ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ. ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ.

Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Μαθηματικός
iosifile@yahoo.gr
(Υπηρετώ τη στρατιωτική μου θητεία)

ΠΕΡΙΛΗΨΗ:
Στο παρόν άρθρο περιγράφονται οι τρόποι ελέγχου των μαθηματικών σχέσεων καθώς και οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να προβλέπουμε τις διάφορες σχέσεις όταν δεν τις γνωρίζουμε ή όταν πρέπει να αποφασίσουμε ποια σχέση είναι σωστή από διάφορες σχέσεις που πιθανόν ισχύουν.
Οι σχέσεις μπορούν να ελεγχθούν με τους εξής τρόπους:

1) **Με επαλήθευση με διάφορες τιμές ή με επαλήθευση σε ειδικές περιπτώσεις**
2) **Με τη βοήθεια της συμμετρίας**
3) **Με την ομοιογένεια των σχέσεων**

Οι προβλέψεις επίσης μπορούν να γίνουν με διάφορους τρόπους. Στο παρόν άρθρο θα χρησιμοποιήσουμε κυρίως το θεώρημα ότι αν ένα πολυώνυμο f(x) μηδενίζεται για x=α, τότε το πολυώνυμο έχει παράγοντα το x-α. Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης μια επέκταση του θεωρήματος αυτού.

Ο έλεγχος των σχέσεων δεν αφορά μόνο τα μαθηματικά, αλλά μπορεί να εφαρμοστεί και σε όλες τις συναφείς επιστήμες, ειδικά σε αυτήν της Φυσικής.

ABSTRACT:
The work which follows refers to ways of checking mathematical relationships which students encounter and in which they find difficulty in deciding on their correctness. In addition, with this work, ways of foretelling the correct relationships are given. The above ways of checking and of foretelling relate to all branches of Mathematics, but also to similar branches, especially that of Physics.

Α) ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ

1ος τρόπος. Με τη βοήθεια συγκεκριμένων τιμών.
Παραδείγματα:
α) Ας ελέγξουμε την ταυτότητα:
$\boldsymbol{\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}$ **(1)** που πολλές φορές οι μαθητές γράφουν ως
$\boldsymbol{\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}$ **(2)**

Όπως γνωρίζουμε ταυτότητα είναι μια σχέση που αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών που περιέχει. Έτσι, αν η (2) είναι μια σωστή ταυτότητα θα αληθεύει για όλες τις τιμές των α και β. Αν λοιπόν η (2) δεν αληθεύει για κάποιες τιμές, τότε η (2) είναι σίγουρα λάθος.

Θέτουμε στη (2) όπου α=β=1. Η αντικατάσταση αυτή οδηγεί στην ισότητα: $1^3+1^3=(1+1)(1^2+1.1+1^2)$ ή 2=2.3 ή 2=6 που είναι λάθος. Έτσι η σχέση (2) είναι λάθος.

Πρέπει να πούμε εδώ ότι αν η επαλήθευση έδινε σωστή ισότητα, αυτό δε σημαίνει ότι η σχέση είναι σίγουρα σωστή, αλλά ότι αληθεύει για τις συγκεκριμένες τιμές. Αν π.χ θέταμε α=1, β=0 θα βρίσκαμε μια σωστή ισότητα: 1=1. Αυτό γίνεται διότι το αβ=0 και το διαφορετικό πρόσημο του αβ στις δύο σχέσεις δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα. Έτσι λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι:

Αν μια σχέση δεν αληθεύει για κάποιες τιμές των μεταβλητών που περιέχει, τότε η σχέση είναι σίγουρα λάθος, αν όμως αληθεύει για κάποιες τιμές, τότε δεν είναι σίγουρα σωστή.

Μπορούμε όμως να συμπεράνουμε με πολύ μεγάλη βεβαιότητα ότι μια σχέση είναι σωστή αν η επαλήθευση γίνει για περισσότερες τιμές των μεταβλητών της. Έτσι αν δοκιμάσουμε τη σωστή σχέση (1) με οποιεσδήποτε τιμές θα τη βρούμε σωστή. Επειδή οι τιμές για τις οποίες δεν αληθεύει η (2) είναι "πολύ περισσότερες" από εκείνες που αληθεύει, είναι απίθανο να κάνουμε π.χ τρεις δοκιμές οι οποίες να δώσουν σωστή ισότητα ενώ η (2) είναι λάθος.

