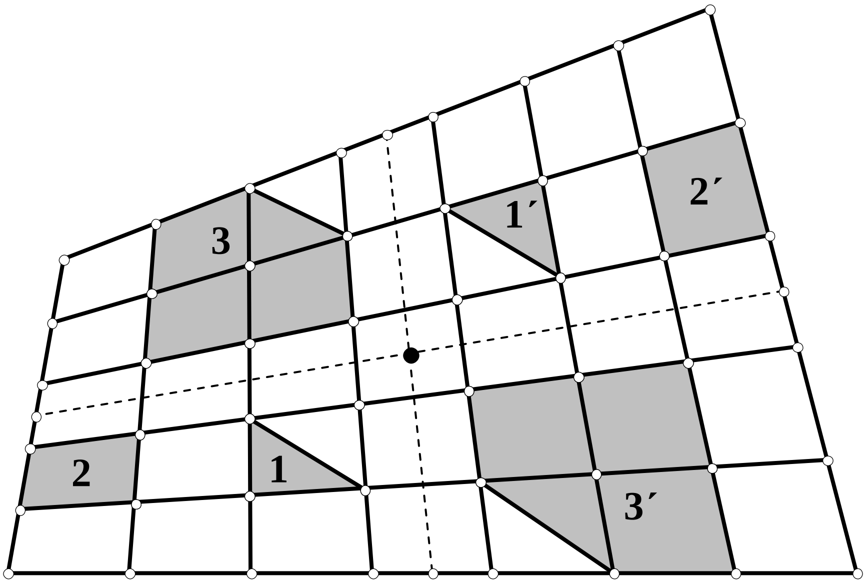
Σχ. 9

12) Δύο κόμβοι ενός πλέγματος λέγονται **συμμετρικοί** όταν κατέχουν συμμετρικές θέσεις ως προς το κέντρο του πλέγματος.
Εδώ δηλαδή ο όρος «συμμετρικοί» δεν επέχει τη γνωστή αυστηρή έννοια του όρου. Η χρησιμοποίηση όμως του όρου δεν θα επιφέρει καμία σύγχυση στη θεωρία που ακολουθεί.
Έτσι στο πλέγμα του σχ. 10, συμμετρικά ζεύγη κόμβων είναι τα (Ε, Ε΄), (Ζ, Ζ΄), (Α, Γ), (Β, Δ).



Σχ. 10

Δύο πολύγωνα που έχουν ως κορυφές συμμετρικούς κόμβους λέγονται **συμμετρικά**. Έτσι στο σχ. 11, συμμετρικά είναι τα στ3 1 και 1΄, τα στ4 2 και 2΄ καθώς και τα γραμμοσκιασμένα πεντάγωνα 3 και 3΄.



Σχ. 11

Στα επόμενα όταν λέμε συμμετρικοί κόμβοι ή συμμετρικά πολύγωνα θα παραλείπουμε να λέμε ως προς το κέντρο του πλέγματος.

Για την απόδειξη των προτάσεων που ακολουθούν θα αποδείξουμε πρώτα κάποιες άλλες βοηθητικές προτάσεις που θα αναφέρονται ως λήμματα και συντομογραφικά ως **Λ**. Οι προτάσεις στα πλέγματα θα αναφέρονται συντομογραφικά ως **Π**.

<u>Λ1 (Βασική πρόταση)</u>

Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα, ώστε: $\frac{\mathbf{ΑΕ}}{\mathbf{ΕΒ}}=\frac{\mathbf{ΔΗ}}{\mathbf{ΗΓ}}=\boldsymbol{λ}$ **και** $\frac{\mathbf{ΑΘ}}{\mathbf{ΘΔ}}=\frac{\mathbf{ΒΖ}}{\mathbf{ΖΓ}}=\boldsymbol{μ}$.

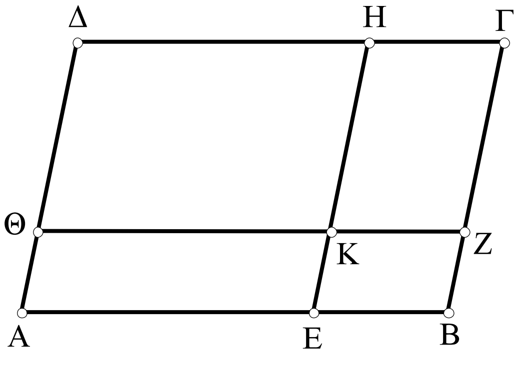
Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΕΗ και ΘΖ, τότε $\frac{\mathbf{ΘΚ}}{\mathbf{ΚΖ}}=\boldsymbol{λ}$ **και** $\frac{\mathbf{ΕΚ}}{\mathbf{ΚΗ}}=\boldsymbol{μ}$.

<u>Απόδειξη</u>

Διακρίνουμε τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις:

α) ΑΒ // ΔΓ και ΑΔ // ΒΓ (σχ. 12)

Είναι φανερό ότι ΘΚ = ΑΕ, ΚΖ = ΕΒ, ΕΚ = ΑΘ, ΚΗ = ΘΔ, άρα:



Σχ. 12

$\frac{\Theta K}{KZ}=\frac{AE}{EB}\Rightarrow\frac{\Theta K}{KZ}=\lambda$ και

$\frac{EK}{KH}=\frac{A\Theta}{\Theta\Delta}\Rightarrow\frac{EK}{KH}=\mu$

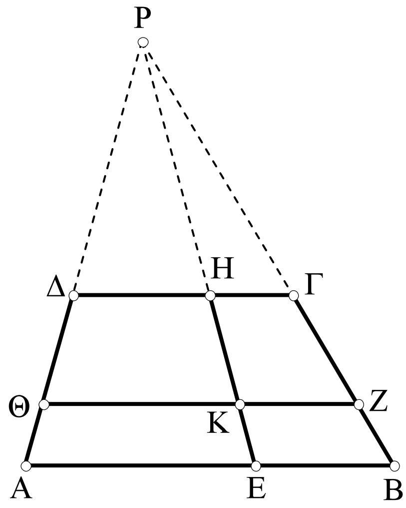
β) ΑΒ // ΔΓ ενώ ΑΔ $\nparallel$ ΒΓ (σχ. 13) δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

Επειδή ΑΒ // ΔΓ και $\frac{AE}{EB}=\frac{\Delta H}{H\Gamma}$, οι ευθείες ΑΔ, ΕΗ και ΒΓ διέρχονται από το ίδιο σημείο Ρ (κεντρική δέσμη ευθειών).

Είναι επίσης ΘΖ // ΑΒ διότι $\frac{A\Theta}{\Theta\Delta}=\frac{BZ}{Z\Gamma}$

Άρα $\frac{\Theta K}{KZ}=\frac{AE}{EB}=\lambda$ (θεώρ. Δέσμης ευθειών)

και $\frac{EK}{KH}=\frac{A\Theta}{\Theta\Delta}=\mu$ (θεώρ. Θαλή)



Σχ. 13

γ) ΑΒ $\nparallel$ ΔΓ και ΑΔ $\nparallel$ ΒΓ (σχ. 14)

Φέρνουμε από το Θ τις ημιευθείες Θx // ΑΒ και Θy // ΔΓ. Φέρνουμε ακόμη τις ΒΙ // ΑΔ, ΕΛ // ΑΔ, ΓΠ // ΑΔ, ΗΡ // ΑΔ (Ι, Λ $\in$ Θx, Π, Ρ $\in$ Θy) και τις ΙΠ και ΛΡ.

Έστω ΙΠ $\cap$ ΒΓ = Ζ΄, ΛΡ $\cap$ ΕΗ = Κ΄ και ΛΡ $\cap$ ΘΖ = Κ΄΄. Θα αποδείξουμε ότι Ζ΄ $\equiv$ Ζ και Κ΄ $\equiv$ Κ΄΄ $\equiv$ Κ.

Πράγματι, επειδή ΒΙ // ΓΠ, τα τρίγωνα ΒΙΖ΄ και ΓΠΖ΄ είναι όμοια, άρα $\frac{BZ'}{Z'\Gamma}=\frac{BI}{\Gamma\Pi}$

Όμως ΒΙ = ΑΘ και ΓΠ = ΘΔ άρα $\frac{BZ'}{Z'\Gamma}=\frac{A\Theta}{\Theta\Delta}=\mu$ και επειδή $\frac{BZ}{Z\Gamma}=\mu$ δηλ.

$\frac{BZ}{Z\Gamma}=\frac{BZ'}{Z'\Gamma}\Rightarrow Z'\equiv Z$

Τώρα από τα όμοια τρίγωνα ΒΙΖ και ΓΠΖ: $\frac{IZ}{Z\Pi}=\frac{BZ}{Z\Gamma}=\mu$ (1)

Είναι επίσης: $\frac{\Theta\Lambda}{\Lambda I}=\frac{AE}{EB}=\lambda$ και $\frac{\Theta P}{P\Pi}=\frac{\Delta H}{H\Gamma}=\lambda$ άρα $\frac{\Theta\Lambda}{\Lambda I}=\frac{\Theta P}{P\Pi}\Rightarrow P\Lambda /\!/ \Pi I$

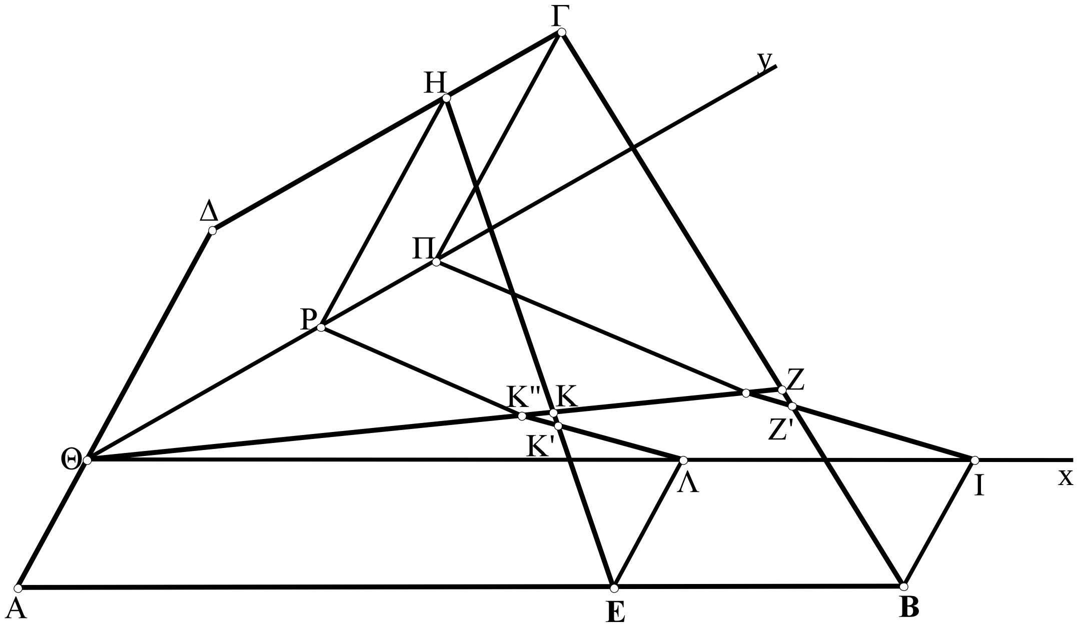
Από την κεντρική δέσμη των ευθειών Θx, ΘΖ και Θy έχουμε:

$\frac{\Lambda K''}{K''P}=\frac{IZ}{Z\Pi}\overset{(1)}{=}\mu$ (2)

Επίσης, επειδή ΕΛ//ΗΡ, από τα όμοια τρίγωνα ΕΛΚ΄ και ΗΡΚ΄ έχουμε:

$\frac{\Lambda K'}{K'P}=\frac{EK'}{K'H}=\frac{E\Lambda}{HP}$

Όμως ΕΛ = ΑΘ και ΗΡ = ΘΔ άρα



Σχ. 14

$$\frac{\Lambda K'}{K'P} = \frac{EK'}{K'H} = \frac{A\Theta}{\Theta\Delta} = \mu \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει:

$$\frac{\Lambda K'}{K'P} = \frac{\Lambda K''}{K''P} \Rightarrow K' \equiv K'' \ \text{ άρα } \ K' \equiv K'' \equiv K$$

οπότε από την (3) έχουμε $\frac{EK}{KH} = \mu$

<u>2η απόδειξη (Διανυσματική)</u>

Δίνουμε εδώ μια άλλη απόδειξη που δεν έχει την ανάγκη της διάκρισης των περιπτώσεων της προηγούμενης απόδειξης. Η απόδειξη δείχνει ότι η ίδια πρόταση ισχύει και σε μη κυρτό τετράπλευρο. Η πρόταση μπορεί να διατυπωθεί γενικότερα ως εξής:

Δίνονται τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ και τα σημεία: Ε του ΑΒ, Ζ του ΒΓ, Η του ΓΔ και Θ του ΔΑ τέτοια ώστε: $\frac{AE}{EB} = \frac{\Delta H}{H\Gamma} = \lambda$ **και** $\frac{A\Theta}{\Theta\Delta} = \frac{BZ}{Z\Gamma} = \mu$.

Τότε τα ευθ. τμήματα ΕΗ και ΘΖ τέμνονται υποχρεωτικά σε εσωτερικό τους σημείο Κ και ισχύει: $\frac{\Theta K}{KZ} = \lambda$ **και** $\frac{EK}{KH} = \mu$.

<u>Απόδειξη</u>

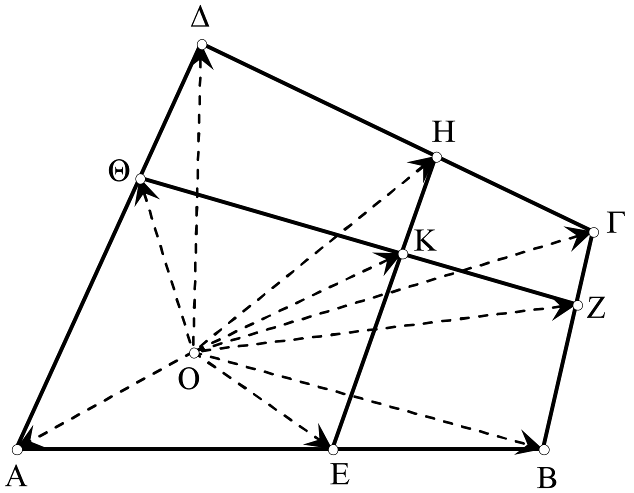
Παίρνουμε τυχαίο σημείο Ο για αρχή (σχ. 15)

Επειδή $\frac{AE}{EB}$ = λ θα είναι: $\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$ (1)

Όμοια: $\overrightarrow{OH} = \frac{\overrightarrow{O\Delta} + \lambda\overrightarrow{O\Gamma}}{1+\lambda}$ (2)

$\overrightarrow{O\Theta} = \frac{\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{O\Delta}}{1+\mu}$ (3)

$\overrightarrow{OZ} = \frac{\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{O\Gamma}}{1+\mu}$ (4)



Σχ. 15

Αν K_1 είναι το σημείο του ΘΖ τέτοιο ώστε $\frac{\Theta K_1}{K_1 Z}$ = λ και K_2 είναι το σημείο του ΕΗ τέτοιο ώστε $\frac{EK_2}{K_2 H}$ = μ θα είναι:

$\overrightarrow{OK_1} = \frac{\overrightarrow{O\Theta} + \lambda\overrightarrow{OZ}}{1+\lambda} \overset{(3),(4)}{=} \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + \lambda\mu\overrightarrow{O\Gamma} + \mu\overrightarrow{O\Delta}}{(1+\lambda)(1+\mu)}$ (5) και

$\overrightarrow{OK_2} = \frac{\overrightarrow{OE} + \mu\overrightarrow{OH}}{1+\mu} \overset{(1),(2)}{=} \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + \lambda\mu\overrightarrow{O\Gamma} + \mu\overrightarrow{O\Delta}}{(1+\lambda)(1+\mu)}$ (6)

Από τις (5) και (6) προκύπτει: $\overrightarrow{OK_1} = \overrightarrow{OK_2}$ άρα $K_1 \equiv K_2$

Παρατήρηση 1

Το λήμμα μπορεί να πάρει και την εξής μορφή:

Αν $\frac{AE}{AB}=\frac{\Delta H}{\Delta\Gamma}=\lambda$ και $\frac{A\Theta}{A\Delta}=\frac{BZ}{B\Gamma}=\mu$ τότε: $\frac{\Theta K}{\Theta Z}=\lambda$ και $\frac{EK}{EH}=\mu$

Παρατήρηση 2

Από την ίδια διανυσματική απόδειξη προκύπτει ότι η πρόταση ισχύει και όταν τα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ δεν είναι υποχρεωτικά εσωτερικά των αντίστοιχων τμημάτων, αλλά βρίσκονται στις ευθείες ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα και ισχύει: $\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EB}}=\frac{\overrightarrow{\Delta H}}{\overrightarrow{H\Gamma}}=\lambda$ και $\frac{\overrightarrow{A\Theta}}{\overrightarrow{\Theta\Delta}}=\frac{\overrightarrow{BZ}}{\overrightarrow{Z\Gamma}}=\mu$ οπότε οι ευθείες ΕΗ και ΘΖ τέμνονται υποχρεωτικά σε κάποιο σημείο Κ και ισχύει: $\frac{\overrightarrow{\Theta K}}{\overrightarrow{KZ}}=\lambda$ και $\frac{\overrightarrow{EK}}{\overrightarrow{KH}}=\mu$.

3η απόδειξη (Με τη βοήθεια του κέντρου μάζας)[2]

4η Απόδειξη (Με τη βοήθεια των σημειακών πράξεων)[3]

Π1 (Θεώρημα μηκών)

Κάθε οριζόντια γραμμή πλέγματος διαιρείται από τις κατακόρυφες γραμμές σε ίσα μέρη.

Απόδειξη

Έστω το πλέγμα ΑΒΓΔ(ν x κ), (σχ. 16), ΚΗ μια οριζόντια γραμμή και ΕΙ, ΖΘ δύο διαδοχικές κατακόρυφες. Θα αποδείξουμε ότι: $\Lambda M=\frac{1}{\nu}KH$

Πράγματι, αν $AE=\frac{\lambda}{\nu}AB$ και $AZ=\frac{\lambda+1}{\nu}AB$ τότε

σύμφωνα με την 1η παρατήρηση του Λ1 θα είναι και $K\Lambda=\frac{\lambda}{\nu}KH$ και $KM=\frac{\lambda+1}{\nu}KH$

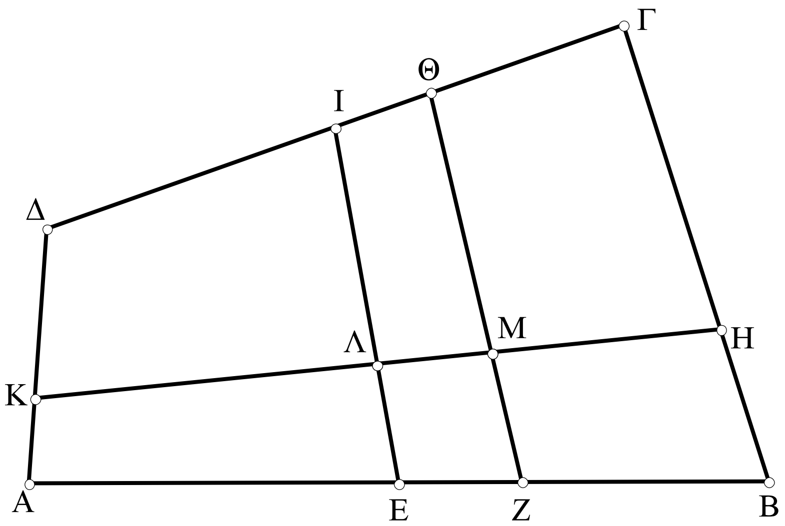
άρα $\Lambda M = KM - K\Lambda = \frac{1}{\nu}KH$

Σύμφωνα με την παρατήρηση του ορισμού 4, η ίδια πρόταση ισχύει και για τις κατακόρυφες γραμμές, δηλαδή κάθε κατακόρυφη γραμμή πλέγματος διαιρείται από τις οριζόντιες γραμμές σε ίσα μέρη.

