ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ[1]

Νικ. Ιωσηφίδης, Μαθηματικός – Φροντιστής, Βέροια

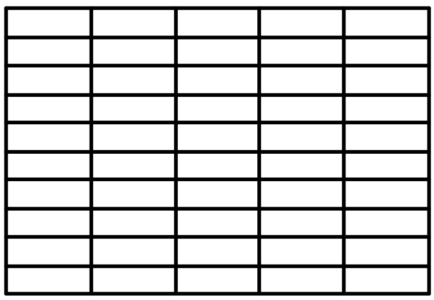
e-mail: iossifid@yahoo.gr

Ένα από τα προβλήματα που συναντούμε στα μαθηματικά είναι η καταμέτρηση μεγάλου πλήθους στοιχείων ενός συνόλου. Τέτοια προβλήματα είναι:

1) **Να βρεθεί το πλήθος όλων των φυσικών μικρότερων του 1 000 000 που δεν περιέχουν το ψηφίο 5.**

2) **Να βρεθεί το πλήθος όλων των διαγωνίων ενός κυρτού πολυγώνου με 100 πλευρές.**

3) **Στο παρακάτω πλέγμα 5Χ10 να βρεθεί το πλήθος όλων των ορθογωνίων (όλων των μεγεθών).**



Είναι φανερό ότι η καταμέτρηση του αντίστοιχου πλήθους χωρίς κάποια τεχνική, είναι μακροχρόνια ή δύσκολη ή αδύνατη. Χρειάζεται λοιπόν κάποια μέθοδος που θα κάνει τους υπολογισμούς πιο γρήγορα. Με αυτούς τους τρόπους ασχολείται το κεφάλαιο των μαθηματικών που λέγεται **ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ**.

Θα δούμε εδώ κάποιες από τις έννοιες και τις θεωρίες της Συνδυαστικής.

Θα αρχίσουμε με μερικά παραδείγματα που δεν απαιτούν γνώσεις από τη Συνδυαστική.

1) Σ' ένα παιχνίδι συμμετέχουν 10 παίκτες. Το παιχνίδι παίζεται μεταξύ δύο παικτών. Σε κάθε παιχνίδι ο ένας παίκτης είναι ο νικητής (δεν υπάρχει ισοπαλία).

---

[1] Οι σημειώσεις αυτές γράφτηκαν για την Γ΄ Γυμνασίου των καλοκαιρινών σχολείων της Ημαθίας

Το παιχνίδι σταματά όταν μείνει μόνο ένας παίκτης που είναι ο νικητής. Πόσα παιχνίδια πρέπει να παιχθούν ώσπου να τελειώσει το παιχνίδι;

Λύση

Η λύση είναι απλή και σύντομη. Παρά τούτο, όταν το πρόβλημα δίνεται στους μαθητές οι λύσεις είναι πολύπλοκες και συνήθως λαθεμένες.
Δίνουμε εδώ τη σύντομη λύση:

Σε κάθε παιχνίδι οι παίκτες λιγοστεύουν κατά 1. Επομένως για να μείνει μόνο ένας παίκτης, απαιτείται να παιχτούν $10-1=9$ παιχνίδια

2) Να βρεθεί το πλήθος των ακεραίων μεταξύ 1 και 1 000 που διαιρούνται δια 13

Λύση

Κάθε αριθμός που διαιρείται δια 13 είναι της μορφής $13\cdot\nu$ όπου ν φυσικός. Πρέπει λοιπόν να βρούμε πόσοι είναι οι φυσικοί αριθμοί ν για τους οποίους ισχύει:

$$1\le 13\nu \le 1000 \Leftrightarrow \frac{1}{13}\le \nu \le \frac{1000}{13} \quad \acute{\eta} \quad \frac{1}{13}\le \nu \le 76\frac{12}{13}$$

Επομένως ν = 1, 2, 3, …, 76 δηλαδή υπάρχουν 76 πολλαπλάσια του 13 μεταξύ 1 και 1 000

3) Το χαρτί Α4 είναι το φωτοτυπικό χαρτί διαστάσεων 21 cm Χ 29,7 cm.
Ένα τέτοιο χαρτί έχει πάχος 0,01 cm. Διπλώνουμε το χαρτί στη μέση, κατόπιν πάλι στη μέση κ.ο.κ κάνουμε 20 διπλώσεις.
Πόσο είναι το πάχος του τελικού διπλωμένου χαρτιού;
Είναι λογικό το αποτέλεσμα; Πως εξηγείται το παράδοξο αυτό αποτέλεσμα;

Λύση

Με το πρώτο δίπλωμα, το πάχος του χαρτιού διπλασιάζεται. Με το επόμενο δίπλωμα ξαναδιπλασιάζεται, δηλ. το πάχος του αρχικού χαρτιού πολλαπλασιάζεται με το 2.2 = 4. Με κάθε νέο δίπλωμα το πάχος του χαρτιού γίνεται διπλάσιο. Έτσι με τα 20 διπλώματα το πάχος του χαρτιού θα είναι κατά $\underbrace{2\cdot 2\cdot ...\cdot 2}_{20\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\epsilon\varsigma}=2^{20}$ φορές μεγαλύτερο του αρχικού πάχους.
Έτσι το τελικό πάχος θα είναι:

$$2^{20}\cdot 0,01\mathrm{cm}=1\ 048\ 576\cdot 0,01=10\ 485,76\mathrm{cm}=104,8576\mathrm{m}$$

Το αποτέλεσμα φαίνεται παράλογο, ότι δηλαδή το τελικό πάχος του χαρτιού θα είναι μεγαλύτερο από 100 μέτρα.
Οι υπολογισμοί όμως δεν είναι λάθος. Αν μπορούσαμε να διπλώσουμε το χαρτί 20 φορές, αυτό το πάχος θα είχε το τελικό χαρτί.
Το συμπέρασμα είναι ότι δεν μπορούμε να διπλώσουμε ένα χαρτί τόσες φορές. Αν αυτό δεν σας πείθει, δοκιμάστε το.

4) Τοποθετούμε όλους τους αριθμούς 1, 2, 3, …, 999 τον ένα δίπλα στον άλλο (χωρίς κενά) και σχηματίζουμε τον αριθμό 1234567891011121314…998999. Στον αριθμό αυτό να βρεθεί ποιο είναι το ψηφίο που κατέχει την 2 008^{η} θέση.

Λύση

Με τους μονοψήφιους 1, 2, 3, …, 9 έχουμε γράψει 9 ψηφία.

Οι διψήφιοι 10, 11, 12, …, 99 είναι σε πλήθος $99-9-=90$ και έχουν συνολικά $2\cdot 90=180$ ψηφία.
Με μονοψήφιους και διψήφιους έχουμε γράψει 9 + 180 = 189 ψηφία, δηλαδή δεν φτάσαμε στο 2 008^{ο} ψηφίο.
Οι τριψήφιοι 100, 101, 102, …, 999 είναι σε πλήθος 999 – 99 = 900 και έχουν συνολικά 3.900 = 2 700 ψηφία. Μαζί με τους προηγούμενους (μονοψήφιους και διψήφιους) έχουν 189 + 2 700 = 2 889 ψηφία, δηλαδή αν γράψουμε μονοψήφιους, διψήφιους και τριψήφιους ξεπερνάμε τη 2008^{η} θέση.
Το 2 008^{ο} ψηφίο λοιπόν είναι ένα ψηφίο από τους τριψήφιους. Αυτό βρίσκεται ως εξής:
Οι μονοψήφιοι και διψήφιοι έχουν όπως είπαμε συνολικά 189 ψηφία. Αν αφαιρέσουμε 2 008 – 189 = 1 819. Αυτό σημαίνει ότι το 2 008^{ο} ψηφίο είναι το 1 819^{ο} ψηφίο στην ακολουθία των τριψηφίων 100, 101, 102, …, 999
Επειδή η διαίρεση 1 819 : 3 δίνει πηλίκο 606 και υπόλοιπο 1, υπάρχουν 606 τριψήφιοι πριν φτάσουμε στο 1 819^{ο} ψηφίο και το 1 819^{ο} ψηφίο είναι το πρώτο ψηφίο του επόμενου, δηλ. του 607^{ου} αριθμού στην παραπάνω ακολουθία. Με τους 606 τριψήφιους φτάνουμε στον αριθμό 99 + 606 = 705, επομένως το ψηφίο που ζητούμε είναι το πρώτο ψηφίο του επόμενου αριθμού 706, δηλαδή το 7.

Το δεντροδιάγραμμα

Το δεντροδιάγραμμα είναι μια σχηματική παράσταση των διαφόρων δυνατών αποτελεσμάτων μιας διαδικασίας. Η διαδικασία αυτή είναι σύνθετη και πραγματοποιείται από την εκτέλεση διαφόρων άλλων απλούστερων διαδικασιών $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_\kappa$.
Για την κατασκευή του, ξεκινούμε από έναν κόμβο που ονομάζεται αρχή, και κατασκευάζουμε διάφορους κλάδους (βέλη) καθένας από τους οποίους καταλήγει σε ένα δυνατό αποτέλεσμα της πρώτης διαδικασίας Δ_1.

Από κάθε δυνατό αποτέλεσμα της πρώτης διαδικασίας Δ_1, κατασκευάζουμε νέους κλάδους καθένας από τους οποίους καταλήγει σε ένα δυνατό αποτέλεσμα της διαδικασίας Δ_2.

Από κάθε δυνατό αποτέλεσμα της δεύτερης διαδικασίας Δ_2, κατασκευάζουμε νέους κλάδους καθένας από τους οποίους καταλήγει σε ένα δυνατό αποτέλεσμα της διαδικασίας Δ_3 κ.ο.κ μέχρις ότου τελειώσουν όλες οι επιμέρους διαδικασίες.

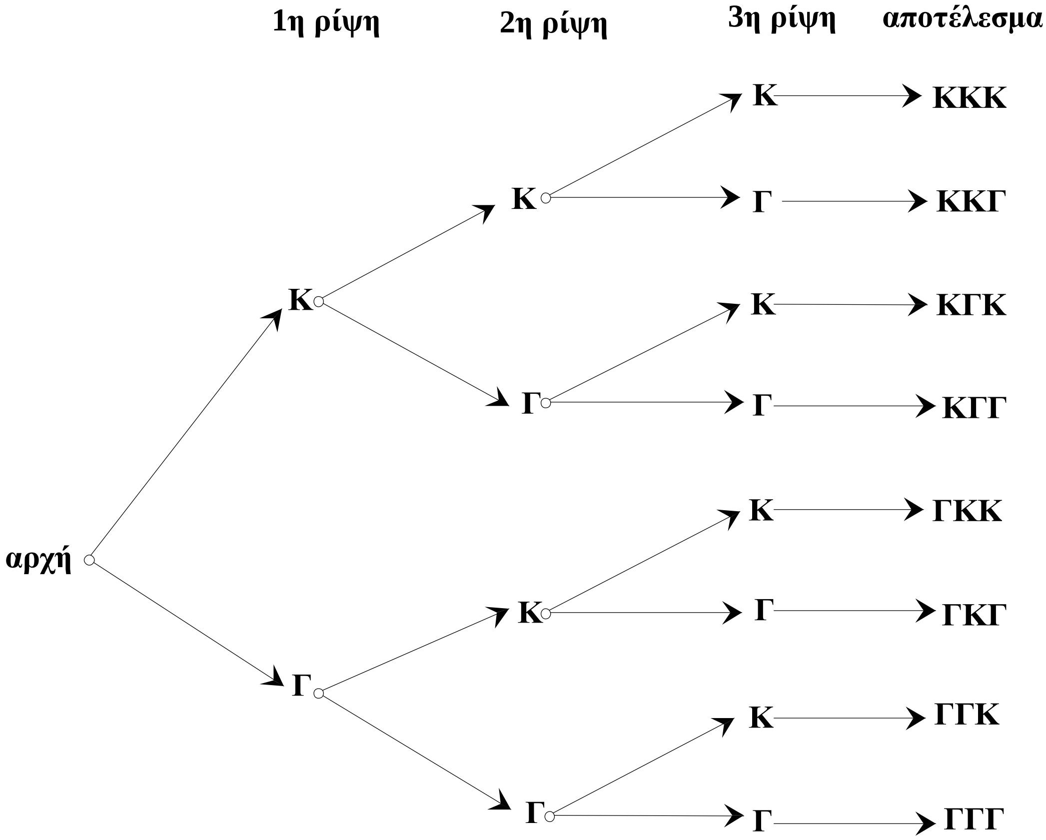
Μπορούμε κατόπιν, ξεκινώντας από την αρχή και ακολουθώντας τις διακλαδώσεις του δεντροδιαγράμματος να βρούμε όλα τα δυνατά αποτελέσματα της σύνθετης διαδικασίας και να τα καταμετρήσουμε.

Η χρήση του δεντροδιαγράμματος φαίνεται στα παραδείγματα που ακολουθούν.

5) Ρίχνουμε ένα κέρμα 3 φορές και σημειώνουμε τις ενδείξεις Κ (κορώνα) ή Γ (γράμματα). Να καταγράψετε όλα τα δυνατά αποτελέσματα.
Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα αν ρίξουμε το κέρμα 10 φορές;

Λύση

Τα δυνατά αποτελέσματα φαίνονται στο παρακάτω δεντροδιάγραμμα από το οποίο προκύπτει ότι υπάρχουν συνολικά 8 δυνατά αποτελέσματα.



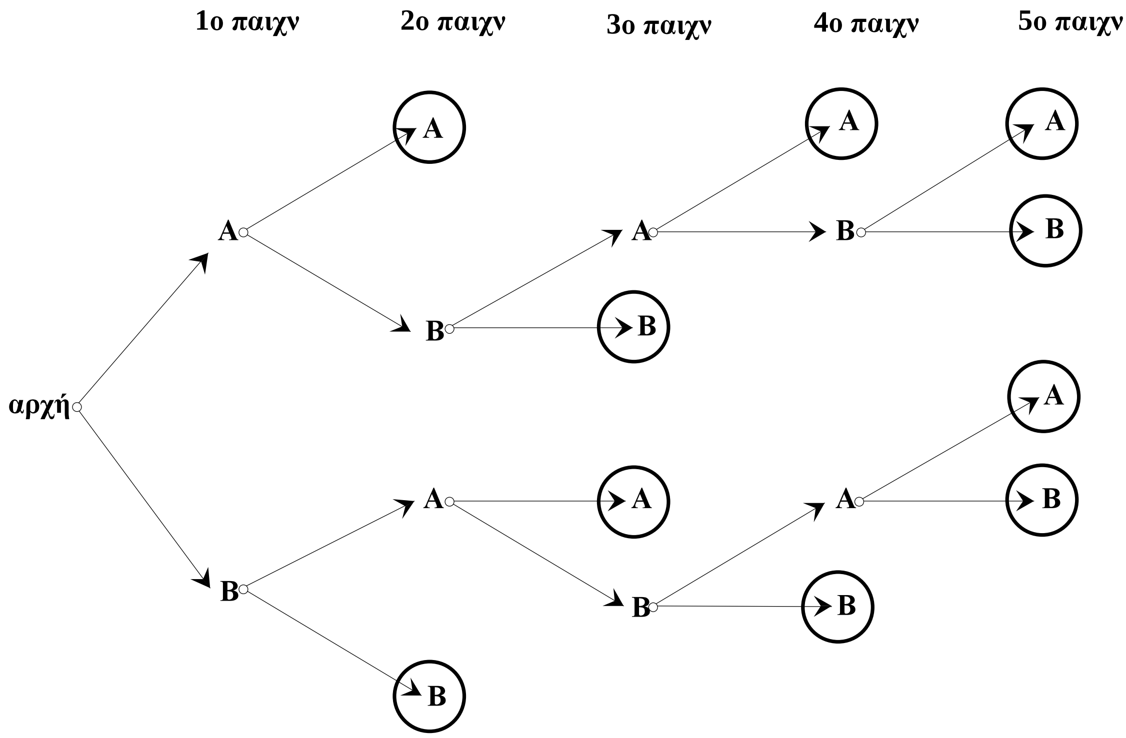
Παρατηρούμε ότι για 3 ρίψεις, τα δυνατά αποτελέσματα είναι $2\cdot 2\cdot 2=8$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε ότι για 10 ρίψεις, τα δυνατά αποτελέσματα είναι $\underbrace{2\cdot 2\cdot ...\cdot 2}_{10\,\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma}=2^{10}=1024$

6) Οι Α και Β κάνουν έναν αγώνα 5 το πολύ παιχνιδιών. Ισοπαλία δεν υπάρχει. Όποιος κερδίσει 2 συνεχόμενα παιχνίδια ή 3 συνολικά παιχνίδια είναι ο νικητής. Με πόσους τρόπους μπορεί να τερματιστεί ο αγώνας;

<u>Λύση</u>

Οι δυνατοί τρόποι φαίνονται στο παρακάτω δεντροδιάγραμμα:



Ο κύκλος γύρω από κάθε αποτέλεσμα σημαίνει ότι τελειώνει ο αγώνας.
Από το δεντροδιάγραμμα προκύπτει ότι υπάρχουν 10 δυνατοί τρόποι έκβασης του αγώνα και είναι οι παρακάτω.
Με 2 παιχνίδια: ΑΑ, ΒΒ
Με 3 παιχνίδια: ΑΒΒ, ΒΑΑ
Με 4 παιχνίδια: ΑΒΑΑ, ΒΑΒΒ
Με 5 παιχνίδια: ΑΒΑΒΑ, ΑΒΑΒΒ, ΒΑΒΑΑ, ΒΑΒΑΒ

Βασική αρχή της απαρίθμησης

Αν για να γίνει μια διαδικασία Δ, πρέπει να γίνουν οι διαδικασίες $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_\kappa$ και

	η	Δ_1 μπορεί να γίνει με ν_1 τρόπους,
αφού γίνει η Δ_1,	η	Δ_2 μπορεί να γίνει με ν_2 τρόπους,
αφού γίνει η Δ_2,	η	Δ_3 μπορεί να γίνει με ν_3 τρόπους,
………………………………………………………		
αφού γίνει η $\Delta_{\kappa-1}$,	η	Δ_κ μπορεί να γίνει με ν_κ τρόπους,

τότε η διαδικασία Δ μπορεί να γίνει με $\nu_1 \cdot \nu_2 \cdot ... \cdot \nu_\kappa$ τρόπους.

