Η ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ CAUCHY ΚΑΙ ΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ

Φίλιππος Ιωσηφίδης, Φυσικός, Φοιτητής Μαθηματικών

e-mail: iossiphi@yahoo.gr

<u>Ορισμοί</u>

Έστω $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu \in \mathbb{R}$.

α) Ως αριθμητικός μέσος των $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu$ ορίζεται ο αριθμός $\mathbf{A_\nu = \dfrac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\nu}}$

β) Αν επιπλέον $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu > 0$, ως γεωμετρικός μέσος των $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu$ ορίζεται ο αριθμός $\mathbf{G_\nu = \sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\nu}}$

γ) Αν $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu > 0$ ή $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu < 0$, ως αρμονικός μέσος των $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu$ ορίζεται ο αριθμός $\mathbf{H_\nu = \dfrac{\nu}{\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{1}{\alpha_2}+...+\dfrac{1}{\alpha_\nu}}}$

Μια ιδιότητα που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω είναι η εξής:

Αν $A_\nu = \dfrac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\nu}$ και $A_{\nu+1} = \dfrac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu+\alpha_{\nu+1}}{\nu+1}$ και στον $A_{\nu+1}$ αντικαταστήσουμε τον $\alpha_{\nu+1}$ με τον A_ν, τότε ο αριθμός που προκύπτει είναι ο A_ν.

Πράγματι, είναι $A_{\nu+1} = \dfrac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu+\alpha_{\nu+1}}{\nu+1} =$

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu+\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\nu}}{\nu+1} = \frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\nu} = A_\nu$$

Αντίστοιχα, αν στον $G_{\nu+1} = \sqrt[\nu+1]{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\nu\alpha_{\nu+1}}$ αντικαταστήσουμε τον $\alpha_{\nu+1}$ με τον $G_\nu = \sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\nu}$ προκύπτει ότι $G_{\nu+1} = G_\nu$

Τα ίδια ισχύουν και για τον αρμονικό μέσο, αν δηλαδή στον

$H_{\nu+1} = \dfrac{\nu+1}{\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{1}{\alpha_2}+...+\dfrac{1}{\alpha_\nu}+\dfrac{1}{\alpha_{\nu+1}}}$ αντικαταστήσουμε τον $\alpha_{\nu+1}$ με τον

$H_\nu = \dfrac{\nu}{\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{1}{\alpha_2}+...+\dfrac{1}{\alpha_\nu}}$ προκύπτει $H_{\nu+1} = H_\nu$

Μια άλλη χρήσιμη πρόταση είναι η εξής:

Έστω Δ ένα διάστημα, και $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu \in \Delta$. Τότε

α) $A_\nu \in \Delta$

β) Αν επιπλέον $\Delta \subset (0, +\infty)$, τότε $G_\nu \in \Delta$ και $H_\nu \in \Delta$

Απόδειξη:

α) Έστω $\Delta = [\alpha, \beta]$. Η απόδειξη είναι όμοια για κάθε άλλη μορφή διαστήματος, δηλ. αν $\Delta = (\alpha,\beta)$ ή $\Delta = [\alpha,\beta)$ ή $\Delta = (\alpha,\beta]$ ή $\Delta = (-\infty,\alpha)$ ή $\Delta = (-\infty,\alpha]$ ή $\Delta = (\alpha,+\infty)$ ή $\Delta = [\alpha,+\infty)$ ή $\Delta = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

Ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \le \alpha_1 \le \beta \\ \alpha \le \alpha_2 \le \beta \\ .... \\ \alpha \le \alpha_\nu \le \beta \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} \nu\alpha \le \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu \le \nu\beta \Rightarrow \alpha \le \frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\nu} \le \beta$$

ή $\alpha \le A_\nu \le \beta$, δηλαδή $A_\nu \in \Delta$

β) Αν $\Delta \subset (0,+\infty)$, δηλαδή $\alpha, \beta > 0$ έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \le \alpha_1 \le \beta \\ \alpha \le \alpha_2 \le \beta \\ .... \\ \alpha \le \alpha_\nu \le \beta \end{array}\right\} \overset{\cdot}{\Rightarrow} \alpha^\nu \le \alpha_1\alpha_2...\alpha_\nu \le \beta^\nu \Rightarrow \alpha^\nu \le \alpha_1\alpha_2...\alpha_\nu \le \beta^\nu \Rightarrow \alpha \le \sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\nu} \le \beta$$