β) Έλεγχος της σχέσης: ημ(α+β)=ημασυνβ+συναημβ (3) που οι μαθητές πολλές φορές γράφουν ως **ημ(α+β)=συνασυνβ-ημαημβ (4)**

Αν η σχέση (4) είναι σωστή θα αληθεύει για όλες τις τιμές των α και β. Θέτουμε λοιπόν $\alpha=30^o$ και $\beta=60^o$. Η (4) δίνει:

ημ90^o=συν30^oσυν60^o-ημ30^oημ60^o ή $1=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ ή 1=0 που είναι λάθος. Άρα και η (3) είναι λάθος.

γ) Έλεγχος της σχέσης: $\beta^2+\gamma^2=2\mu_\alpha^2+\frac{\alpha^2}{2}$ (1^ο^ θεώρημα των διαμέσων)

που οι μαθητές γράφουν με διάφορους τρόπους.

$$\boldsymbol{\beta^2+\gamma^2=2\alpha^2+\frac{\mu_\alpha^2}{2}\ (5)\qquad \beta^2+\gamma^2=\alpha^2+\frac{\mu_\alpha^2}{2}\ (6)\qquad \beta^2-\gamma^2=2\alpha^2+\frac{\mu_\alpha^2}{2}\ (7)}$$

Ο τρόπος ελέγχου και εδώ δε διαφέρει από τον τρόπο που περιγράψαμε προηγουμένως, δηλαδή ο έλεγχος θα γίνει με κατάλληλες τιμές. Μπορούμε να δοκιμάσουμε την περίπτωση του ορθογωνίου τριγώνου. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο είναι αυτό με υποτείνουσα α=10 και κάθετες πλευρές β=6, γ=8. Στο ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. δηλ. $\mu_\alpha=5$. Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές αυτές θα βρούμε ότι και οι τρεις σχέσεις (5), (6) και (7) δίνουν λάθος ισότητες. Επομένως και οι τρεις σχέσεις είναι λάθος.

Η ίδια επαλήθευση μπορεί να γίνει και με ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α, όπου η διάμεσος $\mu_\alpha=\upsilon_\alpha=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Η (5) π.χ δίνει: $2\alpha^2=2\alpha^2+\frac{\mu_\alpha^2}{2}$ ή $\mu_\alpha=0$ που είναι λάθος. Έτσι η σχέση αυτή είναι λάθος. Το ίδιο ισχύει και για τις άλλες σχέσεις.

δ) Έλεγχος των σχέσεων

$$\mathbf{h=\frac{v_0^2\eta\mu^2\theta}{2g}}\quad \mathbf{(8)}\qquad \text{και}\qquad \boldsymbol{\ell}=\mathbf{\frac{v_0^2\eta\mu2\theta}{g}}\quad \mathbf{(9)}$$

Ο τύπος (8) δίνει το μέγιστο ύψος στην πλάγια βολή ενός βλήματος που βάλλεται υπό γωνία θ ως προς το οριζόντιο επίπεδο με αρχική ταχύτητα v_0 και ο (9) δίνει το βεληνεκές στην ίδια βολή.

Οι τύποι αυτοί μοιάζουν πολύ μεταξύ τους και εύκολα μπορεί να τους μπερδέψει κανείς να γράψει δηλαδή:

$$\mathbf{h=\frac{v_0^2\eta\mu2\theta}{g}}\quad \mathbf{(10)}\qquad \text{και}\qquad \boldsymbol{\ell}=\mathbf{\frac{v_0^2\eta\mu^2\theta}{2g}}\quad \mathbf{(11)}$$

Δείχνουμε πάλι πως μπορεί κάποιος να τους ξεμπερδέψει και να γνωρίζει ποιος τύπος είναι σωστός σε κάθε περίπτωση. Η μέθοδος είναι η ίδια. Θεωρούμε μια ειδική περίπτωση π.χ θέτουμε $\theta=90^o$. Ο τύπος (10) δίνει $h=0$ δηλαδή το ύψος του βλήματος στην κατακόρυφη βολή προς τα πάνω είναι 0 για οποιαδήποτε αρχική ταχύτητα v_0 κάτι που βέβαια είναι λάθος.