Η αλήθεια της πρότασης αυτής θα φανεί με τα παραδείγματα που ακολουθούν.

ΠΡΟΣΟΧΗ:
Πρέπει να ελέγχουμε αν με την παραπάνω διαδικασία τα αποτελέσματα είναι διαφορετικά ή μήπως υπάρχουν ταυτόσημα αποτελέσματα, οπότε η παραπάνω

αρχή δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Θα δείξουμε πως συμβαίνει αυτό με παραδείγματα.

Πρέπει να τονιστεί ότι οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει κάποια από τις παραπάνω διαδικασίες Δ_λ πρέπει να υπολογίζονται με την προϋπόθεση ότι έχουν γίνει οι προηγούμενες διαδικασίες $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_{\lambda-1}$. Αυτό σε άλλες περιπτώσεις έχει σημασία, σε άλλες περιπτώσεις όχι.

Παραδείγματα

7) Πόσους τριψήφιους μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα ψηφία 2, 4, 6 και 8;

Λύση

Τονίζουμε εδώ ότι το πρόβλημα δεν μας υποχρεώνει τα ψηφία του τριψηφίου να είναι όλα διαφορετικά. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο ψηφίο 2 ή και 3 φορές, δηλαδή τριψήφιοι σαν τους 242 ή 444 ή 662 είναι δεκτοί.

Για να σχηματίσουμε έναν τριψήφιο αριθμό, γράφουμε πρώτα το ψηφίο των εκατοντάδων (διαδικασία Δ_1), κατόπιν το ψηφίο των δεκάδων (διαδικασία Δ_2) και τέλος το ψηφίο των μονάδων (διαδικασία Δ_3).

Βρίσκουμε με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει κάθε διαδικασία

Διαδικασία Δ_1: Επιλογή του ψηφίου των εκατοντάδων:
Το ψηφίο των εκατοντάδων μπορεί να επιλεγεί με $\nu_1 = 4$ τρόπους (2 ή 4 ή 6 ή 8)

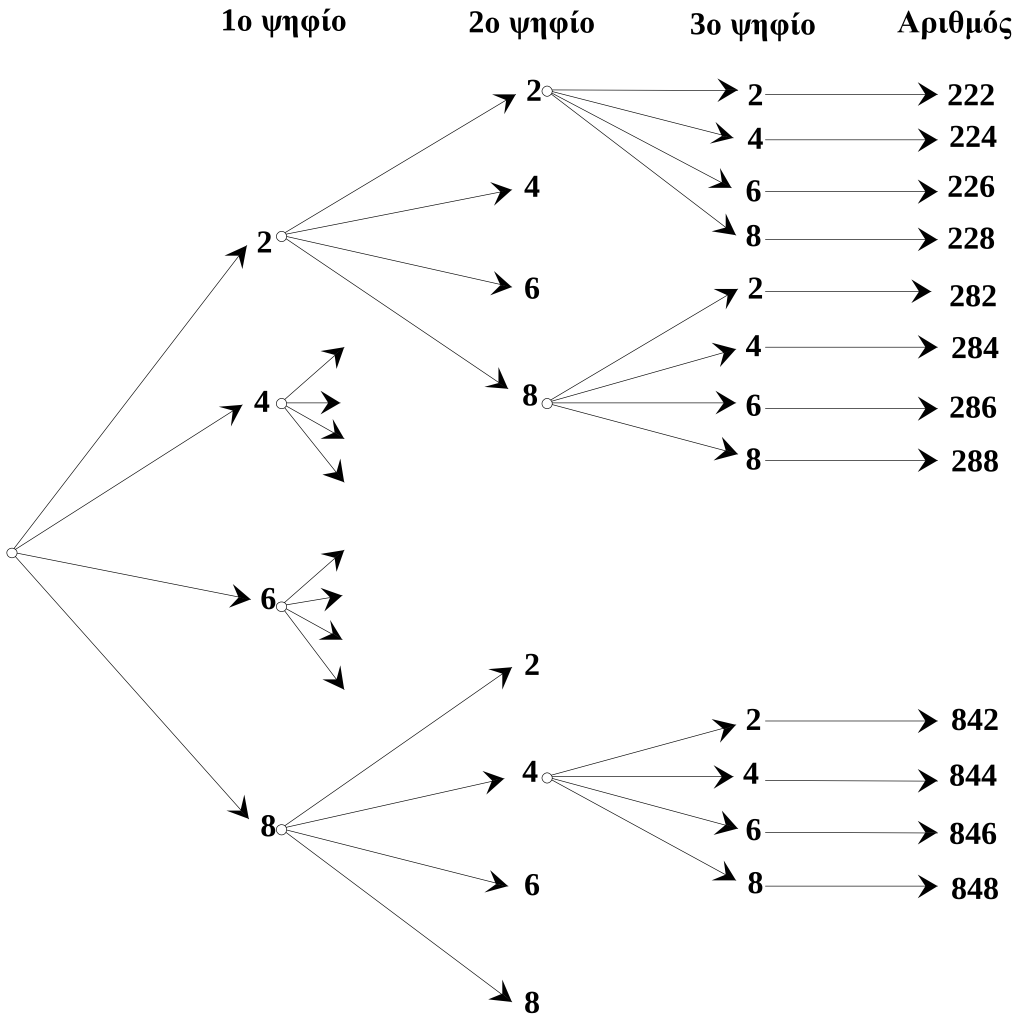
Διαδικασία Δ_2: Επιλογή του ψηφίου των δεκάδων:
Το ψηφίο των δεκάδων (με την προϋπόθεση ότι έχει γίνει η διαδικασία Δ_1, δηλαδή επιλέχθηκε το ψηφίο των εκατοντάδων) μπορεί να γίνει πάλι με $\nu_2 = 4$ τρόπους (2 ή 4 ή 6 ή 8), αφού η εκφώνηση του προβλήματος δεν αποκλείει τη χρήση του ίδιου ψηφίου μέχρι και 3 φορές.

Διαδικασία Δ_3: Επιλογή του ψηφίου των μονάδων:
Το ψηφίο των μονάδων (με την προϋπόθεση ότι έχουν γίνει οι διαδικασίες Δ_1 και Δ_2) μπορεί να επιλεγεί επίσης με $\nu_3 = 4$ τρόπους (2 ή 4 ή 6 ή 8).

Σύμφωνα λοιπόν με τη βασική αρχή της απαρίθμησης μπορούμε να σχηματίσουμε συνολικά: $\nu = \nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \nu_3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ τέτοιους τριψήφιους αριθμούς

Τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνονται στο παρακάτω δεντροδιάγραμμα. Στο δεντροδιάγραμμα αυτό δεν σχηματίσαμε όλους τους τριψήφιους για οικονομία χώρου.

Το ότι υπάρχουν $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ τριψήφιοι, προκύπτει από τον τρόπο κατασκευής του δεντροδιαγράμματος. Χρειαζόμαστε 4 κλάδους για να σχηματίσουμε το 1^o ψηφίο. Από κάθε τέτοιο κλάδο χρειαζόμαστε 4 διακλαδώσεις για να σχηματίσουμε το 2^o ψηφίο και από κάθε τέτοια διακλάδωση χρειαζόμαστε 4 νέες διακλαδώσεις για να σχηματίσουμε το 3^o ψηφίο. Στο σχήμα δεν φαίνονται όλες οι διακλαδώσεις, αλλά μόνο μερικές.



8) Πόσους τριψήφιους με διαφορετικά ψηφία μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα ψηφία 2, 4, 6 και 8;

<u>Λύση</u>

Πάλι μπορούμε να χωρίσουμε τη διαδικασία σε 3 επί μέρους διαδικασίες Δ_1, Δ_2 και Δ_3.

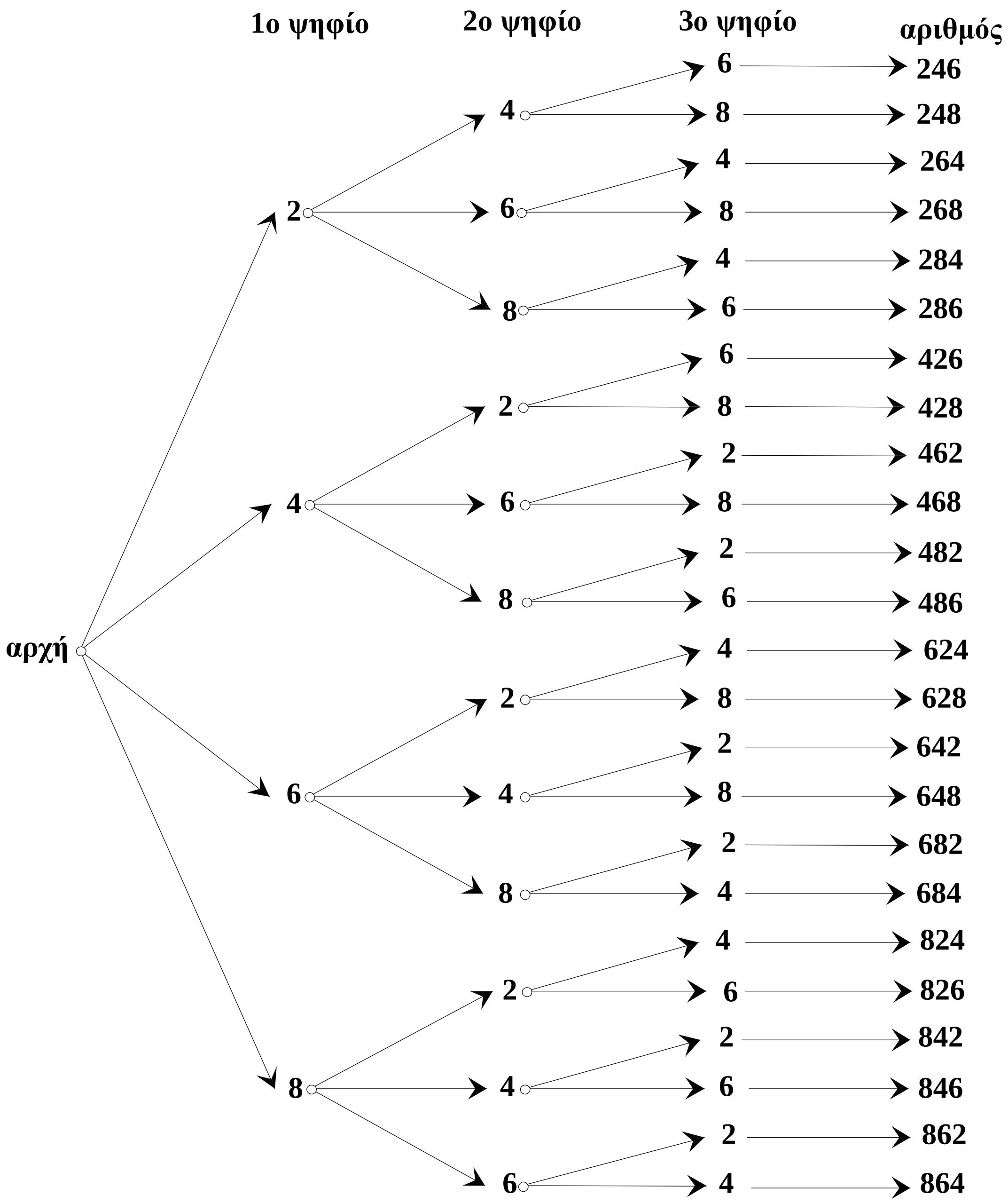
<u>Διαδικασία Δ_1:</u> Επιλογή του ψηφίου των εκατοντάδων.
Αυτή μπορεί να γίνει με $\nu_1 = 4$ τρόπους (2 ή 4 ή 6 ή 8)

<u>Διαδικασία Δ_2:</u> Επιλογή του ψηφίου των δεκάδων.
Το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορεί να γίνει η διαδικασία Δ_2 πρέπει να υπολογιστεί με την προϋπόθεση ότι έχει γίνει η διαδικασία Δ_1, δηλαδή έχει επιλεγεί το ψηφίο των εκατοντάδων.
Από κάθε επιλογή του ψηφίου των εκατοντάδων υπάρχουν $\nu_2 = 3$ τρόποι για να επιλεγεί το ψηφίο των δεκάδων. Αν π.χ επιλέξαμε σαν ψηφίο εκατοντάδων το 4, τότε

σαν ψηφίο δεκάδων μπορεί να επιλεγεί το 2 ή το 6 ή το 8 (δεν μπορούμε να επιλέξουμε πάλι το 4).

Διαδικασία $Δ_3$: Επιλογή του ψηφίου των μονάδων.
Από κάθε επιλογή του ψηφίου των εκατοντάδων και του ψηφίου των δεκάδων του τριψήφιου αριθμού, υπάρχουν $\nu_3 = 2$ μόνο τρόποι επιλογής για το ψηφίο των μονάδων.
Αν π.χ επιλέξαμε σαν ψηφίο εκατοντάδων το 6 και σαν ψηφίο δεκάδων το 4, τότε σαν ψηφίο μονάδων μπορούμε να επιλέξουμε μόνο το 2 η το 8 (αφού δεν μπορούμε να επιλέξουμε το ίδιο ψηφίο 2 φορές).
Σύμφωνα λοιπόν με τη βασική αρχή της απαρίθμησης, μπορούμε να σχηματίσουμε $\nu = \nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \nu_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ τέτοιους τριψήφιους αριθμούς.

Τους παραπάνω τρόπους μπορούμε να δείξουμε και πάλι με κατάλληλο δεντροδιάγραμμα. Από τον τρόπο κατασκευής του δεντροδιαγράμματος συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $\nu = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ τριψήφιοι με διαφορετικά ψηφία από τα 2, 4, 6 και 8.