ή $\alpha \le G_\nu \le \beta$, δηλαδή $G_\nu \in \Delta$

γ) $\alpha \le \alpha_1 \le \beta \Rightarrow \dfrac{1}{\beta} \le \dfrac{1}{\alpha_1} \le \dfrac{1}{\alpha}$**,** όμοια

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\beta}\le\frac{1}{\alpha_1}\le\frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{\beta}\le\frac{1}{\alpha_2}\le\frac{1}{\alpha} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{\beta}\le\frac{1}{\alpha_\nu}\le\frac{1}{\alpha} \end{array}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}\frac{\nu}{\beta}\le\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_\nu}\le\frac{\nu}{\alpha}\Rightarrow\alpha\le\frac{\nu}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_\nu}}\le\beta \text{ ή } \alpha\le H_\nu\le\beta$$

δηλαδή $H_\nu\in\Delta$

Θα χρειαστούμε επίσης την

Ανισότητα του Cauchy για δύο μεταβλητές

Αν $x,y>0$ ισχύει: $\dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\le\sqrt{xy}\le\dfrac{x+y}{2}$

Το ίσον και στις δύο ανισότητες ισχύει όταν $x=y$

<u>Απόδειξη</u>

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\le\sqrt{xy}\Leftrightarrow\frac{2xy}{x+y}\le\sqrt{xy}\overset{x,y>0}{\Leftrightarrow}\frac{4x^2y^2}{(x+y)^2}\le xy\Leftrightarrow\frac{4xy}{(x+y)^2}\le 1\Leftrightarrow$$

$4xy\le(x+y)^2\Leftrightarrow(x-y)^2\ge 0$ η οποία ισχύει.

Το ίσον ισχύει όταν $x=y$

Επίσης: $\sqrt{xy}\le\dfrac{x+y}{2}\Leftrightarrow 4xy\le(x+y)^2\Leftrightarrow(x-y)^2\ge 0$ που ισχύει

Το ίσον πάλι ισχύει όταν $x=y$

Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα αυτή για την απόδειξη της ανισότητας του Cauchy για ν μεταβλητές.

Η επαγωγική μέθοδος του Cauchy

Σύμφωνα μ' αυτήν:

Αν μια πρόταση που εξαρτιέται από τον φυσικό αριθμό ν

- **Ισχύει για $\nu=1$**
- **Αν ισχύει για $\nu=\kappa$ τότε ισχύει για $\nu=2\kappa$**

- **Αν ισχύει για $\nu=\kappa+1$ τότε ισχύει και για $\nu=\kappa$**

τότε η πρόταση ισχύει για κάθε φυσικό $\nu\geq 1$

Πράγματι, αφού η πρόταση όταν ισχύει για $\nu=\kappa$ ισχύει για $\nu=2\kappa$ και ισχύει για $\nu=1$, θα ισχύει και για $\nu=2\cdot 1=2, \nu=2\cdot 2=4, \nu=2\cdot 4=8$ κ.ο.κ, δηλαδή θα ισχύει για κάθε φυσικό της μορφής $\nu=2^{\rho}$ με $\rho\in\mathbb{N}^*$

Έστω τώρα φυσικός αριθμός $\tau\neq 2^{\rho}$. Υπάρχει δύναμη $2^{\rho}>\tau$ [1]

Αφού όταν η πρόταση ισχύει για $\nu=\kappa+1$ ισχύει και για $\nu=\kappa$ και η πρόταση ισχύει για $\nu=2^{\rho}$, θα ισχύει και για $\nu=2^{\rho}-1,\ 2^{\rho}-2,\ 2^{\rho}-3$ κ.ο.κ.

Κάποιος από τους αριθμούς αυτούς είναι ο τ.