---

[2] Πολύ σύντομη απόδειξη. Βλ. Ν. Ιωσηφίδης: ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ ΣΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ
https://drive.google.com/file/d/0B9uh0VymSVrpaVZLSklWTWhEYzg/view

[3] Πολύ σύντομη απόδειξη. Βλ. Ν. Ιωσηφίδης: ΣΗΜΕΙΑΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ,
https://drive.google.com/file/d/0B9uh0VymSVrpVU5JT2hPWlQxV1E/view



Σχ. 16

Δ2

Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ τα μέσα των ΑΒ, ΔΓ αντίστοιχα. Ισχύει η ισοδυναμία: εμβ(ΑΕΖΔ) = εμβ(ΕΒΓΖ) $\Leftrightarrow$ ΑΒ // ΔΓ

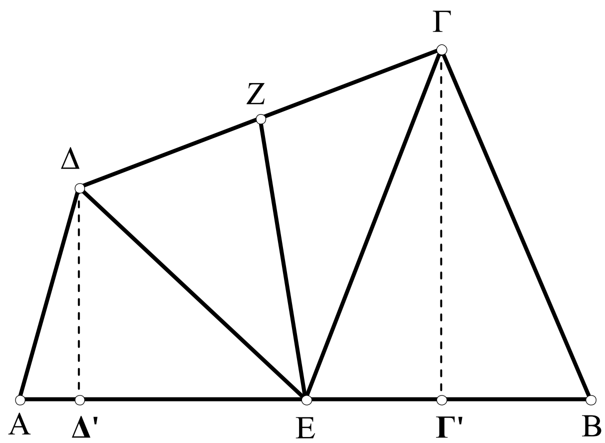
Απόδειξη

Φέρνουμε τις ΕΓ, ΕΔ και τα ύψη ΔΔ΄ και ΓΓ΄ των τριγώνων ΔΑΕ και ΓΕΒ (σχ. 17).

Στο τρίγωνο ΕΓΔ η ΕΖ είναι διάμεσος, άρα (ΕΔΖ) = (ΕΖΓ) επομένως

(ΑΕΖΔ) = (ΕΒΓΖ) $\Leftrightarrow$ (ΔΑΕ) + (ΕΔΖ) = (ΓΕΒ) + (ΕΓΖ) $\Leftrightarrow$ (ΔΑΕ) = (ΓΕΒ) $\Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}$ΑΕ.ΔΔ΄ = $\frac{1}{2}$ΕΒ.ΓΓ΄ $\Leftrightarrow$ ΔΔ΄ = ΓΓ΄ $\Leftrightarrow$ ΔΓ // ΑΒ



Σχ. 17

Δ3

Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα και Κ = ΕΗ $\cap$ ΘΖ. Ισχύει: (ΑΕΚΘ) + (ΓΗΚΖ) = (ΒΖΚΕ) + (ΔΘΚΗ).

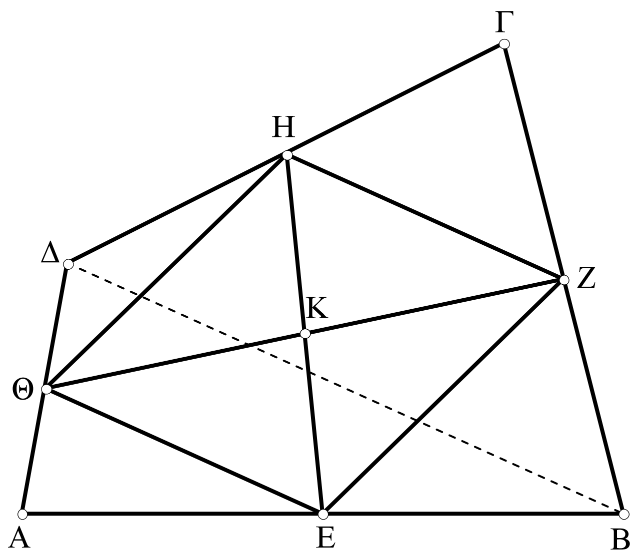
Απόδειξη

Έστω (ΑΒΓΔ) = Ε (σχ. 18). Είναι γνωστό ότι τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου είναι κορυφές παρ/μου με εμβαδόν ίσο με $\frac{1}{2}Ε$. Επομένως (ΚΕΖ) = (ΚΖΗ) = (ΚΗΘ) = (ΚΘΕ) = $\frac{1}{4}$(ΕΖΗΘ) = $\frac{1}{8}Ε$ (1)

Φέρνουμε τη διαγώνιο ΒΔ. Τα τρίγωνα ΑΕΘ και ΑΒΔ έχουν τη γωνία Α κοινή, άρα

$$\frac{(ΑΕΘ)}{(ΑΒΔ)} = \frac{(ΑΕ)(ΑΘ)}{(ΑΒ)(ΑΔ)} = \frac{\frac{1}{2}(ΑΒ)\cdot\frac{1}{2}(ΑΔ)}{(ΑΒ)(ΑΔ)} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} (ΑΕΘ) = \frac{1}{4}(ΑΒΔ) & \text{όμοια} \\ (ΓΗΖ) = \frac{1}{4}(ΓΔΒ) & \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} (ΑΕΘ) + (ΓΗΖ) = \frac{1}{4}[(ΑΒΔ) + (ΓΒΔ)] = \frac{1}{4}Ε \quad (2)$$



Σχ. 18

Επομένως:

$$(ΑΕΚΘ) + (ΓΗΚΖ) = (ΑΕΘ) + (ΚΘΕ) + (ΓΗΖ) + (ΚΖΗ) \overset{(1),(2)}{=} \frac{1}{4}Ε + \frac{1}{8}Ε + \frac{1}{8}Ε = \frac{1}{2}Ε$$

οπότε και (ΒΖΚΕ) + (ΔΘΚΗ) = $\frac{1}{2}Ε$ άρα (ΑΕΚΘ) + (ΓΗΚΖ) = (ΒΖΚΕ) + (ΔΘΚΗ)

Π2

Σε κάθε ν-λωρίδα

α) Το άθροισμα των εμβαδών δύο συμμετρικών στ3 είναι σταθερό και ίσο με το $\frac{1}{\nu}$ του εμβαδού της λωρίδας.

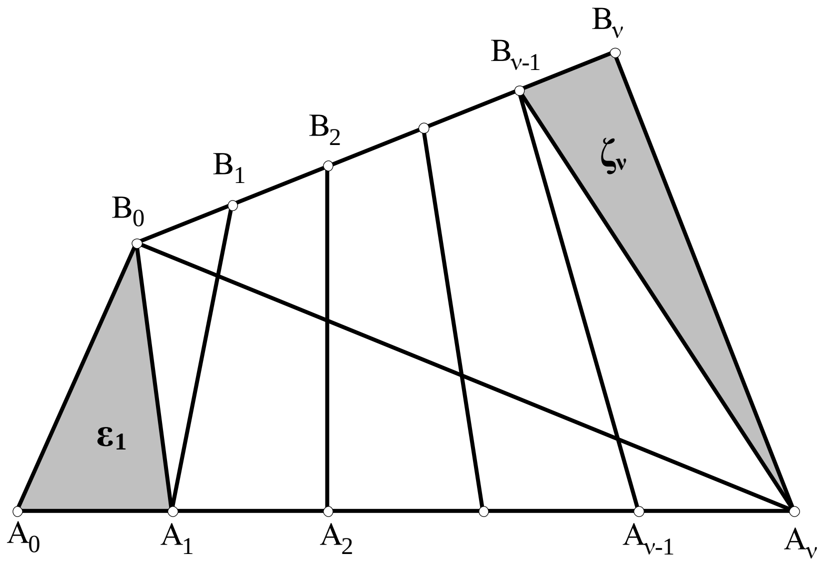
β) Το άθροισμα των εμβαδών δύο συμμετρικών στ4 είναι σταθερό και ίσο με τα $\frac{2}{\nu}$ του εμβαδού της λωρίδας.

γ) Αν ν = περιττός, το εμβαδόν του κεντρικού στ4 της ν-λωρίδας είναι ίσο με το $\frac{1}{\nu}$ του εμβαδού της λωρίδας.

Απόδειξη

α) Έστω η ν-λωρίδα (σχ. 19) και τα ακριανά στ3 $A_0A_1B_0$ και $A_\nu B_{\nu-1}B_\nu$. Ονομάζουμε ε_1, ε_2, ... , ε_ν τα εμβαδά των τριγώνων που έχουν βάσεις τις A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3,...,$A_{\nu-1}A_\nu$ και κορυφές τα σημεία B_0, B_1, B_2,...,$B_{\nu-1}$ αντίστοιχα και ζ_1, ζ_2, ... , ζ_ν τα εμβαδά των τριγώνων που έχουν βάσεις τις B_0B_1, B_1B_2, B_2B_3, ..., $B_{\nu-1}B_\nu$ και κορυφές τα σημεία A_1, A_2, ..., A_ν αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι

$\varepsilon_1 + \zeta_\nu = \varepsilon_2 + \zeta_{\nu-1} = \ ... \ = \varepsilon_{\nu-1} + \zeta_2 = \varepsilon_\nu + \zeta_1 = \frac{1}{\nu}E_\nu$ όπου E_ν το εμβαδόν της ν-λωρίδας.



Σχ. 19

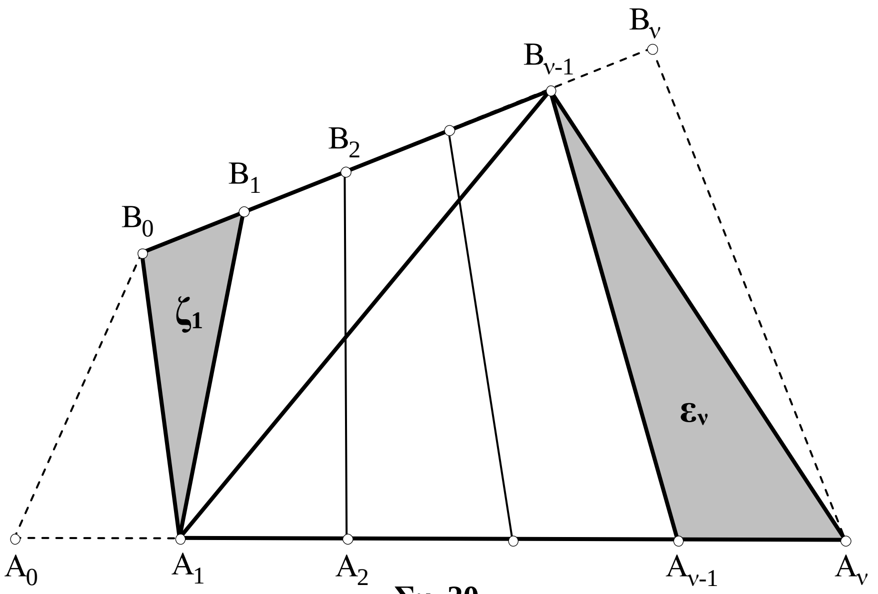
Η απόδειξη είναι όμοια αν επιλέξουμε ως ε_1, ε_2, ... ,ε_ν τα εμβαδά των στ3 με βάσεις τις A_0A_1, A_1A_2, … ,$A_{\nu-1}A_\nu$ και αντίστοιχες κορυφές B_1, B_2, ... , $B_{\nu-1}$, B_ν και ως ζ_1, ζ_2, ... , ζ_ν τα εμβαδά των τριγώνων με βάσεις B_0B_1, B_1B_2, ..., $B_{\nu-1}B_\nu$ και αντίστοιχες κορυφές τις A_0, A_1, A_2, ... , $A_{\nu-1}$.

Φέρνουμε τη διαγώνιο B_0A_ν. Τα τρίγωνα $B_0A_0A_1$ και $B_0A_0A_\nu$ έχουν κοινό ύψος από το B_0. Επειδή $(A_0A_1) = \frac{1}{\nu}\ (A_0A_\nu)$ θα είναι $(B_0A_0A_1) = \frac{1}{\nu}\ (B_0A_0A_\nu)$ ή $\varepsilon_1 = \frac{1}{\nu}\ (B_0A_0A_\nu)$.

Όμοια από τα τρίγωνα $A_\nu B_\nu B_{\nu-1}$ και $A_\nu B_\nu B_0$ έχουμε: $\zeta_\nu = \frac{1}{\nu}$ $(A_\nu B_\nu B_0)$, άρα

$\varepsilon_1 + \zeta_\nu = \frac{1}{\nu}$ $[(B_0 A_0 A_\nu) + (A_\nu B_\nu B_0)] = \frac{1}{\nu} E_\nu$

Αν αφαιρέσουμε τα τρίγωνα αυτά από τη ν-λωρίδα προκύπτει η (ν-1) λωρίδα $A_1 A_\nu B_{\nu-1} B_0$ (σχ. 20) με εμβαδόν $E_{\nu-1} = E_\nu - \frac{1}{\nu} E_\nu = \frac{\nu-1}{\nu} E_\nu$



Σχ. 20

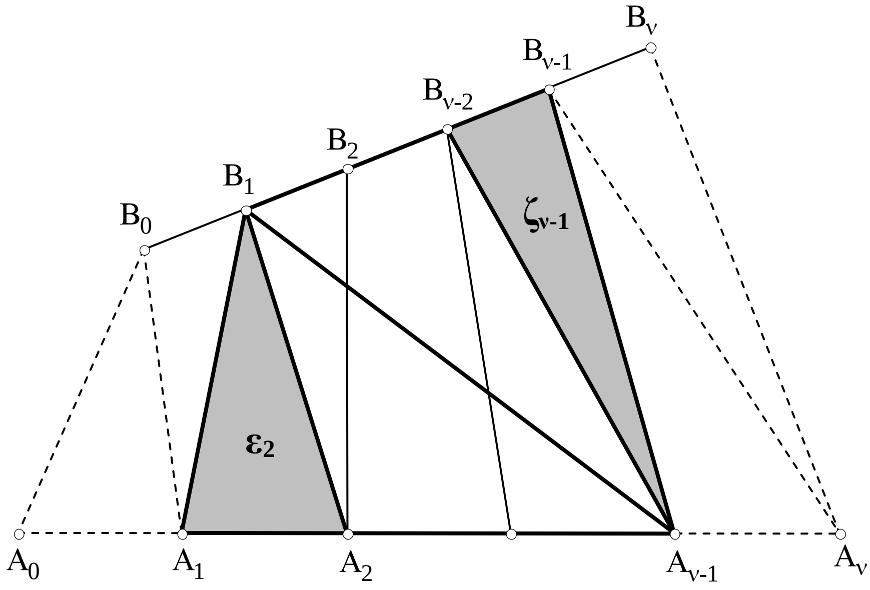
Σύμφωνα με αυτά που μόλις αποδείξαμε, είναι:

$\zeta_1 = \frac{1}{\nu-1}(A_1 B_{\nu-1} B_0)$ και $\varepsilon_\nu = \frac{1}{\nu-1}(B_{\nu-1} A_1 A_\nu)$ άρα

$\zeta_1 + \varepsilon_\nu = \frac{1}{\nu-1}[(A_1 B_{\nu-1} B_0) + (B_{\nu-1} A_1 A_\nu)] = \frac{1}{\nu-1} E_{\nu-1} = \frac{1}{\nu-1} \cdot \frac{\nu-1}{\nu} E_\nu = \frac{1}{\nu} E_\nu$

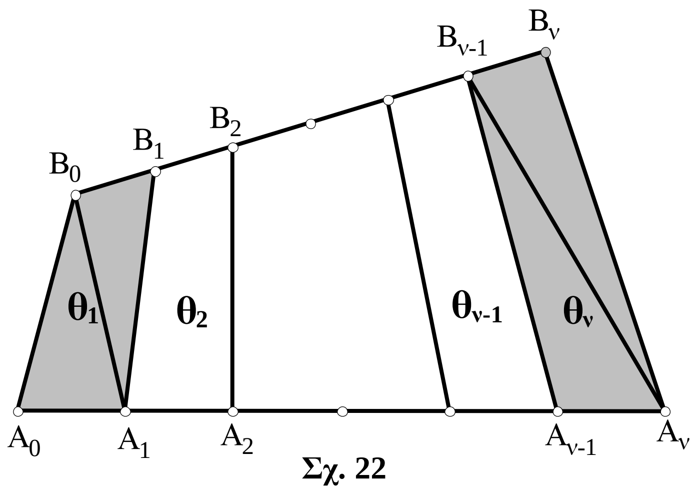
Αφαιρώντας τώρα τα τρίγωνα $A_1 B_1 B_0$ και $B_{\nu-1} A_{\nu-1} A_\nu$ προκύπτει η (ν-2) λωρίδα $A_1 A_{\nu-1} B_{\nu-1} B_1$ (σχ. 21) με εμβαδόν $E_{\nu-2} = \frac{\nu-1}{\nu} E_\nu - \frac{1}{\nu} E_\nu = \frac{\nu-2}{\nu} E_\nu$ και ισχύει πάλι:

$\varepsilon_2 + \zeta_{\nu-1} = \frac{1}{\nu-2} E_{\nu-2} = \frac{1}{\nu-2} \cdot \frac{\nu-2}{\nu} E_\nu = \frac{1}{\nu} E_\nu$ κ.ο.κ



Σχ. 21

β) Δύο συμμετρικά στ4 αποτελούνται (το καθένα) από δύο συμμετρικά στ3, (σχ. 22) άρα για τα εμβαδά τους $θ_1, θ_2, \dots, θ_ν$ ισχύει: $θ_1 + θ_ν = \frac{2}{ν}Ε$



Σχ. 22

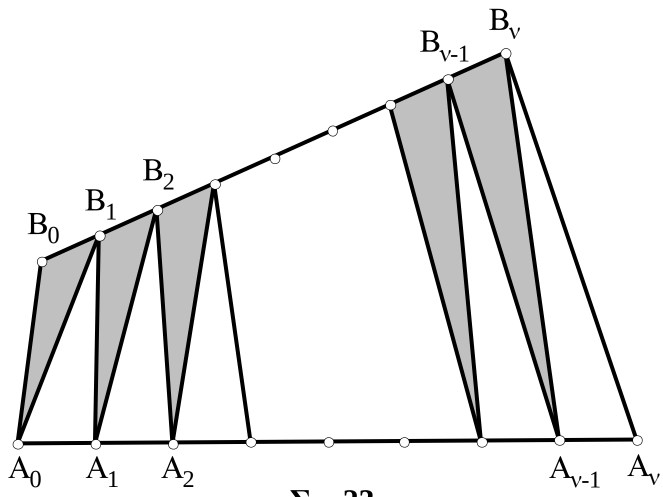
γ) Αν ν = περιττός υπάρχει κεντρικό στ4 που αποτελείται από δύο συμμετρικά στ3. Άρα το εμβαδόν του τετραπλεύρου αυτού σύμφωνα με το (α) είναι ίσο με $\frac{1}{ν}Ε_ν$

<u>Ορισμός</u>

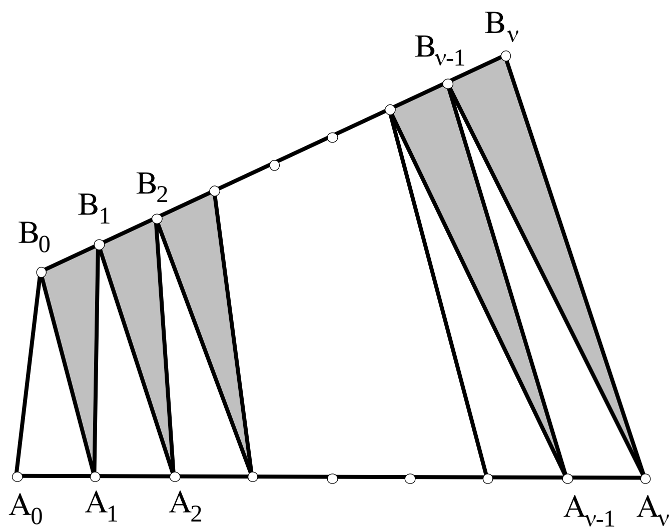
Έστω η ν-λωρίδα $Α_0Α_νΒ_νΒ_0$. Φέρνουμε τις διαγώνιες $Α_0Β_1$, $Α_1Β_2$, $Α_2Β_3$, ..., $Α_{ν-1}Β_ν$. Σχηματίζονται έτσι δύο ομάδες στ3. Τα σκιασμένα (σχ. 23) με βάσεις τις $Β_0Β_1$, $Β_1Β_2$, $Β_2Β_3$, ..., $Β_{ν-1}Β_ν$ και κορυφές αντίστοιχα τα $Α_0$, $Α_1$, $Α_2$, ..., $Α_{ν-1}$ και τα λευκά με βάσεις τις $Α_0Α_1$, $Α_1Α_2$, ... , $Α_{ν-1}Α_ν$ και κορυφές αντίστοιχα τα σημεία $Β_1$, $Β_2$, ... , $Β_ν$.

