ΤΡΙΤΗ ΚΑΙ 13

Νικ. Ιωσηφίδης, Μαθηματικός – Φροντιστής, ΒΕΡΟΙΑ

e-mail: iossifid@yahoo.gr

Αφορμή για το άρθρο αυτό πήραμε σήμερα (Τρίτη 13 Φεβρουαρίου 2007) από μια εκπομπή της τηλεόρασης κατά τη διάρκεια της οποίας έγινε αναφορά για τη σύμπτωση αυτή και την ατυχία που πιστεύουν κάποιοι πως κουβαλά μαζί της.

Η περίπτωση κατά την οποία στις 13 κάποιου μήνα είναι Τρίτη (ή Παρασκευή), θεωρείται γουρσούζικη.

Τα ερωτήματα που θα μελετήσουμε είναι:

α) Κάθε πότε συμβαίνει αυτό;

β) Θα συμβεί οπωσδήποτε αυτό κατά τη διάρκεια ενός έτους;

γ) Ποιος είναι ο ελάχιστος και ποιος ο μέγιστος αριθμός τέτοιων συμπτώσεων μέσα σε ένα ημερολογιακό έτος;

Θα μελετήσουμε δύο περιπτώσεις:

- **Έτη 365 ημερών**
- **Έτη 366 ημερών (δίσεκτα έτη)**

Α) Έτη 365 ημερών:

Σ’ ένα έτος 365 ημερών, ο αριθμός των ημερών κάθε μήνα είναι:

Ιαν	Φεβ	Μαρ	Απρ	Μαι	Ιουν	Ιουλ	Αυγ	Σεπ	Οκτ	Νοε	Δεκ
31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

Αριθμούμε τις ημέρες 1, 2, 3, …, 365 αρχίζοντας από την $1^η$ Ιαν. Στον παρακάτω πίνακα, στη $2^η$ γραμμή είναι οι ημέρες που καταλαμβάνει κάθε μήνας στην παραπάνω

διαδοχή. Στην τρίτη γραμμή είναι οι ημέρες της παραπάνω διαδοχής που πέφτει η 13^{η} κάθε μήνα. Αυτές βρίσκονται προσθέτοντας στην 1^{η} μέρα κάθε μήνα το 12.
Στην 4^{η} γραμμή γράψαμε τα υπόλοιπα της 3^{ης} γραμμής δια 7.

Μήνας	**Ιαν**	**Φεβ**	**Μαρ**	**Απρ**	**Μαι**	**Ιουν**
Αύξ. αρ. ημερ	**1-31**	**32-59**	**60-90**	**91-120**	**121-151**	**152-181**
13^{η} ημέρα	**13**	**44**	**72**	**103**	**133**	**164**
Υπόλοιπο	**6**	**2**	**2**	**5**	**0**	**3**

Μήνας	**Ιουλ**	**Αυγ**	**Σεπ**	**Οκτ**	**Νοε**	**Δεκ**
Αύξ. αρ. ημερ	**182-212**	**213-243**	**244-273**	**274-304**	**305-334**	**335-365**
13^{η} ημέρα	**194**	**225**	**256**	**286**	**317**	**347**
Υπόλοιπο	**5**	**1**	**4**	**6**	**2**	**4**

Έχουμε λοιπόν τα εξής υπόλοιπα με τις αντίστοιχες συχνότητες:

Υπόλοιπα	0	1	2	3	4	5	6
Συχνότητα	1	1	3	1	2	2	2

Υπόλοιπο 1 σημαίνει ότι η αντίστοιχη ημέρα της εβδομάδας θα είναι ίδια με την 1^{η} ημέρα του έτους, υπόλοιπο 2 σημαίνει ότι η αντίστοιχη ημέρα της εβδομάδας θα είναι ίδια με τη 2^{η} ημέρα του έτους κ.ο.κ, υπόλοιπο 0 σημαίνει ότι η αντίστοιχη ημέρα της εβδομάδας θα είναι η ίδια με την 7^{η} ημέρα του έτους.
Π.χ υπόλοιπο 2 στο Νοέμβριο σημαίνει ότι στις 13 Νοεμβρίου θα έχουμε την ίδια μέρα με αυτήν που είχαμε στις 2 Ιανουαρίου. Έτσι, αν το έτος αρχίζει π.χ με Πέμπτη, στις 2 Ιαν θα είναι ημέρα Παρασκευή, επομένως και στις 13 Νοεμβρίου θα είναι ημέρα Παρασκευή.