9) Ο Φίλιππος έχει στη διάθεσή του 5 διαφορετικά παντελόνια, 3 διαφορετικά σακάκια και 6 διαφορετικά πουκάμισα. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να ντυθεί;

<u>Λύση</u>

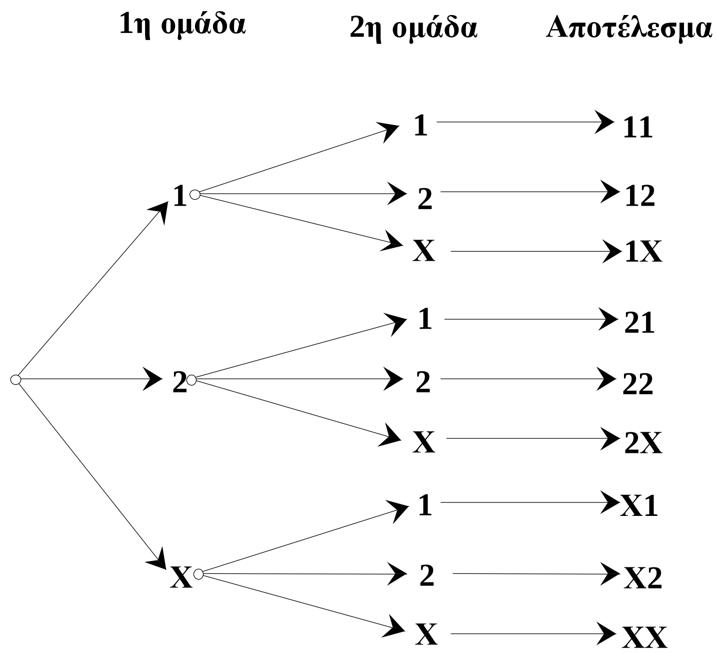
Το ντύσιμο μπορεί να γίνει αν γίνουν οι εξής 3 διαδικασίες:
Να βάλει πρώτα ο Φίλιππος το παντελόνι. Αυτή η διαδικασία μπορεί να γίνει με 5 τρόπους.
Να βάλει κατόπιν το πουκάμισό του. Αυτή η διαδικασία μπορεί να γίνει με 6 τρόπους.
Τέλος να βάλει το σακάκι του. Η διαδικασία αυτή μπορεί να γίνει με 3 τρόπους.
Σύμφωνα με τη βασική αρχή της απαρίθμησης, η όλη διαδικασία μπορεί να γίνει με $5\cdot 6\cdot 3=90$ 5.6.3 = 90 τρόπους.
Δηλαδή υπάρχουν 90 διαφορετικοί συνδυασμοί για να ντυθεί ο Φίλιππος.

10) ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΠΡΟ-ΠΟ

Σ' ένα δελτίο ΠΡΟ-ΠΟ υπάρχουν 13 ομάδες. Τα προγνωστικά για κάθε ομάδα είναι τρία: 1, 2, Χ. Πόσες είναι όλες οι διαφορετικές στήλες που μπορούμε να συμπληρώσουμε;

Λύση

Ο υπολογισμός θα γίνει με τη βασική αρχή της απαρίθμησης.
Υπάρχουν 3 τρόποι για να συμπληρώσουμε την 1η ομάδα (1, 2, Χ).
Για κάθε τρόπο συμπλήρωσης της 1ης ομάδας, υπάρχουν πάλι 3 τρόποι συμπλήρωσης της 2ης ομάδας. Αν κάνουμε όλους αυτούς τους συνδυασμούς βρίσκουμε $3 \cdot 3 = 9$ τρόπους συμπλήρωσης των δύο πρώτων ομάδων. Οι τρόποι αυτοί φαίνονται στο παρακάτω δεντροδιάγραμμα.



Για καθέναν από τους $3 \cdot 3 = 3^2$ τρόπους συμπλήρωσης των δύο πρώτων ομάδων, υπάρχουν 3 τρόποι για τη συμπλήρωση της 3ης ομάδας. Έτσι υπάρχουν $3^2 \cdot 3 = 3^3$ τρόποι συμπλήρωσης των 3 πρώτων ομάδων.
Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι υπάρχουν
$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot ... \cdot 3}_{13 \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma} = 3^{13}$ τρόποι συμπλήρωσης των 13 ομάδων.

Το $3^{13} = 1\,594\,323$ είναι ένας πολύ μεγάλος αριθμός. Έτσι εξηγείται γιατί είναι πολύ δύσκολο να "πιάσουμε" 13άρι.

11) Πόσα είναι τα υποσύνολα ενός συνόλου με 10 στοιχεία;

Λύση

Έστω $A = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{10}\}$ το σύνολο των 10 στοιχείων.

Το κενό σύνολο θεωρείται και αυτό υποσύνολο κάθε συνόλου επομένως και του συνόλου Α.

Για να κατασκευάσουμε ένα υποσύνολο Β του Α, γράφουμε:
Β = {□, □, □, □, □, □, □, □, □, □}
Σε κάθε τετραγωνάκι θα θέσουμε ή δεν θα θέσουμε το αντίστοιχο στοιχείο του συνόλου Α, δηλ. στο $1^{\text{ο}}$ τετραγωνάκι θα θέσουμε ή δεν θα θέσουμε το α_1. Στο $2^{\text{ο}}$ τετραγωνάκι θα θέσουμε ή δεν θα θέσουμε το στοιχείο α_2 κ.ο.κ μέχρι και το $10^{\text{ο}}$ τετραγωνάκι. Έτσι θα σχηματιστεί ένα σύνολο με κάποια από τα στοιχεία του Α που θα είναι βέβαια υποσύνολο του Α. Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε όλα τα υποσύνολα του Α και κανένα δεν το παίρνουμε περισσότερες από μία φορά.
Για την 1^{η} θέση ($1^{\text{ο}}$ τετραγωνάκι) υπάρχουν δύο επιλογές. Ή να τοποθετήσουμε το α_1 ή να μην το τοποθετήσουμε.
Για τη 2^{η} θέση υπάρχουν πάλι δύο επιλογές. Το ίδιο και για την 3^{η} , 4^{η} κ.ο.κ θέσεις.
Συνολικά λοιπόν υπάρχουν $2\cdot 2\cdot ...\cdot 2 = 2^{10}$ επιλογές ή το ίδιο υπάρχουν 1 024 υποσύνολα του Α.

12) α) Πόσους τριψήφιους με διαφορετικά ψηφία μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα ψηφία 1, 3, 5, 7 και 9;

β) Πόσοι από αυτούς είναι μικρότεροι του 500;

γ) Πόσοι αρχίζουν από 3;

δ) Πόσοι αρχίζουν από 3 και λήγουν σε 7;

ε) Πόσοι διαιρούνται δια 5;

Λύση
α) Το $1^{\text{ο}}$ ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με $\nu_1 = 5$ τρόπους. Το $2^{\text{ο}}$ ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με $\nu_2 = 4$ τρόπους (αφού πρέπει να είναι διαφορετικό από το $1^{\text{ο}}$). Τέλος το $3^{\text{ο}}$ ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με $\nu_3 = 3$ τρόπους (αφού πρέπει να είναι διαφορετικό από τα άλλα δύο). Έτσι μπορούμε να σχηματίσουμε συνολικά $\nu = \nu_1\cdot\nu_2\cdot\nu_3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$ τέτοιους τριψήφιους αριθμούς.

β) Το $1^{\text{ο}}$ ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με $\nu_1 = 2$ τρόπους (1 ή 3, ώστε ο τριψήφιος να είναι μικρότερος του 500). Το $2^{\text{ο}}$ ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με $\nu_2 = 4$ τρόπους (οποιοδήποτε ψηφίο διαφορετικό από το $1^{\text{ο}}$). Τέλος το $3^{\text{ο}}$ ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με $\nu_3 = 3$ τρόπους. Μπορούμε λοιπόν να σχηματίσουμε $\nu = \nu_1\cdot\nu_2\cdot\nu_3 = 2\cdot 4\cdot 3 = 24$ τριψήφιους μικρότερους του 500

γ) Το $1^{\text{ο}}$ ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με $\nu_1 = 1$ τρόπο (μόνο 3). Το $2^{\text{ο}}$ ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με $\nu_2 = 4$ τρόπους. Το $3^{\text{ο}}$ ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με $\nu_3 = 3$ τρόπους. Μπορούμε επομένως να σχηματίσουμε συνολικά $\nu = \nu_1\cdot\nu_2\cdot\nu_3 = 1\cdot 4\cdot 3 = 12$ τέτοιους τριψήφιους αριθμούς.

δ) Το 1ο ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με $\nu_1 = 1$ τρόπο. Το τελευταίο ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με $\nu_2 = 1$ τρόπο και το 2ο ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με $\nu_3 = 3$ τρόπους. Άρα υπάρχουν συνολικά $\nu = \nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \nu_3 = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$ τέτοιοι τριψήφιοι.
(στην περίπτωση αυτή είναι εύκολο να κάνουμε την καταμέτρηση, η προσπάθειά μας όμως είναι να καταδείξουμε πως εφαρμόζεται η βασική αρχή της απαρίθμησης).

ε) Γνωρίζουμε ότι για να διαιρείται ένας ακέραιος δια του 5, πρέπει το τελευταίο ψηφίο του να διαιρείται δια 5. Επομένως το τελευταίο ψηφίο μπορεί να είναι μόνο το 5, δηλαδή μπορεί να επιλεγεί μόνο με $\nu_1 = 1$ τρόπο. Το 1ο ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με $\nu_3 = 4$ τρόπους και το 2ο ψηφίο του μπορεί να επιλεγεί με $\nu_3 = 3$ τρόπους. Άρα υπάρχουν
$\nu = \nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \nu_3 = 1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$ τέτοιοι τριψήφιοι.

13) α) Πόσες πινακίδες αυτοκινήτων μπορούμε να κατασκευάσουμε αν κάθε πινακίδα έχει δύο Ελληνικά γράμματα και 4 ψηφία από τα οποία το 1ο δεν μπορεί να είναι το 0;

β) Πόσες έχουν τουλάχιστον δύο ίδια ψηφία;

γ) Πόσες έχουν 4 ίδια ψηφία;

<u>Λύση</u>
α) Το Ελληνικό αλφάβητο έχει 24 γράμματα. Επομένως το πρώτο γράμμα μπορεί να επιλεγεί με $\nu_1 = 24$ τρόπους. Το 2ο γράμμα μπορεί να επιλεγεί επίσης με $\nu_2 = 24$ τρόπους. Το 1ο ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με $\nu_3 = 9$ τρόπους (όχι 0), καθένα δε από τα υπόλοιπα ψηφία μπορεί να επιλεγεί με $\nu_4 = \nu_4 = \nu_6 = 10$ τρόπους.

Έτσι σύμφωνα με τη βασική αρχή της απαρίθμησης μπορούμε να σχηματίσουμε $\nu = \nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \nu_3 \cdot \nu_4 \cdot \nu_5 \cdot \nu_6 = 24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 5\,184\,000$ διαφορετικές πινακίδες.

β) Βρίσκουμε πρώτα πόσες από τις παραπάνω πινακίδες έχουν όλα τα ψηφία τους διαφορετικά.

το 1ο γράμμα μπορεί να επιλεγεί με 24 τρόπους (οποιοδήποτε γράμμα)

το 2ο γράμμα μπορεί να επιλεγεί με 24 τρόπους

το 1ο ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 9 τρόπους (όχι 0)

το 2ο ψηφίο με 9 τρόπους (διαφορετικό από το 1ο, έστω και 0)

το 3ο ψηφίο με 8 τρόπους

το 4ο ψηφίο με 7 τρόπους.

Επομένως μπορούμε να κατασκευάσουμε $24 \cdot 24 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 2\ 612\ 736$ πινακίδες στις οποίες όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά.

Βρήκαμε στο (α) ότι όλες οι πινακίδες (με διαφορετικά ή όχι ψηφία) είναι $5\,184\ 000$.

Άρα οι πινακίδες στις οποίες τουλάχιστον 2 ψηφία είναι ίδια, είναι:

$5\,184\ 000 - 2\ 612\ 736 = 2\ 571\ 264$

γ) Το $1^{ο}$ γράμμα μπορεί να επιλεγεί με 24 τρόπους

το $2^{ο}$ γράμμα μπορεί να επιλεγεί με 24 τρόπους

το $1^{ο}$ ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 9 τρόπους

το $2^{ο}$ ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 1 τρόπο (ίδιο με το $1^{ο}$ ψηφίο)

το $3^{ο}$ ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 1 τρόπο και

το $4^{ο}$ ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 1 τρόπο.

Επομένως μπορούμε να κατασκευάσουμε $24 \cdot 24 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 5\,184$ τέτοιες πινακίδες.

14) Υπάρχουν 6 δρόμοι που συνδέουν τις πόλεις Α και Β και 4 δρόμοι που συνδέουν τις πόλεις Β και Γ.

α) Κατά πόσους τρόπους μπορεί κάποιος να ταξιδέψει από την πόλη Α στην Γ περνώντας από τη Β;

β) Κατά πόσους τρόπους μπορεί να ταξιδέψει από την πόλη Α στη Γ και να ξαναγυρίσει στην Α περνώντας και τις δύο φορές από την πόλη Β;

γ) Κατά πόσους τρόπους μπορεί να πάει από την πόλη Α στην Γ και να επιστρέψει στην Α περνώντας και τις δύο φορές από την πόλη Β, χωρίς να χρησιμοποιήσει τον ίδιο δρόμο δύο φορές;

<u>Λύση</u>

α) Υπάρχουν 6 τρόποι για να γίνει η διαδρομή ΑΒ
Υπάρχουν 4 τρόποι για να γίνει η διαδρομή ΒΓ
Σύμφωνα με την βασική αρχή της απαρίθμησης υπάρχουν $6 \cdot 4 = 24$ τρόποι για να γίνει η διαδρομή ΑΒΓ.

β) Υπάρχουν 6 τρόποι για να γίνει η διαδρομή ΑΒ
υπάρχουν 4 τρόποι για να γίνει η διαδρομή ΒΓ
υπάρχουν 4 τρόποι για να γίνει η διαδρομή ΓΒ και
υπάρχουν 6 τρόποι για να γίνει η διαδρομή ΒΑ
Σύμφωνα επομένως με τη βασική αρχή της απαρίθμησης, υπάρχουν $6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 = 576$ τρόποι για να γίνει η διαδρομή ΑΒΓΒΑ.

γ) Υπάρχουν 6 τρόποι για να γίνει η διαδρομή ΑΒ.
Υπάρχουν 4 τρόποι για να γίνει η διαδρομή ΒΓ.

Υπάρχουν 3 τρόποι για να γίνει η διαδρομή ΓΒ (αφού κατά την επιστροφή δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο ίδιος δρόμος).
Υπάρχουν 5 τρόποι για να γίνει η διαδρομή ΒΑ.
Σύμφωνα επομένως με τη βασική αρχή της απαρίθμησης, υπάρχουν $6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 360$ τρόποι για να γίνει η διαδρομή ΑΒΓΒΑ χωρίς να χρησιμοποιηθεί ο ίδιος δρόμος 2 φορές.

15) Σχηματίζουμε όλες τις λέξεις με 4 διαφορετικά γράμματα από τα γράμματα της λέξης ΤΗΛΕΦΩΝΟ (οι λέξεις δεν είναι απαραίτητο να έχουν νόημα, π.χ οι λέξεις ΤΦΟΝ, ΝΛΟΩ είναι αποδεκτές)

α) Πόσες είναι οι λέξεις αυτές;

β) Πόσες από αυτές περιέχουν μόνο σύμφωνα;

γ) Πόσες από αυτές τελειώνουν σε φωνήεν;

δ) Πόσες αρχίζουν από φωνήεν και τελειώνουν σε φωνήεν;

ε) Πόσες αρχίζουν από Τ και τελειώνουν σε φωνήεν;

ζ) Πόσες δεν περιέχουν το γράμμα Τ;

η) Πόσες περιέχουν το γράμμα Τ;

θ) Πόσες περιέχουν το Τ και δεν περιέχουν το Φ;

ι) Πόσες αρχίζουν από Τ, περιέχουν το Φ και δεν περιέχουν το Η;

κ) Αν διατάξουμε όλες τις λέξεις κατά απόλυτη αλφαβητική σειρά, ποια τάξη θα κατέχει η λέξη ΦΩΝΟ;

λ) Στην παραπάνω αλφαβητική διάταξη πόσες λέξεις περιέχονται ανάμεσα στις λέξεις ΗΕΦΩ και ΩΦΕΗ;

μ) Ποια λέξη κατέχει την $1\,000^{\eta}$ τάξη;

Λύση

α) Το 1^o γράμμα μπορεί να επιλεγεί με 8 τρόπους. Το 2^o γράμμα μπορεί να επιλεγεί με 7 τρόπους. Το 3^o γράμμα με 6 τρόπους και το 4^o με 5 τρόπους.
Επομένως μπορούμε να σχηματίσουμε $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1\,680$ λέξεις.