Φέρνοντας τις άλλες διαγώνιες A_1B_0, A_2B_1, A_3B_2, ... , $A_\nu B_{\nu-1}$ (σχ. 24) σχηματίζονται δύο νέες ομάδες στ3. Τα σκιασμένα και τα λευκά.
Κάθε μία από τις παραπάνω 4 ομάδες θα λέγεται **ομάδα διαδοχικών στοιχειωδών τριγώνων (δ.στ3).**

Αντίστοιχα ο συμβολισμός **δ.στ4** θα σημαίνει **διαδοχικά στ4.**



Σχ. 23



Σχ. 24

Π3

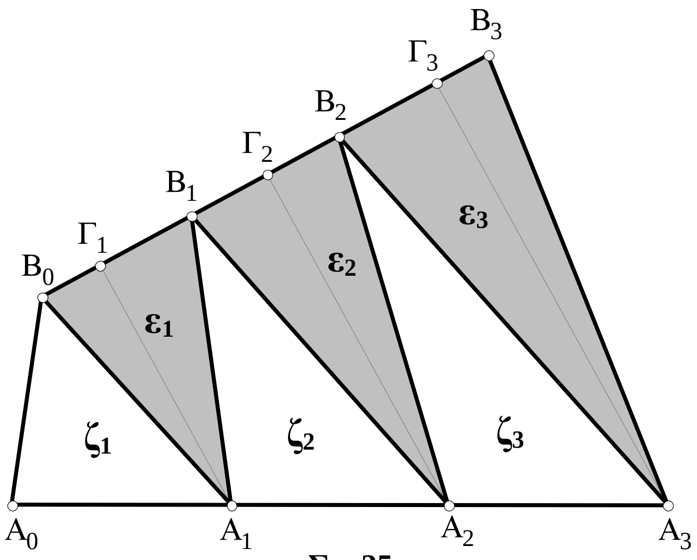
α) Σε κάθε ν-λωρίδα τα εμβαδά κάθε ομάδας δ.στ3 αποτελούν αριθμ. πρόοδο.

β) Και οι 4 αριθμητικές πρόοδοι έχουν την ίδια διαφορά ω.

γ) Τα εμβαδά των δ.στ4 αποτελούν επίσης αριθμ. πρόοδο με διαφορά 2ω.

Απόδειξη

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για 3 δ.στ3 οπότε ισχύει και για τα ν δ.στ3.



Σχ. 25

Στο σχ. 25 έχουμε τρία δ.στ3 μιας ομάδας (σκιασμένα). Φέρνουμε τα ύψη $A_1Γ_1 = υ_1$, $A_2Γ_2 = υ_2$ και $A_3Γ_3 = υ_3$. Επειδή τα τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις $B_0B_1 = B_1B_2 = B_2B_3$ αρκεί να αποδείξουμε ότι για τα ύψη τους ισχύει $2υ_2 = υ_1 + υ_3$ που πράγματι ισχύει λόγω του τραπεζίου $A_1A_3Γ_3Γ_1$ με διάμεσο την $A_2Γ_2 = υ_2$

Όμοια αποδεικνύεται η πρόταση και για τις 3 άλλες ομάδες δ.στ3.

β) Ονομάζουμε

$ε_1 = (A_1B_0B_1)$, $ε_2 = (A_2B_1B_2)$, $ε_3 = (A_3B_2B_3)$

$ζ_1 = (B_0A_0A_1)$, $ζ_2 = (B_1A_1A_2)$, $ζ_3 = (B_2A_2A_3)$ (σχ. 25)

$η_1 = (A_0B_0B_1)$, $η_2 = (A_1B_1B_2)$, $η_3 = (A_2B_2B_3)$

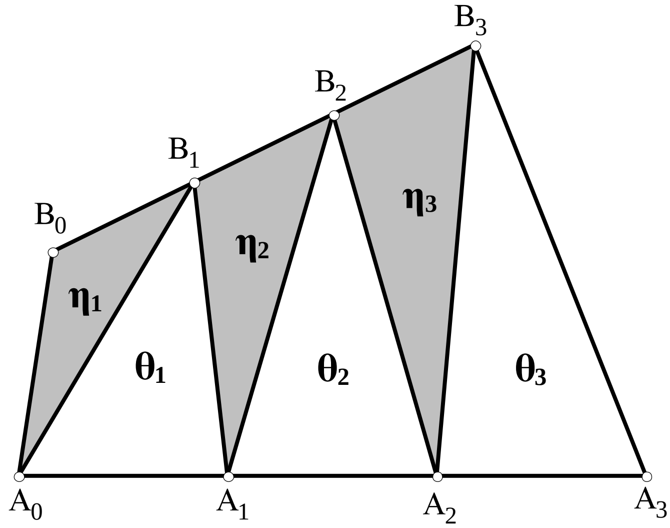
$θ_1 = (B_1A_0A_1)$, $θ_2 = (B_2A_1A_2)$, $θ_3 = (B_3A_2A_3)$ (σχ. 26)

Θα αποδείξουμε ότι

$ω_1 = ω_2 = ω_3 = ω_4$ όπου $ω_1 = ε_2 - ε_1$, $ω_2 = ζ_2 - ζ_1$, $ω_3 = η_2 - η_1$, $ω_4 = θ_2 - θ_1$

Σύμφωνα με την Π.2 είναι $ζ_1 + ε_3 = ε_1 + ζ_3$ ή $ε_3 - ε_1 = ζ_3 - ζ_1 \Rightarrow 2ω_1 = 2ω_2 \Rightarrow ω_1 = ω_2$

Όμοια, ισχύει $ω_3 = ω_4$



Σχ. 26

Θα αποδείξουμε τώρα ότι $\omega_1 = \omega_3$

Είναι $(A_0A_1B_1B_0) = \varepsilon_1 + \zeta_1 = \eta_1 + \theta_1$ και $(A_1A_2B_2B_1) = \varepsilon_2 + \zeta_2 = \eta_2 + \theta_2$
και με αφαίρεση κατά μέλη:
$(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + (\zeta_2 - \zeta_1) = (\eta_2 - \eta_1) + (\theta_2 - \theta_1) \Leftrightarrow \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 \Leftrightarrow 2\omega_1 = 2\omega_3 \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_3$
Άρα $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4$

γ) Ονομάζουμε ω την κοινή διαφορά των 4 αριθμητικών προόδων. Ονομάζουμε επίσης $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ τα εμβαδά των στ4 $A_0A_1B_1\,B_0$, $A_1A_2B_2B_1$ και $A_2A_3B_3B_2$. Σύμφωνα με την Π2 (β,γ) θα είναι $\kappa_1 + \kappa_3 = \frac{2}{3}E_3$ και $\kappa_2 = \frac{1}{3}E_3$ οπότε $\kappa_1 + \kappa_3 = 2\kappa_2$ δηλ. τα εμβαδά $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ αποτελούν αριθμ. πρόοδο. Η διαφορά της προόδου αυτής είναι
$\lambda = \kappa_2 - \kappa_1 = (\varepsilon_2 + \zeta_2) - (\varepsilon_1 + \zeta_1) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + (\zeta_2 - \zeta_1) = \omega + \omega = 2\omega$

Π4

Σε κάθε ν-λωρίδα. για τα εμβαδά των δ.στ3 και των δ.στ4 ισχύει μία μόνο ομάδα σχέσεων από τις Α, Β, Γ.

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots = \varepsilon_\nu\\
\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \ldots = \zeta_\nu\\
\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \ldots = \eta_\nu\\
\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \ldots = \theta_\nu\\
\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \ldots = \kappa_\nu
\end{aligned}\right\} \textbf{(A)}$$

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \ldots < \varepsilon_\nu}\\ \boldsymbol{\zeta_1 < \zeta_2 < \zeta_3 < \ldots < \zeta_\nu}\\ \boldsymbol{\eta_1 < \eta_2 < \eta_3 < \ldots < \eta_\nu}\\ \boldsymbol{\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \ldots < \theta_\nu}\\ \boldsymbol{\kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3 < \ldots < \kappa_\nu}\end{array}\right\}\ \mathbf{(B)}$$

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots > \varepsilon_\nu}\\ \boldsymbol{\zeta_1 > \zeta_2 > \zeta_3 > \ldots > \zeta_\nu}\\ \boldsymbol{\eta_1 > \eta_2 > \eta_3 > \ldots > \eta_\nu}\\ \boldsymbol{\theta >_1 \theta_2 > \theta_3 > \ldots > \theta_\nu}\\ \boldsymbol{\kappa_1 > \kappa_2 > \kappa_3 > \ldots > \kappa_\nu}\end{array}\right\}\ \mathbf{(\Gamma)}$$

Οι σχέσεις (Α) ισχύουν όταν $A_0A_\nu // B_0B_\nu$

Οι σχέσεις (Β) ισχύουν όταν οι πλευρές A_0A_ν και B_0B_ν του πλέγματος τέμνονται προς το μέρος του τριγώνου με εμβαδόν ε_1

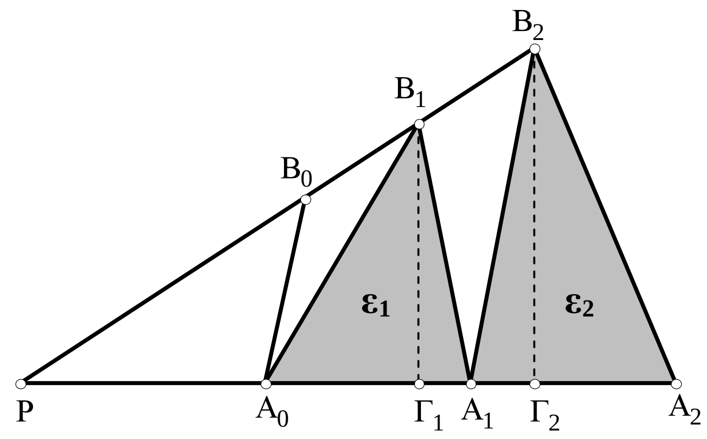
Οι σχέσεις (Γ) ισχύουν όταν οι πλευρές A_0A_ν και B_0B_ν του πλέγματος τέμνονται προς το μέρος του τριγώνου με εμβαδόν ε_ν

Οι σχέσεις (Α) ισχύουν όταν $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \Leftrightarrow$ τα ύψη των τριγώνων αυτών $B_1\Gamma_1 = B_2\Gamma_2 \Leftrightarrow A_0A_\nu // B_0B_\nu$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι οι σχέσεις (Β) ισχύουν όταν οι ευθείες A_0A_ν και B_0B_ν τέμνονται προς το μέρος του τριγώνου με εμβαδόν ε_1, δηλ. προς το μέρος της A_0B_0 (σχ. 27) ενώ οι σχέσεις (Γ) ισχύουν όταν οι ευθείες A_0A_ν και B_0B_ν τέμνονται προς το μέρος της πλευράς $A_\nu B_\nu$.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν για την 2-λωρίδα $A_0A_2B_2B_0$ οι A_0A_2 και B_0B_2 τέμνονται σε σημείο Ρ προς το μέρος του A_0, τότε $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ δηλαδή $(B_1A_0A_1) < (B_2A_1A_2)$.
Φέρνουμε τα ύψη $B_1\Gamma_1$, $B_2\Gamma_2$
Επειδή $PB_1 < PB_2$ από τα όμοια τρίγωνα $PB_1\Gamma_1$ και $PB_2\Gamma_2$:

$$\frac{B_1\Gamma_1}{B_2\Gamma_2} = \frac{PB_1}{PB_2} < 1 \Rightarrow B_1\Gamma_1 < B_2\Gamma_2$$

Τα τρίγωνα $B_1A_0A_1$ και $B_2A_1A_2$ έχουν ίσες βάσεις $A_0A_1 = A_1A_2$ και ύψη $B_1\Gamma_1 < B_2\Gamma_2$ άρα $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.



Σχ. 27

Ορισμός

Ονομάζουμε **γωνιακά τετράπλευρα** ενός πλέγματος (ΑΒΓΔ)ν x κ τα 4 στ4 που έχουν μια κορυφή ένα από τα σημεία Α, Β, Γ, Δ.

Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει η εξής γενικότερη πρόταση:

Π5

α) Σε κάθε πλέγμα τα εμβαδά των δ.στ3 (και των 4 ομάδων) κατά μήκος οποιασδήποτε ορ.λ αποτελούν αριθμ. πρόοδο. Όλες οι πρόοδοι, κατά μήκος της ίδιας ή διαφορετικών ορ.λ έχουν την ίδια διαφορά ω.

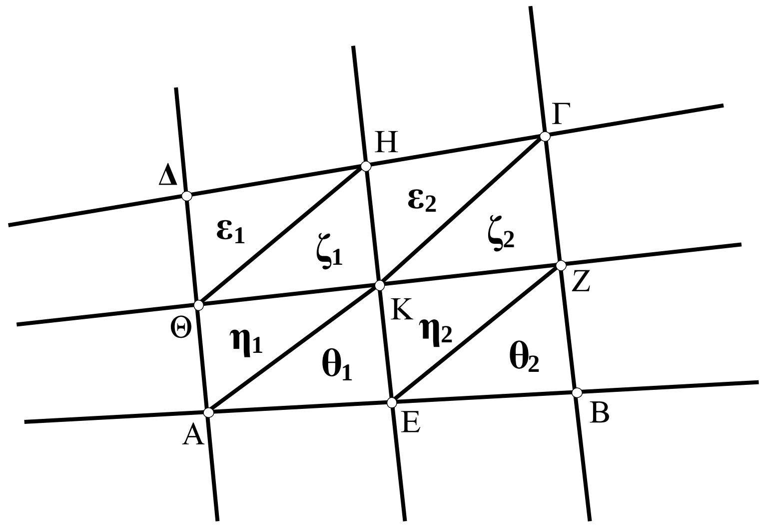
β) Τα εμβαδά των δ.στ4 κατά μήκος οποιασδήποτε ορ.λ αποτελούν αριθμ. πρόοδο. Όλες οι πρόοδοι έχουν την ίδια διαφορά λ = 2ω.

Όλα τα παραπάνω ισχύουν βέβαια και για τις κατακόρυφες λωρίδες. Η αντίστοιχη όμως διαφορά δεν είναι γενικά ίση με την ω.

Απόδειξη

α) Το ότι τα εμβαδά των δ.στ3 σε κάθε ορ.λ ή σε κάθε κατ.λ αποτελούν αριθμ. πρόοδο έχει ήδη αποδειχθεί (βλ. Π3). Θα αποδείξουμε εδώ ότι όλες οι αριθμ. πρόοδοι έχουν την ίδια διαφορά.
Αρκεί να αποδείξουμε την πρόταση για δύο διαδοχικές λωρίδες (σχ. 28).

Έστω $\omega = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \zeta_2 - \zeta_1$ η διαφορά στη μια λωρίδα και $\omega' = \eta_2 - \eta_1 = \theta_2 - \theta_1$ η διαφορά στην άλλη λωρίδα. Σύμφωνα με το Λ3 ισχύει:
$(ΑΕΚΘ) + (ΓΗΚΖ) = (ΒΖΚΕ) + (ΔΘΚΗ) \Leftrightarrow (\eta_1 + \theta_1) + (\varepsilon_2 + \zeta_2) = (\eta_2 + \theta_2) + (\varepsilon_1 + \zeta_1)$
$\Leftrightarrow (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + (\zeta_2 - \zeta_1) = (\eta_2 - \eta_1) + (\theta_2 - \theta_1) \Leftrightarrow 2\omega = 2\omega' \Leftrightarrow \omega = \omega'$.