Παρατηρούμε ότι στο σύνολο των υπολοίπων περιέχονται όλα τα δυνατά υπόλοιπα ενός αριθμού με το 7, δηλαδή όλα τα υπόλοιπα: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Αυτό σημαίνει ότι στις 13 των μηνών Ιαν – Δεκ θα τύχει οπωσδήποτε κάποια Τρίτη. Πιο συγκεκριμένα, αν η 1^{η} του έτους είναι Τρίτη, θα έχουμε Τρίτη και στις 13 των μηνών όπου το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι το 1, δηλαδή μόνο στις 13 Αυγούστου.
Αν η 1^{η} ημέρα του έτους είναι Δευτέρα, τότε η 1^{η} Τρίτη θα πέσει στις 2 Ιαν, επομένως θα έχουμε Τρίτη και 13 στους μήνες όπου το υπόλοιπο είναι το 2, δηλαδή Φεβρουάριο, Μάρτιο και Νοέμβριο, δηλαδή θα έχουμε 3 συμπτώσεις.
Αν η 1^{η} Ιαν είναι Τετάρτη, τότε η πρώτη Τρίτη του μήνα θα πέσει στις 7 Ιαν και επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης 7:7 είναι το 0, θα έχουμε Τρίτη στις 13 των μηνών όπου έχουμε υπόλοιπο 0, δηλαδή μόνο το μήνα Μάιο.

Συμπερασματικά, σε κάθε μη δίσεκτο έτος θα τύχει τουλάχιστον μια φορά και το πολύ 3 φορές στις 13 κάποιου μήνα να είναι ημέρα Τρίτη.

Β) Δίσεκτα έτη:

Στα δίσεκτα έτη ο Φεβρουάριος έχει 29 ημέρες.
Κατασκευάζουμε όπως και πριν το σχετικό πίνακα.

Μήνας	**Ιαν**	**Φεβ**	**Μαρ**	**Απρ**	**Μαι**	**Ιουν**
Αύξ. αρ. ημερ	**1-31**	**32-60**	**61-91**	**92-121**	**122-152**	**153-182**
13η ημέρα	**13**	**44**	**73**	**104**	**134**	**165**
Υπόλοιπο	**6**	**2**	**3**	**6**	**1**	**4**

Μήνας	**Ιουλ**	**Αυγ**	**Σεπ**	**Οκτ**	**Νοε**	**Δεκ**
Αύξ. αρ. ημερ	**183-213**	**214-244**	**245-274**	**275-305**	**306-335**	**336-366**
13η ημέρα	**195**	**226**	**257**	**287**	**318**	**348**
Υπόλοιπο	**6**	**2**	**5**	**0**	**3**	**5**

Κατασκευάζουμε τώρα τον πίνακα συχνοτήτων των υπολοίπων:

Υπόλοιπα	0	1	2	3	4	5	6
Συχνότητα	1	1	2	2	1	2	3

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι οπωσδήποτε θα συμβεί κάποια Τρίτη να πέσει στις 13 κάποιου μήνα. Όπως και στον προηγούμενο πίνακα συχνοτήτων, αυτό θα συμβεί 1 τουλάχιστον φορά και το πολύ 3 φορές μέσα σ' ένα δίσεκτο έτος.

Πιο συγκεκριμένα, αν η 1η Ιαν του δίσεκτου έτους είναι Τρίτη, θα έχουμε Τρίτη στις 13 των μηνών που έχουμε υπόλοιπο 1, δηλαδή μόνο στις 13 Μαΐου.
Αν η 1η Ιαν είναι Πέμπτη, οπότε η Τρίτη θα πέσει στις 6 Ιαν, θα συμβεί να έχουμε Τρίτη στις 13 των μηνών που έχουμε υπόλοιπο 6, δηλαδή στις 13 Ιαν, 13 Απρ και 13 Ιουλίου του ίδιου έτους.
Αν η 1η Ιαν είναι Τετάρτη, τότε η πρώτη Τρίτη του μήνα θα πέσει στις 7 Ιαν και επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης 7:7 είναι το 0, θα έχουμε Τρίτη στις 13 των μηνών όπου έχουμε υπόλοιπο 0, δηλαδή μόνο το μήνα Οκτώβριο.