β) Το 1^o γράμμα μπορεί να επιλεγεί με 4 τρόπους (Λ ή Ν ή Τ ή Φ). Το 2^o γράμμα μπορεί να επιλεγεί με 3 τρόπους, το 3^o με 2 τρόπους και το 4^o με 1 τρόπο.
Άρα μπορούμε να σχηματίσουμε $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ τέτοιες λέξεις.

γ) Το τελευταίο γράμμα μπορεί να επιλεγεί με 4 τρόπους (Ε, Η, Ο, Ω). Το 1^o γράμμα μπορεί να επιλεγεί με 7 τρόπους, το 2^o με 6 τρόπους και το 3^o με 5 τρόπους.
Άρα μπορούμε να σχηματίσουμε συνολικά: $4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 840$ τέτοιες λέξεις.

δ) Το $1^ο$ γράμμα μπορεί να επιλεγεί με 4 τρόπους (Ε, Η, Ο, Ω). Το τελευταίο γράμμα μπορεί να επιλεγεί με 3 τρόπους. Το $2^ο$ γράμμα μπορεί τώρα να επιλεγεί με 6 τρόπους και το $3^ο$ με 5 τρόπους.
Άρα μπορούμε να σχηματίσουμε συνολικά $4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5 = 360$ λέξεις.

ε) Το $1^ο$ γράμμα μπορεί να επιλεγεί με 1 μόνο τρόπο. Το τελευταίο γράμμα μπορεί να επιλεγεί με 4 τρόπους. Το $2^ο$ γράμμα μπορεί να επιλεγεί με 6 τρόπους και το $3^ο$ γράμμα μπορεί να επιλεγεί με 5 τρόπους.
Άρα μπορούμε να σχηματίσουμε συνολικά $1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 = 120$ λέξεις

ζ) Το $1^ο$ γράμμα μπορεί να επιλεγεί με 7 τρόπους (οποιοδήποτε γράμμα εκτός του Τ). Το $2^ο$ γράμμα μπορεί να επιλεγεί με 6 τρόπους, το $3^ο$ με 5 τρόπους και το $4^ο$ με 4 τρόπους.
Έτσι μπορούμε να σχηματίσουμε $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ λέξεις.

η) Βρήκαμε στο (α) ότι όλες οι λέξεις με 4 γράμματα είναι $1\,680$. Από αυτές οι 840 δεν περιέχουν το Τ όπως βρήκαμε στο (ζ). Άρα $1\,680 - 840 = 840$ λέξεις περιέχουν το Τ.

<u>Άλλη λύση</u>
Βρίσκουμε τις λέξεις που περιέχουν το Τ σαν $1^ο$ γράμμα. Το $1^ο$ γράμμα μπορεί να επιλεγεί με 1 τρόπο, το $2^ο$ με 7 τρόπους, το $3^ο$ με 6 τρόπους και το $4^ο$ με 5 τρόπους. Άρα υπάρχουν $1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ λέξεις που περιέχουν το Τ ως $1^ο$ γράμμα.
Για τον ίδιο ακριβώς λόγο υπάρχουν 210 λέξεις που περιέχουν το Τ σαν $2^ο$ γράμμα, 210 λέξεις που περιέχουν το Τ σαν $3^ο$ γράμμα και 210 λέξεις που περιέχουν το Τ σαν $4^ο$ γράμμα. Άρα υπάρχουν συνολικά $4 \cdot 210 = 840$ τέτοιες λέξεις.

θ) Αφού οι λέξεις δεν θέλουμε να περιέχουν το Φ, αρκεί να βρούμε πόσες λέξεις μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα υπόλοιπα 7 γράμματα Τ, Η, Λ, Ε, Ω, Ν, Ο που να περιέχουν το Τ.
Οι λέξεις που περιέχουν το Τ ως $1^ο$ γράμμα είναι: $1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.
Οι λέξεις που περιέχουν το Τ ως $2^ο$ γράμμα είναι επίσης 120.
Το ίδιο και οι λέξεις που περιέχουν το Τ ως $3^ο$ ή $4^ο$ γράμμα.
Άρα όλες οι λέξεις που μπορούμε να σχηματίσουμε είναι $4 \cdot 120 = 480$.

ι) Βρίσκουμε πόσες λέξεις μπορούμε να σχηματίσουμε από τα γράμματα Τ, Λ, Ε, Φ, Ω, Ν, Ο που να αρχίζουν από Τ και να περιέχουν το Φ.
Οι λέξεις που αρχίζουν από Τ και περιέχουν το Φ σαν $2^ο$ γράμμα είναι $1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 = 20$.
Επίσης 20 είναι οι λέξεις που αρχίζουν από Τ και περιέχουν το Φ σαν $3^ο$ γράμμα και 20 οι λέξεις που αρχίζουν από Τ και περιέχουν το Φ σαν $4^ο$ γράμμα.
Άρα συνολικά έχουμε $3 \cdot 20 = 60$ τέτοιες λέξεις.

κ) Διατάσσουμε τα 8 γράμματα με αλφαβητική σειρά: Ε, Η, Λ, Ν, Ο, Τ, Φ, Ω.
Από τη λέξη ΦΩΝΟ θα προηγούνται όλες οι λέξεις που αρχίζουν από Ε, Η, Λ, Ν, Ο, Τ και μερικές που αρχίζουν από Φ.
Οι λέξεις που αρχίζουν από Ε είναι $1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. Για τον ίδιο λόγο 210 είναι και οι λέξεις που αρχίζουν από κάποιο άλλο από τα γράμματα Η, Λ, Ν, Ο, Τ. Άρα οι λέξεις που αρχίζουν από Ε ή Η ή Λ ή Ν ή Ο ή Τ είναι $6 \cdot 210 = \mathbf{1\,260}$.
Βρίσκουμε τώρα πόσες από τις λέξεις που αρχίζουν από Φ προηγούνται από τη λέξη ΦΩΝΟ. Το πρόβλημα ανάγεται στο:

Από τις λέξεις με 3 γράμματα από τα Ε, Η, Λ, Ν, Ο, Τ, Ω να βρεθεί πόσες προηγούνται της ΩΝΟ.
Από τη λέξη ΩΝΟ θα προηγούνται όσες αρχίζουν από Ε, Η, Λ, Ν, Ο, Τ και μερικές που αρχίζουν από Ω.
Οι λέξεις που αρχίζουν από Ε είναι $1\cdot 6\cdot 5=30$. Για τον ίδιο λόγο 30 είναι και οι λέξεις που αρχίζουν από κάποιο άλλο από τα γράμματα Η, Λ, Ν, Ο, Τ. Άρα της λέξης ΩΝΟ προηγούνται $6\cdot 30=$ **180** λέξεις.
Βρίσκουμε τώρα πόσες από τις λέξεις που αρχίζουν από ΦΩ προηγούνται της λέξης ΦΩΝΟ. Το πρόβλημα ανάγεται στο:
Από τις λέξεις με δύο γράμματα από τα Ε, Η, Λ, Ν, Ο, Τ να βρεθεί πόσες προηγούνται της ΝΟ.
Από τη λέξη ΝΟ θα προηγούνται όσες αρχίζουν από Ε, Η, Λ και μερικές από αρχίζουν από Ν.
Οι λέξεις που αρχίζουν από Ε είναι $1\cdot 5=5$. Για τον ίδιο λόγο, οι λέξεις που αρχίζουν από κάποιο άλλο από τα γράμματα Η, Λ είναι επίσης 5. Άρα της λέξης ΝΟ προηγούνται $3\cdot 5=$ **15** λέξεις.
Μένει τώρα να βρούμε πόσες από τις λέξεις που αρχίζουν από ΦΩΝ προηγούνται της λέξης ΦΩΝΟ. Αυτές είναι οι ΦΩΝΕ, ΦΩΝΗ, ΦΩΝΛ, δηλ. **3** λέξεις.
Έτσι της λέξης ΦΩΝΟ προηγούνται $1\,260+180+15+3=1\,458$ λέξεις. Επομένως η λέξη ΦΩΝΟ κατέχει την $1\,458+1=1\,459^{\eta}$ θέση.

λ) Όπως και στο (κ) βρίσκουμε ότι η λέξη ΗΕΦΩ κατέχει την 235^{η} θέση και η λέξη ΩΦΕΗ κατέχει την $1\,651^{\eta}$ θέση. Άρα ανάμεσα στις λέξεις αυτές περιέχονται $1\,651-235-1=1\,415$ λέξεις.

μ) Οι λέξεις που αρχίζουν από Ε είναι $1\cdot 7\cdot 6\cdot 5=210$. Όμοια οι λέξεις που αρχίζουν από κάποιο άλλο γράμμα είναι 210. Επειδή τώρα $4<\dfrac{1\,000}{210}<5$, δηλ. $4\cdot 210<1\,000<5\cdot 210$, αυτό σημαίνει ότι 4 ομάδες λέξεων (αυτές που αρχίζουν από Ε, Η, Λ, Ν) προηγούνται από τη ζητούμενη λέξη, ενώ οι λέξεις που αρχίζουν από Ο δεν προηγούνται όλες από τη ζητούμενη λέξη. Άρα η τελευταία λέξη αρχίζει από Ο.
Το πρόβλημα τώρα ανάγεται στο:
Από τις λέξεις με 3 διαφορετικά γράμματα από τα Ε, Η, Λ, Ν, Τ, Φ, Ω που μπορούμε να κατασκευάσουμε, ποια κατέχει την $1\,000-4\cdot 210=1\,000-840=160^{\eta}$ τάξη στην αλφαβητική διάταξη.
Οι λέξεις που αρχίζουν από Ε είναι $1\cdot 6\cdot 5=30$. Όμοια, οι λέξεις που αρχίζουν από κάποιο άλλο γράμμα είναι 30.
Επειδή τώρα $5<\dfrac{160}{30}<6$, δηλαδή $5\cdot 30<160<6\cdot 30$, αυτό σημαίνει ότι 5 ομάδες λέξεων, αυτές που αρχίζουν από Ε, Η, Λ, Ν, Τ προηγούνται της ζητούμενης λέξης, ενώ οι λέξεις που αρχίζουν από Φ δεν προηγούνται όλες από τη ζητούμενη λέξη. Άρα η ζητούμενη λέξη (με 3 γράμματα) αρχίζει από Φ. Έτσι τα 2 πρώτα γράμματα που ζητούμε είναι τα ΟΦ.
Το πρόβλημα τώρα ανάγεται στο:
Από τις λέξεις με 2 διαφορετικά γράμματα από τα Ε, Η, Λ, Ν, Τ, Ω ποια κατέχει την $160-5\cdot 30=10^{\eta}$ θέση στην αλφαβητική διάταξη.

Οι λέξεις που αρχίζουν από Ε είναι 1.5 = 5. Επίσης οι λέξεις που αρχίζουν από κάποιο άλλο από τα υπόλοιπα γράμματα είναι 5. Επειδή $\frac{10}{5}=2$, δηλαδή $10=2\cdot 5$, αυτό σημαίνει ότι η 10^{η} λέξη είναι η τελευταία της $2^{\eta\varsigma}$ ομάδας που αρχίζει από Η, δηλαδή είναι η λέξη ΗΩ.
Άρα η λέξη που ζητούμε με 4 γράμματα και κατέχει την $1\ 000^{\eta}$ τάξη είναι η ΟΦΗΩ.

Δείχνουμε τώρα ένα παράδειγμα στο οποίο δεν μπορεί να εφαρμοστεί η βασική αρχή της απαρίθμησης.

16) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 2 από τους 100 αριθμούς $1, 2, 3, ..., 99, 100$ ώστε το άθροισμά τους να είναι

α) περιττός **β) άρτιος**

Λύση

α) Για να είναι το άθροισμα δύο ακεραίων περιττός, πρέπει ο ένας να είναι άρτιος και ο άλλος περιττός. Η όλη διαδικασία λοιπόν μπορεί να χωριστεί σε δύο επιμέρους διαδικασίες:

1^{η} διαδικασία:
Επιλογή του άρτιου αριθμού από τους 100 δοσμένους αριθμούς.
Επειδή υπάρχουν 50 άρτιοι αριθμοί, η διαδικασία αυτή μπορεί να γίνει με 50 τρόπους.

2^{η} διαδικασία:
Επιλογή του περιττού αριθμού από τους 100 δοσμένους αριθμούς. Αυτή μπορεί επίσης να γίνει με 50 τρόπους.

Συνολικά λοιπόν υπάρχουν $50\cdot 50=2\ 500$ τρόποι για να γίνει η σύνθετη διαδικασία, δηλαδή υπάρχουν $2\ 500$ τρόποι για να είναι το άθροισμα των δύο αριθμών περιττός αριθμός.

β) Για να είναι το άθροισμα δύο ακεραίων άρτιος αριθμός πρέπει και οι δύο να είναι άρτιοι ή και οι δύο να είναι περιττοί.
Θα βρούμε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε δύο αρτίους και κατόπιν το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε δύο περιττούς και θα **προσθέσουμε** τα δύο πλήθη.

Πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε δύο άρτιους από τους $1, 2, 3, ..., 99, 100$:
Ο $1^{o\varsigma}$ άρτιος μπορεί να επιλεγεί κατά 50 τρόπους (2, 4, 6, … , 100). Αφού επιλεγεί ο $1^{o\varsigma}$ άρτιος, ο $2^{o\varsigma}$ άρτιος μπορεί να επιλεγεί κατά 49 τρόπους (δεν μπορεί να είναι ο ίδιος με τον 1^{o}). Με τον τρόπο αυτό το ζεύγος των αρτίων 40 και 60 επιλέγεται δύο φορές. Μια φορά ως $(40, 60)$ και μια φορά ως $(60, 40)$. Επειδή όμως τα ζεύγη αυτά θεωρούνται ταυτόσημα, δεν έχει σημασία δηλ. ποιον από τους 40 και 60 θα επιλέξουμε ως 1^{o} και

ποιον ως 2^{o}, το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε δύο αρτίους με άθροισμα άρτιο είναι ίσο με $\frac{50\cdot 49}{2}=1\,225$

Υπενθυμίζουμε ότι για να εφαρμόσουμε την βασική αρχή της απαρίθμησης, όλα τα αποτελέσματα πρέπει να είναι διαφορετικά.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε δύο περιττούς είναι ίσο με $\frac{50\cdot 49}{2}=1225$.

Συνολικά λοιπόν υπάρχουν $1\,225+1\,225=2\,450$ τέτοιοι τρόποι.

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Πρέπει να προσέξουμε εδώ ότι δεν πολ/ζουμε $1225\cdot 1225$, αλλά προσθέτουμε $1225+1225=2\,450$. Αυτό συμβαίνει εδώ επειδή με τη διαδικασία επιλογής των δύο αρτίων αριθμών, η όλη διαδικασία τελειώνει. Δεν συνεχίζεται η διαδικασία με την επιλογή των δύο περιττών.

17) Σε μια τάξη υπάρχουν 5 μαθητές. Κατά πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 3 από αυτούς για να σχηματίσουμε μια τριμελή επιτροπή;

<u>Λύση</u>

Ονομάζουμε α, β, γ, δ, ε τους 5 μαθητές.

Ο 1^{ος} μαθητής μπορεί να επιλεγεί με 5 τρόπους.

Ο 2^{ος} μαθητής μπορεί να επιλεγεί με 4 τρόπους (διαφορετικός από τον 1^{o}) και ο 3^{ος} μαθητής μπορεί να επιλεγεί με 3 τρόπους (διαφορετικός από τους δύο πρώτους).

Θα έλεγε κανείς ότι σύμφωνα με τη βασική αρχή της απαρίθμησης υπάρχουν $5\cdot 4\cdot 3=60$ διαφορετικές τριμελείς επιτροπές.