Έτσι η πρόταση αληθεύει για κάθε φυσικό $\nu\geq 1$

Θα δείξουμε τώρα εφαρμογές της μεθόδου αυτής σε ανισότητες που περιέχουν τον αριθμητικό ή γεωμετρικό ή αρμονικό μέσο ν αριθμών.

Ως πρώτη εφαρμογή δείχνουμε την

Ανισότητα του Cauchy

Αν $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu>0$ τότε

$$\frac{\nu}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+...+\frac{1}{\alpha_\nu}}\leq\sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\nu}\leq\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\nu},\ \text{δηλαδή}\ H_\nu\leq G_\nu\leq A_\nu$$

Το ίσον και για τις δύο ανισότητες ισχύει όταν $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_\nu$

<u>Απόδειξη</u>

α) Αποδεικνύουμε πρώτα την $G_\nu\leq A_\nu$ δηλαδή $\sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\nu}\leq\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\nu}$

Για $\nu=1$ η πρόταση ισχύει (ως ισότητα).

Θα αποδείξουμε ότι αν η πρόταση ισχύει για $\nu=\kappa$ τυχαίους θετικούς αριθμούς, τότε θα ισχύει και $\nu=2\kappa$ τυχαίους θετικούς.

Έστω λοιπόν $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\kappa,\beta_1,\beta_2,...,\beta_\kappa$ 2κ τυχαίοι θετικοί. Σύμφωνα με την υπόθεση θα έχουμε:

$$\sqrt[\kappa]{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\kappa}\leq\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\kappa}{\kappa}\ \text{και}$$

$$\sqrt[\kappa]{\beta_1\beta_2...\beta_\kappa}\leq\frac{\beta_1+\beta_2+...+\beta_\kappa}{\kappa}$$

---

[1] Πράγματι, για ρ=τ είναι: $2^{\tau}=(1+1)^{\tau}\geq 1+\tau>\tau$ (Ανισότητα Bernoulli) ή αλλιώς

$$2^{\rho}>\tau\Leftrightarrow\rho\ln 2>\ln\tau\Leftrightarrow\rho>\frac{\ln\tau}{\ln 2},\ \text{άρα}\ \rho=\left[\frac{\ln\tau}{\ln 2}\right]+1$$

με τα ίσον να ισχύουν όταν $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_\kappa$ και $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_\kappa$
Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη βρίσκουμε

$$\sqrt[\kappa]{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\kappa}\sqrt[\kappa]{\beta_1\beta_2...\beta_\kappa} \le \frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\kappa}{\kappa}\cdot\frac{\beta_1+\beta_2+...+\beta_\kappa}{\kappa} \qquad (1)$$

Όμως για τους $A_\kappa = \dfrac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\kappa}{\kappa}$ και $B_\kappa = \dfrac{\beta_1+\beta_2+...+\beta_\kappa}{\kappa}$ ισχύει η ανισότητα του Cauchy για δύο μεταβλητές, δηλαδή:

$A_\kappa B_\kappa \le \left(\dfrac{A_\kappa + B_\kappa}{2}\right)^2$ άρα η (1) $\Rightarrow$

$$\sqrt[\kappa]{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\kappa\beta_1\beta_2...\beta_\kappa} \le \left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\kappa+\beta_1+\beta_2+...+\beta_\kappa}{2\kappa}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\sqrt[2\kappa]{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\kappa\beta_1\beta_2...\beta_\kappa} \le \frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\kappa+\beta_1+\beta_2+...+\beta_\kappa}{2\kappa}$$

Δηλαδή η πρόταση ισχύει και για $\nu = 2\kappa$ θετικούς αριθμούς.