Σχ. 28

β) Αρκεί να αποδειχθεί η πρόταση για τα εμβαδά δύο διαδοχικών στ4 δηλ. αν κ_1 = (ΔΘΚΗ), κ_2 = (ΓΗΚΖ) τότε $\kappa_2 - \kappa_1 = 2\omega$.
Πράγματι: $\kappa_2 - \kappa_1 = (\varepsilon_2 + \zeta_2) - (\varepsilon_1 + \zeta_1) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + (\zeta_2 - \zeta_1) = \omega + \omega = 2\omega$

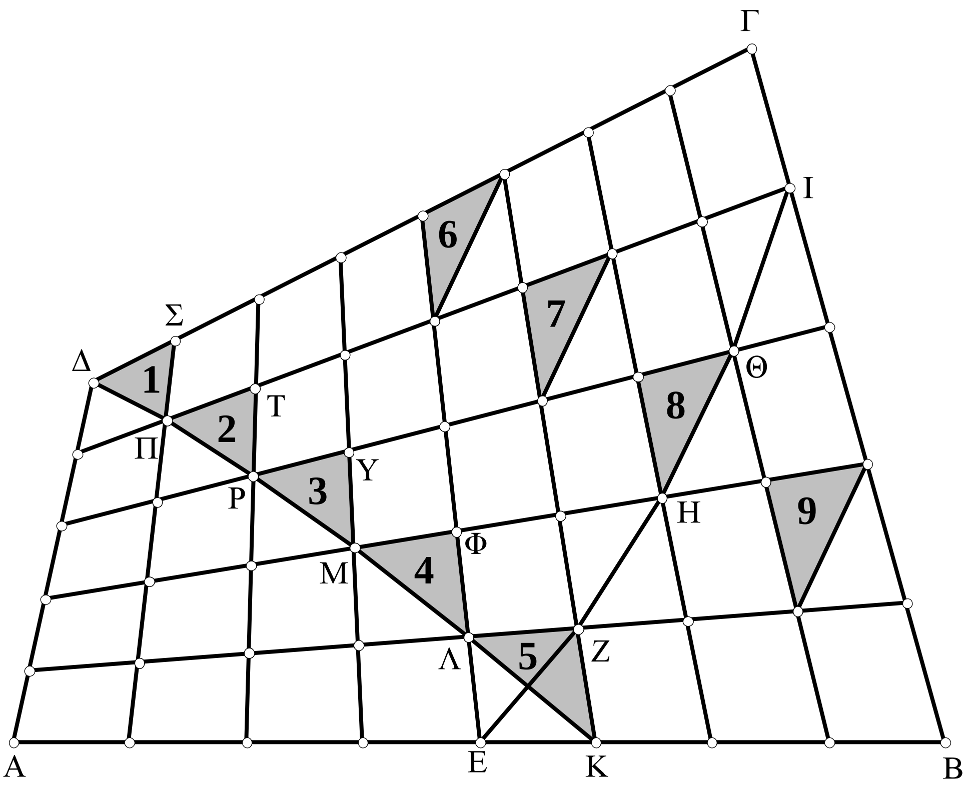
Η ίδια πρόταση ισχύει βέβαια και για τις κατ.λ.

Ορισμοί

α) Έστω ένα πλέγμα (ΑΒΓΔ)ν x κ. Τα ευθ. τμήματα ΑΓ και ΒΔ θα λέγονται **κύριες διαγώνιες** του πλέγματος. Συντομογραφικά κ.δ.

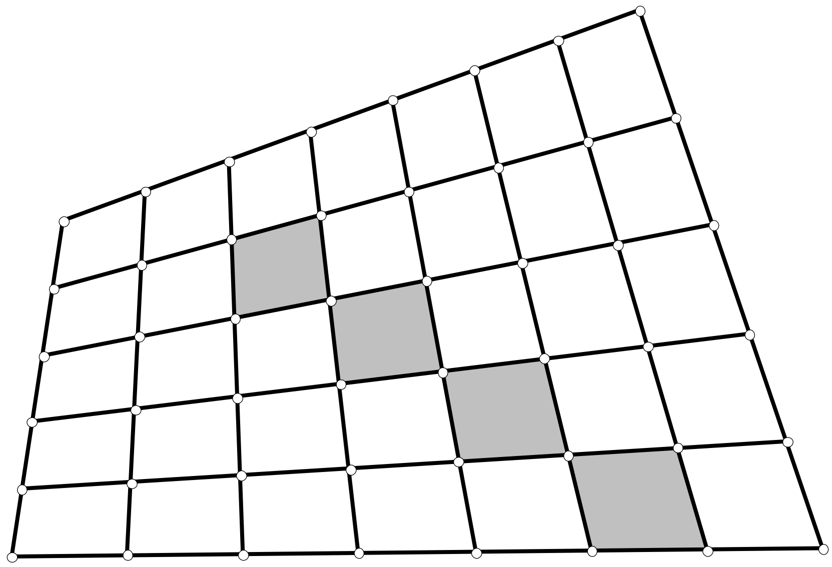
β) Τεθλασμένες όπως οι ΕΖΗΘΙ και ΚΛΜΡΠΔ στο σχ. 29 που αποτελούνται από διαγώνιες στ4 και έχουν τα άκρα τους στο πλαίσιο ενός πλέγματος , λέγονται **δευτερεύουσες διαγώνιες** του πλέγματος. Συντομογραφικά **δ.δ**. Σ' ένα πλέγμα ΑΒΓΔ(ν x ν) δευτερεύουσες διαγώνιες είναι και οι τεθλασμένες που συνδέουν το Α με το Γ ή το Β με το Δ.

γ) Κάθε διαγώνιος που έχει τον προσανατολισμό της ΕΖΗΘΙ θα λέγεται **σχεδόν παράλληλη** προς την κ.δ ΑΓ. Αντίστοιχα, κάθε δ.δ που έχει τον προσανατολισμό της ΚΛΜΡΠΔ θα λέγεται σχεδόν παράλληλη προς την κ.δ ΒΔ. Τη «σχεδόν παραλληλία» των διαγωνίων θα συμβολίζουμε πάλι με το σύμβολο /σχ/. Έτσι γράφουμε ΕΖΗΘΙ/σχ/ΑΓ. Τις δ.δ που είναι /σχ/ προς μία κ.δ θα τις ονομάζουμε επίσης /σχ/.



Σχ. 29

δ) Διαγώνια τετράπλευρα θα λέγονται τα στ4 που έχουν διαγώνιες τα διαδοχικά τμήματα μιας δ.δ. Π.χ τα σκιασμένα στ4 του σχ. 30 είναι διαγώνια τετράπλευρα.



Σχ. 30

ε) Διαγώνια τρίγωνα ονομάζονται τα τρίγωνα στα οποία διαιρούνται τα διαγώνια τετράπλευρα από διαγώνιες /σχ/. Π.χ. στο σχ. 29 τα σκιασμένα τρίγωνα 1, 2, 3, 4, 5 είναι διαγώνια. Διαγώνια είναι επίσης και τα σκιασμένα τρίγωνα 6, 7, 8, 9 του ίδιου σχήματος.

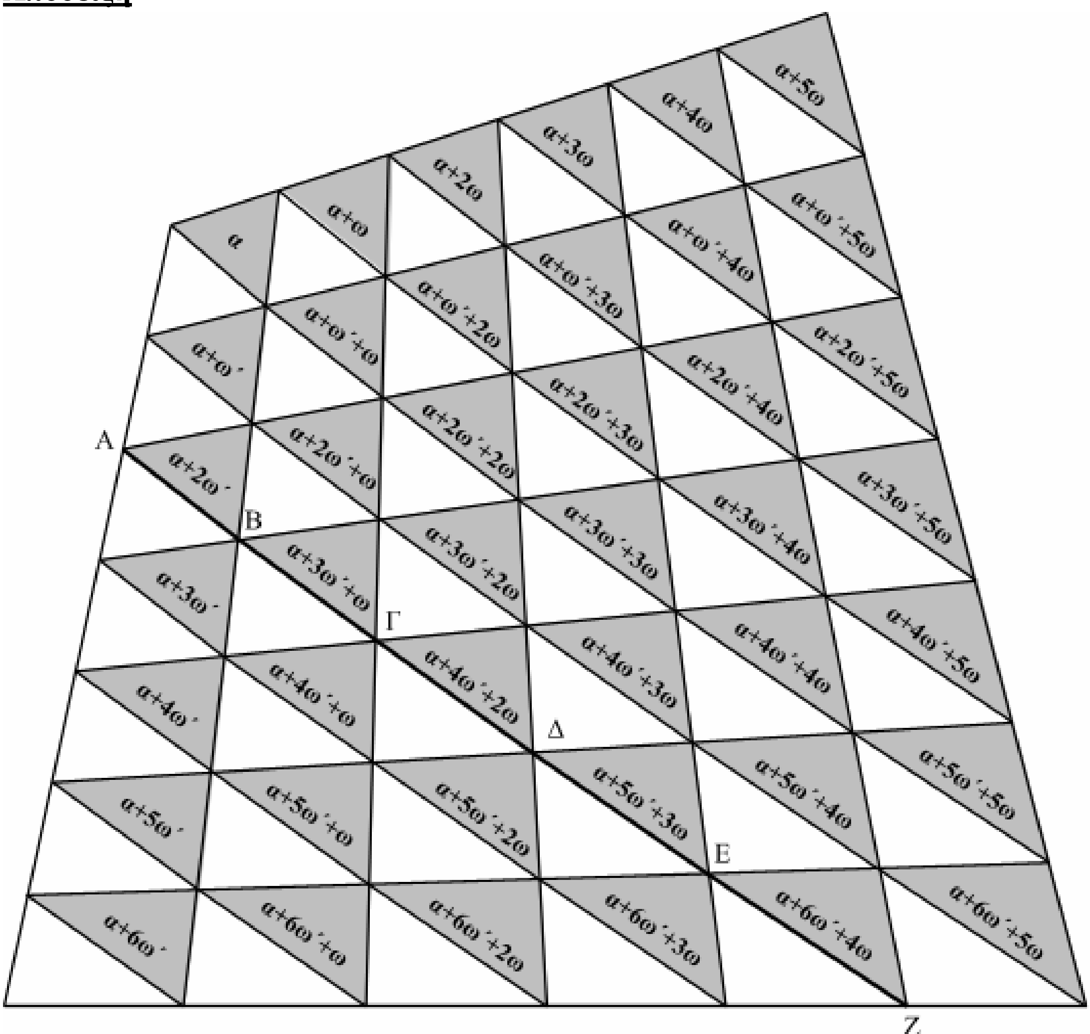
Αν ονομάσουμε ω τη διαφορά της προόδου των εμβαδών των στ3 των ορ.λ (από αριστερά προς τα δεξιά) και ω΄ τη διαφορά των κατ.λ (από πάνω προς τα κάτω), θα αποδείξουμε την επόμενη πρόταση:

<u>Π6</u>

α) Τα διαγώνια τρίγωνα κατά μήκος οποιασδήποτε δ.δ είναι διαδοχικοί όροι αριθμ. προόδου με διαφορά ω + ω΄ ή ω - ω΄ αναλόγως του αν η δ.δ είναι /σχ/ προς τη μια ή την άλλη κ.δ του πλέγματος.

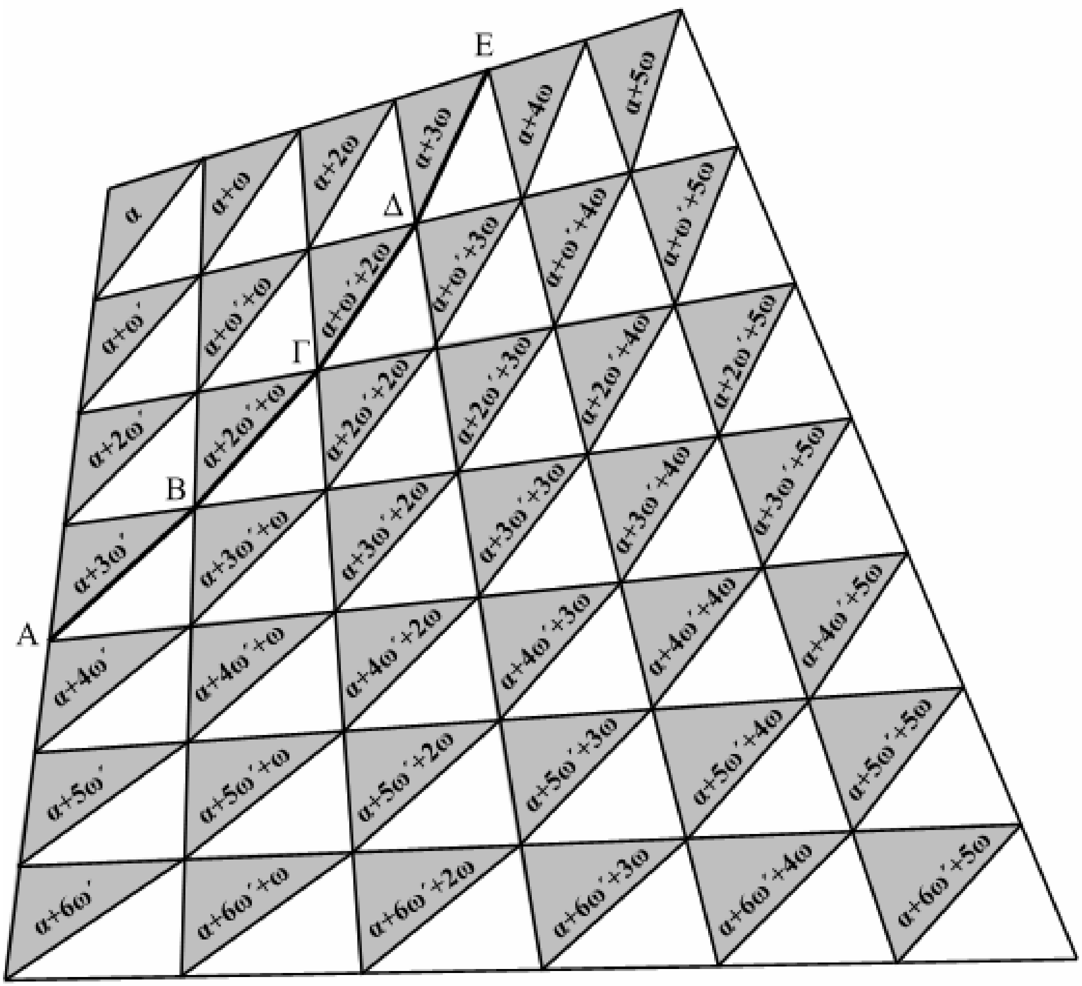
β) Τα διαγώνια στ4 κατά μήκος οποιασδήποτε δ.δ είναι διαδοχικοί όροι αριθμ. προόδου με διαφορά 2(ω + ω΄) ή 2(ω - ω΄) αναλόγως του αν η δ.δ είναι /σχ/ προς τη μία ή την άλλη κ.δ του πλέγματος.

<u>Απόδειξη</u>



Σχ 31

Για ευκολότερη κατανόηση στα σχ. 31 και 32 που ακολουθούν, σχεδιάσαμε ένα πλέγμα 6 x 7. Στο σχ. 31 ονομάσαμε α το ελάχιστο εμβαδόν ενός στ3 που βρίσκεται σε ένα γωνιακό τετράπλευρο και ω, ω΄ τις διαφορές των προόδων όπως ορίσαμε παραπάνω.

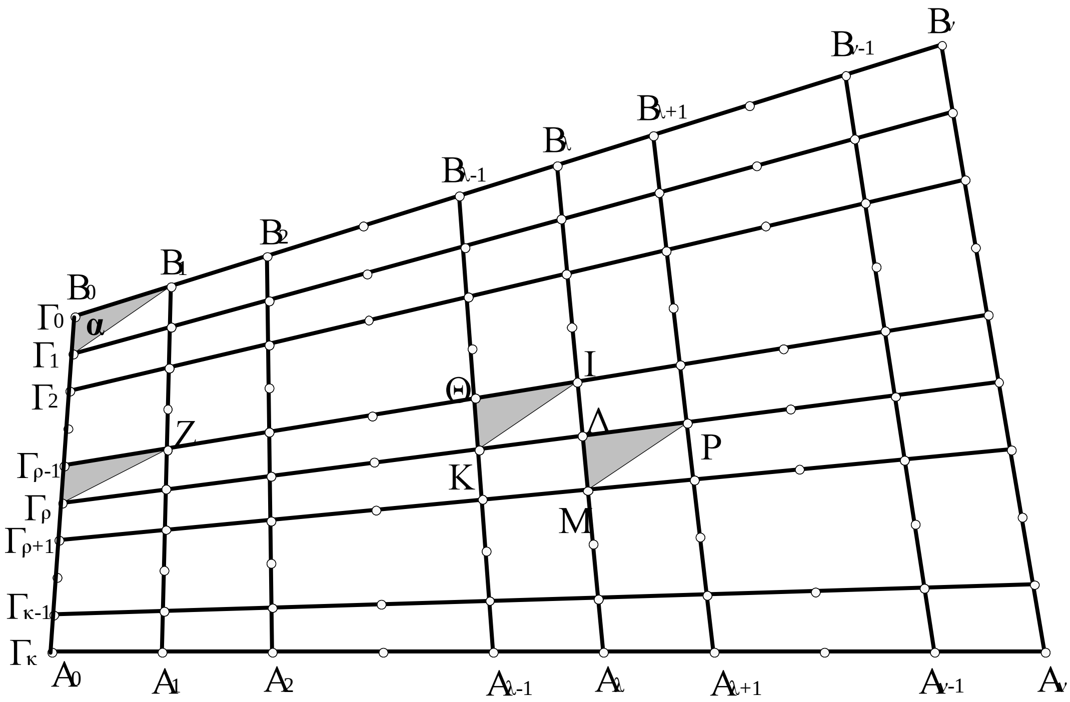


Σχ. 32

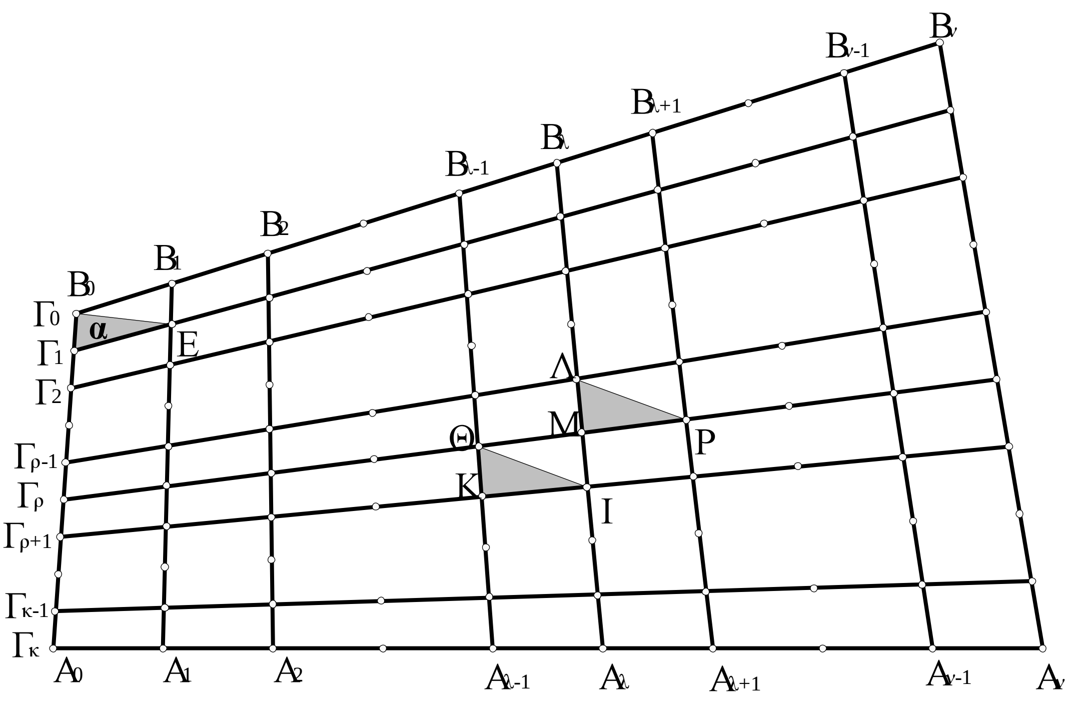
Σύμφωνα με την Π5, σημειώσαμε τα εμβαδά των δ.στ3. Από το σχ. 31 βλέπουμε ότι κατά μήκος της δ.δ ΑΒΓΔΕΖ τα εμβαδά των διαγωνίων στ3 είναι:
α + 2ω΄, α + 3ω΄ + ω, α + 4ω΄ + 2ω, α + 5ω΄ + 3ω, α + 6ω΄ + 4ω που αποτελούν αριθμ. πρόοδο με διαφορά ω΄ + ω.
Στο σχ. 32 τα εμβαδά κατά μήκος της δ.δ ΑΒΓΔΕ είναι:
α + 3ω΄, α + 2ω΄ + ω, α + ω΄ + 2ω, α + 3ω που αποτελούν αριθμ. πρόοδο με διαφορά ω - ω΄.