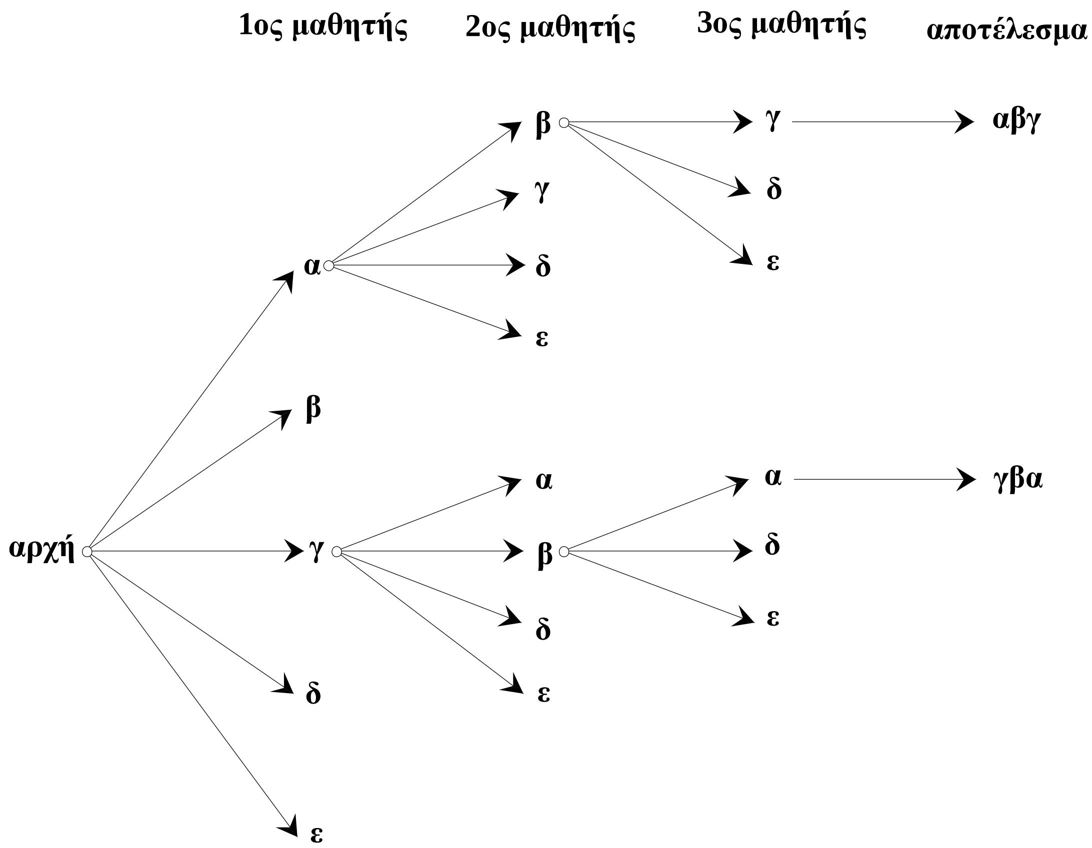
Το παραπάνω σκεπτικό όμως είναι λάθος. Έχουμε επισημάνει ότι για να εφαρμοστεί η βασική αρχή της απαρίθμησης πρέπει τα αποτελέσματα της μέτρησης να είναι διαφορετικά. Εδώ όμως τα αποτελέσματα δεν είναι όλα διαφορετικά όπως δείχνουμε αμέσως:

Αν επιλέξουμε ως 1^{o} τον μαθητή α, ως 2^{o} τον μαθητή β και ως 3^{o} τον μαθητή γ, έχουμε την τριμελή επιτροπή $\{\alpha,\beta,\gamma\}$.

Αν επιλέξουμε ως 1^{o} τον μαθητή γ, ως 2^{o} τον β και ως 3^{o} τον α, έχουμε την τριμελή επιτροπή $\{\gamma,\beta,\alpha\}$.

Οι παραπάνω τριμελείς επιτροπές όμως είναι ίδιες. Δεν έχει καμιά σημασία η σειρά με την οποία επιλέξαμε τους μαθητές.

Στο παρακάτω δεντροδιάγραμμα (δεν είναι ολοκληρωμένο) φαίνονται αυτές οι επιλογές οι οποίες όμως οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα.



Για να υπολογίσουμε το πραγματικό πλήθος των τριμελών επιτροπών, σκεφτόμαστε ως εξής:
Για κάθε τριμελή επιτροπή, π.χ την αβγ, υπάρχουν 6 συνολικά διατεταγμένες τριάδες που δίνουν την ίδια επιτροπή. Αυτές είναι οι: αβγ, αγβ, βαγ, βγα, γαβ, γβα. Επομένως το πραγματικό πλήθος των επιτροπών είναι: $60:6=10$

Το πλήθος των επιτροπών μπορεί να υπολογιστεί εύκολα με τη βοήθεια του κεφαλαίου ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ της ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ. Όμως εδώ θα περιοριστούμε μόνο στη βασική αρχή της απαρίθμησης.

Η βασική αρχή της απαρίθμησης θα μπορούσε να εφαρμοστεί αν η εκφώνηση ήταν λίγο διαφορετική και πρέπει να προσέξουμε πολύ αυτή τη διαφορά. Η διατύπωση είναι η εξής:

Σε μια τάξη υπάρχουν 5 μαθητές. Κατά πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε μια τριμελή επιτροπή που θα αποτελείται από έναν πρόεδρο, ένα γραμματέα και έναν ταμία;

Η εκφώνηση αυτή είναι σχεδόν όμοια με την παραπάνω, ο τρόπος όμως υπολογισμού είναι διαφορετικός.
Εδώ η βασική αρχή της απαρίθμησης μπορεί να εφαρμοστεί, επειδή οι τριάδες που αναφέραμε παραπάνω αβγ, αγβ, βαγ, βγα, γαβ, γβα είναι όλες διαφορετικές. Αν δηλαδή ο $1^{ος}$ μαθητής που θα επιλεγεί είναι ο πρόεδρος, ο $2^{ος}$ είναι ο γραμματέας και ο $3^{ος}$ είναι ο ταμίας, τότε

η τριάδα αβγ σημαίνει: α = πρόεδρος, β = γραμματέας, γ = ταμίας, ενώ
η τριάδα γβα σημαίνει: γ = πρόεδρος, β = γραμματέας, α = ταμίας
και φυσικά οι επιτροπές αυτές είναι διαφορετικές.
Στην περίπτωση αυτή το πλήθος των επιτροπών είναι, όπως ορίζει η βασική αρχή της απαρίθμησης: 5.4.3 = 60

Δύο χρήσιμοι τύποι

Θα αποδείξουμε δύο χρήσιμους τύπους:

$\mathbf{S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + \nu = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}}$ **(Τ$_1$)** για κάθε φυσικό ν > 0

$\mathbf{S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \nu^2 = \dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}}$ **(Τ$_2$)** για κάθε φυσικό ν > 0

Απόδειξη

α) Θεωρούμε την ταυτότητα:

$(\alpha+1)^2 = \alpha^2 + 2\alpha + 1$

Θέτουμε σ' αυτήν όπου $\alpha = 1, 2, 3, \ldots, \nu$

$\alpha = 1:\ 2^2 = 1^2 + 2\cdot 1 + 1$

$\alpha = 2:\ 3^2 = 2^2 + 2\cdot 2 + 1$

$\alpha = 3:\ 4^2 = 3^2 + 2\cdot 3 + 1$

....

$\alpha = \nu:\ (\nu+1)^2 = \nu^2 + 2\cdot \nu + 1$

Προσθέτοντας τις σχέσεις αυτές κατά μέλη βρίσκουμε:

$(\nu+1)^2 = 1^2 + 2(1+2+3+\ldots+\nu) + \nu$ ή

$\nu^2 + 2\nu + 1 = 1 + 2S_1 + \nu$

από την οποία βρίσκουμε: $S_1 = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$

β) Θεωρούμε την ταυτότητα:

$(\alpha+1)^3 = \alpha^3 = 3\alpha^2 + 3\alpha + 1$

Θέτουμε σ' αυτήν όπου α = 1, 2, 3, …, ν

$\alpha = 1:\ 2^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2 + 3.1 + 1$

$\alpha = 2:\ 3^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1$

$\alpha = 3:\ 4^3 = 3^3 + 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1$

....

$\alpha = \nu:\ (\nu+1)^3 = \nu^3 + 3\nu^2 + 3\nu + 1$

Προσθέτοντας τις σχέσεις αυτές κατά μέλη βρίσκουμε:

$(\nu+1)^3 = 1^3 + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \nu^2) + 3(1+2+3+\ldots+\nu) + \nu$

και αντικαθιστώντας το $S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + \nu = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$ βρίσκουμε

$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \nu^2 = \dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$

Θα δούμε τώρα πως με τους δύο παραπάνω τύπους μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος των στοιχείων κάποιων συνόλων.

Παραδείγματα

18) 20 άτομα παραβρέθηκαν σε ένα γεύμα. Καθένα άτομο τσούγκρισε το ποτήρι του με όλους τους άλλους (μόνο μια φορά). Πόσα τσουγκρίσματα έγιναν συνολικά;

Λύση

Ονομάζουμε τα άτομα $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{20}$.

Το άτομο π_1 τσούγκρισε με 19 άτομα $(\pi_2, \pi_3, ..., \pi_{20})$

Το άτομο π_2 τσούγκρισε (εκτός του π_1) με 18 ακόμη άτομα $(\pi_3, \pi_4, ..., \pi_{20})$

Το άτομο π_3 τσούγκρισε με 17 ακόμη άτομα $(\pi_4, \pi_5, ..., \pi_{20})$ κ.ο.κ

Το άτομο π_{18} τσούγκρισε με 2 άτομα (π_{19}, π_{20}) και τέλος το πρόσωπο π_{19} τσούγκρισε με 1 άτομο (το π_{20}).

Το π_{20} έχει τσουγκρίσει με όλα τα υπόλοιπα.

Έγιναν λοιπόν συνολικά $19+18+17+...+3+2+1$ ή το ίδιο $1+2+3+...+17+18+19$ τσουγκρίσματα.

Το τελευταίο όμως άθροισμα σύμφωνα με τον τύπο (T_1) είναι ίσο με $\frac{19(19+1)}{2} = 190$.

Δηλαδή έγιναν συνολικά 190 τσουγκρίσματα.

Β΄ Λύση

Μια δεύτερη πιο σύντομη λύση είναι η εξής:

Καθένα από τα 20 πρόσωπα τσούγκρισε το ποτήρι του με 19 άλλα πρόσωπα. Έτσι το πλήθος όλων των τσουγκρισμάτων πρέπει να είναι $20 \cdot 19 = 380$

Με το σκεπτικό αυτό όμως κάθε τσούγκρισμα υπολογίστηκε δύο φορές. Π.χ υπολογίσαμε και το τσούγκρισμα (π_3, π_5) και το (π_5, π_3) που είναι όμως τα ίδια.

Έτσι το πραγματικό πλήθος των τσουγκρισμάτων είναι $380 : 2 = 190$

19) Να υπολογιστεί το πλήθος των διαγωνίων ενός κυρτού πολυγώνου με 100 πλευρές.

Λύση

Κάθε ευθ. τμήμα που συνδέει δύο κορυφές είναι ή πλευρά (αν συνδέει δύο διαδοχικές κορυφές) ή διαγώνιος (αν συνδέει δύο μη διαδοχικές κορυφές). Θα βρούμε πρώτα το πλήθος όλων των ευθ. τμημάτων που συνδέουν τις κορυφές ανά δύο και από το πλήθος αυτό θα αφαιρέσουμε το πλήθος των πλευρών που είναι 100.

Ονομάζουμε $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3, ..., \mathrm{K}_{100}$ τις κορυφές του πολυγώνου.

Μπορούμε να συνδέσουμε την κορυφή K_1 με τις υπόλοιπες 99 κορυφές. Έτσι παίρνουμε 99 ευθ. τμήματα από τα οποία άλλα είναι πλευρές (τα $\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2$ και $\mathrm{K}_1\mathrm{K}_{100}$) και άλλα είναι διαγώνιες.

Μπορούμε τώρα να συνδέσουμε την κορυφή K_2 με τις υπόλοιπες 98 κορυφές (δεν θα τη συνδέσουμε με την K_1 που τη συνδέσαμε προηγουμένως). Παίρνουμε έτσι ακόμη 98 ευθ. τμήματα από τα οποία άλλα είναι πλευρές και άλλα είναι διαγώνιες.

Η κορυφή K_3 μπορεί να συνδεθεί με 97 κορυφές, η K_4 με 96 κ.ο.κ, η K_{99} μπορεί να συνδεθεί με 1 κορυφή (την K_{100}), ενώ την τελευταία κορυφή K_{100} την έχουμε συνδέσει με όλες τις κορυφές.

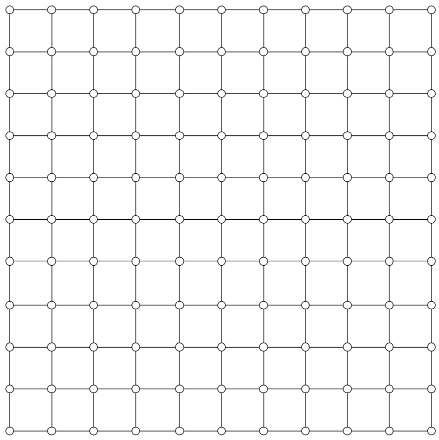
Έτσι μπορούμε να κατασκευάσουμε $99+98+97+...+3+2+1$ ευθ. τμήματα από τα οποία άλλα είναι πλευρές και άλλα διαγώνιες.

Όμως το άθροισμα $+2+3+...+97+98+99$ σύμφωνα με τον τύπο (T_1) είναι ίσο με $\frac{99(99+1)}{2}=4\ 950$

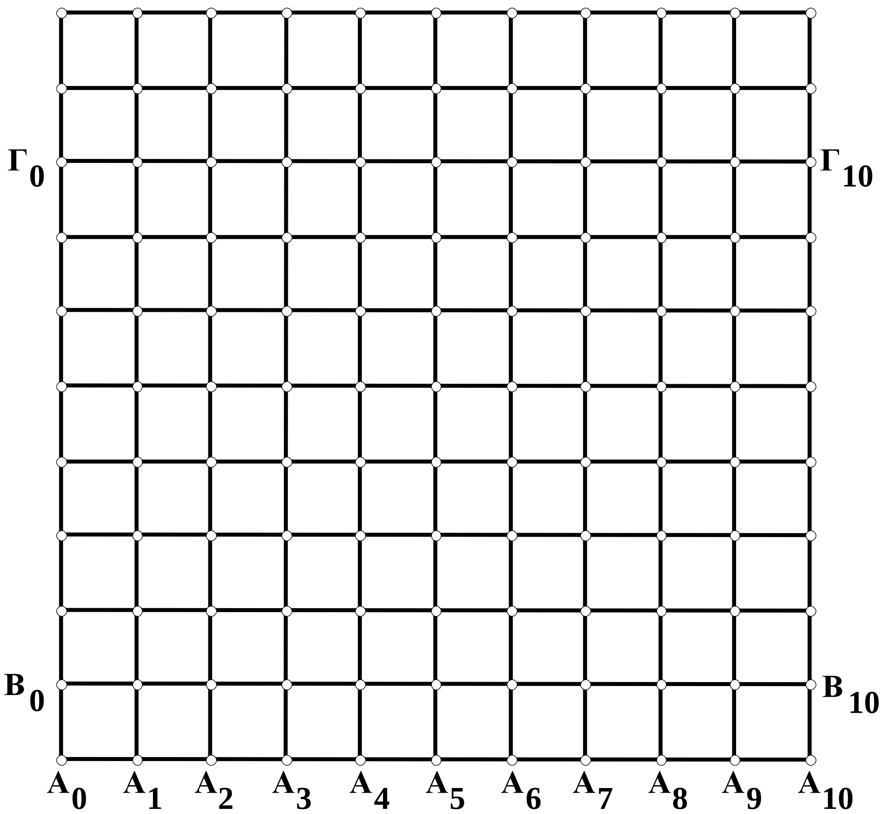
Επομένως το πλήθος των διαγωνίων είναι $4\ 950-100=4\ 850$

Μια δεύτερη λύση μπορεί να γίνει με παρόμοιο σκεπτικό με αυτό της προηγούμενης άσκησης.

20) Στο διπλανό τετράγωνο κάθε πλευρά έχει διαιρεθεί σε 10 ίσα μέρη. Να βρεθεί το πλήθος όλων των τετραγώνων που σχηματίζονται (όλων των μεγεθών)



Λύση



Ονομάζουμε α την πλευρά κάθε μικρού τετραγώνου.
Το ζητούμενο πλήθος είναι:

$S_\nu = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + ... + \Sigma_{10}$ όπου Σ_1 παριστάνει το πλήθος των τετραγώνων με πλευρά α, Σ_2 παριστάνει το πλήθος των τετραγώνων με πλευρά 2α, Σ_3 το πλήθος των τετραγώνων με πλευρά 3α κ.ο.κ.