Έστω τώρα ότι η πρόταση ισχύει για $\kappa+1$ οποιουσδήποτε θετικούς, δηλαδή

$$G_{\kappa+1} \le A_{\kappa+1} \text{ ή } \sqrt[\kappa+1]{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+1}} \le \frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+1}}{\kappa+1} \qquad (2)$$

Θα δείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για κ θετικούς.
Στη (2) θέτουμε όπου $\alpha_{\kappa+1} = \dfrac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\kappa}{\kappa} = A_\kappa$ και $\alpha_1\alpha_2...\alpha_\kappa = G_\kappa^\kappa$

Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω, η (2) γίνεται: $\sqrt[\kappa+1]{G_\kappa^\kappa A_\kappa} \le A_\kappa \Rightarrow$

$G_\kappa^\kappa A_\kappa \le A_\kappa^{\kappa+1} \Rightarrow G_\kappa^\kappa \le A_\kappa^\kappa \Rightarrow G_\kappa \le A_\kappa$
δηλαδή η πρόταση ισχύει και για $\nu = \kappa$ αριθμούς, επομένως σύμφωνα με την επαγωγική μέθοδο του Cauchy ισχύει για κάθε φυσικό $\nu \ge 1$.

β) Η άλλη ανισότητα $\dfrac{\nu}{\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{1}{\alpha_2}+...+\dfrac{1}{\alpha_\nu}} \le \sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\nu}$ μπορεί να αποδειχθεί άμεσα με τη βοήθεια της πρότασης που έχουμε ήδη αποδείξει ως εξής:

Στην ανισότητα $\sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\nu} \le \dfrac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\nu}$

θέτουμε όπου α_i το $\dfrac{1}{\alpha_i}$ $(i = 1, 2, ..., \nu)$. Βρίσκουμε

$\sqrt[\nu]{\dfrac{1}{\alpha_1}\cdot\dfrac{1}{\alpha_2}\cdot...\cdot\dfrac{1}{\alpha_\nu}} \le \dfrac{\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{1}{\alpha_2}+...+\dfrac{1}{\alpha_\nu}}{\nu}$ και αντιστρέφοντας βρίσκουμε:

$$\frac{\nu}{\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{1}{\alpha_2}+...+\dfrac{1}{\alpha_\nu}} \le \sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\nu}$$

Έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Το = στην ανισότητα $G_\nu \le A_\nu$ καθώς και στην $H_\nu \le G_\nu$ ισχύει όταν ισχύουν όλες οι προηγούμενες ανισότητες ως ισότητες, δηλαδή όταν $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_\nu$

Αποδεικνύουμε τώρα την ίδια ανισότητα $H_\nu \le G_\nu$ δηλαδή την

$$\frac{\nu}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+...+\frac{1}{\alpha_\nu}} \le \sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\nu}$$ με την επαγωγική μέθοδο του Cauchy

Για $\nu = 1$ ισχύει ως ισότητα

Θα αποδείξουμε ότι αν η πρόταση ισχύει για $\nu = \kappa$ τυχαίους θετικούς αριθμούς, τότε θα ισχύει και $\nu = 2\kappa$ τυχαίους θετικούς.
Έστω λοιπόν $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_\kappa$ 2κ τυχαίοι θετικοί. Σύμφωνα με την υπόθεση θα έχουμε:

$$\frac{\kappa}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+...+\frac{1}{\alpha_\kappa}} \le \sqrt[\kappa]{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\kappa} \text{ και}$$

$$\frac{\kappa}{\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}+...+\frac{1}{\beta_\kappa}} \le \sqrt[\kappa]{\beta_1\beta_2...\beta_\kappa}$$

με τα ίσον να ισχύουν όταν $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_\kappa$ και $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_\kappa$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη βρίσκουμε

$$\frac{\kappa}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+...+\frac{1}{\alpha_\kappa}} \cdot \frac{\kappa}{\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}+...+\frac{1}{\beta_\kappa}} \le \sqrt[\kappa]{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\kappa}\sqrt[\kappa]{\beta_1\beta_2...\beta_\kappa} \qquad (3)$$

Όμως για τους $A_\kappa = \dfrac{\kappa}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+...+\frac{1}{\alpha_\kappa}}$ και $B_\kappa = \dfrac{\kappa}{\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}+...+\frac{1}{\beta_\kappa}}$ ισχύει η ανισότητα του Cauchy για δύο μεταβλητές, δηλαδή: $\left(\dfrac{2}{\frac{1}{A_\kappa}+\frac{1}{B_\kappa}}\right)^2 \le A_\kappa B_\kappa$,

άρα η (3) $\Rightarrow$

$$\left(\frac{2\kappa}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+...+\frac{1}{\alpha_\kappa}+\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}+...+\frac{1}{\beta_\kappa}}\right)^2 \le \sqrt[\kappa]{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\kappa}\sqrt[\kappa]{\beta_1\beta_2...\beta_\kappa} \Rightarrow$$

$$\frac{2\kappa}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+...+\frac{1}{\alpha_\kappa}+\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}+...+\frac{1}{\beta_\kappa}} \le \sqrt[2\kappa]{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\kappa\beta_1\beta_2...\beta_\kappa}$$

Δηλαδή η πρόταση ισχύει και για $\nu = 2\kappa$ θετικούς αριθμούς.