Όλα αυτά βέβαια με την προϋπόθεση ότι μια χρονιά μπορεί να αρχίζει από οποιαδήποτε ημέρα της εβδομάδας. Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι η 1η Ιαν μπορεί να πέσει οποιαδήποτε ημέρα της εβδομάδας. Το αποδεικνύουμε στο τέλος της εργασίας ως συμπλήρωμα της παρούσας.

Οι παρακάτω πίνακες δείχνουν όλα τα δυνατά αποτελέσματα. Από τους ίδιους πίνακες προκύπτει ότι η συντομότερη επανεμφάνιση Τρίτης και 13 είναι μετά:

- Για μεν έτος 365 ημερών, 28 ημέρες. Αυτό συμβαίνει όταν το έτος αρχίζει από Δευτ και θα συμβεί στις 13 Φεβ και 13 Μαρτίου του ίδιου έτους.

- Για δίσεκτο έτος που αρχίζει από Πέμπτη, 91 ημέρες. Αυτό θα συμβεί στις 13 Ιαν, 13 Απρ, κατόπιν 13 Απρ και 13 Ιουλ μέσα στο ίδιο έτος. Επίσης για δίσεκτο έτος που αρχίζει από Παρασκευή, θα συμβεί στις 13 Σεπτ και 13 Δεκ.

Από τους ίδιους πίνακες προκύπτουν ανάλογα συμπεράσματα για Παρασκευή και 13.

Έτος 365 ημερών

1η ΗΜΕΡΑ ΤΟΥ ΕΤΟΥΣ		**Κυρ**	**Δευ**	**Τρι**	**Τετ**	**Πεμ**	**Παρ**	**Σαβ**	**Υπολ**
αα ημερ	**Μηνας**								
13	**Ιαν**	Παρ	Σαβ	Κυρ	Δευ	**Τρι**	Τετ	Πεμ	**6**
44	**Φεβ**	Δευ	**Τρι**	Τετ	Πεμ	Παρ	Σαβ	Κυρ	**2**
72	**Μάρ**	Δευ	**Τρι**	Τετ	Πεμ	Παρ	Σαβ	Κυρ	**2**
103	**Απρ**	Πεμ	Παρ	Σαβ	Κυρ	Δευ	**Τρι**	Τετ	**5**
133	**Μάι**	Σαβ	Κυρ	Δευ	**Τρι**	Τετ	Πεμ	Παρ	**0**
164	**Ιούν**	**Τρι**	Τετ	Πεμ	Παρ	Σαβ	Κυρ	Δευ	**3**
194	**Ιούλ**	Πεμ	Παρ	Σαβ	Κυρ	Δευ	**Τρι**	Τετ	**5**
225	**Αύγ**	Κυρ	Δευ	**Τρι**	Τετ	Πεμ	Παρ	Σαβ	**1**
256	**Σεπ**	Τετ	Πεμ	Παρ	Σαβ	Κυρ	Δευ	**Τρι**	**4**
286	**Οκτ**	Παρ	Σαβ	Κυρ	Δευ	**Τρι**	Τετ	Πεμ	**6**
317	**Νοε**	Δευ	**Τρι**	Τετ	Πεμ	Παρ	Σαβ	Κυρ	**2**
347	**Δεκ**	Τετ	Πεμ	Παρ	Σαβ	Κυρ	Δευ	**Τρι**	**4**

Έτος 366 ημερών

1η ΗΜΕΡΑ ΤΟΥ ΕΤΟΥΣ		**Κυρ**	**Τρι**	**Δευ**	**Τετ**	**Πεμ**	**Παρ**	**Σαβ**	**Υπολ**
αα ημερ	**Μήνας**								
13	**Ιαν**	Παρ	Κυρ	Σαβ	Δευ	**Τρι**	Τετ	Πεμ	**6**
44	**Φεβ**	Δευ	Τετ	**Τρι**	Πεμ	Παρ	Σαβ	Κυρ	**2**
73	**Μάρ**	**Τρι**	Πεμ	Τετ	Παρ	Σαβ	Κυρ	Δευ	**3**
104	**Απρ**	Παρ	Κυρ	Σαβ	Δευ	**Τρι**	Τετ	Πεμ	**6**
134	**Μάι**	Κυρ	**Τρι**	Δευ	Τετ	Πεμ	Παρ	Σαβ	**1**
165	**Ιούν**	Τετ	Παρ	Πεμ	Σαβ	Κυρ	Δευ	**Τρι**	**4**
195	**Ιούλ**	Παρ	Κυρ	Σαβ	Δευ	**Τρι**	Τετ	Πεμ	**6**
226	**Αύγ**	Δευ	Τετ	**Τρι**	Πεμ	Παρ	Σαβ	Κυρ	**2**
257	**Σεπ**	Πεμ	Σαβ	Παρ	Κυρ	Δευ	**Τρι**	Τετ	**5**
287	**Οκτ**	Σαβ	Δευ	Κυρ	**Τρι**	Τετ	Πεμ	Παρ	**0**
318	**Νοε**	**Τρι**	Πεμ	Τετ	Παρ	Σαβ	Κυρ	Δευ	**3**
348	**Δεκ**	Πεμ	Σαβ	Παρ	Κυρ	Δευ	**Τρι**	Τετ	**5**