Υπολογισμός του Σ_1:

Είναι φανερό ότι $\Sigma_1 = 10 \cdot 10 = 10^2$

Υπολογισμός του Σ_2:

Τα τετράγωνα με πλευρά 2α που έχουν τη βάση τους πάνω στην A_0A_{10} είναι αυτά που έχουν πλευρές τις A_0A_2, A_1A_3, $A_2A_4,...,$ A_8A_{10} και τα οποία είναι σε πλήθος 9.

Με τον ίδιο συλλογισμό τα τετράγωνα με βάση πάνω στην B_0B_{10} είναι επίσης 9. Υπάρχουν 9 σειρές τέτοιων τετραγώνων (η τελευταία έχει τις βάσεις των τετραγώνων πάνω στην $\Gamma_0\Gamma_{10}$).

Επομένως το πλήθος των τετραγώνων με πλευρά 2α είναι ίσο με $9 \cdot 9 = 9^2$

Υπολογισμός του Σ_3:

Τα τετράγωνα με πλευρά 3α που έχουν τη βάση τους στην A_0A_{10} είναι αυτά που έχουν βάσεις τις $A_0A_3, A_1A_4, A_2A_5, ..., A_7A_{10}$ και είναι σε πλήθος 8. Υπάρχουν 8 σειρές τέτοιων τετραγώνων.

Επομένως το πλήθος όλων των τετραγώνων αυτών είναι $8 \cdot 8 = 8^2$

Με το ίδιο σκεπτικό βρίσκουμε ότι είναι:

$\Sigma_4 = 7^2,\ \Sigma_5 = 6^2, ...,\ \Sigma_8 = 3^2,\ \Sigma_9 = 2^2$ και $\Sigma_{10} = 1^2$

Επομένως το ζητούμενο πλήθος είναι:

$S = 10^2 + 9^2 + 8^2 + ... + 3^2 + 2^2 + 1^2$

Το άθροισμα αυτό σύμφωνα με τον τύπο (T_2) είναι ίσο με:

$S = \dfrac{10.11.21}{6} = 385$ τετράγωνα.

21) Στο επίπεδο δίνονται 10 σημεία $A_1, A_2, A_3, ..., A_{10}$ που ανά 3 δεν είναι συνευθειακά.

α) Πόσα ευθ. τμήματα ορίζονται από τα σημεία αυτά;

β) Πόσα τρίγωνα ορίζονται από τα σημεία αυτά;

γ) Πόσα από τα παραπάνω τρίγωνα έχουν μια κορυφή το σημείο A_1;

<u>Λύση</u>

α) Για να σχηματίσουμε όλα τα ευθ. τμήματα, σχηματίζουμε πρώτα όλα τα ευθ. τμήματα που έχουν ως ένα άκρο το A_1. Αυτά είναι τα $A_1A_2, A_1A_3, ..., A_1A_{10}$, δηλαδή 9 τμήματα.

Σχηματίζουμε τώρα όλα τα ευθ. τμήματα που έχουν ως ένα άκρο το A_2 και άλλο άκρο κάποιο από τα υπόλοιπα σημεία (όχι όμως το A_1 που το πήραμε προηγουμένως). Αυτά είναι τα $A_2A_3, A_2A_4, ..., A_2A_{10}$ δηλαδή 8 τμήματα.
Σχηματίζουμε τώρα τα ευθ. τμήματα με ένα άκρο το A_3 και άλλο άκρο κάποιο από τα υπόλοιπα σημεία (όχι όμως τα A_1 και A_2). Αυτά είναι 7. Προχωρούμε με τον ίδιο τρόπο.
Συνολικά λοιπόν υπάρχουν $9+8+7+...+3+2+1=$ (σύμφωνα με τον τύπο (T_1)) = $\frac{9\cdot(9+1)}{2}=45$ τμήματα.

β) Για να βρούμε πόσα τρίγωνα ορίζονται από τα σημεία αυτά σκεφτόμαστε ως εξής:
Ένα τέτοιο τρίγωνο έχει σαν βάση κάποιο από τα προηγούμενα ευθ. τμήματα που όπως βρήκαμε στο (α) ερώτημα είναι σε πλήθος 45. Για κάθε τέτοια επιλογή της βάσης του, υπάρχουν 8 τρόποι επιλογής της τρίτης κορυφής. Αν π.χ πάρουμε σαν βάση την A_1A_2, υπάρχουν οι εξής τρόποι επιλογής για την τρίτη κορυφή:
$A_3, A_4, ..., A_{10}$. Κανονικά λοιπόν θα έπρεπε, σύμφωνα με τη βασική αρχή της απαρίθμησης να υπάρχουν $45\cdot 8=360$ τρόποι επιλογής των τριών κορυφών, δηλαδή 360 τρίγωνα.

ΠΡΟΣΟΧΗ όμως: Τα τρίγωνα δεν είναι 360, αλλά μόνο 120. Αυτό εξηγείται ως εξής: Αν πάρουμε σαν βάση την A_1A_2 και κορυφή την A_3 σχηματίζουμε το τρίγωνο $A_1A_2A_3$. Το ίδιο τρίγωνο όμως σχηματίζεται αν πάρουμε σαν βάση την A_2A_3 και κορυφή την A_1 ή αν πάρουμε σαν βάση την A_1A_3 και κορυφή την A_2. Δηλαδή το τρίγωνο $A_1A_2A_3$ το μετρήσαμε 3 φορές. Για τον ίδιο λόγο, κάθε τρίγωνο μετρήθηκε 3 φορές και επομένως το πραγματικό πλήθος των τριγώνων είναι $360:3=120$

Τονίζουμε εδώ ότι στην βασική αρχή της απαρίθμησης, η νιάδα που κατασκευάζουμε πρέπει να είναι διατεταγμένη, δηλαδή νιάδες που έχουν όλα τα στοιχεία τους κοινά, δεν τα έχουν όμως στις ίδιες θέσεις θεωρούνται διαφορετικές.

γ) Τα τρίγωνα που έχουν κορυφή το A_1 έχουν βάση κάποιο ευθ. τμήμα που ορίζεται από τα υπόλοιπα 9 σημεία. Το πλήθος των ευθ. τμημάτων που ορίζονται από 9 σημεία (όπως ακριβώς και στο (α)) ερώτημα είναι σε πλήθος:
$$8+7+6+...+3+2+1=\frac{8\cdot(8+1)}{2}=36$$

22) Ένας μαθητής πρέπει να απαντήσει σε 6 από τις 8 ερωτήσεις που του δίνονται σε ένα τεστ.

α) Πόσους τρόπους έχει για να επιλέξει τις 6 απαντήσεις;

β) Πόσες επιλογές έχει αν πρέπει να απαντήσει οπωσδήποτε τις 2 πρώτες ερωτήσεις;

γ) Πόσες επιλογές έχει αν πρέπει να απαντήσει σε 2 από τις 3 πρώτες ερωτήσεις και σε 4 από τις υπόλοιπες 5;

Λύση

α) Για κάθε επιλογή των 6 ερωτήσεων που θα απαντήσει, υπάρχει μια επιλογή των 2 ερωτήσεων που δεν θα απαντήσει. Επομένως, αντί να βρούμε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε τις 6 από τις 8 ερωτήσεις, θα βρούμε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε τις 2 ερωτήσεις από τις 8.
Ονομάζουμε $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_8$ τις 8 ερωτήσεις.
Για να βρούμε το πλήθος των όλων των δυνατών δυάδων:
Επιλέγουμε την ε_1 και κάποια από τις υπόλοιπες 7 ερωτήσεις, δηλαδή υπάρχουν 7 τέτοια ζεύγη ερωτήσεων.
Επιλέγουμε κατόπιν την ε_2 και κάποια από τις υπόλοιπες (όχι όμως την ε_1, επειδή μετρήσαμε το ζεύγος $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$). Υπάρχουν 6 τέτοιες δυνατότητες.
Επιλέγουμε την ε_3 και κάποια από τις υπόλοιπες κ.ο.κ.
Βρίσκουμε (όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα): $7+6+5+4+3+2+1=$ (σύμφωνα με τον τύπο (T_1)) = $\dfrac{7\cdot(7+1)}{2}=28$ τέτοια ζεύγη.

β) Αν απαντήσει τις δύο πρώτες ερωτήσεις, απομένουν άλλες 4 από τις υπόλοιπες 6 που πρέπει να απαντήσει. Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, υπάρχουν
$5+4+3+2+1=15$ τρόποι επιλογής των 4 αυτών ερωτήσεων.

γ) Για να απαντήσει 2 από τις 3 πρώτες ερωτήσεις υπάρχουν (όπως και στο (α) ερώτημα) 3 τρόποι, ενώ για να απαντήσει στις 4 από τις υπόλοιπες 5 ερωτήσεις υπάρχουν 5 τρόποι.
Συνολικά λοιπόν υπάρχουν $3\cdot 5=15$ επιλογής.

Άλυτες ασκήσεις

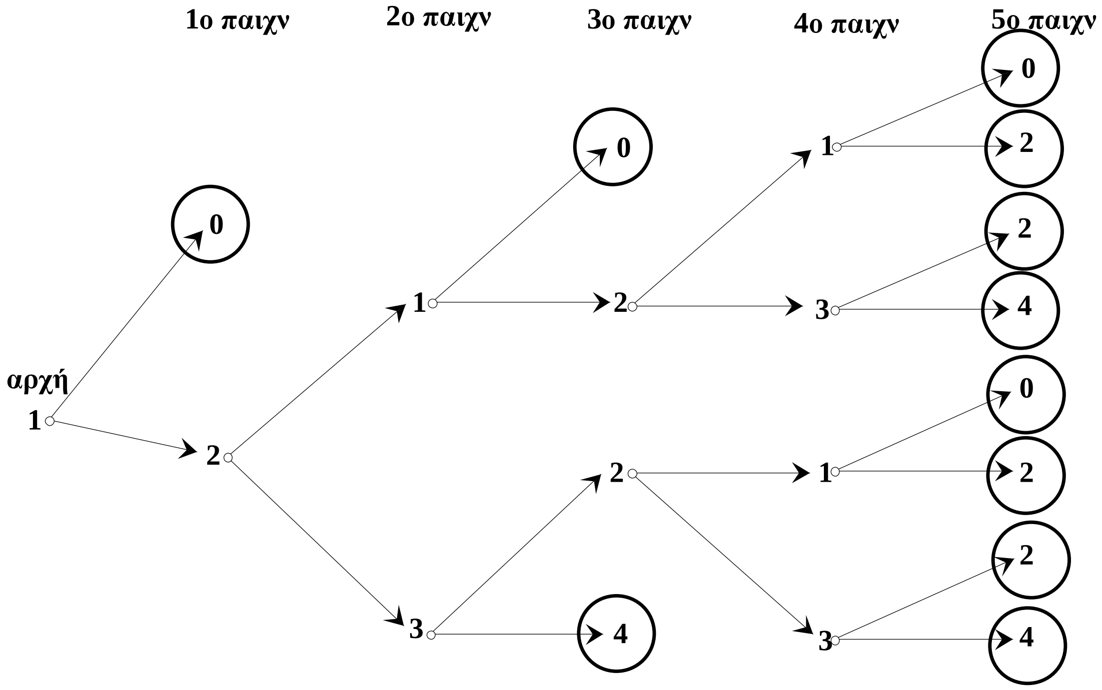
1) Καταγράφουμε κατά σειρά γέννησης το φύλλο 4 παιδιών μιας οικογένειας. Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα;(π.χ ένα αποτέλεσμα είναι το ΚΚΑΚ που σημαίνει ότι το 1^{ο} παιδί είναι κορίτσι, το 2^{ο} είναι επίσης κορίτσι, το 3^{ο} είναι αγόρι και το 4^{ο} είναι κορίτσι).

Απάντ:
Υπάρχουν 16 διαφορετικά αποτελέσματα που μπορούν να φανούν με ένα δεντροδιάγραμμα.:
Αυτά είναι: ΚΚΚΚ, ΚΚΚΓ, ΚΚΓΚ, ΚΚΓΓ, ΚΓΚΚ, ΚΓΚΓ, ΚΓΓΚ, ΚΓΓΓ, ΓΚΚΚ, ΓΚΚΓ, ΓΚΓΚ, ΓΚΓΓ, ΓΓΚΚ, ΓΓΚΓ, ΓΓΓΚ, ΓΓΓΓ

2) Ο Κώστας έχει 1€ και παίζει ένα παιχνίδι. Στο παιχνίδι αυτό ή κερδίζει ή χάνει 1€. Το παιχνίδι σταματά όταν ο Κώστας κερδίζει 3€ (δηλ έχει συνολικά 4€) ή όταν συμπληρώσει 5 παιχνίδια (ανεξάρτητα από το αποτέλεσμα). Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα του παιχνιδιού;

Απάντ:

11 όπως φαίνεται στο παρακάτω δεντροδιάγραμμα.



3) Πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα ψηφία
α) 1, 2, 3, 4, 5; **β) 0, 1, 2, 3, 4;**

Απάντ: α) 125 **β)** 100

4) Πόσους τριψήφιους με διαφορετικά ψηφία μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα ψηφία
α) 1, 2, 3, 4, 5; **β) 0, 1, 2, 3, 4;**

Απάντ: α) 60 **β)** 48

5) Σ' ένα χορό παραβρέθηκαν 10 άντρες και 10 γυναίκες. Πόσα διαφορετικά ζευγάρια μπορούμε να σχηματίσουμε από έναν άντρα και μια γυναίκα;

Απάντ: 100

6) Πόσοι τριψήφιοι λήγουν σε 3; Πόσοι δεν λήγουν σε 3;

Απάντ: α) 90 **β)** 810

7) Να λυθεί το πρόβλημα 16 της σελ. 14 με τη λέξη ΤΗΛΕΦΩΝΟ αν κάθε γράμμα μπορεί να επαναλαμβάνεται μέχρι και 4 φορές.

Απάντ:
α) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 4\ 096$ **β)** $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$
γ) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 4 = 2\ 048$ **δ)** $4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 4 = 1\ 024$

ε) $1\cdot 8\cdot 8\cdot 4 = 256$ **ζ)** $7\cdot 7\cdot 7\cdot 7 = 2\ 401$
η) $4\ 096 - 2\ 401 = 1\ 695$ **θ)** $7\cdot 7\cdot 7\cdot 7 - 6\cdot 6\cdot 6\cdot 6 = 1\ 105$
ι) $7\cdot 7\cdot 7 - 6\cdot 6\cdot 6 = 127$ **κ)** $3\ 549$
λ) $3\ 970 - 568 - 1 = 3\ 401$ **μ)** ΗΩΟΩ

8) Σχηματίζουμε όλους τους πενταψήφιους με διαφορετικά ψηφία από τα 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Να βρεθεί

α) Πόσοι είναι οι πενταψήφιοι αυτοί;

β) Πόσοι από αυτούς αρχίζουν από 4;

γ) Πόσοι από αυτούς λήγουν σε 3;

δ) Πόσοι αρχίζουν από 4 και λήγουν σε 5;

ε) Πόσοι δεν περιέχουν το ψηφίο 2;

ζ) Πόσοι περιέχουν το ψηφίο 2;

η) Πόσοι είναι άρτιοι;

θ) Πόσοι διαιρούνται δια 5;

ι) Πόσοι περιέχουν το 2 και δεν περιέχουν το 3;

κ) Πόσοι περιέχουν τα ψηφία 2 και 3 και δεν περιέχουν το 5;

λ) Πόσοι περιέχουν σαν ψηφία 5 διαδοχικούς αριθμούς (π.χ. 23456 ή 74653);

μ) Πόσοι είναι μικρότεροι του 40 000;

ν) Αν τους διατάξουμε κατά σειρά αυξανόμενου μεγέθους, ποια τάξη θα κατέχει ο αριθμός 59 437;

ξ) Ποιος αριθμός κατέχει την τάξη 10 000;

Απάντ:
α) $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 12\ 120$ **β)** $1\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 1\ 680$
γ) $1\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 1\ 680$ **δ)** $1\cdot 1\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 210$
ε) $8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 6\ 720$ **ζ)** $15\ 120 - 6\ 720 = 8\ 400$
η) $4\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 6\ 720$ **θ)** $1\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 1\ 680$
ι) $5\cdot(1\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4) = 4\ 200$ **κ)** $5\cdot 4\cdot(6\cdot 5\cdot 4) = 2\ 400$
λ) $5\cdot(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1) = 600$ **μ)** $3\cdot(8\cdot 7\cdot 6\cdot 5) = 5\ 040$
ν) $8\ 294$ **ξ)** $69\ 528$

9) Να λυθεί το ίδιο πρόβλημα αν κάθε ψηφίο μπορεί να επαναλαμβάνεται μέχρι και 5 φορές.