Γενικεύομε τώρα την απόδειξη.

α) Έστω το πλέγμα ($A_0A_vB_vB_0$)ν x κ , (σχ. 33 και 34), ΘΚΙ ένα στ3 που βρίσκεται στην ρ^{η} ορ.λ και στην λ^{η} κατ.λ με την αρίθμηση του σχήματος και ΛΜΡ ένα στ3 που βρίσκεται στην $(\rho + 1)^{\eta}$ ορ.λ και $(\lambda + 1)^{\eta}$ κατ.λ. Θα αποδείξουμε ότι για την περίπτωση αυτού του σχήματος ισχύει: (ΛΜΡ) - (ΘΚΙ) = ω΄ + ω.



Σχ. 33

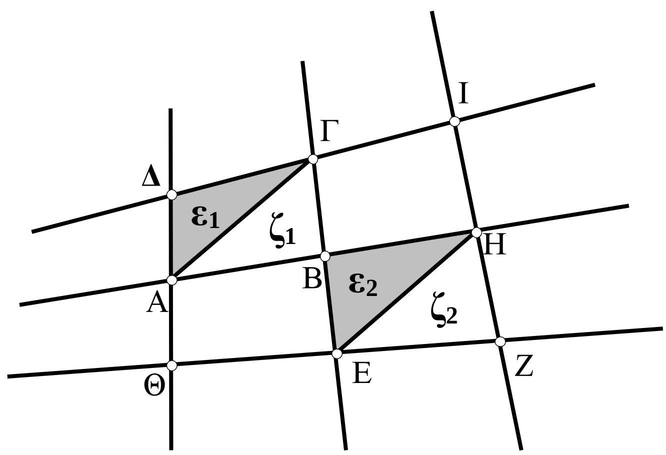


Σχ. 34

Σχηματίζουμε τα ομόλογα στ3 $Β_0Β_1Γ_1$, ($1^η$ ορ.λ, $1^η$ κατ.λ) και $Γ_{ρ-1}Γ_ρΖ$ ($ρ^η$ ορ., $1^η$ κατ).
Σύμφωνα με τους συμβολισμούς που ορίσαμε, θα είναι: $(Γ_{ρ-1}Γ_ρΖ) = α + (ρ - 1)ω΄$
Το εμβαδόν (ΘΚΙ) είναι ο $λ^{ος}$ όρος της αριθμ. προόδου με $1^ο$ όρο $Α_1 = (Γ_{ρ-1}Γ_ρΖ)$ και διαφορά ω. Άρα $(ΘΚΙ) = Α_1 + (λ - 1)ω = α + (ρ - 1)ω΄ + (λ - 1)ω$ (1)
Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου ΛΜΡ που ανήκει στην $(ρ + 1)^η$ ορ.λ και $(λ + 1)^η$ κατ.λ είναι $(ΛΜΡ) = α + ρω΄ + λω$ (2)
Με αφαίρεση των (1) και (2) βρίσκουμε: $(ΛΜΡ) - (ΘΚΙ) = ω΄ + ω$, άρα τα εμβαδά των διαγωνίων τριγώνων αυτού του είδους αποτελούν αριθμ. πρόοδο με διαφορά $ω΄ +ω$.

Στη περίπτωση του σχ. 34 θα αποδείξουμε ότι: $(ΛΜΡ) - (ΘΚΙ) = ω - ω΄$.

Πράγματι για το τρίγωνο ΛΜΡ που βρίσκεται στην $ρ^η$ ορ.λ και $(λ + 1)^η$ κατ.λ σύμφωνα με την (1) θα είναι: $(ΛΜΡ) = α + (ρ - 1)ω΄ + λω$ (1)
και για το τρίγωνο ΘΚΙ που βρίσκεται στην $(ρ + 1)^η$ ορ.λ και $λ^η$ κατ.λ, είναι:
$(ΘΚΙ) = α + ρω΄ + (λ - 1)ω$ (2).
Με αφαίρεση των (1) και (2) βρίσκουμε: $(ΛΜΡ) - (ΘΚΙ) = ω - ω΄$.
β) Έστω τα διαγώνια στ4 ΑΒΓΔ και ΕΖΗΒ (σχ. 35) με αντίστοιχα εμβαδά $κ_1$ και $κ_2$ που αποτελούνται από δύο διαγώνια τρίγωνα.
Είναι:
$κ_2 - κ_1 = (ε_2 + ζ_2) - (ε_1 + ζ_1) = (ε_2 - ε_1) + (ζ_2 - ζ_1) = (ω + ω΄) + (ω + ω΄) =2(ω + ω΄)$.
Για τα διαγώνια στ4 (ΑΘΕΒ) και (ΓΒΗΙ) (σχ. 35) με αντίστοιχα εμβαδά $λ_1$ και $λ_2$ ισχύει όμοια: $λ_2 - λ_1 = 2(ω - ω΄)$.



Σχ. 35

Π7

Σε κάθε πλέγμα ν x κ εμβαδού Ε

α) Το άθροισμα των εμβαδών δύο συμμετρικών στ3 είναι σταθερό και ίσο με $\frac{1}{νκ}$**Ε**

β) Το άθροισμα των εμβαδών δύο συμμετρικών στ4 είναι σταθερό και όσο με $\frac{2}{\nu\kappa}$ Ε

Θα δώσουμε δύο αποδείξεις. Μια καθαρά γεωμετρική και μια αλγεβρική με τη βοήθεια της Π6 και των τύπων των αριθμ. προόδων.

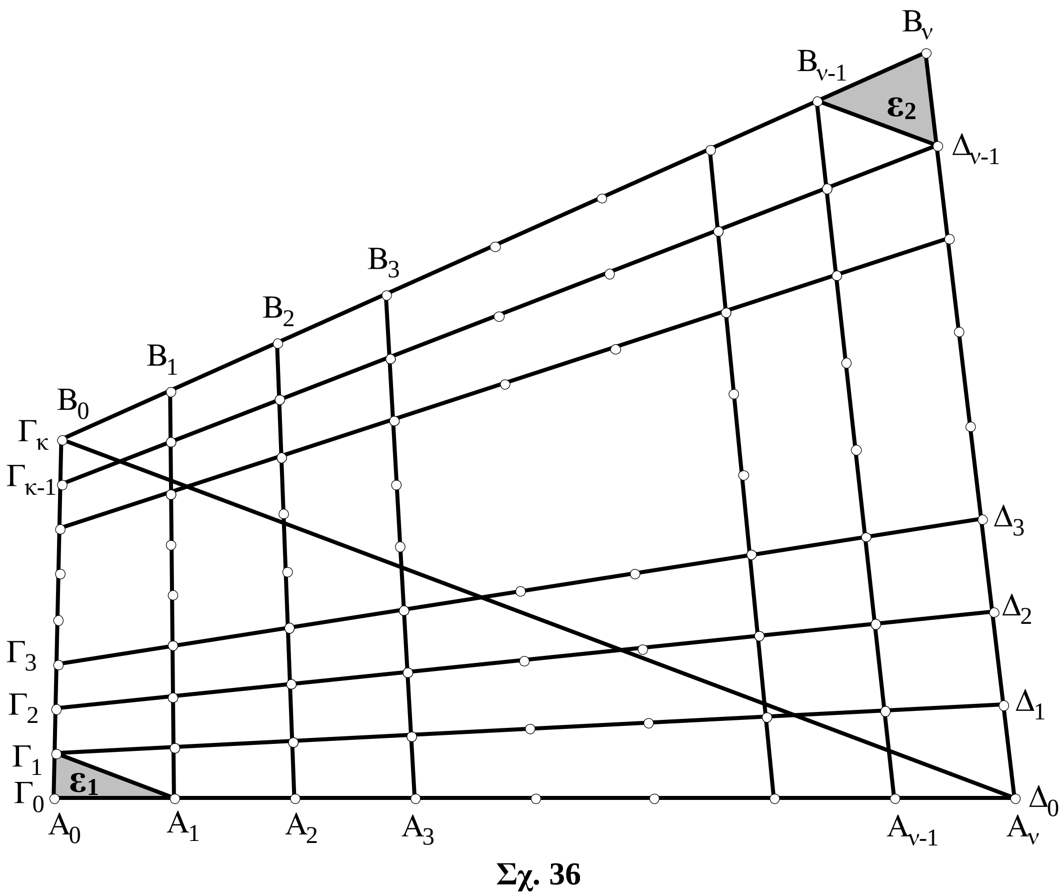
Απόδειξη Α΄ (Γεωμετρική)

Έστω το πλέγμα $(A_0A_\nu B_\nu B_0)\nu$ x κ

α) Αποδεικνύουμε πρώτα την πρόταση για δύο γωνιακά τρίγωνα. Υπάρχουν 2 ειδών τέτοια τρίγωνα. Τα τρίγωνα $A_0A_1\Gamma_1$ και $B_\nu B_{\nu-1}\Delta_{\kappa-1}$ του σχ. 36 και τα A_0A_1E και $B_\nu B_{\nu-1}Z$ του σχ. 37.

Για τα τρίγωνα του σχ. 36 φέρνουμε τη διαγώνιο $A_\nu B_0$. Έστω $(A_0A_1\Gamma_1) = \varepsilon_1$, $(B_\nu B_{\nu-1}\Delta_{\kappa-1}) = \varepsilon_2$, $(A_0A_\nu B_0) = E_1$ και $(B_\nu B_0 A_\nu) = E_2$

Τα τρίγωνα $A_0A_1\Gamma_1$ και $A_0A_\nu B_0$ έχουν τη γωνία A_0 κοινή.

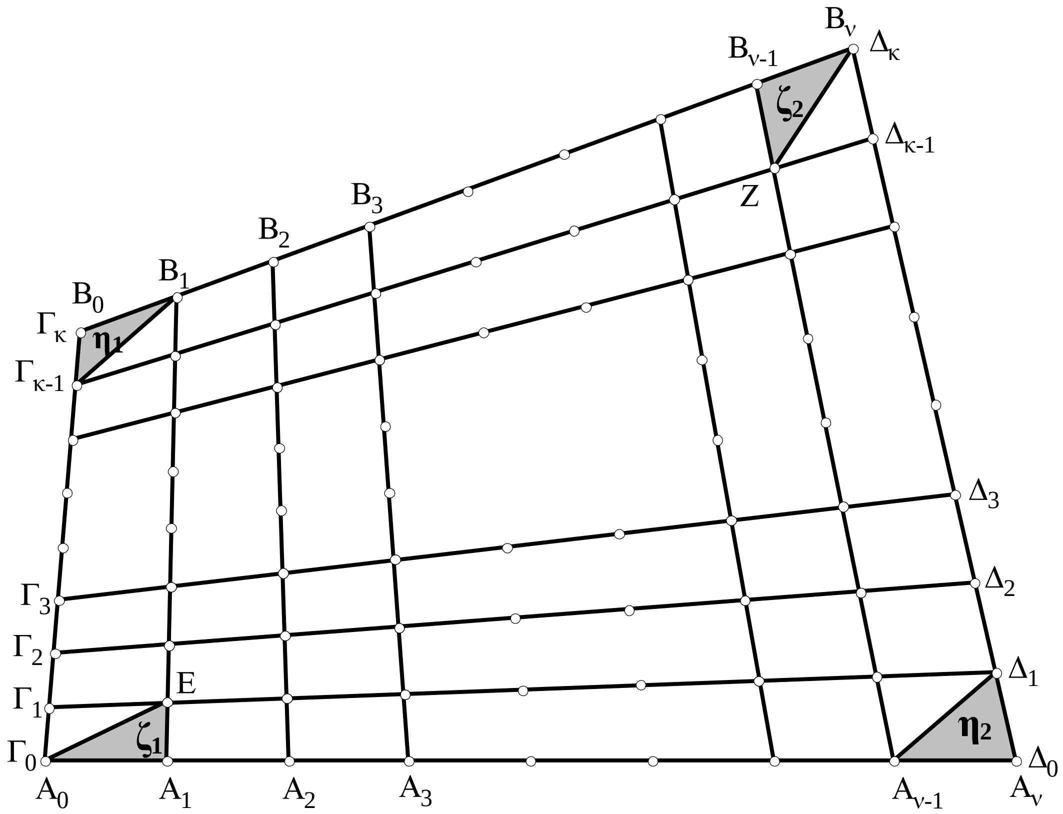


Σχ. 36

Άρα: $\frac{\varepsilon_1}{E_1} = \frac{(A_0A_1).(A_0\Gamma_1)}{(A_0A_\nu).(A_0B_0)} = \frac{\frac{1}{\nu}(A_0A_\nu)\frac{1}{\kappa}(A_0B_0)}{(A_0A_\nu).(A_0B_0)} = \frac{1}{\nu\kappa}$ άρα $\varepsilon_1 = \frac{1}{\nu\kappa}E_1$

Όμοια: $\varepsilon_2 = \frac{1}{\nu\kappa}E_2$, άρα $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{1}{\nu\kappa}(E_1 + E_2) = \frac{1}{\nu\kappa}E$

Αποδεικνύουμε τώρα την πρόταση για τα τρίγωνα A_0A_1E και $B_\nu B_{\nu-1}Z$ του σχ. 37



Σχ. 37

Έστω $(A_0A_1E) = \zeta_1$, $(B_\nu B_{\nu-1}Z) = \zeta_2$. Σχηματίζουμε και τα γωνιακά τρίγωνα του σχήματος με εμβαδά $(B_0B_1\Gamma_{\kappa-1}) = \eta_1$ και $(A_\nu A_{\nu-1}\Delta_1) = \eta_2$. Όπως αποδείξαμε μόλις (για τα τρίγωνα του σχ. 36 ισχύει: $\eta_1 + \eta_2 = \frac{1}{\nu\kappa}E$ (1).

Όμως σύμφωνα με την Π2 ισχύει:

$\zeta_1 + \eta_1 = \frac{1}{\kappa}(A_0A_1B_1B_0)$ και

$\zeta_2 + \eta_2 = \frac{1}{\kappa}(A_{\nu-1}A_\nu B_\nu B_{\nu-1})$

άρα $(\zeta_1 + \zeta_2) + (\eta_1 + \eta_2) = \frac{1}{\kappa}[(A_0A_1B_1B_0)+(A_{\nu-1}A_\nu B_\nu B_{\nu-1})]$ (2)

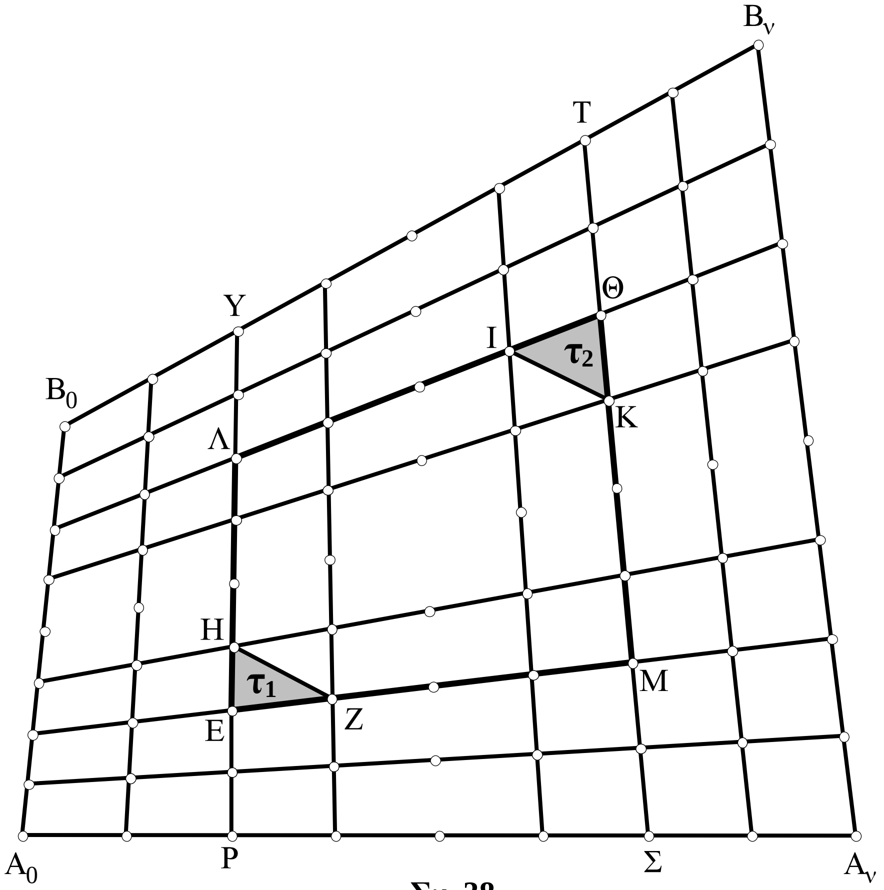
Θεωρώντας το νχκ πλέγμα ως ν-λωρίδα, σύμφωνα πάλι με την Π2 θα είναι:

$(A_0A_1B_1B_0) + (A_{\nu-1}A_\nu B_\nu B_{\nu-1}) = \frac{2}{\nu}E$

άρα η (2) γίνεται: $(\zeta_1 + \zeta_2) + (\eta_1 + \eta_2) = \frac{2}{\nu\kappa}E$ και λόγω της (1): $\zeta_1 + \zeta_2 = \frac{1}{\nu\kappa}E$

Αποδεικνύουμε τώρα την πρόταση για οποιαδήποτε συμμετρικά στ3.

Υπάρχουν δύο ειδών συμμετρικά στ3. Αυτά που έχουν τον προσανατολισμό του σχ. 38 και αυτά που έχουν τον προσανατολισμό του σχ. 39.