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

Σχετικά με τα ημερολόγια

Τα περισσότερα έτη έχουν 365 ημέρες. Κάποια έτη έχουν 366 ημέρες. Αυτά λέγονται δίσεκτα.

Πριν το σημερινό ημερολόγιο που λέγεται Γρηγοριανό, επειδή καθιερώθηκε από τον Πάπα Γρηγόριο ΙΓ΄ το 1582, το ημερολόγιο που είχαμε ονομάζονταν Ιουλιανό επειδή καθιερώθηκε από τον Ιούλιο Καίσαρα το 45 μ.Χ ο οποίος ανέθεσε την αλλαγή του τότε ανακριβούς ημερολογίου στον Έλληνα αστρονόμο Σωσιγένη.

Και το Ιουλιανό ημερολόγιο όμως δεν ήταν ακριβές επειδή θεωρήθηκε ότι ο χρόνος περιστροφής της γης γύρω από τον ήλιο ήταν 365,25 ημέρες (24ωρα) αντί του ακριβούς 365,242199, αν και είχε υπολογιστεί ο χρόνος περιστροφής σε 365,242 ημέρες, δηλ. με πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια.

Έτσι καθιερώθηκε 3 συνεχόμενα έτη να έχουν από 365 ημέρες και κάθε τέταρτο έτος 366 ημέρες για να καλύψει την διαφορά των 0,25 ημερών που σε 4 χρόνια συμπλήρωνε 1 ημέρα. Η επιπλέον ημέρα προστέθηκε στο τέλος του Φεβρουαρίου. Αλλά και αυτό δεν ήταν απολύτως ακριβές.

Με την πάροδο των ετών το μικρό αυτό σφάλμα της διαφοράς του 365,242199 από το 365,25 μεγάλωνε και έτσι ο πάπας Γρηγόριος ΙΓ΄ ανέθεσε στον αστρονόμο Λουΐτζι Λίλιο να διορθώσει το ημερολόγιο όπως και έκανε. Το ημερολόγιο αυτό ισχύει σήμερα σε όλες τις χώρες του δυτικού κόσμου.

Η Ελληνική πολιτεία δέχθηκε το νέο ημερολόγιο το 1923, ενώ η Εκκλησία το 1924. Μέχρι τότε η διαφορά που είχε δημιουργηθεί ήταν 13 ημέρες. Έτσι η 16^{η} Φεβρουαρίου 1923 ονομάστηκε 1 Μαρτίου 1923 (δηλαδή στο Ελληνικό ημερολόγιο δεν υπάρχουν οι ημερομηνίες από 17 Φεβρ 1923 ως και 28 Φεβρ 1923).

Αφού έγινε η κατάλληλη διόρθωση του ημερολογίου, καθιερώθηκε πάλι να έχουμε κατά σειρά 3 έτη των 365 ημερών και ένα τέταρτο έτος των 366 ημερών (το δίσεκτο έτος). Ορίστηκαν ως δίσεκτα έτη αυτά που διαιρούνται ακριβώς δια 4.

Για να καλυφθεί όμως επακριβώς η διαφορά του ακριβούς 365,242199 από το 365,25 ημέρες, τα έτη που διαιρούνται δια 100 αλλά οι εκατοντάδες τους δεν διαιρούνται δια 4 (π.χ 2100, 2200, 2300), ενώ θα έπρεπε να θεωρούνται δίσεκτα, δεν θεωρούνται δίσεκτα. Το 2000 και το 2400 που διαιρούνται ακριβώς δια 100, αλλά και ο αριθμός των εκατοντάδων τους διαιρείται δια 4 θεωρούνται δίσεκτα.