Απάντ:

α) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 59\ 049$

β) $1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6\ 561$

γ) $1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6\ 561$

δ) $1 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$

ε) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 32\ 768$

ζ) $59\ 049 - 32\ 768 = 26\ 281$

η) $4 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 26\ 244$

θ) $1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6\ 561$

ι) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 - 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 15\ 961$

κ) $6\ 930$

λ) $5 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 600$

μ) $3 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 19\ 683$

ν) $32\ 344$

ξ) $25\ 751$

10) Να βρεθεί το πλήθος όλων των φυσικών μικρότερων του 1 000 000 που δεν περιέχουν το ψηφίο 5

Απάντ: $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 531\ 441$

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

Απλή μετάθεση ή (πιο απλά) μετάθεση των ν διακεκριμένων (δηλ. διαφορετικών) στοιχείων $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ λέγεται κάθε διατεταγμένη νιάδα των στοιχείων αυτών.

Π.χ μια μετάθεση των στοιχείων α, β, γ είναι η (α, β, γ), μια άλλη είναι η, μια άλλη είναι η (γ, α, β) κ.λ.π

Ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με τον εξής:

Μετάθεση των ν στοιχείων $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ λέγεται κάθε παράταξη των στοιχείων αυτών πάνω σε ευθεία γραμμή.

Αποδεικνύεται ότι το πλήθος όλων των μεταθέσεων των ν διακεκριμένων στοιχείων α_1, α_2, …, α_ν που συμβολίζεται με P_ν είναι ίσο με

$$\mathbf{P_\nu = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot \nu}$$

Το γινόμενο αυτό των ν πρώτων φυσικών αριθμών συμβολίζεται με **ν!** και διαβάζεται **"νι παραγοντικό"**

Ώστε: $\mathbf{P_\nu = \nu!}$

Ορίζεται επίσης: $\mathbf{0! = 1}$

Το $\nu!$ έχει μια βασική ιδιότητα: $\mathbf{(\nu+1)! = \nu!(\nu+1)}$

Μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$\mathbf{(\nu+1)! = \nu!(\nu+1) = (\nu-1)!\nu(\nu+1) = (\nu-2)!(\nu-1)\nu(\nu+1)} \quad \text{κ.λ.π}$$

Τα περισσότερα παραδείγματα που αναφέρονται στις μεταθέσεις μπορούν να λυθούν και με τη βασική αρχή της απαρίθμησης, η χρησιμοποίηση όμως των παραπάνω τύπων συντομεύει τη λύση τους.

Παραδείγματα:

23) Να αποδειχτούν οι σχέσεις:

α) $\mathbf{(\nu+2)! + (\nu+1)! + \nu! = \nu!(\nu+2)^2}$

β) $\mathbf{2\nu! - (\nu-1)(\nu-1)! = \nu! + (\nu-1)!}$

γ) $\dfrac{(\nu-1)!}{\nu!}-\dfrac{\nu!}{(\nu+1)!}=\dfrac{1}{\nu(\nu+1)}$

Απόδειξη

α) [Οι πράξεις με τα παραγοντικά γίνονται συνήθως μετατρέποντάς τα σε παραγοντικά του μικρότερου αριθμού. Έτσι θα μετατρέψουμε όλα τα παραγοντικά σε παραγοντικά του ν]

$(\nu+2)!+(\nu+1)!+\nu!=\nu!(\nu+1)(\nu+2)+\nu!(\nu+1)+\nu!=$
$\nu![(\nu+1)(\nu+2)+(\nu+1)+1]=\nu!(\nu^2+2\nu+\nu+2+\nu+1+1)=\nu!(\nu^2+4\nu+4)=$
$\nu!(\nu+2)^2$

β) $2\nu!-(\nu-1)(\nu-1)!=$ [τα μετατρέπουμε σε παραγοντικά του $(\nu-1)$] =
$2(\nu-1)!\nu-(\nu-1)!(\nu-1)=(\nu-1)!(2\nu-\nu+1)=(\nu-1)!(\nu+1)=(\nu-1)!\nu+(\nu-1)!=$
$\nu!+(\nu-1)!$

γ) $\dfrac{(\nu-1)!}{\nu!}-\dfrac{\nu!}{(\nu+1)!}=\dfrac{1}{\nu(\nu+1)}=\dfrac{(\nu-1)!}{(\nu-1)!\nu}-\dfrac{\nu!}{\nu!(\nu+1)}=\dfrac{1}{\nu}-\dfrac{1}{\nu+1}=\dfrac{\nu+1-\nu}{\nu(\nu+1)}=\dfrac{1}{\nu(\nu+1)}$

24) Αν κ, ν $\in \mathbb{N}^*$ και $\kappa!=\nu!$ να αποδειχθεί ότι $\kappa=\nu$

Απόδειξη

$\kappa!=\nu!\Leftrightarrow 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot\kappa=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot\nu$ (1)

- Αν $\kappa>\nu$ τότε $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot\kappa=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot\nu(\nu+1)\cdot\ldots\cdot\kappa>1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot\nu$ άτοπο εξαιτίας της (1)
- Αν $\kappa<\nu$ δηλ. $\nu>\kappa$ με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε σε άτοπο.

Επομένως $\kappa=\nu$

25) Από όλες τις μεταθέσεις των Α, Β, Γ, κ, λ, μ πόσες αρχίζουν από κεφαλαίο γράμμα;

Λύση

Οι μεταθέσεις που αρχίζουν από Α είναι όσες και οι μεταθέσεις των υπολοίπων 5 γραμμάτων δηλ. 5!. Για τον ίδιο λόγο οι μεταθέσεις που αρχίζουν από Β είναι 5! καθώς και οι μεταθέσεις που αρχίζουν από Γ. Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι
$3\cdot 5!=3\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)=3\cdot 120=360$

26) Από όλα τα γράμματα της λέξης ΤΡΑΠΕΖΙ πόσες μεταθέσεις μπορούμε να σχηματίσουμε στις οποίες τα σύμφωνα και τα φωνήεντα βρίσκονται στις ίδιες θέσεις που βρίσκονται τα σύμφωνα και τα φωνήεντα της λέξης ΤΡΑΠΕΖΙ (δηλ. τα σύμφωνα στις θέσεις $1^η$, $2^η$, $4^η$ και $6^η$);

Λύση

Τα 4 σύμφωνα μπορούν να τοποθετηθούν στις 4 θέσεις ($1^η$, $2^η$, $4^η$ και $6^η$) κατά 4! τρόπους. Τα 3 φωνήεντα μπορούν να τοποθετηθούν στις υπόλοιπες 3 θέσεις κατά 3! τρόπους. Σύμφωνα με τη βασική αρχή της απαρίθμησης υπάρχουν

$4!\cdot 3! = 24\cdot 6 = 144$ τέτοιες μεταθέσεις.

27) Κατά πόσους τρόπους μπορούμε να παρατάξουμε 10 βιβλία σ' ένα ράφι ώστε:

α) δύο συγκεκριμένα βιβλία να βρίσκονται το ένα δίπλα στο άλλο;

β) τα δύο αυτά βιβλία να μη βρίσκονται το ένα δίπλα στο άλλο;

Λύση

α) Έστω $B_1, B_2, ..., B_{10}$ τα 10 βιβλία και B_1, B_2 τα βιβλία που θέλουμε να βρίσκονται το ένα δίπλα στο άλλο.
Η τοποθέτηση μπορεί να γίνει αφού τοποθετήσουμε τα 9 βιβλία $B_2, B_3, ..., B_{10}$ με όλους τους δυνατούς τρόπους και κατόπιν τοποθετήσουμε και το B_1 σε όλες τις δυνατές θέσεις ώστε να βρίσκεται δίπλα στο B_2.
Τα 9 βιβλία $B_2, B_3, ..., B_{10}$ μπορούν να τοποθετηθούν κατά 9! τρόπους. Για κάθε τέτοια παράταξη το B_1 μπορεί να τοποθετηθεί σε δύο θέσεις (αριστερά ή δεξιά του B_2). Έτσι υπάρχουν συνολικά $2\cdot 9! = 725\ 760$ τρόποι για την παραπάνω τοποθέτηση.

β) Μπορούμε να τοποθετήσουμε πάλι τα 9 βιβλία $B_2, B_3, ..., B_{10}$ με όλους τους δυνατούς τρόπους που είναι 9! και κατόπιν να τοποθετήσουμε το B_1 έτσι ώστε να μη βρίσκεται δίπλα στο B_2. Για κάθε τοποθέτηση των 9 βιβλίων υπάρχουν 10 θέσεις (1^{o}, 2^{o}, , , 10^{o}) για να τοποθετηθεί το B_1 από τις οποίες 10 θέσεις οι 2 είναι δίπλα στο B_2 και οι 8 δεν είναι δίπλα στο B_2. Έτσι υπάρχουν συνολικά $8\cdot 9! = 2\ 903\ 040$ τέτοιες τοποθετήσεις.

Άλλη λύση

Όλες οι δυνατές τοποθετήσεις των 10 βιβλίων είναι $10!$. Βρήκαμε στο (α) ότι οι τοποθετήσεις στις οποίες το B_1 βρίσκεται δίπλα στο B_2 είναι $725\ 760$. Επομένως οι τοποθετήσεις στις οποίες το B_1 δεν βρίσκεται δίπλα στο B_2 είναι:
$10! - 725\ 060 = 3\ 628\ 800 - 725\ 760 = 2\ 903\ 040$

28) α) Κατά πόσους τρόπους μπορούν να παραταχτούν 4 αγόρια και 4 κορίτσια σε ευθεία γραμμή;

β) Κατά πόσους τρόπους μπορούν να παραταχτούν αν όλα τα αγόρια και όλα τα κορίτσια πρέπει να είναι μαζί;

γ) Κατά πόσους τρόπους μπορούν να παραταχτούν αν όλα τα αγόρια πρέπει να είναι μαζί;

δ) Κατά πόσους τρόπους μπορούν να παραταχτούν εναλλάξ;

Λύση

α) Οι τρόποι με τους οποίους μπορούν να παραταχτούν είναι όσες και οι μεταθέσεις των 8 ατόμων δηλ. $8! = 40\ 320$

β) Ή τα αγόρια θα παραταχτούν στις $1^η$, $2^η$, $3^η$ και $4^η$ θέση κατά $4!$ τρόπους και τα κορίτσια στις $5^η$, $6^η$, $7^η$ και $8^η$ θέση κατά $4!$ τρόπους ή αντίστροφα. Έτσι έχουμε
$4!\cdot 4!$ τρόπους για να είναι τα αγόρια στις $1^η$, $2^η$, $3^η$ και $4^η$ θέσεις και
$4!.4!$ τρόπους για να είναι τα αγόρια στις $5^η$, $6^η$, $7^η$ και $8^η$ θέσεις
Υπάρχουν λοιπόν συνολικά $2\cdot 4!\cdot 4! = 1\,152$ τρόποι

γ) Θα έχουμε μια από τις εξής 5 παρατάξεις:
ΑΑΑΑΚΚΚΚ, ΚΑΑΑΑΚΚΚ, ΚΚΑΑΑΑΚΚ, ΚΚΚΑΑΑΑΚ, ΚΚΚΚΑΑΑΑ όπου Α σημαίνει αγόρι και Κ σημαίνει κορίτσι.
Για την παράταξη ΑΑΑΑΚΚΚΚ υπάρχουν $4!\cdot 4!$ τρόποι όπως βρήκαμε στο (β).
Για την παράταξη ΚΑΑΑΑΚΚΚ υπάρχουν πάλι $4!\cdot 4!$ ($4!$ τρόποι για να τοποθετήσουμε τα 4 αγόρια στις $2^η$, $3^η$, $4^η$ και $5^η$ θέση και $4!$ τρόποι για να τοποθετήσουμε τα 4 κορίτσια στις υπόλοιπες θέσεις). Επίσης υπάρχουν $4!\cdot 4!$ τρόποι για την παράταξη ΚΚΑΑΑΑΚΚ και $4!\cdot 4!$ για κάθε μια από τις παρατάξεις ΚΚΚΑΑΑΑΚ και ΚΚΚΚΑΑΑΑ. Επομένως υπάρχουν $5\cdot 4!\cdot 4! = 2\,880$ τέτοιες παρατάξεις.

δ) Υπάρχουν $4!$ τρόποι για να παραταχτούν τα αγόρια στις $1^η$, $3^η$, $5^η$ και $7^η$ θέσεις και $4!$ τρόποι για να παραταχτούν τα κορίτσια στις $2^η$, $4^η$, $6^η$ και $8^η$ θέσεις. Άρα υπάρχουν $4!\cdot 4! = 576$ τρόποι για να παραταχτούν εναλλάξ
αγόρι –κορίτσι –αγόρι –κορίτσι –αγόρι κ.λ.π.
Για τον ίδιο λόγο υπάρχουν $4!\cdot 4! = 576$ τρόποι για να παραταχτούν εναλλάξ
κορίτσι –αγόρι –κορίτσι –αγόρι –κορίτσι κ.λ.π
Υπάρχουν λοιπόν συνολικά $576 + 576 = 1\,152$ τέτοιοι τρόποι.

29) Να βρεθεί το πλήθος των τρόπων με τους οποίους 6 βιβλία Άλγεβρας, 4 βιβλία Γεωμετρίας και 2 βιβλία Τριγωνομετρίας μπορούν να τοποθετηθούν σε ένα ράφι ώστε τα βιβλία του ίδιου μαθήματος να βρίσκονται μαζί.

Λύση

Υπάρχουν $3!$ τρόποι για να διατάξουμε πρώτα τις 3 ομάδες των βιβλίων (δηλ. ΑΓΤ ή ΓΤΑ ή ΑΤΓ όπου Α =Άλγεβρα, Γ = Γεωμετρία, Τ = Τριγωνομετρία). Σε κάθε ομάδα υπάρχουν $6!$ τρόποι για να βάλουμε τα βιβλία της Άλγεβρας σε όλες τις δυνατές θέσεις, $4!$ τρόποι για τα βιβλία της Γεωμετρίας και $2!$ τρόποι για τα βιβλία της Τριγωνομετρίας. Άρα υπάρχουν συνολικά:
$3!\cdot 6!\cdot 4!\cdot 2! = 207\ 360$ τρόποι.

30) Με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6 σχηματίζουμε όλους τους εξαψήφιους αριθμούς με διαφορετικά ψηφία.

α) Πόσοι είναι οι εξαψήφιοι αυτοί;

β) Πόσοι αρχίζουν από 2;

γ) Πόσοι αρχίζουν από 2 και λήγουν σε 3;

δ) Πόσοι είναι άρτιοι;

ε) Πόσοι είναι μεγαλύτεροι του $300\,000$;

ζ) Πόσοι είναι μεγαλύτεροι του $323\,088$;

η) Πόσο είναι το άθροισμα όλων των εξαψηφίων του (α) ερωτήματος;

Λύση

α) Το πλήθος των εξαψήφιων που μπορούμε να σχηματίσουμε είναι όσες και οι μεταθέσεις των 6 ψηφίων, δηλ. $6! = 720$

β) Το 1^{o} ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 1 τρόπο, ενώ τα υπόλοιπα 5 μπορούν να επιλεγούν με τόσους τρόπους, όσες είναι οι μεταθέσεις των 5 άλλων ψηφίων, δηλ. $5! = 120$ τρόπους.
Το ζητούμενο πλήθος είναι λοιπόν: $1 \cdot 5! = 120$

γ) Το 1^{o} ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 1 τρόπο. Το τελευταίο ψηφίο μπορεί να επιλεγεί επίσης με 1 τρόπο. Τα υπόλοιπα 4 ψηφία μπορούν να επιλεγούν κατά $4!$ τρόπους. Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι $1 \cdot 1 \cdot 4! = 24$

δ) Το τελευταίο ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 3 τρόπους (2 ή 4 ή 6) ενώ τα υπόλοιπα 5 ψηφία μπορούν να επιλεγούν με τόσους τρόπους όσες είναι και οι μεταθέσεις των υπολοίπων 5 ψηφίων, δηλ. $5!$ τρόπους.
Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι $3 \cdot 5! = 3 \cdot 120 = 360$

ε) Για να είναι ένας αριθμός μεγαλύτερος του $300\,000$ πρέπει και αρκεί να αρχίζει από 3 ή 4 ή 5 ή 6. Άρα το 1^{o} ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 4 τρόπους, ενώ τα υπόλοιπα 5 ψηφία δηλ. $5! = 120$.
Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι $4 \cdot 5! = 4 \cdot 120 = 480$

ζ) Βρίσκουμε πρώτα τον μικρότερο από τους εξαψήφιους του προβλήματος που μπορούμε να σχηματίσουμε ο οποίος είναι μεγαλύτερος του $323\,080$. Αυτός θα έχει σαν 1^{o} ψηφίο το 3, 2^{o} το 2, 3^{o} το 4 (το μικρότερο κατά το δυνατόν, αλλά όχι μικρότερο το 3 και φυσικά διαφορετικό από τα δύο προηγούμενα 3 και 2), 4^{o} το 1, 5^{o} το 5 και 6^{o} το 6, δηλαδή ο αριθμός είναι ο $324\,156$.