Σχ. 38

Αποδεικνύουμε πρώτα την πρόταση για τα τρίγωνα του α΄ είδους.
Σχηματίζουμε το «περιγεγραμμένο πλαίσιο» (συντομ. ΠΠ) με οδηγούς τα τρίγωνα ΕΖΗ και ΘΙΚ που ονομάζουμε για ευκολία τ_1 και τ_2 και τα εμβαδά τους ε_1 και ε_2 αντίστοιχα. Έστω ότι το τ_1 ανήκει στην λ^{η} κατ.λ και το τ_2 ανήκει στην ρ^{η} ορ.λ. Το ΠΠ αφήνει «ελέυθερες» 2(λ-1) κατ.λ και 2(κ - 1) ορ.λ.
Θεωρούμε το ν x κ πλέγμα ως ν-λωρίδα. Τότε σύμφωνα με την Π2 το άθροισμα των 2(λ - 1) συμμετρικών κατ.λ θα είναι ίσο με $\frac{2(\lambda-1)}{\nu}\mathrm{E}$. Επομένως το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΡΣΤΥ που απομένει αν από το αρχικό πλέγμα ν x κ διαγράψουμε τις 2(λ - 1) λωρίδες είναι ίσο με

$$\mathrm{E}' = \mathrm{E} - \frac{2(\lambda-1)}{\nu}\mathrm{E} = (1-\frac{2\lambda-2}{\nu})\mathrm{E} \qquad (1)$$

Το ΡΣΤΥ μπορούμε να το θεωρήσουμε ως κ-λωρίδα. Το ΠΠ αφήνει «ελέυθερες» 2(ρ - 1) ορ.λ που σύμφωνα με την Π2 έχουν άθροισμα εμβαδών ίσο με $\frac{2(\rho-1)}{\kappa}\mathrm{E}'$.
Επομένως το εμβαδόν του ΠΠ είναι:

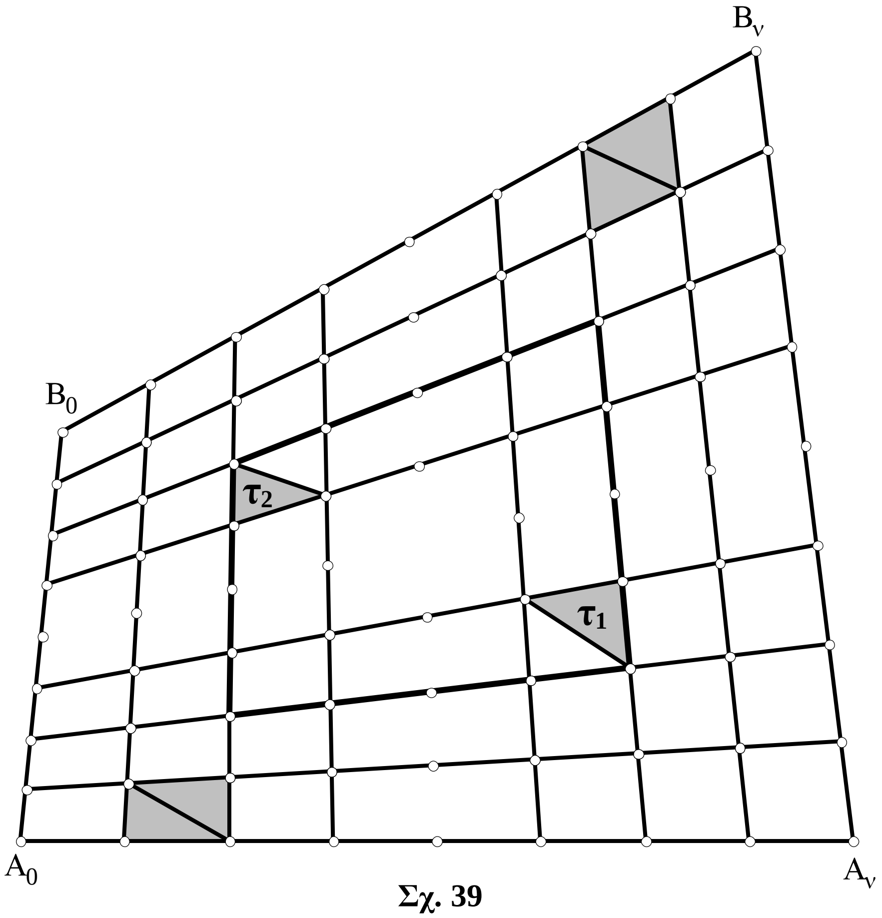
$$\mathrm{E}'' = \mathrm{E}' - \frac{2(\rho-1)}{\kappa}\mathrm{E}' = (1-\frac{2\rho-2}{\kappa})\mathrm{E}' \overset{(1)}{=} (1-\frac{2\rho-2}{\kappa})(1-\frac{2\lambda-2}{\nu})\mathrm{E} =$$

$$= \frac{(\kappa - 2\rho + 2)(\nu - 2\lambda + 2)}{\nu\kappa} E \qquad (2)$$

Το ΠΠ είναι πλέγμα (ν - 2λ + 2) x (κ - 2ρ + 2), άρα σύμφωνα με το πρώτο μέρος της απόδειξης θα είναι:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{1}{(\nu - 2\lambda + 2)(\kappa - 2\rho + 2)} E'' \overset{(2)}{=} \frac{1}{\nu\kappa} E$$

Η απόδειξη τώρα για τα τρίγωνα του σχ. 39 που έχουν διαφορετικό προσανατολισμό είναι όμοια. Σχηματίζουμε δηλ. το περιγεγραμμένο πλαίσιο όπως φαίνεται στο σχήμα και ακολουθούμε την ίδια ακριβώς διαδικασία.



Σχ. 39

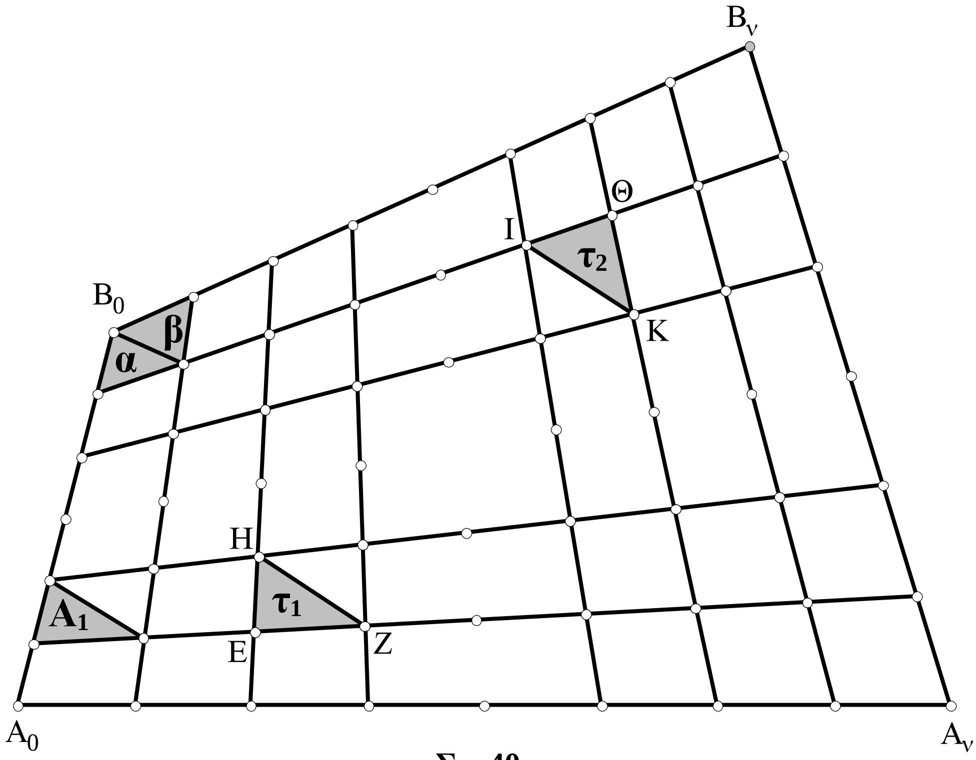
β) Δύο συμμετρικά στ4 χωρίζονται από μία διαγώνιο σε δύο ζεύγη συμμετρικών τριγώνων (σχ. 39), επομένως το άθροισμα των εμβαδών των στ4 είναι σύμφωνα με το (α): $\frac{1}{\nu\kappa} E + \frac{1}{\nu\kappa} E = \frac{2}{\nu\kappa} E$

Απόδειξη Β΄ (Αλγεβρική)

Έστω πάλι τα τρίγωνα τ_1 και τ_2 (σχ. 40) με εμβαδά αντίστοιχα ε_1 και ε_2. Σχηματίζουμε τα ομόλογα γωνιακά τρίγωνα του σχήματος και έστω α και β τα εμβαδά τους, ω η διαφορά κατά μήκος των ορ.λ και ω΄ κατά μήκος των κατ.λ. Αριθμούμε τις ορ.λ του

σχήματος από πάνω προς τα κάτω και τις κατακ. από αριστερά προς τα δεξιά. Έστω ότι το τ_1 βρίσκεται στην ρ^{η} ορ.λ και λ^{η} κατ.λ. Τότε το συμμετρικό του τ_2 θα βρίσκεται στην $(\kappa + 1 - \rho)^{\eta}$ ορ. και $(\nu + 1 - \lambda)^{\eta}$ κατ.λ. Το εμβαδόν A_1 του στ3 που βρίσκεται στην ρ^{η} ορ.λ και 1^{η} κατ.λ είναι $A_1 = \alpha + (\rho - 1)\omega'$. Το εμβαδόν αυτό είναι ο $1^{ος}$ όρος της αριθμ. προόδου στην ρ^{η} γραμμή. Επομένως ο $\lambda^{ος}$ όρος της (δηλ. το εμβαδόν ε_1) είναι:
$\varepsilon_1 = A_1 + (\lambda - 1)\omega$ ή

$$\boldsymbol{\varepsilon_1=\alpha+(\rho-1)\omega'+(\lambda-1)\omega} \qquad (1)$$



Σχ. 40

Θέτοντας $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ βρίσκουμε ότι τα εμβαδά όλων των στ3 της $\rho^{ης}$ λωρίδας που είναι ομόλογα με το τ_1 είναι:
$\alpha + (\rho - 1)\omega'$, $\alpha + (\rho - 1)\omega' + \omega$, $\alpha + (\rho - 1)\omega' + 2\omega$, … , $\alpha + (\rho - 1)\omega' + (\nu - 1)\omega$ με άθροισμα $\Sigma_\rho = \frac{\nu}{2}[2\alpha + 2(\rho-1)\omega' + (\nu-1)\omega]$ (2)

Θέτοντας στην (2) όπου $\rho = 1, 2, 3, \ldots, \kappa$, βρίσκουμε ότι το άθροισμα των εμβαδών των στ3 κάθε ορ.λ που είναι ομόλογα με το τ_1 είναι:

$\Sigma_1 = \frac{\nu}{2}[2\alpha + (\nu-1)\omega]$

$\Sigma_2 = \frac{\nu}{2}[2\alpha + 2\omega' + (\nu-1)\omega]$

……………………………

$\Sigma_\kappa = \frac{\nu}{2}[2\alpha + 2(\kappa-1)\omega' + (\nu-1)\omega]$

με άθροισμα:
$S=\Sigma_1+\Sigma_2+\ldots+\Sigma_\kappa=$

$$=\frac{\nu}{2}[2\kappa\alpha+2(1+2+\ldots+(\kappa-1))\omega'+\kappa(\nu-1)\omega]=\frac{\nu}{2}[2\kappa\alpha+\kappa(\kappa-1)\omega'+\kappa(\nu-1)\omega]=$$

$$\frac{\kappa\nu}{2}[2\alpha+(\kappa-1)\omega'+(\nu-1)\omega]$$

Όμοια βρίσκουμε ότι το άθροισμα των εμβαδών όλων των στ3 που είναι ομόλογα με το τ_2 είναι: $S'=\frac{\kappa\nu}{2}[2\beta+(\kappa-1)\omega'+(\nu-1)\omega]$

Επομένως το εμβαδόν ολόκληρου του πλέγματος είναι:

$E = S + S' = \frac{\kappa\nu}{2}[2\alpha+2\beta+2(\kappa-1)\omega'+2(\nu-1)\omega]$ ή

$$\mathbf{E=\nu\kappa[\alpha+\beta+(\kappa-1)\omega'+(\nu-1)\omega]} \qquad (3)$$

Για το εμβαδόν τώρα του στ3 που βρίσκεται στην ρ^{η} ορ.λ και λ^{η} κατ.λ βρήκαμε ότι
$\varepsilon_1 = \alpha + (\rho - 1)\omega' + (\lambda - 1)\omega$
Το συμμετρικό στ3 βρίσκεται στην $(\kappa - \rho + 1)^{\eta}$ ορ.λ και $(\nu - \lambda + 1)^{\eta}$ κατ.λ, επομένως σύμφωνα με τον ίδιο τύπο (1) είναι:

$\boldsymbol{\varepsilon_2 = \beta + (\kappa - \rho)\omega' + (\nu - \lambda)\omega}$ Άρα

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha + \beta + (\kappa - 1)\omega' + (\nu - 1)\omega \qquad (4)$$

Από τις (3) και (4) βρίσκουμε ότι $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{1}{\nu\kappa}E$ και η πρόταση αποδείχθηκε.

β) Η απόδειξη για τα στ4 γίνεται όπως και στη γεωμετρική απόδειξη.

Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει ως πόρισμα η εξής πρόταση:

<u>Π8</u>
Έστω πλέγμα ν x κ εμβαδού Ε. Αν ν και κ περιττοί (οπότε υπάρχουν κεντρική ορ.λ και κατ.λ) το εμβαδόν του κεντρικού στ4 είναι ίσο με $\boldsymbol{\frac{1}{\nu\kappa}E}$.

<u>Απόδειξη</u>
Το κεντρικό στ4 αποτελείται από δύο συμμετρικά στ3.

<u>Π9</u>
α) Σε κάθε πλέγμα το ελάχιστο και το μέγιστο στ4 είναι δύο γωνιακά στ4 που βρίσκονται στις απέναντι κορυφές του πλαισίου.

β) Τα ελάχιστα στ3 κάθε ομάδας βρίσκονται στο ελάχιστο στ4 και το μέγιστα στ3 κάθε ομάδας βρίσκονται στο μέγιστο στ4.

Απόδειξη

Έστω το πλέγμα (ΑΒΓΔ)ν x κ εμβαδού Ε.

α) Επειδή τα εμβαδά των στ4 κάθε λωρίδας αποτελούν αριθμ. πρόοδο, το ελάχιστο στ4 θα είναι ή ο $1^{ος}$ όρος ή ο τελευταίος της. Έτσι το ελάχιστο στ4 είναι γωνιακό.
Αν $ε_1$ είναι το εμβαδόν αυτού του στ4 και $ε_2$ το εμβαδόν του στ4 που βρίσκεται στην απέναντι κορυφή του πλαισίου, θα είναι $ε_1 + ε_2 = \frac{2}{νκ}Ε =$ σταθερό. Άρα το $ε_2$ είναι το μέγιστο στ4.

β) Αν $2ω > 0$ είναι η διαφορά των εμβαδών των στ4 κάθε ορ.λ και $2ω΄ > 0$ η διαφορά των εμβαδών των στ4 κάθε κατ.λ, τότε τα εμβαδά κάθε ομάδας στ3 ορ.λ αποτελούν αριθμ. πρόοδο με διαφορά $ω > 0$ και τα εμβαδά κάθε ομάδας στ3 κατ.λ αποτελούν αριθμ. πρόοδο με διαφορά $ω΄ > 0$. Επομένως το ελάχιστο στ3 κάθε ομάδας βρίσκεται στο ελάχιστο στ4 και το μέγιστο στ3 βρίσκεται στο μέγιστο στ4.

Π10

α) Αν δύο ορ. γραμμές ενός πλέγματος είναι παράλληλες τότε όλες οι ορ. γραμμές του πλέγματος είναι παράλληλες.

β) Στην περίπτωση αυτή τα στ4 κάθε ορ.λ είναι ισοδύναμα.

γ) Τα ομόλογα στ3 σε κάθε ορ.λ είναι ισοδύναμα.

Ισχύει και το αντίστροφο, δηλ.
Αν κατά μήκος μιας ορ.λ δύο στ4 (ή δύο ομόλογα στ3) είναι ισοδύναμα, το πλαίσιο του πλέγματος είναι τραπέζιο (ή παρ/μο) και τα στ4 (ή τα στ3) κατά μήκος οποιασδήποτε ορ.λ είναι ισοδύναμα.

Η πρόταση ισχύει προφανώς αφού όλες οι διαφορές των αντίστοιχων αριθμ. προόδων των εμβαδών των στ.3 είναι ίσες με 0.

Π11

Αν στο πλέγμα (ΑΒΓΔ)ν x κ είναι ΑΒ$\nparallel$ΓΔ, οι οριζόντιες γραμμές τέμνονται ανά δύο. Όλα τα σημεία τομής των ορ. γραμμών βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ΑΔ.

Απόδειξη

Το ότι οι γραμμές τέμνονται ανά δύο είναι άμεση συνέπεια της προηγούμενης πρότασης Π10.

Επειδή όλες οι πρόοδοι κατά μήκος των ορ.λ. έχουν την ίδια διαφορά, όλες οι πρόοδοι είναι γν. αύξουσες ή γν. φθίνουσες. Σύμφωνα με την Π4 όλα τα ζεύγη ορ. γραμμών τέμνονται προς το ίδιο μέρος της ΑΔ.

Δ4

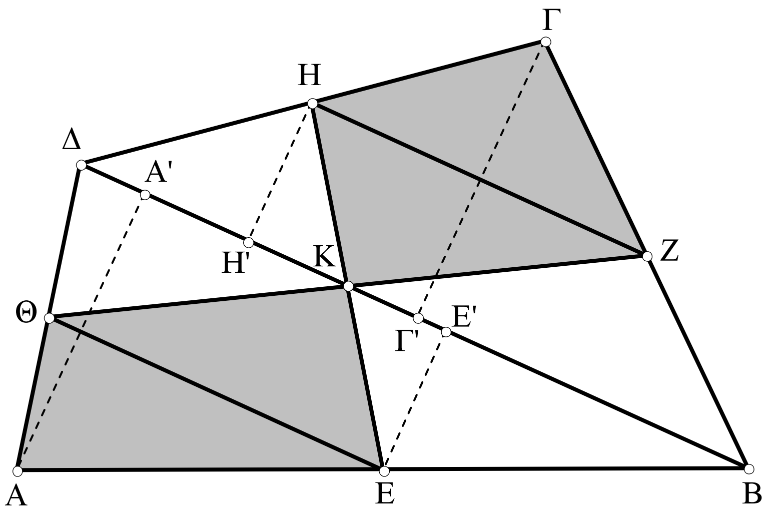
Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ, Η και Θ τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. (σχ. 41). Έστω ΕΗ $\cap$ ΘΖ = Κ. Αν η διαγώνιος ΒΔ περνά από το Κ τότε:

α) Η διαγώνιος ΒΔ διαιρεί το τετράπλευρο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα.

β) (ΑΕΚΘ) = (ΓΗΚΖ) και αντίστροφα, αν δηλ. (ΑΕΚΘ) = (ΓΗΚΖ), τότε η διαγώνιος ΒΔ διέρχεται από το μέσο της ΕΗ.

Απόδειξη

α) Φέρνουμε τις ΑΑ΄, ΓΓ΄, ΕΕ΄, ΗΗ΄ κάθετες στην ΒΔ.
Επειδή τρίγ. ΚΗΗ΄ = τρίγ. ΚΕΕ΄$\Rightarrow$ ΗΗ΄ = ΕΕ΄. Από το τρίγωνο ΑΒΑ΄ όπου ΑΕ = ΕΒ και ΕΕ΄//ΑΑ΄$\Rightarrow$ΑΑ΄ = 2ΕΕ΄. Όμοια ΓΓ΄ = 2ΗΗ΄ και επειδή ΗΗ΄ = ΕΕ΄ $\Rightarrow$ ΑΑ΄ = ΓΓ΄.
Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ έχουν κοινή βάση ΒΔ και ίσα ύψη ΑΑ΄ = ΓΓ΄ άρα είναι ισοδύναμα.