Έστω τώρα ότι η πρόταση ισχύει για $\kappa+1$ οποιουσδήποτε θετικούς, δηλαδή

$$H_{\kappa+1} \le G_{\kappa+1} \text{ ή } \frac{\kappa+1}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+...+\frac{1}{\alpha_\kappa}+\frac{1}{\alpha_{\kappa+1}}} \le \sqrt[\kappa+1]{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+1}} \qquad (4)$$

Θα δείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για κ θετικούς.

Στην (4) θέτουμε όπου $\alpha_{\kappa+1} = \frac{\kappa}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+...+\frac{1}{\alpha_\kappa}} = H_\kappa$ και $\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+...+\frac{1}{\alpha_\kappa} = \frac{\kappa}{H_\kappa}$ και

$\alpha_1\alpha_2...\alpha_\kappa = G_\kappa^\kappa$

Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω, η (4) γίνεται: $H_\kappa \le \sqrt[\kappa+1]{G_\kappa^\kappa H_\kappa}$

$\Rightarrow H_\kappa^{\kappa+1} \le G_\kappa^\kappa H_\kappa \Rightarrow H_\kappa^\kappa \le G_\kappa^\kappa \Rightarrow H_\kappa \le G_\kappa$

δηλαδή η πρόταση ισχύει και για $\nu = \kappa$ αριθμούς, επομένως σύμφωνα με την επαγωγική μέθοδο του Cauchy ισχύει για κάθε φυσικό $\nu \ge 1$.

Το ίσον στην $H_\nu \le G_\nu$ ισχύει όταν σε όλες οι αναφερόμενες ανισότητες ισχύουν ως ισότητες, δηλαδή όταν $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_\nu$

Εφαρμογές της επαγωγικής μεθόδου του Cauchy σε άλλες ανισότητες

Η ίδια μέθοδος που εφαρμόσαμε για την απόδειξη της ανισότητας του Cauchy μπορεί να εφαρμοστεί για την απόδειξη παρόμοιων ανισοτήτων, δηλαδή ανισοτήτων που περιέχουν τον αριθμητικό ή γεωμετρικό ή αρμονικό μέσο ν αριθμών όπως δείχνουμε στο παρακάτω παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα</u>

Αν $\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu \in (0, \pi)}$ να αποδειχθεί ότι:

$(p_\nu): \frac{\eta\mu\alpha_1+\eta\mu\alpha_2+...+\eta\mu\alpha_\nu}{\nu} \le \eta\mu\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\nu}$ για κάθε φυσικό $\nu \ge 1$

<u>Απόδειξη</u>

Για $\nu = 1$ η (p_1): $\eta\mu\alpha_1 \le \eta\mu\alpha_1$ ισχύει ως ισότητα

Αποδεικνύουμε ότι ισχύει και η (p_2): $\frac{\eta\mu\alpha_1+\eta\mu\alpha_2}{2} \le \eta\mu\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$

(αυτό δεν το απαιτεί η επαγωγική μέθοδος του Cauchy, αλλά θα μας χρειαστεί παρακάτω).

$$\frac{\eta\mu\alpha_1+\eta\mu\alpha_2}{2} \le \eta\mu\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} \le \eta\mu\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \qquad (1)$$

Επειδή $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, \pi)$, σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει, θα είναι και $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \in (0, \pi)$,

άρα $\eta\mu\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} > 0$, επομένως η (1) $\Leftrightarrow$ $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \le 1$ που ισχύει.

