ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΟΞΑ

Γιώργος Ιωσηφίδης, Μαθηματικός, Βέροια

Ο όρος «παράδοξα» ίσως είναι αδόκιμος στη Στατιστική, αφού το όλο πνεύμα του μαθήματος αυτού είναι οι προσεγγίσεις και οι παραδοχές. Επομένως διαφορές και διαφωνίες θα υπάρχουν. Πρέπει όμως όλες οι απόψεις να βρίσκονται μέσα σε ορισμένα πλαίσια και να μη συγκρούονται άμεσα, να υπάρχει δηλαδή μια κοινή παραδοχή ότι όλες οι απόψεις αν και δεν είναι ταυτόσημες συγκλίνουν.
Ως παράδοξο θα χαρακτηρίζαμε εδώ ένα αποτέλεσμα που έρχεται σε αντίθεση με τη λογική, ή δύο αποτελέσματα που έρχονται σε πλήρη αντίθεση μεταξύ τους.

Δύο τέτοια παράδοξα είναι τα παρακάτω:

1. ΔΙΑΣΠΟΡΑ

Το πιο συνηθισμένο μέτρο διασποράς μιας ποσοτικής μεταβλητής είναι η **διακύμανση** ή **μέση τετραγωνική απόκλιση**.
Αν $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ είναι οι τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ, με μέση τιμή $\bar{x}$, η διακύμανσή της ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\nu}} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{\nu}} (\mathbf{t_i} - \bar{\mathbf{x}})^2$$ (σχολ. βιβλίο Μαθηματικών Γ΄ Λυκείου Γενικής Παιδείας)

Το μέτρο αυτό δεν είναι μοναδικό. Ένα άλλο μέτρο (που υπήρχε στο προηγούμενο σχολικό βιβλίο και δεν υπάρχει στο τωρινό) είναι η **μέση απόλυτη απόκλιση** που ορίζεται ως εξής: $\mathbf{W} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\nu}} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{\nu}} \left|\mathbf{t_i} - \bar{\mathbf{x}}\right|$

Σε δείγματα του ίδιου μεγέθους ν, με τα μέτρα διασποράς βρίσκουμε σε ποιο δείγμα οι τιμές είναι περισσότερο ή λιγότερο διασκορπισμένες γύρω από τη μέση τιμή.
Αν Α και Β είναι δύο δείγματα και με κάποιο μέτρο διασποράς V βρούμε $V_A > V_B$ αναμένουμε και με οποιοδήποτε άλλο μέτρο W να είναι $W_A > W_B$. Δεν μπορούμε δηλαδή να δεχτούμε ότι με το ένα μέτρο η διασπορά του Α είναι μεγαλύτερη από τη διασπορά του Β και με το άλλο μέτρο είναι μικρότερη.
Το παρακάτω παράδειγμα όμως δείχνει ότι αυτό όχι μόνο είναι δυνατό, αλλά είναι και πολύ συνηθισμένο.

Παράδειγμα
Η επίδοση έξι μαθητών Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ σε 5 μαθήματα δίνεται από τον παρακάτω πίνακα.

ΜΑΘΗΜΑΤΑ	ΜΑΘΗΤΕΣ					
	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ
Γλώσσα	12	13	10	11	11	12
Άλγεβρα	13	13	15	12	13	13
Γεωμετρία	16	14	15	15	17	14
Φυσική	17	17	15	18	17	17
Χημεία	17	18	20	19	17	19
Μέση τιμή	15	15	15	15	15	15
Διακύμανση (V)	4,4	4,4	10	10	6,4	6,8
Μέση απόλυτη απόκλιση (W)	2	2	2	2,8	2,4	2,4

Παρατηρούμε ότι

α) οι μαθητές Α και Β έχουν το ίδιο μέτρο V και το ίδιο μέτρο W όπως είναι πολύ λογικό

β) για τους μαθητές Α και Ε είναι $V_A < V_E$ και $W_A < W_E$ που είναι επίσης λογικό

γ) οι μαθητές Γ και Δ έχουν το ίδιο μέτρο V, δηλαδή $V_\Gamma = V_\Delta$ αλλά $W_\Gamma < W_\Delta$

δ) οι μαθητές Ε και Ζ έχουν το ίδιο μέτρο W, δηλαδή $W_E = W_Z$ αλλά $V_E < V_Z$

ε) για τους μαθητές Γ και Ε ενώ $V_\Gamma > V_E$ είναι $W_\Gamma < W_E$ που δεν είναι καθόλου λογικό

Ποιο μέτρο λοιπόν εκτιμά σωστά τη διασπορά; Μπορούμε να θεωρήσουμε την ασυμφωνία αυτή ως παράδοξο;

2. ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Έστω μια ποσοτική μεταβλητή X της οποίας η μέση τιμή είναι $\bar{x} \neq 0$ και η τυπική απόκλιση s. Σαν συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας ορίζεται (στο σχολικό βιβλίο) το πηλίκο $CV = \frac{s}{|\bar{x}|}$