Σχ. 41

β) Είναι (ΕΚΒ) + (ΘΚΔ) $= \frac{1}{2}$ΒΚ.ΕΕ΄ $+ \frac{1}{2}$ΚΔ.ΕΕ΄ $= \frac{1}{2}$(ΒΚ + ΚΔ)ΕΕ΄ $= \frac{1}{2}$(ΑΒΔ)

Άρα (ΑΕΚΘ) = $\frac{1}{2}$(ΑΒΔ)

Όμοια (ΓΗΚΖ) = $\frac{1}{2}$(ΓΒΔ)

και επειδή (ΑΒΔ) = (ΓΒΔ) θα είναι (ΑΕΚΘ) = (ΓΗΚΖ)

Αντίστροφα

Αν ισχύει (ΑΕΚΘ) = (ΓΗΚΖ) και φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ και τις ΑΑ΄, ΓΓ΄, ΗΗ΄, ΕΕ΄$\perp$ΒΔ τότε:

τριγ ΚΘΕ = τριγ ΚΖΗ οπότε και (ΚΘΕ) = (ΚΖΗ), άρα και (ΑΕΘ) = (ΓΗΖ) $\Rightarrow \frac{1}{4}$(ΑΒΔ) = $\frac{1}{4}$(ΓΒΔ) $\Rightarrow$ (ΑΒΔ) =(ΓΒΔ) $\Rightarrow \frac{1}{2}$ΒΔ.ΑΑ΄ =$\frac{1}{2}$ΒΔ.ΓΓ΄$\Rightarrow$ 2ΕΕ΄ = 2ΗΗ΄ $\Rightarrow$ ΕΕ΄ = ΗΗ΄ άρα η ΒΔ διέρχεται από το μέσο Κ της ΕΗ.

Π12

Αν δύο διαδοχικά τμήματα μιας δ.δ ενός πλέγματος ν x κ βρίσκονται σε ευθεία τότε:

α) Ολόκληρη η δ.δ είναι ευθεία

β) Όλες οι δ.δ που είναι /σχ/ προς αυτή τη δ.δ είναι επίσης ευθ. τμήματα παράλληλα και ισαπέχουν μεταξύ τους.

γ) Αν ν = κ τότε η μία διαγώνιος του πλαισίου διαιρεί το πλαίσιο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα.

Αντίστροφα

Αν στο πλέγμα $A_0A_\nu B_\nu B_0$(ν x ν) η διαγώνιος $A_\nu B_0$ (ευθ. τμήμα) διαιρεί το τετράπλευρο $A_0A_\nu B_\nu B_0$ σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, τότε:

α) ω=ω΄ όπου ω και ω΄ οι διαφορές των αριθμητικών προόδων των εμβαδών των στ.3 κατά μήκος μιας ορ.λ και μιας κατ.λ αντίστοιχα.

β) Η δ.δ $A_\nu B_0$ (τεθλασμένη) ταυτίζεται με την διαγώνιο $A_\nu B_0$ (ευθ. τμήμα), με άλλα λόγια, η διαγώνιος $A_\nu B_0$ του τετραπλεύρου $A_0A_\nu B_\nu B_0$ διέρχεται από τους κόμβους του πλέγματος των κορυφών των στ4 κατά μήκος της δ.δ $A_\nu B_0$.

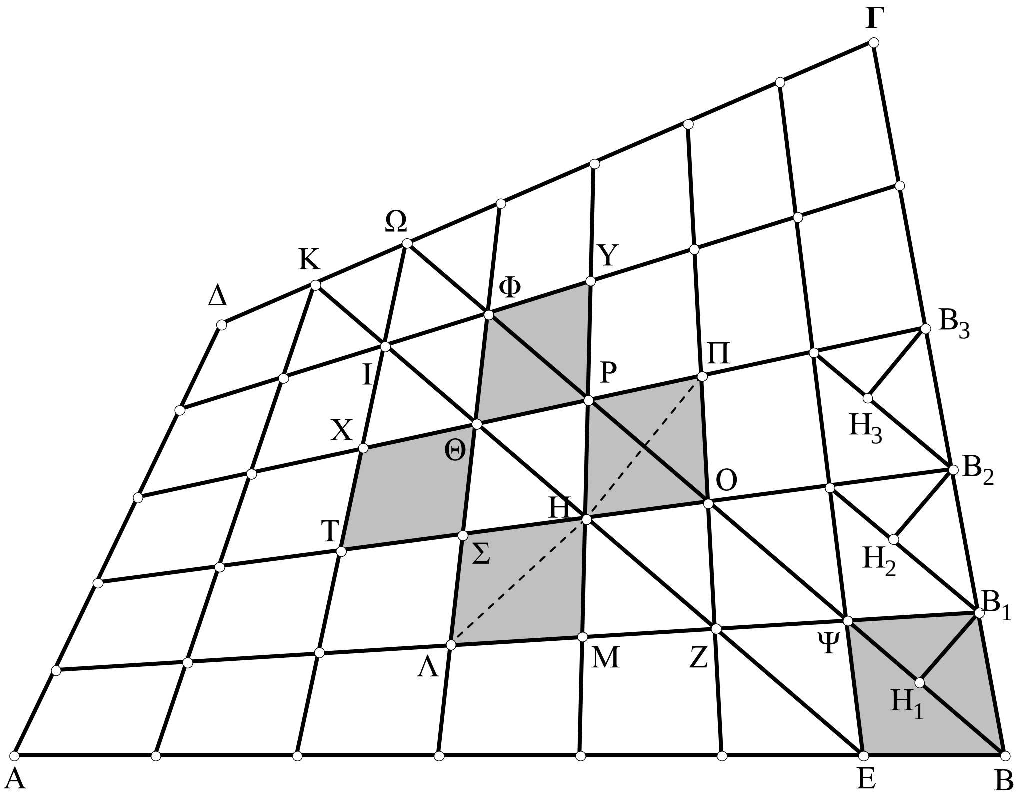
γ) Οι διαδοχικές δ.δ του πλέγματος που είναι /σχ/$A_\nu B_0$ είναι ευθ. τμήματα //$A_\nu B_0$ και ισαπέχουν μεταξύ τους.

δ) Τα μήκη μεταξύ των διαδοχικών κόμβων όλων των δ.δ που είναι παράλληλες προς την $A_\nu B_0$ αποτελούν αριθμ. πρόοδο. Όλες αυτές οι αριθμ. πρόοδοι έχουν την ίδια διαφορά $\frac{4\omega}{\upsilon}$ όπου υ η απόσταση δύο διαδοχικών παραλλήλων δ.δ.

ε) Τα μήκη των δ.δ που είναι παράλληλες προς την $A_\nu B_0$ σε καθένα από τα τρίγωνα $A_0A_\nu B_0$ και $B_\nu A_\nu B_0$ αποτελούν αριθμ. πρόοδο με διαφορά $\frac{1}{\nu}A_\nu B_0$.

Απόδειξη

Έστω το πλέγμα (ΑΒΓΔ)7 x 5 (σχ. 42). (Η απόδειξη δεν διαφέρει για πλέγμα ν x κ).



Σχ. 42

α) Έστω η δ.δ ΕΖΗΘΙΚ και έστω ότι τα ΖΗ, ΗΘ βρίσκονται σε ευθεία. Θα αποδείξουμε ότι η δ.δ ΕΖΗΘΙΚ είναι ευθεία.

Στο τετράπλευρο ΛΖΠΘ η διαγώνιος ΖΘ διέρχεται από το μέσο Η της ΜΡ. Σύμφωνα λοιπόν με το Λ4 θα είναι: (ΛΜΗΣ) = (ΗΟΠΡ). Κατά μήκος μιας δ.δ τα εμβαδά των στ4 αποτελούν αριθμ. πρόοδο και η διαφορά της προόδου είναι κοινή για όλες τις δ.δ /σχ/ με αυτήν και ίση με 2(ω - ω΄).

Άρα $2(ω - ω΄) = 0 \Rightarrow ω΄ = ω$.

Έτσι κατά μήκος κάθε δ.δ /σχ/ ΛΗΠ τα εμβαδά των στ4 είναι ίσα.

Επομένως (ΤΣΘΧ) = (ΘΡΥΦ) και σύμφωνα με το Λ4 η γραμμή ΗΘΙ είναι ευθεία.

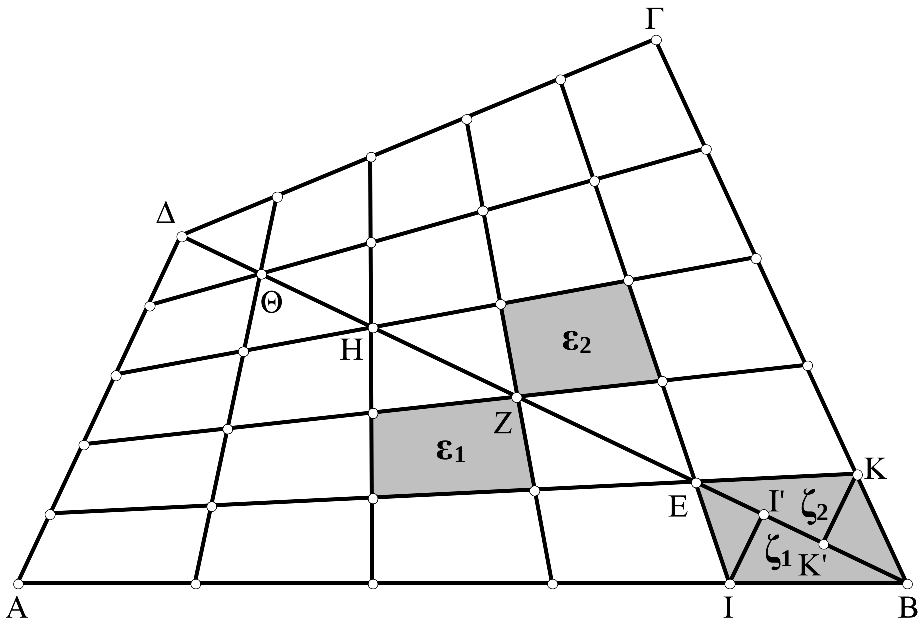
Όμοια αποδεικνύουμε ότι και ΘΙΚ καθώς και η ΕΖΗ είναι ευθείες. Άρα η δ.δ ΕΖΗΘΙΚ είναι ευθεία.

β) Αρκεί να γίνει η απόδειξη για τη διαδοχική δ.δ ΒΨΟΡΦΩ και αρκεί πάλι να γίνει η απόδειξη για δύο διαδοχικά τμήματά της ΟΡ και ΡΦ.

Στο τρίγωνο ΠΘΖ η ΡΟ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του, άρα ΟΡ//ΘΖ. Όμοια ΡΦ//ΗΙ και επειδή η ΖΗΘΙ είναι ευθεία, και η ΟΡΦ είναι ευθεία.

Επειδή τώρα $ΒΒ_1 = Β_1Β_2 = Β_2Β_3$ κ.λ.π, από τα ίσα ορθ. τρίγωνα $ΒΒ_1Η_1$, $Β_1Β_2Η_2$, $Β_2Β_3Η_3$ κ.λ.π προκύπτει $Β_1Η_1 = Β_2Η_2 = Β_3Η_3$ κ.λ.π δηλ. οι παράλληλες ισαπέχουν.

γ) Σε πλέγμα ν x ν η διαγώνιος ΒΔ διαιρεί το πλαίσιο σε δύο τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ (σχ 43). Τα τρίγωνα αυτά αποτελούνται από ισοδύναμα τετράπλευρα (γραμμοσκιασμένα) και ισοδύναμα τρίγωνα όπως τα ΒΙΕ και ΒΚΕ αφού έχουν κοινή βάση ΒΕ και ίσα ύψη ΙΙ΄ = ΚΚ΄ (σύμφωνα με το (β)).



Σχ. 43

<u>Αντίστροφα</u>

α) Δίνεται ότι $(A_0A_\nu B_0)=(B_\nu A_\nu B_0)$ (σχ. 44) (1)

Τα τρίγωνα $A_0A_1\Gamma_1$ και $A_0A_\nu B_0$ έχουν την γωνία A_0 κοινή.

Άρα

$$\frac{(A_0A_1\Gamma_1)}{(A_0A_\nu B_0)}=\frac{(A_0A_1)(A_0\Gamma_1)}{(A_0A_\nu)(A_0B_0)}=\frac{(\frac{1}{\nu}A_0A_\nu)(\frac{1}{\nu}A_0B_0)}{(A_0A_\nu)(A_0B_0)}=\frac{1}{\nu^2}\Rightarrow(A_0A_1\Gamma_1)=\frac{1}{\nu^2}(A_0A_\nu B_0)$$

Όμοια βρίσκουμε: $(B_\nu B_{\nu-1}\Delta_{\nu-1})=\frac{1}{\nu^2}(B_\nu A_\nu B_0)$

Επομένως: $(A_0A_1\Gamma_1) = (B_\nu B_{\nu-1}\Delta_{\nu-1})$ (2)

Διατηρώντας τους συμβολισμούς της Π7 και σύμφωνα με την ίδια θα είναι:

$(A_0A_1\Gamma_1)=\varepsilon_{\nu 1}=\alpha+(\nu-1)\omega'$

$(B_\nu B_{\nu-1}\Delta_{\nu-1})=\varepsilon_{1\nu}=\beta+(\nu-1)\omega$

Επομένως, λόγω της (2) θα έχουμε:

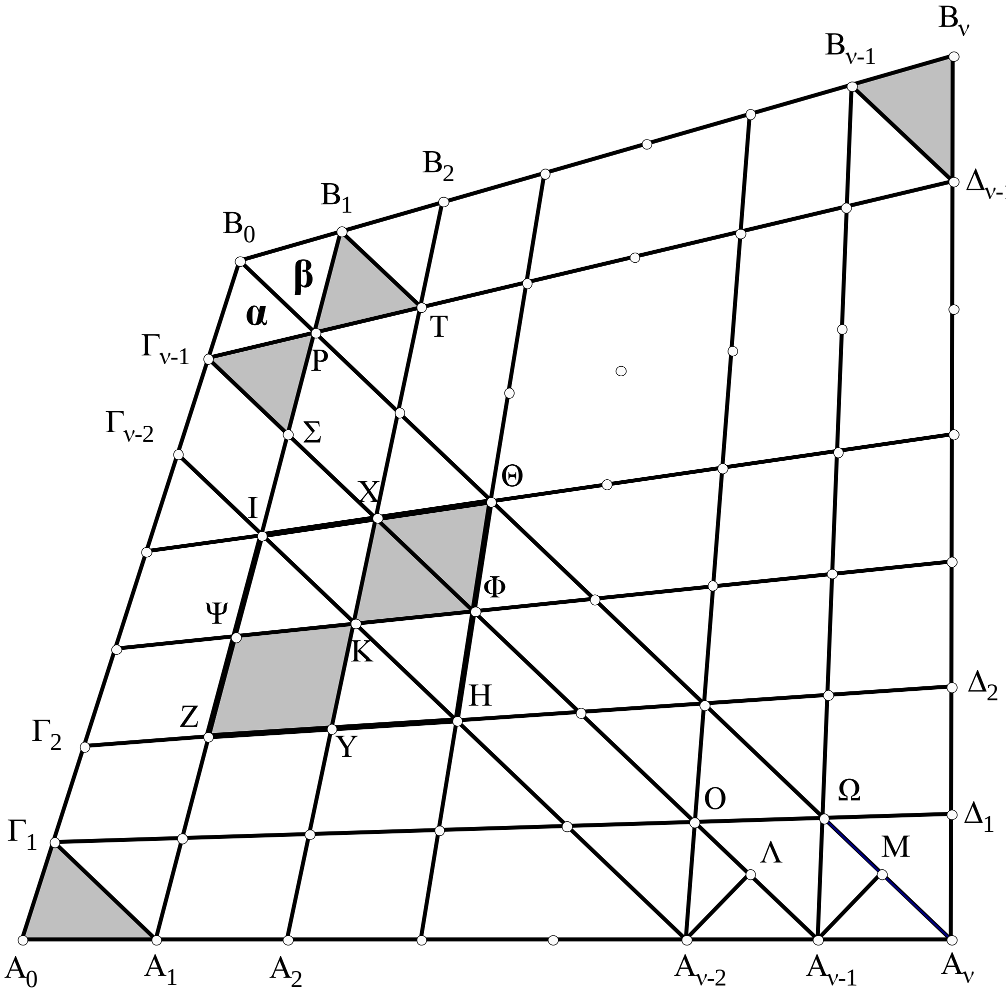
$\alpha+(\nu-1)\omega'=\beta+(\nu-1)\omega\Rightarrow\ \ \alpha-\beta=(\nu-1)(\omega-\omega')$ (3)

Τα τρίγωνα $\Gamma_{\nu-1}P\Sigma$ και PTB_1 είναι ίσα (Π-Γ-Π), άρα και ισοδύναμα, δηλ.

$(\Gamma_{\nu-1}P\Sigma)=(PTB_1)\Rightarrow\beta+\omega'=\alpha+\omega\Rightarrow\alpha-\beta=\omega'-\omega$ (4)

Από τις (3) και (4) προκύπτει $(\nu-1)(\omega-\omega')=\omega'-\omega\Rightarrow\omega'=\omega$

Από την (4) τώρα προκύπτει $\alpha = \beta$



Σχ. 44

β) Τα εμβαδά των τετραπλεύρων κατά μήκος μιας δευτερεύουσας διαγωνίου /σχ/A_0B_ν αποτελούν αριθμ. πρόοδο με διαφορά (από κάτω προς τα πάνω) $\omega - \omega' = 0$, δηλαδή είναι ισοδύναμα.

Επειδή τώρα στο τετράπλευρο ΖΗΘΙ είναι (ΖΥΚΨ) = (ΚΦΘΧ), σύμφωνα με το Λ4 β τα σημεία Η, Κ, Ι είναι συνευθειακά.

Το ίδιο συμβαίνει με κάθε τριάδα διαδοχικών σημείων κάθε δ.δ /σχ/$A_\nu B_0$ και βέβαια για την ίδια την $A_\nu B_0$.

Επομένως η δ.δ $A_\nu B_0$ καθώς και κάθε άλλη διαγώνιος /σχ/$A_\nu B_0$ είναι ευθ. τμήματα.

γ) Επειδή $\dfrac{A_0A_{\nu-1}}{A_0A_\nu} = \dfrac{\nu-1}{\nu} = \dfrac{A_0\Gamma_{\nu-1}}{A_0B_0}$ τα ευθ. τμήματα $A_{\nu-1}\Gamma_{\nu-1}$ και $A_\nu B_0$ είναι παράλληλα. Για τον ίδιο λόγο όλες οι δ.δ /σχ/$A_\nu B_0$ είναι παράλληλες προς την $A_\nu B_0$, άρα και μεταξύ τους παράλληλες.