Αντίστοιχα, ο τύπος (11) για $\theta=90^o$ δίνει $\ell=\frac{v_0^2}{2g}$ που είναι λάθος, αφού στην κατακόρυφη βολή το βλήμα πέφτει στο ίδιο σημείο από το οποίο βλήθηκε, επομένως το βεληνεκές πρέπει να είναι ίσο με 0.

Όπως και στο 1^o παράδειγμα, η τιμή $\theta=0$ δίνει $h=0$ και $\ell=0$ που είναι σωστά, όμως οι ειδικές αυτές περιπτώσεις δεν αρκούν για να πούμε ότι οι τύποι είναι σωστοί.

2ος τρόπος. Με τη βοήθεια της συμμετρίας.
Η συμμετρία είναι πολύ γρήγορη μέθοδος ελέγχου πολλών σχέσεων. Με τη μέθοδο αυτή μπορούμε να ελέγξουμε σχέσεις που περιέχουν περισσότερες από μια μεταβλητές όπως αυτές που περιγράφουμε παρακάτω. Πριν όμως κάνουμε τον έλεγχο τέτοιων σχέσεων ας υπενθυμίσουμε τον ορισμό.

Ορισμός: Η παράσταση $f(\alpha,\beta)$ λέγεται συμμετρική ως προς α, β αν δε βλάπτεται με εναλλαγή των α και β, δηλαδή: $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$.

Έτσι π.χ η παράσταση $f(\alpha,\beta)=\alpha^2+\beta^2$ είναι συμμετρική ως προς α, β επειδή $f(\beta,\alpha)=\beta^2+\alpha^2=f(\alpha,\beta)$, ενώ η παράσταση $g(\alpha,\beta)=2\alpha+3\beta$ δεν είναι συμμετρική ως προς α,β αφού: $g(\beta,\alpha)=2\beta+3\alpha \neq g(\alpha,\beta)$.

Ανάλογα ορίζεται η συμμετρία για τρεις μεταβλητές α,β,γ, δηλαδή:

Ορισμός: Η παράσταση $f(\alpha,\beta,\gamma)$ λέγεται συμμετρική ως προς α,β,γ αν η $f(\alpha,\beta,\gamma)$ δε βλάπτεται με οποιαδήποτε εναλλαγή των α,β,γ, δηλαδή: $f(\alpha,\beta,\gamma)=f(\alpha,\gamma,\beta)=f(\beta,\alpha,\gamma)=f(\beta,\gamma,\alpha)=f(\gamma,\alpha,\beta)=f(\gamma,\beta,\alpha)$.

π.χ η παράσταση $f(\alpha,\beta,\gamma)=\alpha+\beta+\gamma$ είναι συμμετρική ως προς α, β, γ ενώ η παράσταση $g(\alpha,\beta,\gamma)=\alpha.\beta+\beta.\gamma$ δεν είναι συμμετρική ως προς α, β, γ , αφού $g(\beta,\alpha,\gamma)=\beta.\alpha+\alpha.\gamma\neq g(\alpha,\beta,\gamma)$.

Ας ελέγξουμε τώρα τις παρακάτω σχέσεις:

$(α+β)^3=α^3-3α^2β+3αβ^2-β^3$ (12) Γνωστή ταυτότητα

$εφ(α+β)=\dfrac{εφα-εφβ}{1+εφαεφβ}$ (13) Τριγωνομετρικός τύπος

$ημ(α+β)ημ(α-β)=ημ^2α+ημ^2β$ (14) Γνωστή άσκηση

$δ_α=\dfrac{2}{β+γ}\sqrt{βγτ(τ-β)}$ (15) Τύπος εσωτερικής διχοτόμου τριγώνου

$α^3+β^3+γ^3-3αβγ=(α+β+γ)(α^2+β^2+γ^2-αβ-βγ)$ (16) Ταυτότητα Euler

$Ε=\sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ+γ)}$ (17) Εμβαδόν τριγώνου

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-2y_1)^2}$ (18) Απόσταση δύο σημείων

Ας εξετάσουμε τον πρώτο τύπο (12)
Αν ο τύπος αυτός είναι σωστός, με εναλλαγή των α και β θα έχουμε:
$(β+α)^3=β^3-3β^2α+3βα^2-α^3$ (19)
Παρατηρούμε ότι ενώ τα πρώτα μέλη των σχέσεων (12) και (19) είναι ίσα, τα δεύτερα μέλη δεν είναι ίσα. Επομένως ο τύπος (12) είναι λάθος.