Επίσης δεν είναι δίσεκτα τα έτη που διαιρούνται ακριβώς δια 4000, δηλ. τα 4000, 8000, 12000 κ.λ.π.

Ένα έτος 365 ημερών έχει 52 εβδομάδες και 1 ημέρα ακόμη (365 = 7 Χ 52 +1)

Τα δίσεκτα έτη έχουν 52 εβδομάδες και 2 ημέρες (366 = 7 Χ 52 +2).

Έτσι, αν ένα έτος 365 ημερών αρχίζει π.χ ημέρα Τετάρτη, το επόμενο έτος θα αρχίσει μια ημέρα αργότερα, δηλ. ημέρα Πέμπτη.

Αν ένα δίσεκτο έτος αρχίζει π.χ από Παρασκευή, το επόμενο έτος θα αρχίσει 2 ημέρες αργότερα δηλ. Κυριακή.

Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις αποδεικνύουμε τώρα την εξής

Πρόταση

Η 1^{η} ημέρα ενός έτους μπορεί να είναι οποιαδήποτε ημέρα της εβδομάδας.

Απόδειξη

Σε έναν πίνακα 2 γραμμών γράφουμε στην 1^{η} γραμμή τα διαδοχικά έτη και στην 2^{η} γραμμή την 1^{η} ημέρα του αντίστοιχου έτους.

Ξεκινούμε από ένα δίσεκτο έτος x.

x	**x+1**	**x+2**	**x+3**	**x+4**	**x+5**	**x+6**	**x+7**	**x+8**	**x+9**	**x+10**
η	**πολη+2**	**πολη+3**	**πολη+4**	**πολη+5**	**πολη**	**πολη+1**	**πολη+2**	**πολη+3**	**πολη+5**	**πολη+6**

όπου η = 1, 2, 3, …, 6, 0 αν η $1^η$ ημέρα του έτους είναι Κυρ, Δευ, Τρι, …, Παρ, Σαβ αντίστοιχα.
Παρατηρούμε ότι στην $2^η$ γραμμή του πίνακα υπάρχουν όλα τα δυνατά υπόλοιπα 0, 1, 2, …, 6 του 7 δια του 6, άρα μέσα στην διαδοχή των 11 ετών x, x+1, x+2, …, x+10, η $1^η$ Ιανουαρίου θα συμβεί κάθε δυνατή ημέρα της εβδομάδας.

Στην απόδειξη αυτή θεωρήσαμε ότι 4 έτη μετά ένα δίσεκτο έτος έχουμε πάλι δίσεκτο έτος. Υπάρχουν κάποιες εξαιρέσεις όπως αναφέραμε για τα έτη που διαιρούνται δια 100, αλλά οι εκατοντάδες τους δεν διαιρούνται δια 4 όπως το έτος 2100.
Εξαίρεση υπάρχει και για τα έτη που διαιρούνται ακριβώς δια 4000.
Το ερώτημα είναι μήπως σε μια τέτοια περίπτωση η παραπάνω πρόταση δεν ισχύει. Αν π.χ ως έτος x λάβουμε το 2096 (ή το 2196 ή το 2296) που είναι δίσεκτο, αλλά το επόμενο δίσεκτο δεν είναι το 2100, αλλά το 2104, δηλ. 8 έτη μετά το δίσεκτο έτος.
Ο παραπάνω πίνακας 2 γραμμών τώρα παίρνει την μορφή:

x	**x+1**	**x+2**	**x+3**	**x+4**	**x+5**	**x+6**	**x+7**
η	**πολη+2**	**πολη+3**	**πολη+4**	**πολη+5**	**πολη+6**	**πολη**	**πολη+1**

Αρκούν τώρα 8 έτη για να πάρουμε όλα τα δυνατά υπόλοιπα 0, 1, 2, …, 6

Ακριβώς τα ίδια ισχύουν και για τα δίσεκτα έτη 3996, 7996, 11996, για τα οποία τα επόμενα δίσεκτα έτη θα συμβούν μετά 8 έτη, δηλ. το 4004, 8004, 12004 και για όλα τα παρόμοια έτη.
Έτσι η πρόταση αποδείχθηκε σε κάθε περίπτωση.