ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ 3 ΑΚΕΡΑΙΩΝ

Λεων. Ιωσηφίδης, Καθηγητής Μαθηματικών, Βέροια

<u>Μια νέα πρόταση</u>

Η μεταβλητή x παίρνει μόνο τρεις ακέραιες τιμές, όχι όλες ίσες. Να αποδειχθεί ότι η τυπική της απόκλιση δεν μπορεί να είναι ακέραιος αριθμός.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω α, β, γ οι τρεις τιμές της x, $\overline{x} = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ η μέση τιμή της και σ η τυπική της απόκλιση.

Ισχύει: $\sigma^2 = \dfrac{1}{3}\left[(\alpha-\overline{x})^2 + (\beta-\overline{x})^2 + (\gamma-\overline{x})^2\right]$

Αν $\sigma = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \overline{x}$

Υποθέτουμε λοιπόν $\sigma \neq 0$.

Για την τυπική απόκλιση επίσης ισχύει: $\sigma^2 = \dfrac{1}{3}\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right) - \overline{x}^2$ ή

$$\sigma^2 = \frac{1}{3}\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right) - \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^2 \Leftrightarrow 9\sigma^2 = 3\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right) - (\alpha+\beta+\gamma)^2 \Leftrightarrow$$

$$9\sigma^2 = (\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)\ + (\gamma-\alpha)^2 \qquad (1)$$

Θέτουμε: $\left.\begin{array}{l}\beta-\gamma = \mathrm{A}\\ \gamma-\alpha = \mathrm{B}\\ \alpha-\beta = \Gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma = 0 \qquad (2)$

Η (1) γίνεται: $9\sigma^2 = \mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2$ και λόγω της (2): $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2 = 9\sigma^2$ ή

$$2\left(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{AB}\right) = 9\sigma^2 \qquad (3)$$

Δεν μπορεί $\mathrm{A} = 0$ διότι τότε η (3) γίνεται:

$2\mathrm{B}^2 = 9\sigma^2 \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{B}^2}{\sigma^2} = \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow \dfrac{|\mathrm{B}|}{\sigma} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$, άτοπο διότι $|\mathrm{B}|$, σ ακέραιοι.

Όμοια, δεν μπορεί $\mathrm{B} = 0$.

Έστω λοιπόν $\mathrm{A}, \mathrm{B} \neq 0$.

Στη σχέση (3) ο 2 διαιρεί το $1^{\text{ο}}$ μέλος, άρα θα διαιρεί και το $2^{\text{ο}}$, δηλαδή, $2/9\sigma^2$ και επειδή $(2,9) = 1 \Rightarrow 2/\sigma^2$ και επειδή ο 2 είναι πρώτος θα έχουμε $2/\sigma$ άρα $\sigma = 2\sigma_1$, με $\sigma_1 \in \mathbb{N}^*$.

Η (3) τώρα γίνεται:

$2\left(A^2+B^2+AB\right)=36\sigma_1^{\ 2}$ ή $A^2+B^2+AB=18\sigma_1^{\ 2}$ (4)

Από την (4) προκύπτει ότι οι A,B είναι άρτιοι.

Πράγματι:

- αν A,B περιττοί τότε

$$\left.\begin{array}{l}A^2 = \text{περιττός}\\ B^2 = \text{περιττός}\\ AB = \text{περιττός}\end{array}\right\}\Rightarrow A^2+B^2+AB = \text{περιττός} \Rightarrow 18\sigma_1^{\ 2} = \text{περιττός, άτοπο.}$$

- αν A = περιττός, B = άρτιος τότε

$$\left.\begin{array}{l}A^2 = \text{περιττός}\\ B^2 = \text{άρτιος}\\ AB = \text{άρτιος}\end{array}\right\}\Rightarrow A^2+B^2+AB = \text{περιττός} \Rightarrow 18\sigma_1^{\ 2} = \text{περιττός, άτοπο.}$$

- όμοια, δεν μπορεί A = άρτιος, B = περιττός.

Έστω λοιπόν A,B άρτιοι. Άρα:

$A=2A_1$, $B=2B_1$, με $A_1,B_1\in\mathbb{Z}$.

Η (4) γίνεται: $4A_1^{\ 2}+4B_1^{\ 2}=18\sigma_1^{\ 2}$ ή $2\left(A_1^{\ 2}+B_1^{\ 2}+A_1B_1\right)=9\sigma_1^{\ 2}$ (5)

Αποδείξαμε λοιπόν ότι αν υπάρχουν ακέραιοι $A,B,\sigma\neq 0$ που ικανοποιούν την (3) $2\left(A^2+B^2+AB\right)=9\sigma^2$

τότε υπάρχουν ακέραιοι $A_1=\dfrac{A}{2}$, $B_1=\dfrac{B}{2}$, $\sigma_1=\dfrac{\sigma}{2}$ που ικανοποιούν την (5) $2\left(A_1^{\ 2}+B_1^{\ 2}+A_1B_1\right)=9\sigma_1^{\ 2}$.

Επαγωγικά βρίσκουμε ότι $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$ υπάρχουν ακέραιοι

$A_\nu=\dfrac{A}{2^\nu}$, $B_\nu=\dfrac{B}{2^\nu}$, $\sigma_\nu=\dfrac{\sigma}{2^\nu}$ που ικανοποιούν την

$2\left(A_\nu^{\ 2}+B_\nu^{\ 2}+A_\nu B_\nu\right)=9\sigma_\nu^{\ 2}$

Πρέπει όμως $\left|A_\nu\right|\geq 1\Leftrightarrow\dfrac{|A|}{2^\nu}\geq 1\Leftrightarrow 2^\nu\leq|A|\Leftrightarrow \nu\log 2\leq\log|A|\Leftrightarrow \nu\leq\dfrac{\log|A|}{\log 2}$ $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$ άτοπο.

Επομένως δεν υπάρχουν ακέραιοι $A,B,\sigma\neq 0$ που ικανοποιούν την (3), δηλαδή $\sigma\notin\mathbb{Z}$.