Για τον ίδιο λόγο και ο τύπος (13) είναι λάθος.

Ο τύπος (14) με εναλλαγή των α και β γίνεται:
$ημ(β+α)ημ(β-α)=ημ^2β+ημ^2α$ (20).
Εδώ παρατηρούμε ανάλογα, ότι ενώ τα δεύτερα μέλη των (14) και (20) είναι ίσα, τα πρώτα μέλη δεν είναι ίσα, αφού ημ(β-α)= -ημ(α-β). Έτσι και ο τύπος (14) είναι λάθος.

Για τον τύπο (15) μπορούμε να πούμε τα εξής: Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ που έχουν α=α΄, β=γ΄και γ=β΄ είναι ίσα. Επομένως $δ_α=δ_{α'}$. Αυτό σημαίνει ότι αν $δ_α=f(α,β,γ)$ τότε θα πρέπει $δ_α=f(α,γ,β)$ δηλαδή η $δ_α$ πρέπει να είναι συμμετρική παράσταση των β,γ. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι αν ο τύπος (15): $δ_α=\dfrac{2}{β+γ}\sqrt{βγτ(τ-β)}$ είναι σωστός, τότε θα πρέπει να είναι και $δ_α=\dfrac{2}{β+γ}\sqrt{βγτ(τ-γ)}$ που δε συμβιβάζεται με τη (15). Έτσι ο τύπος (15) είναι λάθος.

Ο τύπος (16) δεν είναι σωστός επειδή το πρώτο μέλος είναι συμμετρικό ως προς α,β δηλαδή δε βλάπτεται με εναλλαγή των α,β, ενώ το δεύτερο μέλος με εναλλαγή των α και β γίνεται:
$(β+α+γ)(β^2+α^2+γ^2-βα-αγ)$ που είναι διαφορετικό από το 2^{ο} μέλος της (16).

Ο τύπος (17) είναι επίσης λάθος επειδή το πρώτο μέλος δε βλάπτεται με οποιαδήποτε εναλλαγή των α,β,γ, π.χ δύο τρίγωνα με πλευρές α, β, γ και β,γ,α έχουν ίσα εμβαδά, άρα το 2^{ο} μέλος του τύπου (17) πρέπει να είναι συμμετρικό ως προς α, β, γ. Όμως το 2^{ο} μέλος της (17) με εναλλαγή των β και γ γίνεται: $\sqrt{τ(τ-α)(τ-γ)(τ+β)}$ που είναι διαφορετικό από το αντίστοιχο της σχέσης (17).

Ο τύπος (18) που δίνει την απόσταση δύο σημείων $Α(x_1,y_1)$ και $Β(x_2,y_2)$ δεν πρέπει να βλάπτεται με εναλλαγή των x_1, y_1 με x_2, y_2 αντίστοιχα, αφού η απόσταση (ΑΒ)=(ΒΑ). Όμως με την εναλλαγή το 2^{ο} μέλος γίνεται: $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-2y_2)}^2$ που είναι διαφορετικό από το 2^{ο} μέλος της (18). Έτσι και ο τύπος αυτός είναι λάθος.

Η ιδιότητα των συμμετρικών παραστάσεων να μη βλάπτονται με εναλλαγή των μεταβλητών τους μπορεί να επεκταθεί και για μη συμμετρικές παραστάσεις. Η βασική αρχή είναι ότι κάθε ιδιότητα του 1^{ου} μέλους πρέπει να ισχύει και για το 2^{ο} μέλος. Έτσι π.χ η σχέση:

ημ(α-β)=ημασυνβ-2συναημβ (21)

είναι λάθος επειδή το 1^{ο} μέλος με εναλλαγή των α, β γίνεται
ημ(β-α)=-ημ(α-β), δηλαδή το 1^{ο} μέλος με εναλλαγή των α, β αλλάζει πρόσημο, ενώ το 2^{ο} μέλος με εναλλαγή των α,β γίνεται ημβσυνα-2συνβημα που δεν είναι το αντίθετο του 2^{ου} μέλους της (21).