Βρίσκουμε τώρα πόσοι ακόμη από τους 720 εξαψήφιους του (α) ερωτήματος είναι μεγαλύτεροι του $324\,156$.

Μεγαλύτεροι τοι $324\,156$ είναι οι εξής αριθμοί:

- Όσοι αρχίζουν από 4 ή 5 ή 6. Αυτοί είναι $3 \cdot 5! =$ **360** (το 1^{o} ψηφίο τους μπορεί να επιλεγεί με 3 τρόπους και τα υπόλοιπα 5 όσες και οι μεταθέσεις των υπολοίπων 5 ψηφίων)
- Όσοι αρχίζουν από 3 και έχουν ως 2^{o} ψηφίο κάποιο από τα 4, 5, 6. Το πλήθος αυτών είναι $1 \cdot 3 \cdot 4! = \mathbf{72}$ (το 1^{o} ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 1 τρόπο, το 2^{o} με 3 τρόπους και τα υπόλοιπα 4 ψηφία με $4!$ τρόπους)
- Όσοι αρχίζουν από 32 και έχουν ως 3^{o} ψηφίο κάποιο από τα 5 ή 6. Αυτοί είναι: $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3! = \mathbf{12}$

- Όσοι αρχίζουν από 324 και έχουν σαν 4^{o} ψηφίο κάποιο από τα 5 ή 6. Οι αριθμοί αυτοί είναι: $1\cdot1\cdot1\cdot 2\cdot 2! = \mathbf{4}$
- Όσοι αρχίζουν από $3\,241$ και έχουν σαν 5^{o} ψηφίο το 6. Αυτοί είναι: $1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1 = \mathbf{1}$

Έτσι υπάρχουν συνολικά $360+72+12+4+1=449$ αριθμοί μεγαλύτεροι του $324\,156$. Άρα υπάρχουν $449+1=450$ αριθμοί μεγαλύτεροι του $323\,088$.

η) Για να βρούμε το ζητούμενο άθροισμα, θα βρούμε το άθροισμα των μονάδων όλων των αριθμών, το άθροισμα των δεκάδων τους, το άθροισμα των εκατοντάδων τους, το άθροισμα των χιλιάδων, δεκάδων χιλιάδων και εκατοντάδων χιλιάδων και θα προσθέσουμε τα 6 αυτά αθροίσματα.

Άθροισμα των μονάδων όλων των αριθμών:
Οι αριθμοί που λήγουν σε 1 είναι όσες και οι μεταθέσεις των υπολοίπων 5 ψηφίων δηλ. $5!=120$. Το άθροισμα των μονάδων όλων αυτών των αριθμών είναι $120\cdot 1$
Οι αριθμοί που λήγουν σε 2 ή 3 ή 4 ή 5 ή 6 είναι επίσης 120 και τα αθροίσματα των μονάδων τους είναι αντίστοιχα: $120\cdot 2$, $120\cdot 3$, $120\cdot 4$, $120\cdot 5$ και $120\cdot 6$.
Επομένως το άθροισμα των μονάδων όλων των αριθμών είναι:
$120\cdot1+120\cdot2+120\cdot3+120\cdot4+120\cdot5+120\cdot6=120(1+2+3+4+5+6)=\mathbf{120\cdot 21}$ μονάδες

Άθροισμα των δεκάδων όλων των αριθμών:
Οι αριθμοί που έχουν σαν ψηφίο δεκάδων το 1 είναι όσες και οι μεταθέσεις των υπολοίπων 5 ψηφίων δηλ. $5!=120$. Άρα το άθροισμα των δεκάδων όλων αυτών των αριθμών είναι $120\cdot 1$ δεκάδες.
Όπως και για τις μονάδες λοιπόν βρίσκουμε ότι το άθροισμα των δεκάδων όλων των αριθμών είναι $120(1+2+3+4+5+6)\cdot 10 = \mathbf{120\cdot 21\cdot 10}$ μονάδες

Άθροισμα των εκατοντάδων κ.λ.π όλων των αριθμών.
Εντελώς όμοια βρίσκουμε ότι:

Άθροισμα εκατοντάδων = $\mathbf{120\cdot 21\cdot 100}$ μονάδες

Άθροισμα χιλιάδων = $\mathbf{120\cdot 21\cdot 1000}$ μονάδες

Άθροισμα δεκάδων χιλιάδων = $\mathbf{120\cdot 21\cdot 10\,000}$ μονάδες

Άθροισμα εκατοντάδων χιλιάδων = $\mathbf{120\cdot 21\cdot 100\,000}$ μονάδες

Επομένως το ζητούμενο άθροισμα όλων των αριθμών είναι:
$120\cdot 21+120\cdot 21\cdot 10+120\cdot 21\cdot 100+120\cdot 21\cdot 1000+120\cdot 21\cdot 10\,000+120\cdot 21\cdot 100\,000=$
$120\cdot 21\cdot(1+10+100+1\,000+10\,000+100\,000)=120\cdot 21\cdot 111\,111= 279\,999\,720$

Β΄ Λύση
Για κάθε εξαψήφιο π.χ $356\,214$ υπάρχει ο συμπληρωματικός του. Σαν τέτοιον εννοούμε τον αριθμό που προκύπτει αν από το 7 αφαιρέσουμε κάθε ψηφίο του αριθμού,

δηλαδή ο συμπληρωματικός του παραπάνω αριθμού είναι ο $421\,563$. Οι αριθμοί δηλαδή μπορούν να χωριστούν σε ζεύγη δύο συμπληρωματικών αριθμών. Σε κάθε τέτοιο ζεύγος το άθροισμα των αριθμών είναι $777\,777$.
Υπάρχουν συνολικά $6!=720$ αριθμοί οι οποίοι σχηματίζουν $720:2=360$ ζεύγη. Και επειδή σε κάθε ζεύγος το άθροισμα είναι $777\,777$, το άθροισμα των 360 ζευγών είναι:
$360\cdot 777\,777=279\,999\,720$

31) Να λυθεί το ίδιο πρόβλημα αν χρησιμοποιήσουμε τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4 και 5. (Ένας αριθμός που αρχίζει από 0 δεν θεωρείται εξαψήφιος)

Λύση

α) Όλοι οι αριθμοί με 6 ψηφία που μπορούμε να σχηματίσουμε (συμπεριλαμβανομένων και αυτών που έχουν το 0 σαν 1ο ψηφίο είναι όσες και οι μεταθέσεις των 6 ψηφίων, δηλ. $6!=720$. Από τους 720 αυτούς αριθμούς ορισμένοι αρχίζουν από 0. Το πλήθος των αριθμών αυτών βρίσκεται ως εξής:
Το 1ο ψηφίο τους μπορεί να επιλεγεί με 1 τρόπο και τα υπόλοιπα 5 ψηφία με τόσους τρόπους, όσες είναι και οι μεταθέσεις των 5 ψηφίων, δηλ. $5!=120$. Υπάρχουν επομένως $1\cdot 120=120$ αριθμοί που αρχίζουν από 0. Επομένως υπάρχουν $720-120=600$ αριθμοί που δεν αρχίζουν από 0, άρα είναι εξαψήφιοι.

β) Όπως ακριβώς και στην προηγούμενη άσκηση υπάρχουν 120 τέτοιοι αριθμοί.

γ) Όπως ακριβώς και στην προηγούμενη άσκηση υπάρχουν 24 τέτοιοι αριθμοί.

δ) Βρίσκουμε πρώτα πόσοι άρτιοι έχουν το 0 ως τελευταίο ψηφίο. Αυτοί είναι όσες και οι μεταθέσεις των υπολοίπων 5 ψηφίων, δηλ. $5!=120$.
Βρίσκουμε πόσοι άρτιοι λήγουν σε 2 ή 4.
Το τελευταίο ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 2 τρόπους. Το 1ο ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 4 τρόπους (διαφορετικό από το τελευταίο ψηφίο και όχι 0). Τα υπόλοιπα 4 ψηφία μπορούν να επιλεγούν με 4! τρόπους. Άρα υπάρχουν $2\cdot 4\cdot 4!=192$ τέτοιοι άρτιοι.
Έτσι συνολικά υπάρχουν $120+192=312$ άρτιοι αριθμοί.

ε) Για να είναι ένας αριθμός μεγαλύτερος του $300\,000$ πρέπει να αρχίζει από 3 ή 4 ή 5. Άρα το 1ο ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 3 τρόπους. Τα υπόλοιπα 5 ψηφία μπορούν να επιλεγούν με 5! τρόπους. Υπάρχουν λοιπόν $3\cdot 5!=360$ τέτοιοι αριθμοί.

ζ) όπως και στην προηγούμενη άσκηση βρίσκουμε ότι ο μικρότερος από τους αριθμούς του ερωτήματος (α) που είναι μεγαλύτερος του $323\,088$ είναι ο $324\,015$. Βρίσκουμε τώρα πόσοι από τους εξαψήφιους που μπορούμε να σχηματίσουμε είναι μεγαλύτεροι του $324\,015$.

Μεγαλύτεροι τοι $324\,015$ είναι οι παρακάτω αριθμοί:

- Όσοι αρχίζουν από 4 ή 5. Αυτοί είναι: $2\cdot 5!=$ **240** αριθμοί.
- Όσοι αρχίζουν από 3 και έχουν ως 2ο ψηφίο το 4 η το 5.
  Αυτοί είναι: $1\cdot 2\cdot 4!=$ **48** αριθμοί
- Όσοι αρχίζουν από 32 και έχουν ως 3ο ψηφίο το 5.

Αυτοί είναι $1\cdot1\cdot1\cdot3! =$ **6** αριθμοί

- Όσοι αρχίζουν από 324 και έχουν ως $4^{ο}$ ψηφίο το 1 ή το 5.
  Αυτοί είναι $1\cdot1\cdot1\cdot2\cdot2! =$ **4** αριθμοί
- Όσοι αρχίζουν από $3\,240$ και έχουν ως $5^{ο}$ ψηφίο το 5.
  Αυτοί είναι $1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1 =$ **1** αριθμός

Έτσι υπάρχουν $240+48+6+4+1=299$ αριθμοί μεγαλύτεροι του $323\,088$.

η) Βρίσκουμε πρώτα το άθροισμα όλων των αριθμών με 6 ψηφία που μπορούμε να σχηματίσουμε (συμπεριλαμβανομένων και εκείνων που έχουν ως $1^{ο}$ ψηφίο το 0)
Όπως και στην προηγούμενη άσκηση, το άθροισμα όλων των αριθμών είναι:
$120\cdot15\cdot111\,111=199\,999\,800$.

Βρίσκουμε τώρα το άθροισμα όλων εκείνων των αριθμών που έχουν σαν $1^{ο}$ ψηφίο το 0. Είναι σαν να θέλουμε να βρούμε το άθροισμα όλων των πενταψηφίων που σχηματίζονται από τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5 χρησιμοποιώντας καθένα μια φορά. Όπως ακριβώς και στην προηγούμενη άσκηση στο (η), βρίσκουμε ότι το άθροισμα αυτό είναι:

$24\cdot(1+2+3+4+5)\cdot(1+10+100+1\,000+10\,000) = 24\cdot15\cdot11\,111 = 3\,999\,960$

Το ζητούμενο άθροισμα προκύπτει αν αφαιρέσουμε τα δύο παραπάνω αθροίσματα, δηλαδή είναι: $199\,999\,800-3\,999\,960=195\,999\,840$

<u>Άλυτες ασκήσεις</u>

11) Κατά πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 8 μαθητές σε 8 θρανία, ώστε σε κάθε θρανίο να κάθεται ένας μαθητής;

Απάντ: $8! = 40\,320$

12) Σε πόσες από τις μεταθέσεις των ν διακεκριμένων αντικειμένων

α) Δύο συγκεκριμένα αντικείμενα βρίσκονται το ένα δίπλα στο άλλο;

β) Τα δύο αυτά αντικείμενα δεν βρίσκονται το ένα δίπλα στο άλλο;

Απάντ: α) $2(\nu-1)!$ **β)** $(\nu-2)(\nu-1)!$

13) Σε πόσες από τις μεταθέσεις των ν διακεκριμένων αντικειμένων 3 συγκεκριμένα αντικείμενα δεν χωρίζονται από άλλα αντικείμενα;

Απάντ: $3!\cdot(\nu-2)!$

14) Σχηματίζουμε όλες τις λέξεις με 6 γράμματα χρησιμοποιώντας και τα 6 γράμματα α, β, γ, δ, ε, η.

α) Πόσες είναι οι λέξεις αυτές;

β) Πόσες αρχίζουν από α;

γ) Πόσες αρχίζουν από σύμφωνο;

δ) Πόσες περιέχουν εναλλάξ φωνήεν – σύμφωνο;

ε) Πόσες αρχίζουν από φωνήεν και τελειώνουν σε σύμφωνο;

Απάντ:

α) $6! = 720$ **β)** $1 \cdot 5! = 120$

γ) $3 \cdot 5! = 360$ **δ)** $3! \cdot 3! = 36$

ε) $3 \cdot 3 \cdot 4! = 216$

15) Έχουμε 10 αριθμημένες θέσεις από το 1 ως το 10 και 10 αριθμημένες κάρτες επίσης από το 1 ως το 10.

α) Κατά πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε τις 10 κάρτες στις 10 θέσεις ώστε σε κάθε θέση να βρίσκεται μία και μόνο κάρτα;

β) Κατά πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε τις 10 κάρτες στις 10 θέσεις ώστε οι κάρτες με νούμερα 1, 3 και 5 να βρίσκονται στις θέσεις 1, 3 και 5 αντίστοιχα;

γ) Κατά πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν οι 10 κάρτες ώστε οι κάρτες 3 και 8 να βρίσκονται η μία δίπλα στην άλλη;

δ) Κατά πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν ώστε οι κάρτες 3 και 8 να μη βρίσκονται η μία δίπλα στην άλλη;

ε) Κατά πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν ώστε οι κάρτες 3 και 8, καθώς και οι 1 και 5 να βρίσκονται η μία δίπλα στην άλλη;

ζ) Κατά πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν ώστε οι άρτιες κάρτες να βρίσκονται στις άρτιες θέσεις;

η) Κατά πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν εναλλάξ άρτια – περιττή;

Απάντ:

α) $10! = 3\,628\,800$ **β)** $7! = 5\,040$

γ) $2 \cdot 9! = 725\,760$ **δ)** $8 \cdot 9! = 2\,903\,040$

ε) $2 \cdot 2 \cdot 8! = 161\,280$ **ζ)** $5! \cdot 5! = 14\,400$

η) $5! \cdot 5! = 14\,400$

16) Να βρεθεί το άθροισμα όλων των αριθμών των μεγαλυτέρων του 10 000 που μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 0, 2, 4, 6, 8 χρησιμοποιώντας καθένα μόνο μια φορά.

Απάντ:

$$4!(0+2+4+6+8)\cdot(1+10+100+1\,000+10\,000) -$$
$$3!(2+4+6+8)\cdot(1+10+100+1\,000) = 5\,199\,960$$

17) Με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6 σχηματίζουμε όλους τους εξαψήφιους με διαφορετικά ψηφία.

α) Να βρεθεί το άθροισμα των παραπάνω αριθμών που είναι μεγαλύτεροι του 300 000.

β) Να βρεθεί το άθροισμα των παραπάνω αριθμών που είναι μεγαλύτεροι του 223 288.

Απάντ: α) 233 599 824 **β)** 257 506 452