Το ίσον ισχύει όταν $\alpha_1 = \alpha_2$

Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει η (p_κ). Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και η $(p_{2\kappa})$.

Επειδή ισχύει η (p_κ), θα ισχύουν:

$\frac{\eta\mu\alpha_1 + \eta\mu\alpha_2 + ... + \eta\mu\alpha_\kappa}{\kappa} \le \eta\mu\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\kappa}{\kappa}$ και

$\frac{\eta\mu\beta_1 + \eta\mu\beta_2 + ... + \eta\mu\beta_\kappa}{\kappa} \le \eta\mu\frac{\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_\kappa}{\kappa}$ για κάθε

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_\kappa \in (0, \pi)$

με τα ίσον να ισχύουν όταν $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_\kappa$ και $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_\kappa$

Με πρόσθεση των παραπάνω ανισοτήτων έχουμε:

$$\frac{\eta\mu\alpha_1 + \eta\mu\alpha_2 + ... + \eta\mu\alpha_\kappa}{\kappa} + \frac{\eta\mu\beta_1 + \eta\mu\beta_2 + ... + \eta\mu\beta_\kappa}{\kappa} \le \eta\mu\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\kappa}{\kappa} + \eta\mu\frac{\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_\kappa}{\kappa} \qquad (2)$$

και επειδή ισχύει η (p_2), θα είναι:

$$\eta\mu\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\kappa}{\kappa} + \eta\mu\frac{\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_\kappa}{\kappa} \le 2\eta\mu\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\kappa + \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_\kappa}{2\kappa}$$

Επομένως η (2) $\Rightarrow$

$$\frac{\eta\mu\alpha_1 + \eta\mu\alpha_2 + ... + \eta\mu\alpha_\kappa + \eta\mu\beta_1 + \eta\mu\beta_2 + ... + \eta\mu\beta_\kappa}{2\kappa} \le 2\eta\mu\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\kappa + \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_\kappa}{2\kappa}$$

δηλαδή ισχύει η $(p_{2\kappa})$.

Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει η $(p_{\kappa+1})$, δηλαδή:

$$\frac{\eta\mu\alpha_1 + \eta\mu\alpha_2 + ... + \eta\mu\alpha_\kappa + \eta\mu\alpha_{\kappa+1}}{\kappa + 1} \le \eta\mu\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\kappa + \alpha_{\kappa+1}}{\kappa + 1} \qquad (3)$$

για κάθε $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa, \alpha_{\kappa+1} \in (0, \pi)$ με το ίσον να ισχύει όταν $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_\kappa = \alpha_{\kappa+1}$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και η (p_κ), δηλαδή

$\frac{\eta\mu\alpha_1 + \eta\mu\alpha_2 + ... + \eta\mu\alpha_\kappa}{\kappa} \le \eta\mu\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\kappa}{\kappa}$ για κάθε $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa \in (0, \pi)$

Στην (3) θέτουμε όπου $\alpha_{\kappa+1} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\kappa}{\kappa}$

Προκύπτει $\frac{\eta\mu\alpha_1 + \eta\mu\alpha_2 + ... + \eta\mu\alpha_\kappa}{\kappa} \le \eta\mu\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\kappa}{\kappa}$, δηλαδή ισχύει η (p_κ), άρα σύμφωνα με την επαγωγική μέθοδο του Cauchy ισχύει η (p_ν) για κάθε φυσικό $\nu \ge 1$.

Το ίσον ισχύει όταν $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_\nu$

Γενικεύουμε τώρα τα προηγούμενα με τυχαίες συναρτήσεις που πληρούν κάποιες ιδιότητες:

Έστω η συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$ όπου Δ ένα διάστημα του $\mathbb{R}$.