3^{ος} τρόπος: Με την ομοιογένεια των σχέσεων.
Μια σημαντική αρχή που διέπει όλες τις μετρικές σχέσεις της Γεωμετρίας και της Τριγωνομετρίας είναι η ομοιογένεια των σχέσεων. Με τον όρο αυτόν εννοούμε ότι όλοι οι όροι που παρουσιάζονται σε μια σχέση είναι του ίδιου βαθμού. Έτσι π.χ στη σχέση: $\mathbf{α^2=β^2+γ^2}$ του Πυθαγορείου θεωρήματος, όλοι οι όροι είναι 2^{ου} βαθμού.

Στο 1^{ο} θεώρημα των διαμέσων:

$\boldsymbol{\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}}$ όλοι οι όροι είναι επίσης $2^{ου}$ βαθμού.

Αν υποθέσουμε ότι μετρούμε τα μήκη με μονάδα μέτρησης το m τότε το εμβαδόν μετριέται σε m^2 και ο όγκος σε m^3. Με άλλα λόγια το εμβαδόν είναι μέγεθος $2^{ου}$ βαθμού και ο όγκος είναι μέγεθος $3^{ου}$ βαθμού.

Έτσι π.χ στη σχέση: $\mathbf{E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}}$ ο όρος Ε του $1^{ου}$ μέλους είναι $2^{ου}$ βαθμού, το γινόμενο αβγ είναι $3^{ου}$ βαθμού και το 4R που παριστάνει μήκος είναι $1^{ου}$ βαθμού. Επομένως το $2^{ο}$ μέλος είναι βαθμού 3-1=2 που συμφωνεί με το βαθμό του $1^{ου}$ μέλους.

Στον τύπο: $\boldsymbol{\delta_\alpha = \frac{2}{\beta + \gamma}\sqrt{\beta\gamma\tau(\tau - \alpha)}}$ του μήκους της εσωτερικής διχοτόμου τριγώνου, το $1^{ο}$ μέλος που παριστάνει μήκος είναι $1^{ου}$ βαθμού, το $\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$ που παριστάνει μήκος είναι $1^{ου}$ βαθμού, το τ-α που παριστάνει επίσης μήκος είναι $1^{ου}$ βαθμού, επομένως το γινόμενο βγτ(τ-α) είναι μέγεθος $4^{ου}$ βαθμού και η $\sqrt{\beta\gamma\tau(\tau - \alpha)}$ είναι μέγεθος $2^{ου}$ βαθμού, άρα το πηλίκο $\frac{2}{\beta + \gamma}\sqrt{\beta\gamma\tau(\tau - \alpha)}$ είναι μέγεθος $1^{ου}$ βαθμού όπως και το $1^{ο}$ μέλος.

Για τους τύπους της Τριγωνομετρίας θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι όλοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί θεωρούνται μεγέθη μηδενικού βαθμού. Αυτό μπορεί εξαχθεί από τον τρόπο ορισμού των τριγωνομετρικών αριθμών. Π.χ από τον ορισμό του ημιτόνου οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου: $\eta\mu\omega = \frac{\beta}{\alpha}$ προκύπτει ότι το ημίτονο μιας γωνίας είναι μέγεθος μηδενικού βαθμού. Ανάλογα ισχύουν και για τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Η παρατήρηση αυτή μπορεί να βοηθήσει στην ανακάλυψη λαθών όπως φαίνεται στους παρακάτω τύπους.

$\alpha = \beta^2 + \gamma^2$ **(22) Πυθαγόρειο θεώρημα**

$E=2R\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma$ (23) Εμβαδόν τριγώνου με ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου R

$E=\frac{\alpha\beta\gamma}{4}$ (24) Εμβαδόν τριγώνου

$d=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ (25) Απόσταση δύο σημείων (x_1,y_1) και (x_2,y_2)

$V=\pi R\upsilon$ (26) Όγκος κυλίνδρου ακτίνας R και ύψους υ

Και οι 4 παραπάνω τύποι περιέχουν το ίδιο λάθος, αφού τα δύο μέλη δεν είναι του ίδιου βαθμού. Ειδικότερα:

Στον τύπο (22) το 1ο μέλος είναι 1ου βαθμού, ενώ το 2ο μέλος είναι 2ου βαθμού.