Αποδεικνύουμε ότι τρεις τυχαίες διαδοχικές παράλληλες π.χ τις $A_\nu B_0$, $A_{\nu-1}\Gamma_{\nu-1}$ και

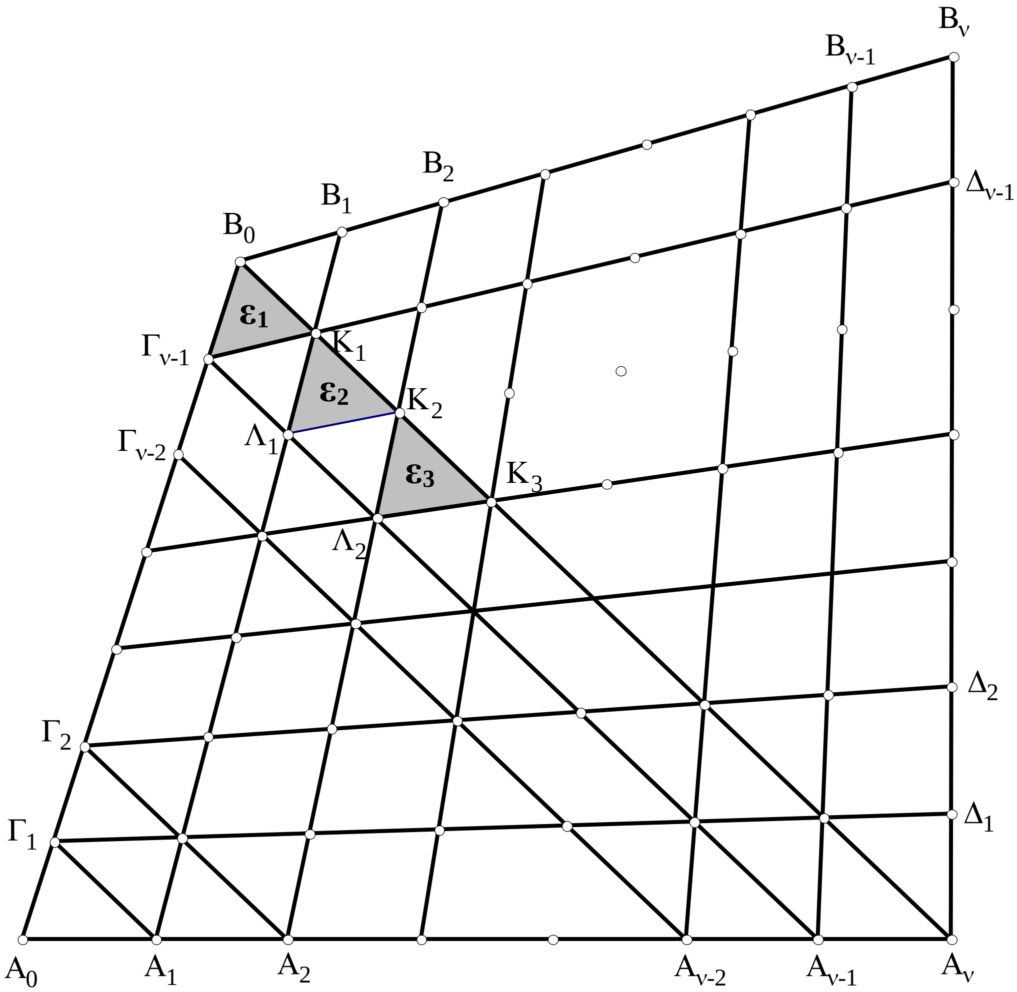
$A_{\nu-2}\Gamma_{\nu-2}$ ισαπέχουν. Φέρνουμε τις $A_{\nu-2}\Lambda$ και $A_{\nu-1}M$ κάθετες στις $A_{\nu-1}\Gamma_{\nu-1}$ και $A_{\nu}B_0$ αντίστοιχα.

Τα ορθ. τρίγωνα $A_{\nu-2}A_{\nu-1}\Lambda$ και $A_{\nu-1}A_{\nu}M$ είναι ίσα, άρα $A_{\nu-2}\Lambda = A_{\nu-1}M$ και η πρόταση αποδείχθηκε.

δ) Τα εμβαδά $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ των σκιασμένων τριγώνων (σχ. 45) αποτελούν αριθμ. πρόοδο με διαφορά $\omega' + \omega = 2\omega$ και έχουν ίσα ύψη υ και βάσεις $B_0K_1=\alpha_1$, $K_1K_2=\alpha_2$, $K_2K_3=\alpha_3$.

άρα $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \Rightarrow \dfrac{\alpha_2\upsilon}{2} - \dfrac{\alpha_1\upsilon}{2} = \dfrac{\alpha_3\upsilon}{2} - \dfrac{\alpha_2\upsilon}{2} \Rightarrow \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_2$ που σημαίνει ότι τα τμήματα μεταξύ διαδοχικών κόμβων κατά μήκος της διαγωνίου $A_{\nu}B_0$ αποτελούν αριθμ. πρόοδο. Η διαφορά της προόδου αυτής είναι ίση με $\lambda = 2 \cdot \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\upsilon} = \dfrac{4\omega}{\upsilon}$

Το ίδιο ισχύει και για τα τμήματα όλων των διαγωνίων $//A_{\nu}B_0$.



Σχ. 45

ε) Από τα όμοια τρίγωνα $A_0A_1\Gamma_1$ και $A_0A_\nu B_0$ έχουμε:

$$\frac{A_1\Gamma_1}{A_\nu B_0} = \frac{A_0A_1}{A_0A_\nu} = \frac{1}{\nu} \Rightarrow A_1\Gamma_1 = \frac{1}{\nu}A_\nu B_0$$

Όμοια βρίσκουμε ότι $A_2\Gamma_2 = \frac{2}{\nu}A_\nu B_0$ κ.ο.κ

Επομένως τα μήκη των διαγωνίων $A_1\Gamma_1$, $A_2\Gamma_2, \ldots A_{\nu-1}\Gamma_{\nu-1}$, $A_\nu B_0$ αποτελούν αριθμ. πρόοδο με διαφορά $\frac{1}{\nu}A_\nu B_0$

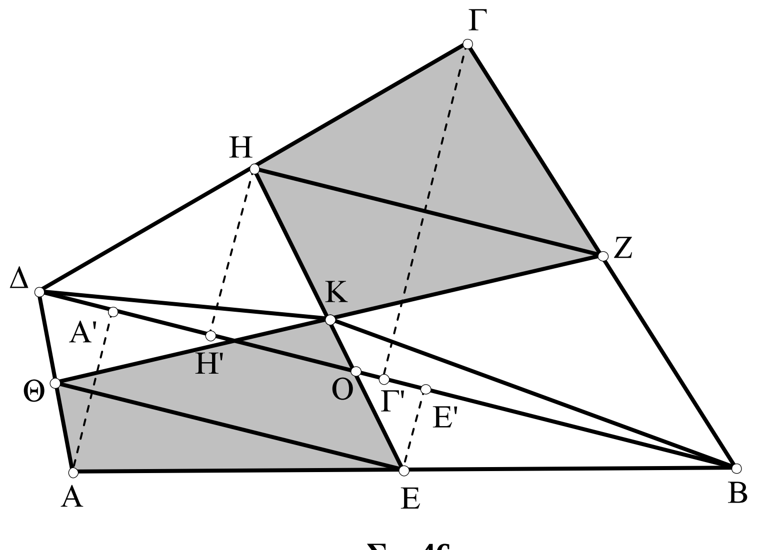
Δ5

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και η διαγώνιός του ΒΔ. Έστω Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. Έστω Κ = ΕΗ ∩ ΘΖ.
Αν (ΑΕΚΘ) < (ΓΗΚΖ) τότε η κορυφή Α βρίσκεται στο εσωτερικό της κυρτής γωνίας ∢ΒΚΔ ενώ η κορυφή Γ βρίσκεται στο εξωτερικό της ∢ΒΚΔ.

Απόδειξη

Τα ευθ. τμήματα ΕΗ και ΘΖ διχοτομούνται (σχ. 46).

Επομένως $K\overset{\triangle}{\Theta}E = K\overset{\triangle}{Z}H \Rightarrow$ (ΚΘΕ) = (ΚΖΗ).



Σχ. 46

Δίνεται ότι (ΑΕΚΘ) < (ΓΗΚΖ) $\Rightarrow$ (ΑΕΘ) + (ΚΕΘ) < (ΚΖΗ) + (ΓΗΖ) $\Rightarrow$
(ΑΕΘ) < (ΓΗΖ) (1)

Όμως $\frac{(A E\Theta)}{(AB\Delta)} = \frac{AE.A\Theta}{AB.A\Delta} = \frac{1}{4} \Rightarrow (AE\Theta) = \frac{1}{4}(AB\Delta)$

και όμοια $(\Gamma H Z) = \frac{1}{4}(\Gamma\Delta B)$

άρα η (1) γίνεται: $\frac{1}{4}(\text{ΑΒΔ}) < \frac{1}{4}(\text{ΓΒΔ}) \Rightarrow (\text{ΑΒΔ}) < (\text{ΓΒΔ})$ (2)

Φέρνουμε τις ΑΑ΄, ΓΓ΄, ΕΕ΄ και ΗΗ΄ $\perp$ΒΔ.

Από το τρίγωνο ΑΒΑ΄ όπου ΑΕ = ΕΒ και ΕΕ΄//ΑΑ΄$\Rightarrow$ ΕΕ΄ = $\frac{1}{2}$ΑΑ΄.

Όμοια ΗΗ΄ = $\frac{1}{2}$ΓΓ΄

Η (2) γίνεται: $\frac{1}{2}\text{ΒΔ.ΑΑ΄} < \frac{1}{2}\text{ΒΔ.ΓΓ΄} \Rightarrow \text{ΑΑ΄} < \text{ΓΓ΄} \Rightarrow 2\text{ΕΕ΄} < 2\text{ΗΗ΄} \Rightarrow \text{ΕΕ΄} < \text{ΗΗ΄}$

Έστω Ο = ΕΗ $\cap$ ΒΔ. Από τα όμοια τρίγωνα ΕΕ΄Ο και ΗΗ΄Ο έχουμε:

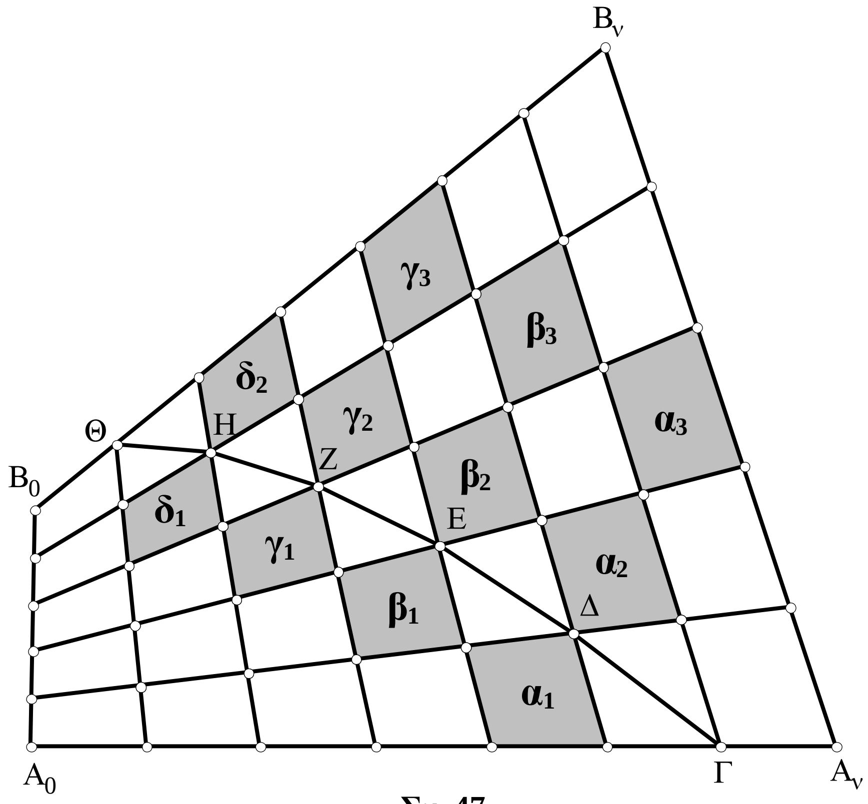
$$\frac{\text{ΟΕ}}{\text{ΟΗ}} = \frac{\text{ΕΕ΄}}{\text{ΗΗ΄}} < 1 \Rightarrow \text{ΟΕ} < \text{ΟΗ}$$

και επειδή ΚΕ=ΚΗ το Ο βρίσκεται μεταξύ Ε και Κ. Άρα το Κ βρίσκεται έξω από το τρίγωνο ΑΒΔ, επομένως το Α βρίσκεται μέσα στην κυρτή γωνία ΒΚΔ οπότε το Γ βρίσκεται στο εξωτερικό της γωνίας ΒΚΔ.

Π13

Οι δ.δ ενός πλέγματος εφόσον δεν είναι ευθ. τμήματα είναι κυρτές τεθλασμένες.

Απόδειξη



Σχ. 47

Έστω το πλέγμα $Α_0Α_νΒ_νΒ_0$(ν x κ) (σχ. 47) (στο σχήμα σχεδιάσαμε πλέγμα 7 x 5) και η δ.δ ΓΔΕΖΗΘ. Θα αποδείξουμε ότι η δ.δ είναι κυρτή.
Γνωρίζουμε ότι τα εμβαδά των διαγωνίων στ4 $α_1$, $α_2$, $α_3$, αποτελούν αριθμ. πρόοδο. Το ίδιο και τα $β_1$, $β_2$, $β_3$ καθώς και τα $γ_1$, $γ_2$, $γ_3$ και τα $δ_1$, $δ_2$. Όλες αυτές οι αριθμ. πρόοδοι έχουν την ίδια διαφορά, έστω λ.

Αν $α_1 = α_2$ τότε όπως αποδείξαμε στην Π12 όλες οι δ.δ που είναι /σχ/ προς την ΓΔΕΖΗΘ είναι ευθείες παράλληλες.

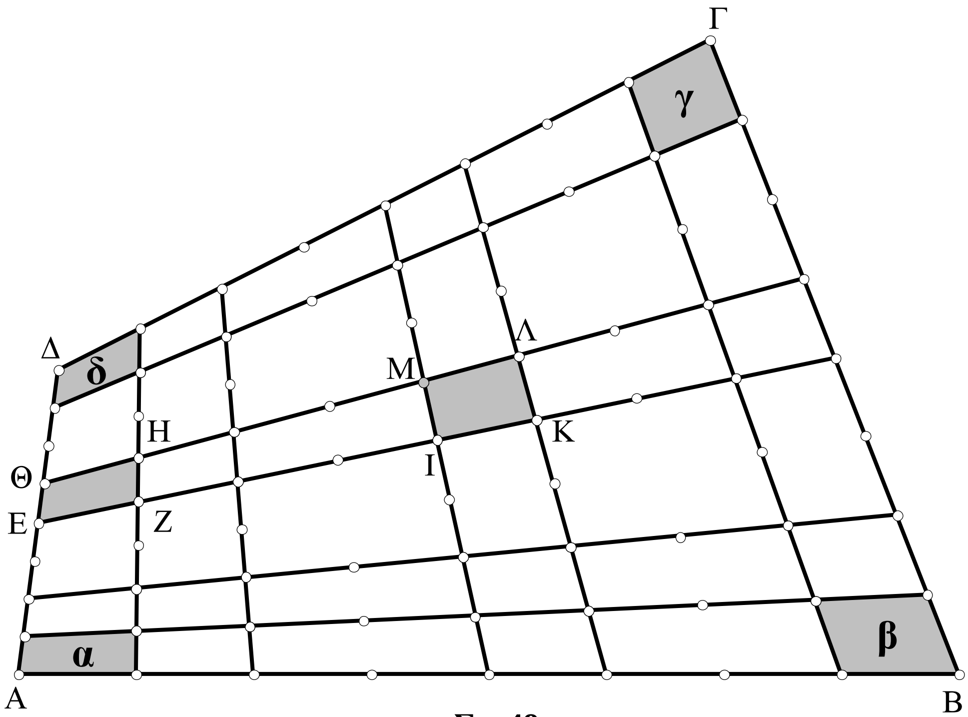
Αν $α_1 \neq α_2$ π.χ $α_1 < α_2$ τότε όλες οι παραπάνω πρόοδοι είναι γν. αύξουσες, δηλ. $α_1 < α_2$, $β_1 < β_2$, $γ_1 < γ_2$, $δ_1 < δ_2$.
Σύμφωνα με το Λ5 οι τεθλασμένες ΓΔΕ, ΔΕΖ, ΕΖΗ, ΖΗΘ έχουν την ίδια κυρτότητα, άρα η δ.δ ΓΔΕΖΗΘ είναι κυρτή.

Π14

Σε κάθε πλέγμα, το εμβαδόν οποιουδήποτε στ4 είναι γραμμικός συνδυασμός των εμβαδών 3 οποιωνδήποτε γωνιακών στ4 με ρητούς συντελεστές

Απόδειξη

Έστω το πλέγμα ΑΒΓΔ(ν x κ) (σχ. 48). Έστω α, β, γ, δ τα εμβαδά των 4 γωνιακών στ4. Τα εμβαδά των στ4 σε κάθε ορ.λ αποτελούν αριθμ. πρόοδο με διαφορά έστω ω (από αριστερά προς τα δεξιά) για όλες τις ορ.λ και τα εμβαδά των στ4 κάθε κατ.λ αποτελούν αριθμ. πρόοδο με διαφορά ω΄ (από κάτω προς τα πάνω).



Σχ. 48

Είναι λοιπόν $\beta = \alpha + (\nu - 1)\omega$ και $\delta = \alpha + (\kappa - 1)\omega'$.

Άρα $\omega = \dfrac{\beta-\alpha}{\nu-1}$ και $\omega' = \dfrac{\delta-\alpha}{\kappa-1}$ (1)

Το εμβαδόν $\varepsilon_{\rho\lambda}$ του στ4 ΙΚΛΜ που βρίσκεται στην ρ^{η} ορ.λ και στην λ^{η} κατ.λ βρίσκεται ως εξής:

Το εμβαδόν ΕΖΗΘ του στ4 που βρίσκεται στην ρ^{η} ορ.λ και στην 1^{η} κατ.λ είναι:

$A_1 = \alpha + (\rho - 1)\omega'$

Το A_1 είναι ο $1^{o\varsigma}$ όρος της αριθμ. προόδου των εμβαδών των στ4 της $\rho^{\eta\varsigma}$ ορ.λ και το εμβαδόν (ΙΚΛΜ) = $\varepsilon_{\rho\lambda}$ είναι ο $\lambda^{o\varsigma}$ όρος της. Άρα

$\varepsilon_{\rho\lambda} = A_1 + (\lambda - 1)\omega = \alpha + (\rho - 1)\omega' + (\lambda - 1)\omega$

και λόγω των (1):

$$\varepsilon_{\rho\lambda} = \alpha + \frac{\rho-1}{\kappa-1}(\delta-\alpha) + \frac{\lambda-1}{\nu-1}(\beta-\alpha) = \left(1-\frac{\rho-1}{\kappa-1}-\frac{\lambda-1}{\nu-1}\right)\alpha + \frac{\lambda-1}{\nu-1}\beta + \frac{\rho-1}{\kappa-1}\delta \qquad (2)$$

δηλαδή το $\varepsilon_{\rho\lambda}$ είναι γρ. συνδυασμός των εμβαδών α,β,δ με ρητούς συντελεστές.

Επειδή $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ $(=\dfrac{2}{\kappa\nu}E)$, αντικαθιστώντας στην (2) οποιοδήποτε από τα α, β, δ συναρτήσει των υπολοίπων, το εμβαδόν $\varepsilon_{\rho\lambda}$ γίνεται γρ. συνδυασμός 3 οποιωνδήποτε από τα α, β, γ, δ με ρητούς συντελεστές.