α) Αν η ισχύει: $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$ για κάθε $x,y \in \Delta$ με το ίσον να ισχύει όταν $x = y$, τότε θα ισχύει και:

$$f\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\nu}\right) \le \frac{f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+...+f(\alpha_\nu)}{\nu} \text{ για κάθε } \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu \in \Delta$$

με το ίσον να ισχύει όταν $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_\nu$

β) Αν $f(x) > 0$ και $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \sqrt{f(x)f(y)}$ για κάθε $x,y \in \Delta$
με το ίσον να ισχύει όταν $x = y$ τότε θα ισχύει και:

$$f\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\nu}\right) \le \sqrt[\nu]{f(\alpha_1)f(\alpha_2)...f(\alpha_\nu)} \text{ για κάθε } \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu \in \Delta$$

με το ίσον να ισχύει όταν $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_\nu$

γ) Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ και

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{2}{\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}} \text{ για κάθε } x,y \in \Delta \text{ με το ίσον να ισχύει όταν } x = y$$

τότε θα ισχύει και:

$$f\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\nu}\right) \le \frac{\nu}{\frac{1}{f(\alpha_1)}+\frac{1}{f(\alpha_2)}+...+\frac{1}{f(\alpha_\nu)}} \text{ για κάθε } \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu \in \Delta$$

με το ίσον να ισχύει όταν $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_\nu$

δ) Αν $\Delta \subset (0,+\infty)$ και $f(\sqrt{xy}) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$ για κάθε $x,y \in \Delta$
με το ίσον να ισχύει όταν $x = y$, τότε θα ισχύει και:

$$f(\sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\nu}) \le \frac{f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+...+f(\alpha_\nu)}{\nu} \text{ για κάθε } \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu \in \Delta$$

με το ίσον να ισχύει όταν $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_\nu$

ε) Αν $\Delta \subset (0,+\infty)$ και $f(\sqrt{xy}) \le \sqrt{f(x)f(y)}$ για κάθε $x,y \in \Delta$

με το ίσον να ισχύει όταν $x=y$, τότε θα ισχύει και:

$$f(\sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\nu}) \le \sqrt[\nu]{f(\alpha_1)f(\alpha_2)...f(\alpha_\nu)} \text{ για κάθε } \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu \in \Delta$$

με το ίσον να ισχύει όταν $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_\nu$

ζ) Αν $\Delta \subset (0,+\infty)$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$ και

$$f(\sqrt{xy}) \le \frac{2}{\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}} \text{ για κάθε } x,y\in\Delta \text{ με το ίσον να ισχύει όταν } x=y$$

τότε θα ισχύει και:

$$f(\sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\nu}) \le \frac{\nu}{\frac{1}{f(\alpha_1)}+\frac{1}{f(\alpha_2)}+...+\frac{1}{f(\alpha_\nu)}} \text{ για κάθε } \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu \in \Delta$$

με το ίσον να ισχύει όταν $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_\nu$

η) Αν $\Delta \subset (0,+\infty)$ και

$$f\left(\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2} \text{ για κάθε } x,y\in\Delta \text{ με το ίσον να ισχύει όταν } x=y$$

τότε θα ισχύει και:

$$f\left(\frac{\nu}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+...+\frac{1}{\alpha_\nu}}\right) \le \frac{f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+...+f(\alpha_\nu)}{\nu} \text{ για κάθε } \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu \in \Delta$$

με το ίσον να ισχύει $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_\nu$

θ) Αν $\Delta \subset (0,+\infty)$, $f(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$ και

$$f\left(\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\right) \le \sqrt{f(x)f(y)} \text{ για κάθε } x,y\in\Delta \text{ με το ίσον να ισχύει όταν } x=y$$

τότε θα ισχύει και:

$$f\left(\frac{\nu}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+...+\frac{1}{\alpha_\nu}}\right) \le \sqrt[\nu]{f(\alpha_1)f(\alpha_2)...f(\alpha_\nu)} \text{ για κάθε } \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu \in \Delta$$

με το ίσον να ισχύει $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_\nu$

ι) Αν $\Delta \subset (0,+\infty)$, $f(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$ και

$$\mathbf{f\left(\dfrac{2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}\right)\leq\dfrac{2}{\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{f(y)}}}$$ **για κάθε $\mathbf{x,y\in\Delta}$ με το ίσον να ισχύει όταν $\mathbf{x=y}$**