Στον τύπο (23) το 1ο μέλος είναι 2ου βαθμού, ενώ το 2ο μέλος είναι 1ου βαθμού.

Στον τύπο (24) το 1ο μέλος είναι 2ου βαθμού, ενώ το 2ο μέλος είναι 3ου βαθμού.

Στον τύπο (25) το 1ο μέλος είναι 1ου βαθμού, ενώ το 2ο μέλος είναι 2ου βαθμού.

Στον τύπο (26) το 1ο μέλος είναι 3ου βαθμού, ενώ το 2ο μέλος είναι 2ου βαθμού (ο σταθερός αριθμός π είναι μηδενικού βαθμού).

Ο έλεγχος αυτός είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στη Φυσική όπου παρουσιάζονται περισσότερα μεγέθη και περισσότερες μεταβλητές. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα δύο μέλη πρέπει να είναι των ιδίων διαστάσεων, δηλαδή πρέπει να εκφράζονται με τις ίδιες μονάδες.

Έτσι π.χ ο τύπος: $\mathbf{s=v_0+\frac{1}{2}\gamma t^2}$ **(27)** που δίνει το διάστημα στην ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση είναι λάθος, επειδή το 1ο μέλος που εκφράζει μήκος δίνεται (στο σύστημα SI) σε m, ενώ το v_0 του 2ου μέλους δίνεται σε m/s.

Ανάλογα, ο τύπος: $\mathbf{h=\frac{v_0\eta\mu^2\theta}{2g}}$ **(28)** που δίνει το ύψος στην πλάγια βολή με αρχική ταχύτητα v_0 και γωνία θ ως προς το οριζόντιο επίπεδο είναι λάθος, επειδή το 1^o μέλος εκφράζεται σε m, ενώ το 2^o μέλος εκφράζεται σε $(m/s)/(m/s^2) = s$

Οι παρατηρήσεις αυτές, πέρα από το γεγονός ότι μπορούν να επισημάνουν διάφορα λάθη, μπορούν να προβλέψουν τη σωστή σχέση ή τουλάχιστον να την προσεγγίσουν όπως δείχνουμε αμέσως:

Β) ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ:

Το συνηθισμένο πρόβλημα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όταν γράφουν είναι ένα δίλημμα ή (ας μου επιτραπεί η λέξη) τρίλημμα ή νίλημμα για το ποιο από αυτά που δε θυμούνται καλά είναι σωστό και ποιο λάθος. Η περίπτωση αυτή αντιμετωπίζεται με τους τρόπους που περιγράψαμε πριν με τους οποίους μπορεί κανείς να απορρίψει τις λάθος σχέσεις και να επιλέξει τη σωστή. Είναι σημαντικό όμως να μπορούν να προβλέπουν κάποια πράγματα χωρίς απαραίτητα να τα θυμούνται. Δείχνουμε πως μπορεί να γίνει αυτό με τις ελάχιστες δυνατές γνώσεις.

1) Ο τύπος $\mathbf{E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A}$ που δίνει το εμβαδόν ενός τριγώνου από δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους.

Το ερώτημα που τίθεται είναι πως οι μαθητές μπορούν να συμπεράνουν τι πρέπει να περιέχει ο τύπος που δίνει το εμβαδόν ενός τριγώνου ως συνάρτηση των πλευρών του β και γ και της περιεχόμενης γωνίας Α.

Εδώ θα υπενθυμίσουμε ένα γνωστό θεώρημα των πολυωνύμων:

Θ1: Αν ένα πολυώνυμο f(x) διαιρείται με το x-α, τότε f(α)=0 και αντίστροφα.

Ειδικότερα:
Αν ένα πολυώνυμο f(x) διαιρείται με το x τότε f(0)=0 και αντίστροφα.

Θα επεκτείνουμε το τελευταίο θεώρημα ως εξής:

Θ2: Αν μια παράσταση που περιέχει το α, μηδενίζεται όταν α=0, τότε η παράσταση περιέχει τον παράγοντα α ή μια παράσταση που μηδενίζεται όταν α=0.

Τέτοιες παραστάσεις είναι π.χ οι **ημα, εφα, e^{α}-1, ln(α+1)** κ.α.