Ο συντελεστής μεταβολής είναι ένα μέτρο σχετικής διασποράς. Δείχνει πόσο μεγάλη είναι η διασπορά σε σχέση με τη μέση τιμή. Έτσι, αν για τα δύο δείγματα Α και Β είναι $s_A = s_B = 12$ και $\bar{x}_A = 100$, $\bar{x}_B = 200$, η σχετική διασπορά του Α είναι μεγαλύτερη από τη σχετική διασπορά του Β. Λέμε τότε ότι το δείγμα Β είναι πιο ομοιογενές από το Α. Πόσο αξιόπιστο όμως είναι το μέτρο αυτό; Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι ένα τέτοιο μέτρο δεν είναι καθόλου αξιόπιστο.

Παράδειγμα

Μετρήσαμε με ένα θερμόμετρο ακριβείας τις ελάχιστες θερμοκρασίες σε δύο πόλεις Α και Β σε βαθμούς Κελσίου κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας και υπολογίσαμε τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής και για τις δύο. Τα αποτελέσματα αυτά δίνονται από τον παρακάτω πίνακα.

Ημέρα	Θερμοκρασίες πόλεων (C)	
	A	B
ΔΕΥ	-1,56	-6,23
ΤΡΙ	-1,38	-5,14
ΤΕΤ	-1,13	-3,31
ΠΕΜ	-0,32	3,27
ΠΑΡ	1,15	4,93
ΣΑΒ	1,6	6,14
ΚΥΡ	1,71	7,34
Μέση τιμή	0,01	1
Τυπική απόκλιση	1,34	5,29
CV	133,75	5,29

δηλαδή ενώ στην πόλη A οι θερμοκρασίες κυμαίνονται μεταξύ στενών ορίων (από –1,56 ως 1,71) και βρίσκονται πολύ κοντά στη μέση τιμή τους (0,01), ο συντελεστής μεταβολής είναι πολύ μεγάλος (CV_A=133,75 ή 13375%). Αντίθετα την πόλη B οι θερμοκρασίες έχουν μεγαλύτερο εύρος (από –6,23 ως 7,34), είναι πιο απομακρυσμένες από τη μέση τιμή τους, επομένως έχουμε μεγαλύτερη διασπορά, αλλά η σχετική διασπορά είναι πολύ μικρότερη (CV_B = 5,29 ή 529%). Δηλαδή το δεύτερο δείγμα είναι πιο ομοιογενές από το πρώτο. Είναι αυτό παράδοξο ή όχι;

Ας προχωρήσουμε όμως πιο πέρα. Ας δούμε τι θα έλεγε ένας Βρετανός ή ένας Αμερικανός. Στη Βρετανία και την Αμερική οι θερμοκρασίες μετριούνται με την κλίμακα Φαρενάιτ. Ο τύπος μετατροπής από βαθμούς Κελσίου (C) σε βαθμούς Φαρενάιτ (F) είναι: F=1,8C+32. Ο προηγούμενος πίνακας σε βαθμούς Φαρενάιτ είναι τώρα ο παρακάτω:

Ημέρα	Θερμοκρασίες πόλεων (F)	
	A	B
ΔΕΥ	29,19	20,79
ΤΡΙ	29,52	22,75
ΤΕΤ	29,97	26,04
ΠΕΜ	31,42	37,89
ΠΑΡ	34,07	40,87
ΣΑΒ	34,88	43,05
ΚΥΡ	35,08	45,21
Μέση τιμή	32,02	33,8
Τυπική απόκλιση	2,41	9,52
CV	0,075	0,282

Με θερμόμετρο λοιπόν Φαρενάιτ το πρώτο δείγμα είναι πολύ πιο ομοιογενές από το δεύτερο αφού CV_A=7,5% και CV_B=28,2%. Μάλιστα δε η μεταβολή του CV_A από 13375% σε 7,5%<10% ώστε τώρα το δείγμα να θεωρείται ομοιογενές είναι τεράστια. Είναι αυτό παράδοξο; Μπορεί η ομοιογένεια του δείγματος να εξαρτιέται από το είδος του οργάνου με το οποίο θα μετρήσουμε;

Τελικά με ποιο θερμόμετρο πρέπει να μετρούμε τις θερμοκρασίες για να έχουμε αξιόπιστα στατιστικά δεδομένα; Αν δεχτούμε ότι πράγματι το πρώτο δείγμα (θερμοκρασία της πόλης Α) είναι πιο ομοιογενές από το δεύτερο -όπως και η κοινή λογική απαιτεί-, νομίζω ότι μπορώ να κάνω την προτροπή:

ΑΛΛΑΞΤΕ ΤΑ ΘΕΡΜΟΜΕΤΡΑ ΣΑΣ