τότε θα ισχύει και:

$$\mathbf{f\left(\dfrac{\nu}{\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{1}{\alpha_2}+...+\dfrac{1}{\alpha_\nu}}\right)\leq\dfrac{\nu}{\dfrac{1}{f(\alpha_1)}+\dfrac{1}{f(\alpha_2)}+...+\dfrac{1}{f(\alpha_\nu)}}}$$ **για κάθε $\mathbf{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu\in\Delta}$**

με το ίσον να ισχύει $\mathbf{\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_\nu}$

Οι ίδιες ανισότητες (α)-(ι) ισχύουν και αν αντί του $\leq$ θέσουμε το $\geq$

Εφαρμογές

1) Για τη συνάρτηση $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$, επειδή $f(\frac{x+y}{2})\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}$, δηλαδή $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\leq\frac{x^2+y^2}{2}$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ όπως εύκολα μπορεί να αποδειχθεί, θα ισχύει και $f(\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\nu})\leq\frac{f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+...+f(\alpha_\nu)}{\nu}$ για κάθε $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu\in\mathbb{R}$, δηλαδή

$$\mathbf{\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\nu}\right)^2\leq\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_\nu^2}{\nu}}$$ για κάθε $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu\in\mathbb{R}$

2) Για τη συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x,\ x\in(0,\pi)$ ισχύει: $f(\frac{x+y}{2})\geq\sqrt{f(x)f(y)}$, δηλαδή

$$\eta\mu\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{\eta\mu x\eta\mu y}\ \ \text{για κάθε }x,y\in(0,\pi)$$

Πράγματι:

$$\eta\mu\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{\eta\mu x\eta\mu y}\Leftrightarrow\eta\mu^2\frac{x+y}{2}\geq\eta\mu x\eta\mu y\Leftrightarrow$$

$$\frac{1-\sigma\upsilon\nu(x+y)}{2}\geq\frac{\sigma\upsilon\nu(x-y)-\sigma\upsilon\nu(x+y)}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu(x-y)\leq1$$ που ισχύει.

Επομένως θα ισχύει και $f(\frac{A+B+\Gamma}{3})\geq\sqrt[3]{f(A)f(B)f(\Gamma)}$ δηλαδή

$\eta\mu\frac{A+B+\Gamma}{3}\geq\sqrt[3]{\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma}$ για κάθε $A,B,\Gamma\in(0,\pi)$ και αν τα Α, Β, Γ είναι γωνίες τριγώνου, τότε: $\eta\mu\frac{\pi}{3}\geq\sqrt[3]{\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma}\Rightarrow\mathbf{\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}}$

3) Να αποδειχθεί ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:
$\mathbf{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma\geq3\sqrt{3}}$

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x,\ x\in(0,\frac{\pi}{2})$

Θα αποδείξουμε ότι για τη συνάρτηση f ισχύει: $\frac{f(x)+f(y)}{2}\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ **,** δηλαδή

$$\frac{\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y}{2}\geq \varepsilon\varphi(\frac{x+y}{2}) \text{ για κάθε } x,y\in(0,\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \frac{\eta\mu(x+y)}{2\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y}\geq\frac{\eta\mu\frac{x+y}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{2\eta\mu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}}{2\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y}\geq\frac{\eta\mu\frac{x+y}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\frac{x+y}{2}\geq\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y\Leftrightarrow$$

$$\frac{1+\sigma\upsilon\nu(x+y)}{2}\geq\frac{\sigma\upsilon\nu(x+y)+\sigma\upsilon\nu(x-y)}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu(x-y)\leq 1 \text{ που ισχύει.}$$

Το ίσον ισχύει όταν $x=y$

Επομένως θα ισχύει και η ανισότητα

$$\frac{f(A)+f(B)+f(\Gamma)}{3}\geq f\left(\frac{A+B+\Gamma}{3}\right) \text{ για κάθε } A,B,\Gamma\in(0,\frac{\pi}{2}) \text{ ή}$$

$$\frac{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma}{3}\geq\varepsilon\varphi\frac{A+B+\Gamma}{3} \text{ με το ίσον να ισχύει όταν } A=B=\Gamma$$

Και αν τα Α, Β, Γ είναι γωνίες οξυγωνίου τριγώνου οπότε $A+B+\Gamma=180^0$ η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma\geq 3\sqrt{3}$$