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να πούμε ότι:
Το εμβαδόν του τριγώνου μηδενίζεται όταν β=0 ή γ=0 ή Α=0. Επομένως ο τύπος του εμβαδού πρέπει να περιέχει τον παράγοντα β (ή κάποιον άλλο που να μηδενίζεται όταν β=0), τον παράγοντα γ και κάποιον παράγοντα που να μηδενίζεται όταν Α=0, ο οποίος φυσιολογικά θα είναι ένας τριγωνομετρικός αριθμός, π.χ ημΑ ή εφΑ (που πάλι περιέχει τον παράγοντα ημΑ, αφού $\text{εφΑ} = \frac{\text{ημΑ}}{\text{συνΑ}}$) ή ημ2Α (που πάλι περιέχει τον παράγοντα ημΑ, αφού: ημ2Α=2ημΑσυνΑ) ή κάπως έτσι.

Ο παράγοντας συνΑ αποκλείεται, αφού τότε για $Α=90^o$ το εμβαδόν θα μηδενίζονταν πράγμα άτοπο. Ο παράγοντας εφΑ επίσης αποκλείεται αφού για $Α=90^o$ το εμβαδόν θα απειρίζονταν. Πιθανός λοιπόν παράγοντας είναι το ημΑ.
Συμπεραίνουμε λοιπόν με μεγάλη πιθανότητα ότι ο τύπος του εμβαδού περιέχει το γινόμενο βγημΑ.

2) Απόσταση δύο σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$: $\mathbf{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$

Όταν (ΑΒ)=0 τότε $A \equiv B$ δηλαδή $x_1=x_2$ και $y_1=y_2$. Επομένως ο τύπος πρέπει να είναι τέτοιος ώστε από το μηδενισμό της απόστασης να προκύπτει $x_1=x_2$ και $y_1=y_2$. Για να προκύπτουν δύο σχέσεις από μια σχέση πρέπει να υπάρχει άθροισμα τετραγώνων ο μηδενισμός του οποίου να δίνει $x_1=x_2$ και $y_1=y_2$. Η πιο απλή παράσταση που ικανοποιεί αυτό το δεδομένο είναι η $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$. Είναι λοιπόν πολύ πιθανό ο τύπος της απόστασης να περιέχει την παράσταση αυτή.

3) Απόσταση του σημείου $A(x_0,y_0)$ από την ευθεία αx+βy+γ=0: $\mathbf{d = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}$

Πριν πούμε πως περιμένουμε τον τύπο αυτό, θα επεκτείνουμε το Θ2 ως εξής:

Θ3: Αν μια παράσταση f(x,y) μηδενίζεται όταν g(x,y)=0 τότε η παράσταση f(x,y) περιέχει ως παράγοντα τον g(x,y) ή κάποιον παράγοντα που μηδενίζεται όταν g(x,y)=0.

Εδώ παρατηρούμε ότι η απόσταση d μηδενίζεται όταν το σημείο $A(x_0,y_0)$ ανήκει στην ευθεία, δηλαδή όταν $\alpha x_0+\beta y_0+\gamma=0$. Ο τύπος της απόστασης λοιπόν πρέπει να περιέχει την παράσταση $\alpha x_0+\beta y_0+\gamma$ ή κάποια παράσταση που μηδενίζεται όταν $\alpha x_0+\beta y_0+\gamma=0$

4) Βεληνεκές στην πλάγια βολή: $\boldsymbol{\ell}=\dfrac{\mathbf{v_0^2\eta\mu 2\theta}}{\mathbf{g}}$

Όταν $v_0=0$ το βεληνεκές πρέπει να είναι ίσο με 0. Άρα ο τύπος πρέπει να περιέχει τον παράγοντα v_0. Όταν θ=0 το βεληνεκές πρέπει επίσης να είναι ίσο με 0. Άρα ο τύπος πρέπει να περιέχει παράγοντα που μηδενίζεται όταν θ=0. Τέτοιος παράγοντας είναι ο ημθ. Όταν $\theta=90^o$ το βεληνεκές πρέπει να είναι πάλι ίσο με 0. Επομένως ο τύπος πρέπει να περιέχει παράγοντα που μηδενίζεται όταν $\theta=90^o$. Ένας τέτοιος παράγοντας είναι ο συνθ. Όλοι αυτοί οι παράγοντες περιέχονται στον τύπο που δώσαμε.